ВЫСШАЯ ШКОЛА
ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

СБОРНИК ЗАДАНИЙ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ «ВЫСШАЯ ПРОБА»

математика

Под общей редакцией
кандидата физико-математических наук
Г. С. Мутафяна

Издательский дом
Высшей школы экономики

Москва, 2015

УДК 51(076)
ББК 22.1я7
С23

С23 **Сборник заданий межрегиональной олимпиады школьников «Высшая проба». Математика** [Текст] / под общ. ред. Г. С. Мутафяна ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». — М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2015. — 157, [3] с. — 1000 экз. — ISBN 978-5-7598-1267-8 (в обл.). — ISBN 978-5-7598-1268-5 (Математика).

В сборник вошли задания Межрегиональной олимпиады школьников «Высшая проба» по математике за 2012–2014 гг. Олимпиада, входящая в ежегодно утверждаемый Минобрнауки России Перечень олимпиад школьников, проводится в два этапа — отборочный и заключительный. Первый этап проводится в дистанционном формате, а второй — в очном формате.

В разделе «Задания» приведены задачи заключительного этапа олимпиады 2012 г. для учащихся 9, 10 и 11-х классов и олимпиады 2013 г. для учащихся 8, 9, 10 и 11-х классов, а также задачи отборочного и заключительного этапов олимпиады 2014 г. для учащихся 7, 8, 9, 10 и 11-х классов.

В разделе «Решения» приведены подробные решения и критерии проверки решений задач заключительного этапа за 2012–2014 гг., а также правильные ответы отборочного этапа олимпиады 2014 г. В конце сборника представлен список литературы и интернет-сайтов, которые могут использоваться при подготовке к олимпиаде.

УДК 51(076)
ББК 22.1я7

ISBN 978-5-7598-1267-8
ISBN 978-5-7598-1268-5 (Математика)

Дорогие друзья!

Книга, которую вы держите в руках, включает задания заключительных этапов Межрегиональной олимпиады школьников «Высшая проба» последних трех лет.

Олимпиаду «Высшая проба» я рассматриваю как основное звено в системе интеллектуальных состязаний НИУ ВШЭ для школьников, которая сложилась и продолжает развиваться в нашем университете. Начиная с 2009 года, олимпиада проводится совместно с десятью другими российскими университетами. Число предметов и направлений состязаний с каждым годом увеличивается, что позволяет участникам помериться силами в самых разных областях знаний, от востоковедения до электроники. К участию в олимпиаде приглашаются школьники 7–11-х классов, причем наравне с российскими ребятами за победу в олимпиадных состязаниях «сражаются» школьники из стран СНГ, Балтии и даже дальнего зарубежья. В последние годы общая численность участников «Высшей пробы» приблизилась к 46 тысячам, и это еще не предел. Множество талантливых юношей и девушек из самых разных городов и деревень благодаря олимпиаде поверили в свои силы, успех на олимпиадных ристалищах приоткрыл им двери в ведущие вузы России.

В Высшей школе экономики мы всегда рады видеть в числе своих студентов победителей и призеров «Высшей пробы», так как уверены в их высоких познавательных потребностях, способности учиться, стремлении заглянуть за горизонт.

Надеюсь, что книга станет отличным помощником вам при подготовке к олимпиадным состязаниям, самостоятельном изучении интересных для вас предметов за рамками школьной программы, подготовке к поступлению в высшие учебные заведения. Публикация олимпиадных заданий с решениями поможет понять особый «дух» олимпиадных заданий и задач, некоторые общие подходы к их решению, уровень сложности, оценить свою готовность и забыть о предолимпиадном волнении.

Книгу могут использовать также ваши учителя, которые ведут вас к достижению новых успехов, обсуждая с вами путь решения трудной задачи, отвечая на ваши вопросы.

В книге вы найдете задания как по общеобразовательным предметам, так и по тем отраслям знаний, необходимость в изучении которых диктует ваш выбор будущей специальности — востоковедение, дизайн, психология, электроника, журналистика. Замечательно, если интерес к будущей профессии проявляется уже в школьные годы, и мы проводим немало олимпиадных состязаний для таких юных «профессионалов».

Успехов вам, ребята!

Ректор НИУ ВШЭ
Ярослав Кузьминов

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Олимпиада по математике «Высшая проба» проводится с 2009 года. Формат олимпиады за все эти годы не претерпел существенных изменений. Олимпиада проводится в два этапа, первый из которых (отборочный) проходит заочно, второй (заключительный) — очно в Москве и регионах, а также в странах СНГ и Балтии.

Первый (отборочный) этап олимпиады проходит в декабре–январе. Участникам предлагается решить 10 задач по основным разделам школьной математики за 4 часа (240 минут). Проверяется только ответ. Обоснованность ответа и способ его получения на первом этапе не учитывается и не проверяется.

Диапазон сложности задач первого этапа — от совсем элементарных до задач средней сложности. Как правило, задачи больше идейные, нежели технические: их решение основано на идее, угадав которую, задачу можно решить устно или с минимальными вычислениями. Технически сложные задачи с длинными вычислениями на первом этапе не предлагаются.

По окончании первого этапа олимпиады устанавливается *проходной порог* — минимальное количество правильных ответов, при котором участник олимпиады приглашается на второй этап. *Проходные пороги зависят от количества участников и статистики решённых задач и могут сильно отличаться в разные годы.*

Второй (заключительный) этап олимпиады проходит в феврале и включает в себя 6 задач различной сложности и тематики. Продолжительность второго этапа в 2012 и 2013 годах составляла 5 часов. С 2014 года было принято решение сократить продолжительность второго этапа до 4-х часов. В связи с этим были немного упрощены задания и изменена система их оценивания. Для получения максимально возможных 100 баллов в 2014 году достаточно было правильно решить 5 задач из 6.

Диапазон сложности задач второго этапа — от средних до очень трудных. Здесь могут предлагаться задачи, требующие тщательных рассуждений и кропотливых вычислений. Система оценивания балльная: за каждую задачу выставляется определённое количество баллов в зависимости от полноты решения. Максимальный балл выставляется за задачу только при наличии правильного ответа *со строгим обоснованием*. Частичные решения (содержащие ошибки или пробелы в обоснованиях) тоже оцениваются, но не максимальным количеством баллов. Подробнее о системе оценивания см. в разделе 2 «Решения».

В разделе 1 «Задания» для учащихся 9, 10 и 11-х классов (2012 год) и учащихся 8, 9, 10 и 11-х классов (2013 год) приведены задачи только заключительного этапа, а для 7, 8, 9, 10 и 11-х классов (2014 год) — отборочного и заключительного этапов.

В разделе 2 «Решения» приведены подробные решения и критерии проверки решения задач заключительного этапа, а также правильные ответы к задачам и проходные пороги отборочного этапа олимпиады 2014 года.

В конце сборника приведён список литературы и некоторые интернет-сайты, которые могут использоваться при подготовке к олимпиаде.

В составлении заданий в эти годы принимали участие многие преподаватели, аспиранты и студенты факультета математики ВШЭ. Перечислить их всех здесь невозможно, и мы назовем лишь тех, чей вклад был наиболее значителен:

Артамкин Игорь Вадимович
Городенцев Алексей Львович
Зыкин Алексей Иванович
Ландо Сергей Константинович
Мутафян Георгий Семенович
Пахарев Алексей Анатольевич
Пушкарь Петр Евгеньевич
Тиморин Владлен Анатольевич
Финкельберг Михаил Владленович
Шварцман Осип Владимирович

Всем будущим участникам олимпиад желаем больших успехов в учебе, жизни.

Коллектив авторов,
январь, 2015 год

Раздел 1

ЗАДАНИЯ

9 класс, заключительный этап

9.1. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b, такие, что $a^2 + 3b^2$ делится на $a + 3b$.

9.2. Найдите максимальное число частей, на которые могут разбить плоскость 10 острых углов.

9.3. Докажите, что все положительные корни уравнения

$$x(x+1)(x+2)(x+3) - 1 = 0$$

больше $1/8$.

9.4. Дан параллелограмм с острым углом 45° и площадью 2. Через каждые три из его вершин проведена окружность. Найдите площадь четырехугольника, образованного центрами этих окружностей.

9.5. При каких значениях $b \neq 3$ фигура, состоящая из двух парабол: $y = x^2$ и $y = (b-3)x^2 + bx + 2b - 4$, имеет ось или центр симметрии?

9.6. На плоскости отмечены восемь точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Может ли быть так, что более одной пятой всех выпуклых четырехугольников с вершинами в этих точках — параллелограммы?

10 класс, заключительный этап

10.1. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b, такие, что $a^2 + 2\,b^2$ делится на $a + 2\,b$.

10.2. На плоскости отметили 9 точек. Из каждой из них выпустили три луча, образующих три тупых угла и не проходящих через другие отмеченные точки. На какое минимальное число частей получившиеся 27 лучей могут разбить плоскость?

10.3. Сколько точек, обе координаты которых натуральны, лежит строго внутри области, ограниченной осями координат и графиком функции

$$y = -x^3 + 30\,x^2 - 300{,}6\,x + 2012\,?$$

10.4. Каждая из четырех окружностей касается трех сторон заданного параллелограмма с отношением сторон $2:3$ и площадью 1. Найдите площадь четырехугольника, образованного центрами этих окружностей.

10.5. Докажите, что все положительные корни уравнения

$$x\,(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 2 = 0$$

больше $\dfrac{1}{14}$.

10.6. Существует ли набор выпуклых четырехугольников, который является набором всех граней как двух выпуклых многогранников, так и одного?

11 класс, заключительный этап

11.1. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b, такие, что $2a^2 + 3b^2$ делится на $2a + 3b$.

11.2. Найдите максимальное число частей, на которые могут разбить плоскость графики 10 квадратичных функций $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ (например, для случая двух квадратичных функций ответ 5, см. рис. 1).

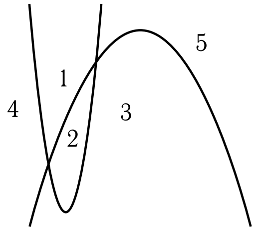

Рис. 1

11.3. При каком значении параметра a график функции $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + ax$ симметричен относительно прямой $x = c$ для какого-нибудь значения константы c?

11.4. В пространстве выбраны четыре точки, все координаты каждой из которых делятся на 3, причем эти точки не лежат в одной плоскости. Какое минимальное число точек, все координаты которых четны, может содержаться в тетраэдре, вершинами которого являются выбранные четыре точки? (Содержаться — значит, лежать внутри, на грани, на ребре или в вершине.)

11.5. Описанный четырёхугольник $ABCD$ делится диагональю AC на два подобных, но не равных треугольника. Чему может быть равна длина диагонали AC, если длины сторон AB и CD равны 5 и 10 соответственно?

11.6. В одной из вершин правильного $2n$-угольника, $n \geqslant 2$, поставлено число 1. Для данной расстановки чисел $2, 3, \ldots, 2n$ в остальные вершины $2n$-угольника поставим на каждой его стороне знак $+$, если число на конце стороны (при движении по часовой стрелке) больше числа в ее начале, и знак $-$, если оно меньше. Докажите, что модуль разности между числом расстановок чисел $2,\ 3, \ldots, 2n$ с четным количеством плюсов на сторонах и числом расстановок с нечетным количеством плюсов равен числу расстановок, в которых плюсы и минусы чередуются при **(а)** $n = 3$, **(б)** $n = 4$, **(в)** любом n.

Учебное издание

Сборник заданий межрегиональной олимпиады школьников «Высшая проба»

МАТЕМАТИКА

Под общей редакцией Г.С. Мутафяна

Зав. редакцией *Е.А. Бережнова*

Редактор *И.Л. Легостаева*

Дизайн обложки: Лаборатория дизайна НИУ ВШЭ

Художественный редактор *А.М. Павлов*

Компьютерная верстка и графика: *И.Г. Андреева*

Корректор *И.Л. Легостаева*

Подписано в печать 30.04.2015. Формат 60×88 1/16
Усл. печ. л. 9,7. Уч.-изд. л. 6,1
Тираж 1000 экз. Изд. № 1861. Заказ №

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
101000, Москва, ул. Мясницкая, 20
Тел./факс: +7 (499) 611-15-52

Отпечатано в ГУП ЧР «ИПК «Чувашия»
Мининформполитики Чувашии
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 13
Тел.: (8352) 56-00-23