Г. И. Пеникас

Модели «копула» в задачах хеджирования ценового риска[1]

Статья посвящена сравнению эффективности применения моделей «копула» и традиционного метода наименьших квадратов в операциях хеджирования. В работе рассмотрены как параметрический, так и полупараметрический способы оценки копулы. Эффективность приложения моделей «копула» проявляется в том, что полученное на их основе хеджирующее соотношение приводит к более низкой волатильности стоимости захеджированного портфеля и одновременно к более высокой доходности на периоде ретроспективного прогноза. Данный результат удается получить в задачах прямого хеджирования, тогда как в задачах перекрестного — метод наименьших квадратов дает лучшие результаты.

Ключевые слова: копула, хеджирование (прямое и перекрестное), хеджирующее соотношение.
JEL classification: C58, D81, G10.

1. Введение

В связи с переходом российской банковской системы на ведение учета в соответствии с международными стандартами финансовой отчетности (МСФО) особую актуальность приобретают вопросы корректного проведения операций хеджирования для их последующего учета. Основными являются следующие три вида операций хеджирования[2]:

- хеджирование справедливой стоимости актива;
- хеджирование денежных потоков;
- хеджирование инвестиций в зарубежные дочерние компании (также называемое хеджированием капитала).

---

[1] Автор выражает искреннюю благодарность С. А. Айвазяну за научное руководство при подготовке данного исследования, а также признательность Д. Фантаццини и А. В. Кудрову за комментарии, высказанные при обсуждении первых результатов работы на IX Международной конференции «Применение многомерного статистического анализа в экономике и оценке качества» (Москва, 24–26 августа 2010 г.).

[2] См. п. 86 стандарта IAS 39. Согласно МСФО, существует отдельный порядок учета операций хеджирования (подробнее см. пп. 71–102, AG 94–132 в стандарте IAS 39). Одним из принципов подготовки отчетности является представление финансового результата в рамках однородного массива операций. Так, в части операций хеджирования не допускается отдельно показывать полученные доходы (расходы) по базовому активу и расходы (доходы), связанные с форвардным активом, если операция хеджирования признана эффективной. В рамках стандарта эффективным (см. п. AG105 там же) признается хеджирование, если изменение стоимости хеджирующего инструмента составило 80–125% изменения стоимости хеджируемого. Соответственно, часть изменения стоимости, признанная неэффективной, выносится отдельной строкой финансового результата.

Несмотря на разную природу этих операций, их объединяет необходимость выбора оптимального хеджирующего соотношения. Исторически подходы к его определению изменялись от самого простого, когда выбиралось соотношение «один-к-одному», до более сложных, учитывающих распределения доходностей активов. Наиболее распространенным из них является метод наименьших квадратов (МНК), подробно описанный ниже, но он имеет существенный недостаток. Этот метод предполагает наличие линейной зависимости между доходностями двух активов, что, как будет показано далее, не соответствует действительности. Поэтому возникает потребность поиска модели хеджирования, позволяющей учесть негауссовский характер двумерного совместного распределения доходностей активов.

Для решения данной задачи могут быть использованы модели «копула», поскольку на основе теоремы Склара они позволяют разделить этапы моделирования частных распределений и формы их «связки» (самой копулы). Отдельные исследователи (см., например, (Hsu et al., 2007; Lai et al., 2009)) предложили модель «копула-GARCH», позволяющую повысить эффективность операций хеджирования. В данной же работе модели «копула» будут использованы для восстановления многомерного совместного распределения доходностей в рамках решения задачи поиска оптимального хеджирующего соотношения. Целью работы является анализ эффективности применения моделей «копула» в операциях прямого и перекрестного хеджирования в терминах снижения волатильности и повышения доходности захеджированного портфеля (по сравнению с МНК, где взаимосвязь доходностей активов описывается линейной регрессионной зависимостью).

2. Обзор литературы

Для введения в проблематику хеджирования целесообразно рассмотреть работы, авторы которых существенным образом продвинулись в данной области. Выделим шесть основных работ: (Cecchetti et al., 1988; Myers, Hanson, 1996; Mello, Parsons, 2000; Chang, Wong, 2003; Hsu et al., 2007; Lai et al., 2009). Первые три из них носят теоретический характер и фокусируют свое внимание на модификации хеджирующего соотношения с целью учета полезности хеджирующего агента, дисконтирования будущей стоимости хеджируемого актива и учета издержек ликвидности, а остальные три являются прикладными и связаны с применением опционов и моделей «копула» в операциях хеджирования. Переходя от одной работы к другой, подробнее рассмотрим, как исторически развивалось исследование вопросов хеджирования.

Отталкиваясь от статьи (Cecchetti et al., 1988), введем базовые понятия теории хеджирования.

Допустим, существует позиция CASH в активе, изменение стоимости которой мы хотим захеджировать. Такая позиция называется текущей, хеджируемой, а актив — *базовым*, *хеджируемым*. Доходность[3] цены базового актива будем обозначать R_{CASH}, а ее дисперсию — σ^2_{CASH}.

Пусть существует другой актив, открытие встречной позиции FWD в котором позволяет захеджировать риск изменения стоимости базового актива. Такой актив называют *хеджирующим инструментом*. Поскольку, как правило, для цели хеджирования текущей позиции, когда на балансе учитывается реальный актив, выбирается сделка с датой исполнения в бу-

[3] Под доходностью понимается однодневный логарифмический прирост цены актива.

дущем (срочная сделка), которая отражается на внебалансовых счетах, то позицию в хеджирующем инструменте принято называть *хеджирующей, срочной, форвардной*. Причем в случаях, когда хеджирующим инструментом является контракт на *базовый* актив, такое хеджирование называется *прямым*; когда на *другой* актив — *перекрестным*. Цена хеджирующего актива подчинена закону распределения ее доходности R_{FWD} с дисперсией σ^2_{FWD}.

Определим *захеджированный* портфель H как линейную комбинацию из двух активов: хеджируемого (CASH) и хеджирующего (FWD). Пусть коэффициент h (хеджирующее соотношение) определяет долю хеджирующего инструмента в портфеле H. Тогда его доходность R_H будет определяться формулой

$$R_H = R_{CASH} - hR_{FWD}\,, \tag{1}$$

а дисперсия σ^2_H портфеля H примет значение

$$\sigma^2_H = \sigma^2_{CASH} + h^2\sigma^2_{FWD} - 2h\sigma_{CASH,FWD}\,, \tag{2}$$

где: R_H, σ^2_H — случайная величина (логарифмической) доходности захеджированного портфеля и ее дисперсия; R_{CASH}, σ^2_{CASH} — случайная величина (логарифмической) доходности базового (текущего, хеджируемого) актива и ее дисперсия; R_{FWD}, σ^2_{FWD} — случайная величина (логарифмической) доходности форвардного (срочного, хеджирующего) актива и ее дисперсия; h — хеджирующее соотношение; $\sigma_{CASH,FWD}$ — ковариация случайных величин доходностей R_{CASH} и R_{FWD}.

Само понятие «хеджирование» предполагает нивелирование риска изменения стоимости базового актива, т. е. минимизацию дисперсии доходности захеджированного портфеля H, или $\partial\sigma^2_H / \partial h = 0$. Тогда, если подставить данное условие в формулу (2), получается следующее *оптимальное хеджирующее соотношение* h^*, которое также равно коэффициенту регрессии R_{FWD} на R_{CASH}, что более подробно описано в Приложении 2.

$$h^* = \frac{\sigma_{CASH,FWD}}{\sigma^2_{FWD}}\,. \tag{3}$$

В статье (Cecchetti et al., 1988) также вводится принцип оптимального хеджирования. Последний отличается от традиционной минимизации дисперсии базового актива (см. формулу (3)) тем, что, исходя из понятия функции полезности инвестора, предлагает выбирать такой хеджирующий коэффициент $h(t)$, который максимизирует следующую функцию:

$$\int\limits_{R_{FWD}}\int\limits_{R_{CASH}} \log\big(1 + R_{CASH}(t) - h(t)R_{FWD}(t)\big) f(R_{CASH}, R_{FWD})\, dR_{CASH}\, dR_{FWD}\,, \tag{4}$$

где $f(R_{CASH}, R_{FWD})$ — плотность двумерного гауссовского распределения с ковариационной матрицей, определяемой ARCH-моделью; остальные обозначения аналогичны введенным ранее с учетом момента времени t.

В работе (Myers, Hanson, 1996) модифицирован расчет оптимального хеджирующего соотношения путем корректировки традиционного подхода в двух аспектах. Во-первых, хеджирующее соотношение (3) домножается на дисконт-фактор, чтобы учесть будущую ожидаемую стоимость позиции (при динамическом подходе ежедневной корректировки срочной позиции). Во-вторых, учитывается коэффициент (лаговый полином) возвращения к среднему — фактически, коэффициент серийной автокорреляции доходности хеджируемой позиции. Его учет позволяет сделать вывод о том, что использование хеджирования целесообразно только в случае, когда инвестор не ожидает возвращения будущей цены к ее ожидаемому (среднему) уровню. Работа строится на основе модели срочного рынка с несмещенными ценами, т. е. в случае, когда цена срочного инструмента удовлетворяет условию мартингальности (Myers, Hanson, 1996, p. 15).

В статье (Mello, Parsons, 2000) рассматривается стоимость хеджирования в привязке к стоимости фондирования и объемам доступной ликвидности. Авторы делают следующие выводы:

а) наличие значительной ликвидности стимулирует поддержание меньшего хеджирующего соотношения с целью максимизации доходности (в случае же ограниченной ликвидности приоритетом становится сохранение текущего размера хеджируемой позиции, поскольку в случае убытков организация будет не в состоянии их компенсировать из-за ограничений ликвидности);

б) хеджирование денежных потоков часто является неоптимальной стратегией в отличие от хеджирования справедливой стоимости, т. к. требует отвлечения существенных денежных потоков.

В работе (Chang, Wong, 2003) рассматривается перекрестное хеджирование на валютном рынке ввиду отсутствия возможностей прямого хеджирования (например, для валютного треугольника стран Тайвань-Япония-США). Для исследования берутся данные о ежедневных котировках фьючерсов и опционов за период 1997–2001 гг. Авторы показывают, что по сравнению с применением только фьючерсов дополнение модели опционами повышает эффективность хеджирования в смысле минимизации дисперсии стоимости захеджированного портфеля, которая определяется по формуле:

$$\Pi_t = S_{1,t} S_{2,t} X_t + (F_t - S_{1,t}) H_t + \left(P_t - \max(S_{1,t-1} - S_{1,t},\ 0)\right) Z_t, \tag{5}$$

где Π_t — стоимость захеджированного портфеля на момент t, выраженная в единицах третьей валюты; X_t — количество базового актива (число единиц национальной, хеджируемой, валюты) в момент t; $S_{1,t}$ — обменный курс иностранной валюты к третьей валюте в момент t; $S_{2,t}$ — обменный курс национальной валюты к иностранной в момент t; H_t — количество проданных фьючерсов на валюту (купленных, если величина отрицательна) по цене фьючерсного контракта F_t в момент времени t; Z_t — число проданных (купленных, если величина отрицательна) опционов на валюту с правом на продажу с ценой исполнения (страйком) $S_{1,t-1}$ и размером опционной премии P_t в момент времени t.

В (Hsu et al., 2007) авторы исследуют повышение эффективности операций хеджирования за счет применения моделей «копула». В работе модели копула сравниваются с моделями DCC-, CCC-GARCH (модели условной гетероскедастичности с динамической и постоянной условной корреляцией, соответственно). Частные распределения моделируются стандартным и нецентральным t-распределением. Оценка копул проводится параметрическим способом *Inference For Margins* (*IFM*), когда вначале оцениваются частные распределения, а затем — копула. В основе исследования лежат дневные данные биржевых индексов и фьючерсов на них за период 02.01.95–31.10.05. Авторы изучают применение копул к моделям прямого и перекрестного хеджирования. Так, если для анализа прямого хеджирования анализируются данные о динамике цен американского и английского биржевых индексов SP 500 и FTSE 100, то для перекрестного используются данные о ценах фондовой биржи Швейцарии MSCI и котировках швейцарского франка к доллару США. В итоге делается вывод, что копулы оказываются более эффективными при определении оптимального хеджирующего соотношения, причем гауссовская копула эффективна для операций прямого хеджирования, а копула Гумбеля — для перекрестного.

В статье (Lai et al., 2009) также рассматриваются возможности применения копул к стратегиям хеджирования. Но, в отличие от (Hsu et al., 2007), моделирование частных распределений основано на моделях T-GARCH, позволяющих улавливать разное влияние на волатильность повышательных и понижательных движений исследуемой переменной. Основываясь на ежедневных данных о котировках пяти индексов стран Юго-Восточной Азии и фьючерсов на них за период с 01.01.98 по 10.06.05, авторы делают вывод о преимуществе использования копул в хеджировании, поскольку это позволяет повысить среднюю доходность инвестиционного портфеля и снизить его вариацию по сравнению с традиционными методами определения оптимального хеджирующего соотношения. Подобно (Hsu et al., 2007), в работе (Lai et al., 2009) отмечается, что особенно эффективной в части моделирования прямого хеджирования оказалась гауссовская копула и копула Стьюдента. Также указано, что использование копул целесообразно на высоковолатильных рынках (Корея, Тайвань), тогда как на стабильных (Япония, Сингапур) традиционные стратегии, основанные на методе наименьших квадратов, оказываются достаточными.

3. Методология исследования

Для цели проведения динамического хеджирования на каждый будущий момент времени t определяется хеджирующее соотношение на основе данных Ω_{t-1}, доступных до момента времени $t-1$ включительно. Данные Ω_{t-1} включают совместное распределение случайных величин доходностей базового актива R_{CASH} и срочного R_{FWD}.

Затем на момент времени $t-1$ извлекаются частные функции распределения случайных величин R_{CASH} и R_{FWD} и по ним оценивается копула. На основе полученной оценки параметра копулы проводится имитационное моделирование с 10000 генераций копулы. По сгенерированным данным копулы и функциям распределения восстанавливается совместное двумерное распределение. Оптимальное хеджирующее соотношение определяется коэффициентом $h^*(t)$, дающим минимальный убыток от портфеля с (купленной/проданной) позицией в базовом активе и встречной (проданной/купленной) — в хеджирующем активе, взятом в доле $h^*(t)$ при заданном уровне значимости, т. е.:

$$h^*(t) = \arg\min_{h(t)} \left\{ quantile_\alpha \left(R_{CASH}(t) - h(t) R_{FWD}(t) \right) \right\}, \tag{6}$$

где $quantile_\alpha(x)$ — квантиль уровня α распределения случайной величины x (%).

В рамках исследования будут рассмотрены 1% и 5%-ный уровни значимости.

В момент времени t фиксируется доходность $R_H^*(t)$ захеджированного портфеля, рассчитываемая по формуле:

$$R_H^*(t) = R_{CASH}^*(t) - h^*(t) R_{FWD}^*(t), \tag{7}$$

где звездочка (*) у случайных величин доходностей обозначает их реализацию в момент t.

Тогда сумма доходностей $\widehat{R}_H$ захеджированного портфеля есть общий финансовый результат (далее PL — прибыль, если величина положительна, и убыток в противном случае) от захеджированного портфеля:

$$\widehat{R}_H = \sum_t R_H^*(t). \tag{8}$$

Хотя в (Kim et al., 2007) отмечается, что стоит отдавать предпочтение полупараметрическим методам оценки (когда берутся частные эмпирические функции распределения и по ним параметрически оценивается копула), чем полностью параметрическим в ситуациях, когда параметрически оцениваются частные распределения и копула, и нет априорной информации о виде частных распределений, в данной работе сравниваются оба метода. При параметрическом подходе оцениваются параметры распределения Стьюдента для частных распределений.

В рамках исследования рассматриваются десять копул[4] из основных семейств: эллипсообразные (гауссовская и Стьюдента с 5 и 10 степенями свободы), архимедовы (Клэйтона, Гумбеля, Франка), экстремальные (Коши, Галамбоса, Хайслера–Райса) и другие (Плаке). Наилучшей копулой для конкретной задачи хеджирования (прямого или перекрестного) признается та, которая дает наименьшее стандартное отклонение при проведении ретроспективного прогноза. При стандартном отклонении, меньшем, чем в случае применения МНК, наилучшей будет копула, приводящая к наибольшему финансовому результату. В таблице 1 приводятся аналитические формы записи, используемые в исследовании копул.

Результат, полученный на основе копул, сопоставляется с расчетами в предположении многомерной нормальности. Причем используются два подхода. С одной стороны, анализируется результат при применении формулы (3), обозначаемый далее как МНК1. С другой стороны, следуя вышеописанному алгоритму параметрической оценки копулы, реализуется второй подход, когда генерируется гауссовская копула, а частные распределения оцениваются не в рамках распределения Стьюдента, а в рамках предположения о гауссовском распределении. Результат применения данного подхода далее обозначается как МНК2.

В качестве критериев эффективности рассматриваются (на периоде ретроспективного прогноза):

1) минимизация волатильности в терминах стандартного отклонения случайной величины $R_H(t)$;

2) при выполнении первого критерия — максимизация суммарной доходности PL.

---

[4] Подробнее о понятии копулы см. (Joe, 1997; Cherubini et al., 2004; Nelsen, 2006).

Таблица. 1. Основные функциональные формы двумерных моделей «копула»

Наименование копулы	Формула двумерной копулы $C(u^{(1)}, u^{(2)})$; α — параметр копулы;	
	Эллипсообразные копулы	
Гауссовская[5]	$\int_{-\infty}^{u^{(2)}}\int_{-\infty}^{u^{(1)}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \exp\left(\frac{2\alpha z_1 z_2 - z_1^2 z_2^2}{2(1-\alpha^2)}\right) dz_1 dz_2$	(9)
Стьюдента[6]	$\int_{-\infty}^{u^{(2)}}\int_{-\infty}^{u^{(1)}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \exp\left(1+\frac{z_1^2+z_2^2-2\alpha z_1 z_2}{v(1-\alpha^2)}\right)^{-\frac{v+2}{2}} dz_1 dz_2,$ где v — число степеней свободы копулы	(10)
	Архимедовы копулы	
Франка	$-\frac{1}{\alpha}\ln\left[1+\frac{(e^{-\alpha u^{(1)}}-1)(e^{-\alpha u^{(2)}}-1)}{(e^{-\alpha}-1)^{m-1}}\right]$	(11)
Клэйтона	$\left[(u^{(1)})^{-\alpha}+(u^{(2)})^{-\alpha}-1\right]^{-1/\alpha}$	(12)
Гумбеля	$\exp\left\{-\left((-\ln u^{(1)})^{\alpha}+(-\ln u^{(2)})^{\alpha}\right)^{1/\alpha}\right\}$	(13)
	Экстремальные копулы	
Галамбоса[7]	$u^{(1)}u^{(2)}\exp\left\{\left[(-\ln u^{(1)})^{-\alpha}+(-\ln u^{(2)})^{-\alpha}\right]^{-1/\alpha}\right\}$	(14)
Хаслера–Райса[8]	$\exp\left\{-u^{(1)}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha}{2}\ln\frac{\ln u^{(1)}}{\ln u^{(2)}}\right)-u^{(2)}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha}{2}\ln\frac{\ln u^{(2)}}{\ln u^{(1)}}\right)\right\}$	(15)
	Прочие копулы	
Плаке[9]	$\frac{1+(\alpha-1)(u^{(1)}+u^{(2)})-\sqrt{\left(1+(\alpha-1)(u^{(1)}+u^{(2)})\right)^2-4u^{(1)}u^{(2)}\alpha(\alpha-1)}}{2(\alpha-1)}$	(16)

Альтернативными подходами к поиску оптимального хеджирующего соотношения являются модели коинтеграции (подробнее см. (Ghosh, 1993; Lien, 2004)), когда множитель, корректирующий краткосрочную динамику временных рядов в модели коррекции ошибок

[5] (Cherubini et al., 2004, p. 63; Cech, 2006, p. 21).

[6] Экстремальная копула Коши — это копула Стьюдента с одной степенью свободы.

[7] (Ghoudi et al., 1998, p. 190).

[8] (Bouye et al., 2000, p. 49).

[9] В случае, когда параметр α равен единице, копула Плаке принимает форму независимой копулы (см. (Nelsen, 2006, p. 91)).

(ECM), соответствует искомому значению оптимального хеджирующего соотношения. Сравнение результатов применения моделей «копула» с коинтеграционными моделями не являлось предметом настоящего исследования.

4. Описание первичных данных

Для исследования использовались данные биржи «Российская Торговая Система» (РТС). В качестве базового актива были взяты обыкновенные акции компании ЛУКОЙЛ (LKOH). Для цели прямого хеджирования были отобраны фьючерсные[10] контракты на обыкновенные акции ЛУКОЙЛ (LKOHF), для перекрестного — на акции компании Сургутнефтегаз (SNGSF), как компании с аналогичным профилем деятельности, что находит отражение в сонаправленном движении цен акций ЛУКОЙЛа и Сургутнефтегаза. В качестве периода исследования был выбран период с 28 апреля 2007 г. по 9 апреля 2010 г. (всего 693 наблюдения[11]), поскольку в более ранний период активных торгов рассматриваемыми фьючерсными контрактами не наблюдалось. Динамика цен выбранных активов приводится на рис. 1.

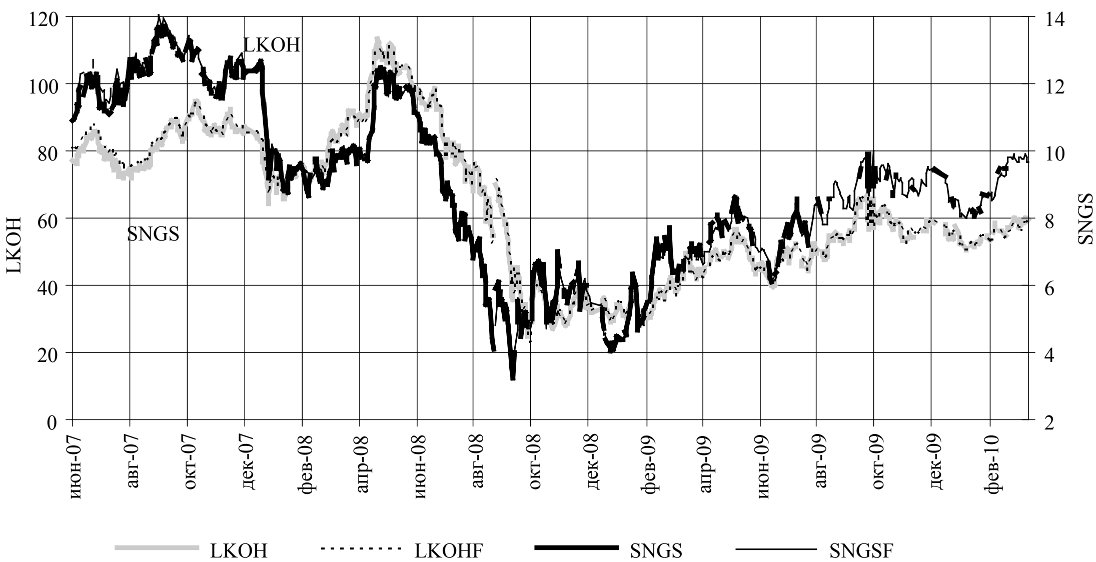


Рис. 1. Динамика цен выбранных активов (долл. за 1 акцию)

Необходимо прокомментировать порядок построения временных рядов котировок срочных (фьючерсных) контрактов. Отдельный фьючерсный контракт имеет дату исполнения, после которой он официально не торгуется (это отличает его от акций, которые теорети-

[10] Источник: http://www.rts.ru/ru/forts/contractresults. html.

[11] В случае наличия пропущенных значений в котировках проводилась линейная интерполяция между двумя ближайшими доступными значениями.

чески могут торговаться бесконечно). Такой контракт также не торгуется (т. е. отсутствуют спрос и предложение) уже за две недели до даты исполнения. При этом до даты его погашения на рынке появляется контракт с более дальней датой исполнения. Учитывая, что инвесторов привлекает более ликвидный контракт (более близкий к дате исполнения), то такой контракт и будет использован для цели хеджирования. Поэтому временной ряд срочного контракта был построен как котировка торгуемого контракта с наиболее близкой датой исполнения. Такой тип временных рядов мы бы назвали *составным* (в англоязычном оригинале — *generic*).

Поскольку фьючерсы на РТС торгуются в рублях, а акции — в долларах, то для приведения данных к единому базису в долларах были использованы данные об обменных курсах с сайта ЦБ РФ. Так как фьючерс — это биржевой контракт на несколько лотов (штук) базового актива, при построении временного ряда цен хеджирующего инструмента необходимо было скорректировать цену контракта на количество входящих в него лотов (10 — для фьючерсов на акции ЛУКОЙЛа, 1000 — для Сургунефтегаза).

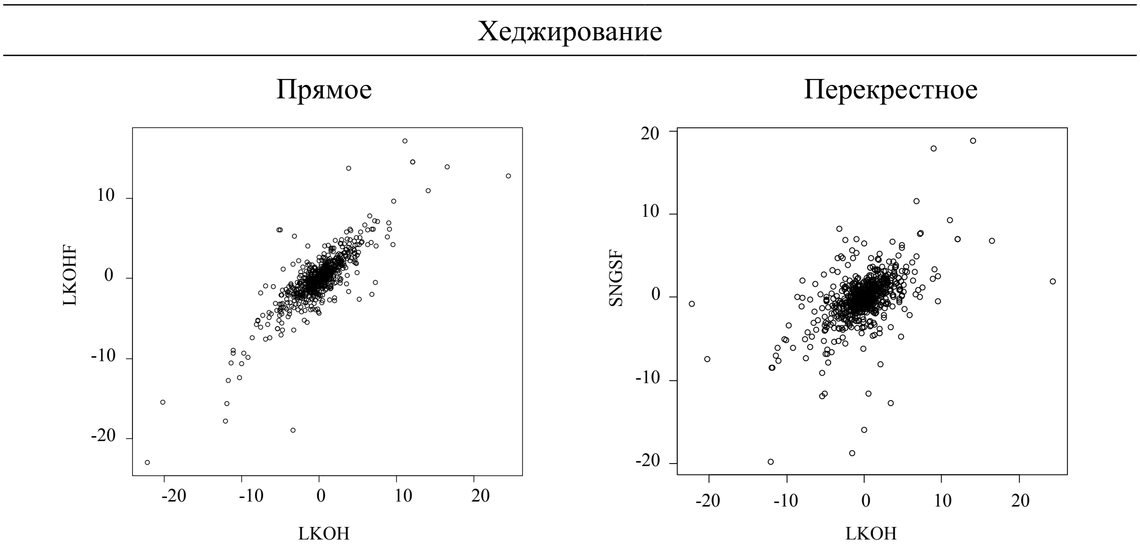
В качестве обучающей выборки был взят период с 28 апреля 2007 г. по 31 декабря 2009 г. (630 точек), а в качестве экзаменующей — с 1 января 2010 г. по 9 апреля 2010 г. (63 точки).

Отметим, что совместное распределение доходностей для задач как прямого, так и перекрестного хеджирования не является гауссовским, прежде всего, в силу того, что частные распределения рядов доходностей акций ЛУКОЙЛа и фьючерсов на акции ЛУКОЙЛа и Сургутнефтегаза не являются гауссовскими. Это подтверждают описательные статистики, приведенные в Приложении 1. Например, для всех распределений коэффициент асимметрии отрицателен, а эксцесса превышает 8 (для гауссовского распределения эти значения равны 0 и 3, соответственно).

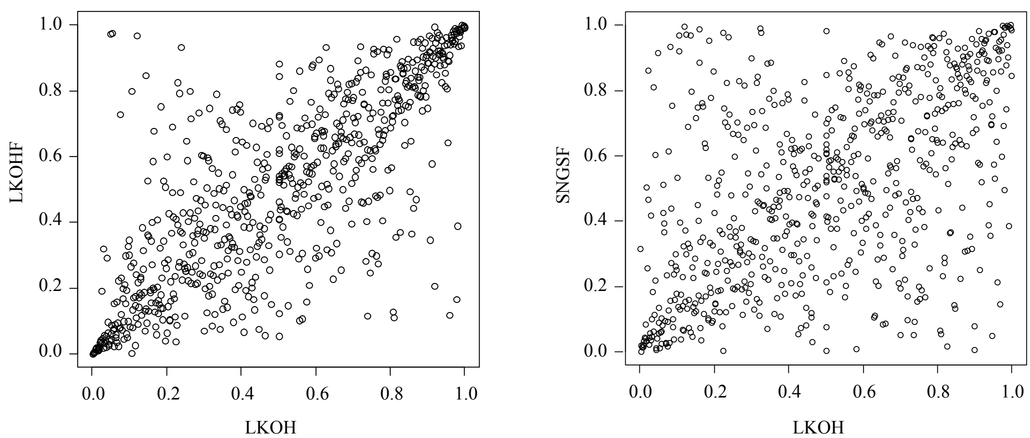
Совместные распределения рядов доходностей, приведенные на рис. 2а, характеризуются наличием аномальных значений. При этом распределение при прямом хеджировании является более концентрированным (корреляция доходностей составляет 83%), чем при перекрестном (корреляция 53%). Это объясняется тем, что динамика цен фьючерсных контрактов в большей степени характеризуется именно движением цен базового актива, которым для фьючерсов на акции Сургутнефтегаза будут акции Сургутнефтегаза, а не ЛУКОЙЛа.

Если сравнить копулы совместных распределений, то видно, что для прямого хеджирования характерна более высокая концентрация точек в хвостах распределений, чем для перекрестного (см. рис. 2б). Такой визуальный анализ позволяет сформулировать гипотезу, что наилучшей копулой для задачи прямого хеджирования будет одна из экстремальных моделей, тогда как для перекрестного — не экстремальная (см. табл. 1 выше). Для обоих же случаев наиболее вероятным будет предпочтение симметричных моделей «копула», так как визуально выраженное скопление точек в верхних и нижних хвостах распределений носит симметричный характер.

Перед поиском наилучшей модели «копула» и ее сравнением с использованием МНК был проведен тест на независимость, предложенный Женестом и Ремийярдом (Genest, Remillard, 2004) и основанный на статистике, измеряющей «расстояние» от эмпирической копулы до копулы, соответствующей совместной независимости анализируемых случайных величин. Тест призван проверить, является ли копула рассматриваемого распределения копулой произведения (product copula), соответствующей распределению независимых случайных величин. Графическим представлением результатов теста является депендограмма



а) двумерное эмпирическое распределение логарифмических доходностей



б) двумерная копула совместного распределения логарифмических доходностей

Рис. 2. Двумерные распределения доходностей и их копулы

на рис. 3. Статистика фон Мизеса равна 5.633, что соответствует уровню значимости 4.995%. Таким образом, тест показывает, что копулы для задач как прямого, так и перекрестного хеджирования не являются распределениями независимых случайных величин.

После проведения теста на независимость был реализован алгоритм[12] поиска момента структурного сдвига в копуле, описанный в работе (Бродский и др., 2009), в рамках решения задач как прямого, так и перекрестного хеджирования. Максимальное значение исследуемая статистика (см. (Бродский и др., 2009, с. 5, формула (5)) принимает в наблюдениях

[12] Программный код (для среды R) поиска структурного сдвига в копуле и решения задач хеджирования ценового риска может быть представлен автором по запросу.

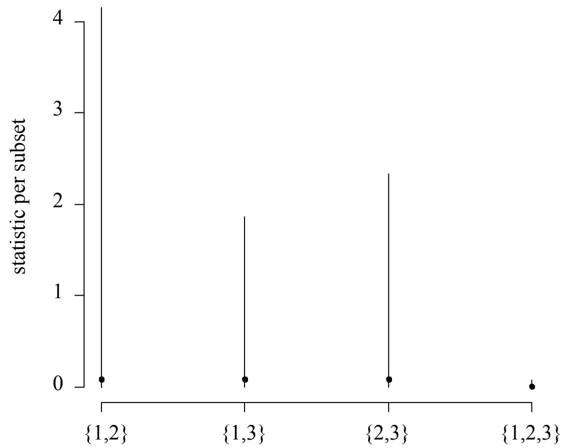


Рис. 3. Депендограмма рассматриваемых комбинаций случайных величин

Примечание. Доходности по активам: 1 — LKOH, 2 — LKOHF, 3 — SNGSF. По вертикали в столбцах отложено значение статистики для пар случайных величин. Точками отмечены критические значения статистики, случаи ниже которых соответствуют независимости рассматриваемых случайных величин.

458 и 21 (от 28 апреля 2009 г. и 26 июля 2007 г.) для задач прямого и перекрестного хеджирования, соответственно (см. рис. 4).

Хотя для задачи перекрестного хеджирования явно наблюдается доминирование[13] копулы после структурного сдвига над копулой до сдвига, динамика статистики указывает на то, что более вероятным моментом структурного сдвига будет апрель 2009 г., поскольку значение искомой статистики поступательно возрастает к этому моменту. Тем не менее, в задаче хеджирования сохраняется неопределенность относительно точного момента сдвига.

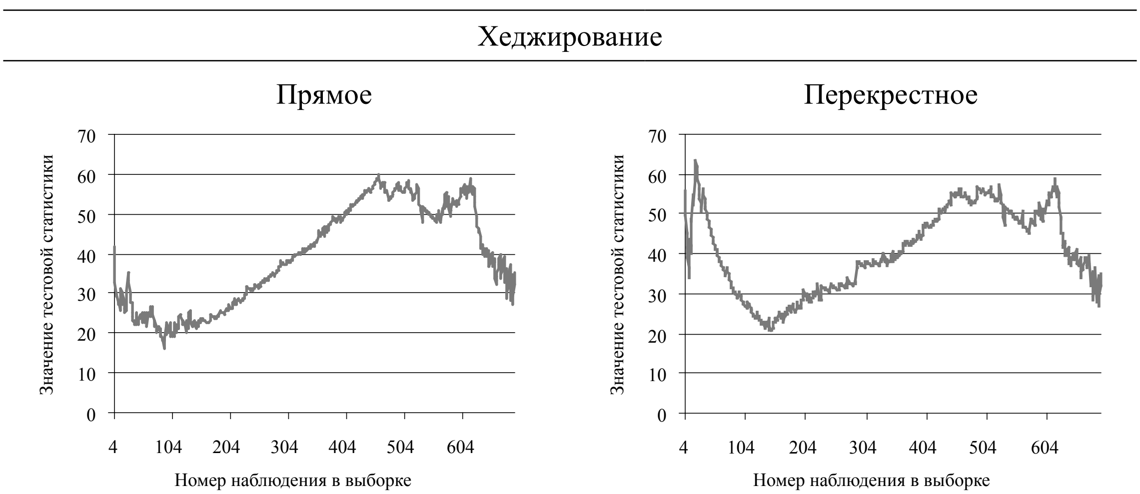


Рис. 4. Динамика тестовой статистики для поиска момента структурного сдвига в задачах хеджирования ценового риска

[13] См. (Пеникас, 2010, с. 26, свойство (3)).

Так, область наблюдений с 420 по 617 (с 4 марта 2009 г. по 11 декабря 2009 г.) характеризуется максимальными значениями исследуемой статистики, статистически незначимо отличными друг от друга. В виду отсутствия возможности точно определить момент структурного сдвига и для сохранения достаточного числа наблюдений в обучающей выборке (при принятии гипотезы о том, что структурный сдвиг имел место в наблюдении 617, для оценки копулы до 630 наблюдения останется только 13 наблюдений), принято решение использовать полный исходный набор данных.

5. Результаты эконометрического исследования

Эконометрическое исследование было проведено в программной среде R. Результаты исследования представлены в табл. 2 и 3 для полупараметрического и параметрического подходов, соответственно.

Таблица 2. Суммарный финансовый результат (PL) и стандартное отклонение (SD) подневных значений при полупараметрическом подходе к оценке копулы (1% и 5%-ные уровни значимости)

	Прямое хеджирование				Перекрестное хеджирование			
	1%		5%		1%		5%	
	PL	SD	PL	SD	PL	SD	PL	SD
Гауссовская	−0.0036	0.0112	−0.0084	0.0112	−0.0519	0.0144	−0.0474	0.0141
Стьюдента (5 степеней свободы)	−0.0073	0.0114	−0.0142	0.0112	−0.0670	0.0140	−0.0686	0.0145
Стьюдента (10 степеней свободы)	*0.0041*	0.0111	−0.0097	0.0111	−0.0516	0.0141	−0.0614	0.0143
Клэйтона	−0.0144	0.0114	−0.0141	0.0112	−0.0501	0.0143	−0.0352	0.0138
Гумбеля	−0.0097	0.0112	−0.0069	0.0112	−0.0679	0.0151	−0.0671	0.0145
Франка	−0.0104	0.0114	−0.0126	0.0113	−0.0198	0.0138	−0.0405	0.0141
Коши	*0.0014*	0.0111	−0.0100	0.0112	−0.0471	0.0141	−0.0713	0.0150
Галамбоса	−0.0067	0.0112	−0.0159	0.0111	−0.0868	0.0153	−0.0578	0.0145
Хайслера-Райса	−0.0098	0.0112	−0.0114	0.0112	−0.0687	0.0149	−0.0623	0.0145
Плаке	−0.0014	0.0114	−0.0110	0.0111	−0.0272	0.0136	−0.0272	0.0137
МНК1	−0.0083	0.0111	−0.0083	0.0111	−0.0484	0.0140	−0.0484	0.0140
МНК2	−0.0049	0.0111	−0.0243	0.0116	0.0246	0.0122	−0.0013	0.0121

Примечание. Данные приведены в процентах от цены актива. Курсивом выделены модели, превосходящие по данному параметру МНК в части эффективности операции хеджирования.
МНК1 — решение задачи на минимум ошибки отклонения; МНК2 — решение оптимизационной задачи в предположении гауссовской копулы и гауссовских частных распределений.

В рамках полупараметрического подхода для задачи прямого хеджирования на 1%-ном уровне значимости однозначно наилучшей является копула Коши, поскольку она не только позволяет уменьшить волатильность доходности захеджированного портфеля до 0.01106%, но и приводит к более высокому доходу +0.00139% (при МНК доходы равны 0.00829% и −0.00489%, т. е. имеют место убытки). На 5%-ном уровне лучшими по критерию минимизации стандартного отклонения оказываются копулы Галамбоса и Плаке, которые позволяют моделировать нестандартные (экстремальные) зависимости.

Для задачи перекрестного хеджирования наилучшей (относительно МНК1) как на 1%-ном, так и на 5%-ном уровнях значимости является копула Плаке, которая приводит к финансовому результату в −0.02716%, что выше, чем при МНК1 (−0.04844%) при снижении волатильности в терминах стандартного отклонения до 0.1363%. Тем не менее, МНК2 оказывается предпочтительнее при перекрестном хеджировании, что объясняется меньшей степенью взаимосвязи между переменными.

В рамках параметрического подхода на 1%-ном уровне наилучшей по обоим критериям оказывается копула Хайслера — Райса. При этом по критерию максимизации доходности лучшими оказываются копулы Гумбеля и Галамбоса (на 1%-ном уровне), Гумбеля и Франка (на 5%-ном), что, однако, сопровождается ростом волатильности. Для задачи же перекрестного хеджирования наблюдается аналогичная ситуация, когда методы МНК оказываются предпочтительнее.

Таблица 3. Суммарный финансовый результат (PL) и стандартное отклонение (SD) его подневных значений при параметрическом подходе к оценке копулы (1% и 5% уровни значимости)

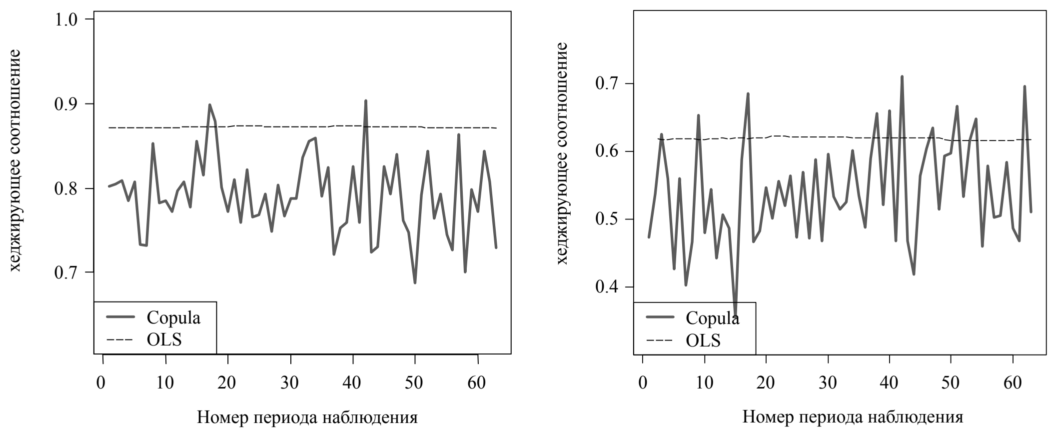
	Прямое хеджирование				Перекрестное хеджирование			
	1%		5%		1%		5%	
	PL	SD	PL	SD	PL	SD	PL	SD
Гауссовская	−0.0158	0.0124	−0.0103	0.0112	−0.0136	0.0150	−0.0232	0.0146
Стьюдента (5 степеней свободы)	−0.0078	0.0120	−0.0131	0.0112	−0.0417	0.0136	−0.0555	0.0146
Стьюдента (10 степеней свободы)	0.0273	0.0115	−0.0127	0.0116	−0.0283	0.0144	−0.0345	0.0142
Клэйтона	−0.0258	0.0119	−0.0115	0.0112	−0.0154	0.0141	−0.0306	0.0146
Гумбеля	0.0051	0.0114	0.0021	0.0113	−0.0456	0.0145	−0.0270	0.0138
Франка	−0.0099	0.0150	0.0063	0.0130	0.0015	0.0155	−0.0200	0.0154
Коши	−0.0124	0.0112	−0.0088	0.0113	−0.0796	0.0147	−0.0675	0.0148
Галамбоса	0.0028	0.0114	−0.0192	0.0113	−0.0528	0.0149	−0.0266	0.0141
Хайслера-Райса	0.0005	0.0110	−0.0029	0.0113	−0.0343	0.0143	−0.0298	0.0139
Плаке	−0.0264	0.0141	−0.0285	0.0125	−0.0100	0.0152	−0.0142	0.0147
МНК1	−0.0083	0.0111	−0.0083	0.0111	−0.0484	0.0140	−0.0484	0.0140
МНК2	−0.0049	0.0111	−0.0243	0.0116	0.0246	0.0122	−0.0013	0.0121

Примечание. См. примечание к таблице 2.

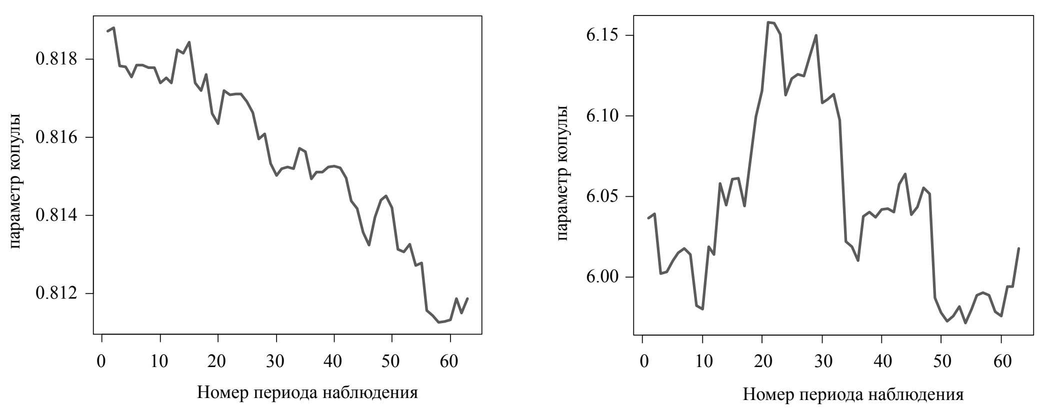
Интересно отметить, что если рассматривать 1%-ный уровень значимости, то параметрический подход для одних и тех же копул, отобранных лучшими в рамках данного подхода, позволяет получить суммарный финансовый результат больше, чем в рамках полупараметрического подхода. Например, для копулы Стьюдента с 10 степенями свободы: +0.027% при параметрическом против +0.004% при полупараметрическом; для Гумбеля: +0.005% против −0.009%; для Галамбоса: +0.002% против −0.006%; для Хайслера — Райса: +0.0005% против −0.009%.

Более высокий результат (в смысле эффективности хеджирования) достигается за счет гибкости модели «копула» по сравнению с предположением о многомерной нормальности. Как показывает рис. 5а, это проявляется в большей изменчивости хеджирующего соотношения, выбранного как решение оптимизационной задачи на сгенерированном по копуле совместном распределении, чем по МНК (OLS).

Прямое	Перекрестное
Коши	Плаке



а) хеджирующее соотношение



б) параметр копулы

Рис. 5. Ретроспективный прогноз наилучшей копулы на 1%-ном уровне значимости для полупараметрического подхода

При этом степень взаимосвязи переменных в задачах прямого и перекрестного хеджирования носит разный характер (см. рис. 5б). Необходимо учесть, что изменение значения параметра копулы является индикатором изменения тесноты взаимосвязи переменных. Поэтому можно заключить, что взаимосвязь доходностей акций ЛУКОЙЛа и фьючерсов на них снижается, т. е. уменьшается экстремальный характер их совместного движения. Для доходностей акций ЛУКОЙЛа и фьючерсов на акции Сургутнефтегаза такого однозначного вывода сделать нельзя. Для них было характерно усиление взаимосвязи в феврале 2010 г., что соответствует наблюдениям № 20–30 из периода ретроспективного прогноза.

Полученные выводы согласуются с результатами предыдущих исследований в трех аспектах. Во-первых, если в обеих статьях (Hsu et al., 2007; Lai et al., 2009) отдается предпочтение эллипсообразным копулам при решении задач прямого хеджирования, то в настоящем исследовании наилучшей оказывается копула Коши, также принадлежащая тому же семейству (что было выявлено для задач прямого хеджирования на 1%-ном уровне значимости). Во-вторых, в части операций перекрестного хеджирования в (Lai et al., 2009) рекомендуется применение МНК в силу слабой взаимосвязи между случайными величинами доходностей базового и хеджирующего активов. Такой же результат был обнаружен и в данном исследовании при применении к оценке копулы как параметрического, так и полупараметрического подходов. В-третьих, в (Hsu et al., 2007) предпочтение отдается копуле Гумбеля при решении задач хеджирования. В рамках параметрического подхода при решении задачи прямого хеджирования на российских данных копула Гумбеля также дала большую суммарную доходность, чем подходы, основанные на гипотезе о многомерной нормальности, хотя и ценой увеличения стандартного отклонения стоимости захеджированного портфеля.

Таким образом, модели «копула» оказываются эффективнее в решении задач прямого хеджирования, чем модели, основанные на предпосылке многомерного нормального закона, поскольку позволяют одновременно минимизировать стандартное отклонение и повысить суммарную доходность. При этом эффективность применения моделей «копула» растет при снижении уровня значимости с 5% до 1%. При решении задач перекрестного хеджирования подходы, основанные на предпосылке о многомерной нормальности, дают приемлемый результат и оказываются лучше копул, что вызвано более низкой степенью взаимосвязи переменных в задачах перекрестного хеджирования по сравнению с задачами прямого хеджирования.

6. Заключение

Проведенное исследование показало, что применение моделей «копула» позволяет повысить эффективность операций прямого хеджирования по сравнению с применением моделей, основанных на предположении о двумерном гауссовском законе распределения доходностей хеджируемого и хеджирующего инструментов. Результатом повышения эффективности является снижение волатильности финансового результата от изменения стоимости захеджированного портфеля и одновременное повышение суммарного финансового результата от хеджирования. Объяснением такого феномена является то, что при использовании МНК предполагается эллипсообразный характер гауссовского распределения доходностей, минимизация степени разброса которого накладывает ограничения на уровень достижимой доходности от операций хеджирования.

Предложенная модель не является совершенной, поскольку основана на целом ряде допущений и ограничений. Во-первых, предполагается, что возможность хеджирования (прямого и перекрестного) существует бесконечно долго. Во-вторых, операции хеджирования не обременяют инициировавшего их агента издержками ликвидности. В-третьих, контрагент по такой сделке в любой момент может исполнить свои обязательства по срочному контракту. Так, в практической деятельности, с одной стороны, использование фьючерсных (биржевых) контрактов действительно защищает агента от проблемы неплатежеспособности контрагента, т. к. биржа на ежедневной основе использует механизм перечисления вариационной маржи (равной изменению стоимости срочного контракта за торговый день) от контрагента с отрицательной переоценкой срочного контракта к контрагенту с положительной. Тем не менее, именно в данном случае возникают издержки ликвидности, поскольку в отдельные моменты времени агенту, проводящему операции хеджирования, могут потребоваться значительные денежные суммы на перечисление вариационной маржи. С другой стороны, использование форвардных (внебиржевых) контрактов не обременяет контрагентов такими издержками ликвидности. Как правило, в качестве залога по операциям одним из контрагентов вносится залоговый (маржинальный) депозит (аналог вариационной маржи), на который начисляются проценты и который пополняется только при значительном изменении ожидаемых рисков неисполнения обязательства. При этом риск неплатежа (третья обозначенная проблема[14]) возникает именно в такой момент, когда требуется существенное пополнение маржинального депозита.

Существенным же ограничением модели является предположение о том, что всегда существует возможность захеджировать (минимизировать) риск изменения стоимости актива, переложив его на другого контрагента в результате заключения с ним сделки купли-продажи хеджирующего инструмента. Несмотря на это, при условии эффективности операций хеджирования отдельных экономических агентов существует конечный агент (будь то правительство или налогоплательщики), который несет непередаваемое бремя изменения стоимости активов, поскольку он не имеет возможности данный риск минимизировать, переложив его еще на кого-либо.

Поэтому в свете имевшей место турбулентности на финансовых рынках особый интерес сейчас может представлять изучение системного риска, т. е. такого риска, который может быть передан от одного агента другому, но не может быть выведен из всей экономической системы.

Список литературы

Бродский Б. Е., Пеникас Г. И., Сафарян И. А. (2009). Обнаружение структурных сдвигов в моделях копул. *Прикладная эконометрика*, 16 (4), 3–15.

Пеникас Г. И. (2010). Модели «копула» в приложении к задачам финансов. *Журнал Новой Экономической Ассоциации*, 7, 24–44.

Bouye E., Durrleman V., Nikeghbali A., Riboulet G., Roncalli T. (2000). Copulas for finance. A reading guide and some applications. http://www.ssrn.com/abstract=1032533.

[14] Особое внимание рассмотрению данной проблемы, или кредитного риска контрагента, уделено в работе (Pykhtin, 2005).

Cecchetti S., Cumby R., Figlewski S. (1988). Estimation of the optimal futures hedge. *The Review of Economics and Statistics*, 70 (4), 623–630.

Cech C. (2006). Copula-based top-down approaches in financial risk aggregation. http://www.ssrn.com/abstract=953888.

Chang E., Wong K.-P. (2003). Cross-hedging with currency options and futures. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 38 (3), 555–574.

Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W. (2004). *Copula methods in finance*. John Wiley & Sons Ltd.

Hsu Ch.-Ch., Tseng Ch.-P., Wang Y.-H. (2007). Dynamic hedging with futures: A copula-based GARCH model. http://www.ssrn.com/abstract=1083890.

Genest Ch., Remillard B. (2004). Tests of independence and randomness based on the empirical copula process. *Test*, 13 (2), 335–369.

Ghosh A. (1993). Cointegration and error correction models: Intertemporal causality between index and futures prices. *The Journal of Futures Markets,* 13 (2), 193–198.

Ghoudi K., Khoudraji A., Rivest L.-P. (1998). Proprieties statistiques des copules des valeurs extremes bidiminsionnelles. *The Canadian Journal of Statistics*, 26 (1), 187–197.

International Accounting Standard 39. Financial Instruments: Recognition and Measurement (2008). IASCF (IAS 39).

Joe H. (1997). *Multivariate models and dependence concepts*. Monographs on Statistics and Applied Probability 73. Chapman and Hall, London.

Kim G., Silvapulle M., Silvapulle P. (2007). Comparison of semiparametric and parametric methods for estimating copulas. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51, 2836–2850.

Lai Y., Chen C., Gerlach R. (2009). Optimal dynamic hedging via Copula-Threshold-GARCH models. *Mathematical Computation and Simulation*, 79 (8), 2609–2624.

Lien D. (2004). Cointegration and the optimal hedge ratio: the general case. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 44, 654–658.

Mello A., Parsons J. (2000). Hedging and liquidity. *The Review of Financial Studies*, 13 (1), 127–153.

Myers R., Hanson S. (1996). Optimal dynamic hedging in unbiased futures markets. *American Journal of Agricultural Economics*, 78 (1), 13–20.

Nelsen R. (2006). *An introduction to copulas*. 2nd ed. N. Y.: Springer.

Pykhtin M. (2005). *Counterparty credit risk modelling: Risk management pricing and regulation*. N. Y.: Risk Books.

Приложение 1

Описательные статистики данных (на всей выборке)

	R_{CASH}	$R_{FWD,\ ПРЯМОЕ}$	$R_{FWD,\ ПЕРЕКРЕСТНОЕ}$
	В уровнях (руб. /1 ед. актива)		
Минимум	—	—	—
1-ая квартиль	44.50	47.55	0.69
Медиана	58.90	59.10	0.88
Среднее	60.62	63.51	0.87
3-ая квартиль	81.40	82.39	1.04
Максимум	113.20	111.29	1.40
Стандартное отклонение	25.42	21.55	0.27
	В логарифмических доходностях (в %)		
Минимум	−0.2223	−0.2299	−0.1978
1-ая квартиль	−0.0137	−0.0132	−0.0112
Медиана	0.0000	0.0000	0.0001
Среднее	−0.0005	−0.0006	−0.0011
3-ая квартиль	0.0145	0.0135	0.0122
Максимум	0.2438	0.1716	0.1885
Стандартное отклонение	0.0349	0.0335	0.0302
Эксцесс	8.899	9.730	10.699
Асимметрия	−0.103	−0.737	−0.593
Статистика Жарке–Бера	2306	2817	3371
ACF 1	0.0496	0.1244	0.1901
ACF 5	−0.0036	0.0111	−0.0520
ACF 20	−0.0139	−0.1079	−0.0419
	Корреляция логарифмических доходностей		
	LKOH	*LKOHF*	*SNGSF*
LKOH	1.000	0.835	0.532
LKOHF	0.835	1.000	0.559
SNGSF	0.532	0.559	1.000

Приложение 2
Вывод оптимального хеджирующего соотношения как коэффициента парной МНК-регрессии

Перепишем формулу (1) в следующем виде:

$$R_{CASH} = R_H + hR_{FWD} + \alpha\,, \qquad (17)$$

где α — постоянная уровня, которая предполагается равной нулю.

Допустим, что доходность портфеля R_H является ошибкой парной модели регрессии (17), которую необходимо минимизировать. Для наглядности обозначим ее как ε и перепишем формулу как

$$R_{CASH} = \alpha + hR_{FWD} + \varepsilon. \qquad (18)$$

Предполагая, что ошибка ε распределена нормально, решением задачи минимизации квадрата отклонения будет нахождение коэффициента h^* методом наименьших квадратов по формуле (19), предполагая, что α равна нулю (что оправдано наличием стилизованного факта распределения доходностей финансовых величин, которое характеризуется нулевым математическим ожиданием)

$$h^* = \left[{R_{FWD}}^T R_{FWD} \right]^{-1} {R_{FWD}}^T R_{CASH}\,, \qquad (19)$$

где x^T обозначает транспонированный вектор от случайной величины x.

Или, что также верно, коэффициент h^*, минимизирующий ошибку парной регрессии (18) и, соответственно, минимизирующий колебание стоимости захеджированного портфеля, будет определяться по формуле:

$$h^* = \frac{\sigma_{CASH,\,FWD}}{\sigma^2_{FWD}}. \qquad (20)$$