Лекция 1.
Марковское семейство. Инфинитезимальный оператор, производящий оператор. Обратное и прямое уравнения А.Н.Колмогорова. Фундаментальное решение.

Литература:

- А.Д. Вентцель. Курс теории случайных процессов. Москва, «Наука», 1975.
- А.М.Ильин, А.С. Калашников, О.А. Олейник. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. Успехи математических наук, т. XVII, вып. 3 (105), с. 3-146, 1962.
- А. В. Скороход. Исследования по теории случайных процессов. Изд-во Киевского университета, 1961.
- Stroock, D.W., Varadhan, S. R.: Multidimensional diffusion processes. Springer, Berlin, Heidelberg, New York. 1979.
- E. E. Levi. Sulle equazioni lineare totalemente ellittiche alle derivati parzili. Rend. Circ. Matem. Palermo 24, 1907, 275-317.
- McKean, H.P., Singer, I.M.: Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. J. Differential Geometry 1, 43–69, 1967.

Введение. Опишем класс вероятностных задач, которые мы будем рассматривать. Пусть на отрезке $[0,1]$ задана последовательность разбиений $\Gamma_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\}, n = 1,2, \ldots,$ и последовательность цепей Маркова $X_t^{(n)}$ с дискретным временем и непрерывным пространством состояний. Цепи $X_t^{(n)}$ определены на решётке Γ_n, имеют начальное распределение $\delta_{x_0}(\cdot)$, а вероятность перехода за один шаг имеет плотность

$$P^{(n)}(\frac{1}{n}, x, A) = P\left(X_{\frac{i+1}{n}}^{(n)} \in A \middle| X_{\frac{i}{n}}^{(n)} = x\right) = \int_A p_{\frac{i}{n}, x}^{(n)}\left(\frac{1}{n}, x, z\right) dz.$$

При этом условии вероятность перехода за n шагов также абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и имеет плотность $p^{(n)}(1, x_0, z)$. Нас интересуют условия, при которых плотность $p^{(n)}(1, x_0, z)$ можно аппроксимировать плотностью некоторого диффузионного процесса $p(1, x_0, z)$, то есть условия, при которых справедлива локальная предельная теорема. Следует сказать, что имеется значительное число работ, в которых для рассматриваемой схемы изучена **слабая** сходимость мер (переходных вероятностей) $P^{(n)}(1, x_0, A)$ к переходной вероятности $P(1, x_0, A)$ некоторого предельного диффузионного процесса. Первые общие результаты о слабой сходимости были получены А.В. Скороходом (1961). Результаты А.В. Скорохода позволяли рассматривать также процессы и цепи *со скачками*. Для *непрерывной* диффузии наиболее общие результаты о слабой сходимости были получены в монографии D. Stroock and S.Varadhan (1979). Ими был развит подход, основанный на решении так называемой «проблемы мартингалов». Следует сказать, что как А. В. Скороход, так и D. Stroock and S.Varadhan для получения своих результатов использовали **вероятностные методы**. Для получения *локальных предельных теорем* мы будем использовать **аналитический метод**, основанный на специальном варианте метода «параметрикс». Метод параметрикса в его классическом виде, предложенном Е. Е. Леви, известен с 1907 года. Однако для наших целей этот вариант метода параметрикса непригоден. В 1967 году Мак Кин и Зингер предложили вариант метода, который, как оказалось, допускает дискретный аналог, прекрасно приспособленный для изучения аппроксимаций и получения упомянутых выше локальных предельных теорем. Целью настоящего курса является введение слушателей в метод параметрикса, обзор задач, поддающихся решению этим методом, а также формулировка некоторых нерешённых задач.

Напомним некоторые необходимые нам в дальнейшем понятия. Для простоты изложения мы будем рассматривать только однородные марковские процессы, хотя всё изложенное переносится и на неоднородный случай.

Определение 1. Мы говорим, что функция $P(t, x, \Gamma)$, определённая для $t \in [0, T], x \in R^d, \Gamma \in \mathfrak{B}^d$ ($\mathfrak{B}^d - \sigma$ – алгебра борелевских множеств в R^d) является ***переходной функцией марковского процесса*** ξ_t, если:

a) При фиксированных t, x функция $P(t, x, \cdot)$ является вероятностной мерой на $\sigma -$ алгебре $\mathfrak{B}^d$.

b) При фиксированных $t, \varGamma$ функция $P(t,\cdot,\varGamma)$ измерима относительно $\sigma -$ алгебры $\mathfrak{B}^d$.
c) $P(0,x,\varGamma) = \delta_x(\varGamma)$.
d) Для любых $s \le t, \varGamma \in \mathfrak{B}^d$ имеет место равенство почти наверное

$$P\{\xi_t \in \varGamma | \xi_s\} = P(t-s, \xi_s, \varGamma).$$

Заметим, что требования a) – c) налагаются только на переходную функцию $P(\cdot,\cdot,\cdot)$ и не касаются случайного процесса $\xi_t(\omega)$, тогда как требование d) говорит о связи между собой этих двух объектов. В дальнейшем мы используем обозначение

$$\mathcal{F}_T = \sigma\{\xi_t, t \in T\}.$$

Определение 2. Мы говорим, что набор элементов $(\xi_t(\omega), P_{,x})$ является ***однородным марковским семейством с переходной функцией*** $P(t,x,\varGamma)$, если при любых x

1. Случайный процесс $\xi_t(\omega), t \in [0,T]$, на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}_{\ge 0}, P_x)$ - марковский, то есть для любых $x, A \in \mathcal{F}_{[0,t]}, B \in \mathcal{F}_{\ge t}$ должно быть

$$P_x(AB|\xi_t) = P_x(A|\xi_t)P_x(B|\xi_t)$$

$P_x -$ почти наверное; это свойство иногда выражают словами как независимость «прошлого» от «будущего» при фиксированном «настоящем».

2. Этот марковский процесс обладает указанной переходной функцией;
3. $P_x\{\xi_0 = x\} = 1$.

Заметим, что п. 2 означает, что для $t \le u$, для любого $x \in R^d$ и $\varGamma$ из $\mathfrak{B}^d$ $P_x -$ почти наверное справедливо равенство

$$P_x\{\xi_u \in \varGamma | \mathcal{F}_{\le t}\} = P(u-t, \xi_t, \varGamma)$$

(заметим, что выражение в правой части не зависит не только от поведения процесса на отрезке от 0 до t, за исключением последней точки, но также и от x).

В дальнейшем нас будут интересовать специальные классы марковских семейств, а именно, ***диффузионные процессы в*** $\boldsymbol{R^d}$. Напомним сначала определение инфинитезимального оператора. Пусть в банаховом пространстве E задана полугруппа ограниченных линейных операторов $P^t, 0 \le t < \infty, P^0 = I$.

Инфинитезимальный оператор A этой полугруппы – это линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, определённый на некотором линейном подпространстве D_A пространства E. Значение оператора A на элементе $f \in D_A$ есть следующий предел по норме пространства E

$$Af = \lim_{t\to\infty} t^{-1}(P^t f - f)$$

Полугруппа операторов P^t, *соответствующая переходной функции* $P(t,x,\Gamma)$, имеет вид

$$P^t f(x) = \int f(y) P(t,x,dy).$$

Перечислим основные свойства этих операторов:

1. P^t - линейные операторы в соответствующем банаховом пространстве;
2. $P^t 1 = 1$;
3. $P^0 = I$;
4. $P^{t+s} = P^t P^s$ (полугрупповое свойство).

Определение 3. Марковское семейство $(\xi_t(\omega), P_x)$ на фазовом пространстве $(R^d, \mathfrak{B}^d)$ мы будем называть ***диффузионным процессом в*** $\boldsymbol{R^d}$, если

a) его инфинитезимальный оператор определён на всех финитных дважды непрерывно дифференцируемых функциях и существуют непрерывные векторная функция $(b_i(x))$ и матричная функция $\left(a_{ij}(x)\right)$ (причём матрица $\left(a_{ij}(x)\right)$ при любом x должна быть симметрична и неотрицательно определена) такие, что для $f \in C^{(2)}_{фин}$ ($C^{(2)}_{фин}$ - множество дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций)

$$Af(x) = Lf(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

b) все его траектории непрерывны.

Дифференциальный оператор второго порядка L будем называть ***производящим оператором диффузионного процесса.***

Пусть на R^d заданы непрерывные функции $a_{ij}(x), b_i(x), i,j = 1,2,\dots,d$; пусть $L -$ соответствующий им дифференциальный оператор:

$$Lf = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Сформулируем без доказательства две теоремы, которые понадобятся нам в дальнейшем. Доказательства этих теорем содержатся в Главе 11 упомянутой выше книги А.Д. Вентцеля.

Теорема 1. *Пусть* $(\xi_t(\omega), P_x)$ *- марковское семейство на* $(R^d, \mathfrak{B}^d)$ *такое, что при любом* $\varepsilon > 0$ *следующие условия выполнены при* $t \to 0$ *равномерно по* x *в пределах каждого ограниченного множества*

1. $P\big(t, x, U_\varepsilon^c(x)\big) = o(t)$.
2. $\int_{U_\varepsilon(x)} (y_i - x_i) P(t, x, dy) = b_i(x)t + o(t)$.
3. $\int_{U_\varepsilon(x)} (y_i - x_i)\big(y_j - x_j\big) P(t, x, dy) = a_{ij}(x)t + o(t)$.

и для каждого ограниченного множества K *существует ограниченное множество* $K' \supset K$ *такое, что*

$$P(t, x, K) = o(t)$$

при $t \to 0$ *равномерно по* $x \in R^d \setminus K'$. *Тогда инфинитезимальный оператор определён на всех функциях* $f \in C^{(2)}_{фин}$ *и на них он равен* Lf.

Теорема 2. *Пусть инфинитезимальный оператор диффузионного процесса определён и совпадает с производящим оператором* L *на всех дважды непрерывно дифференцируемых функциях* f, *убывающих вместе с производными* $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *на бесконечности не медленнее, чем некоторая функция* $\varphi(x)(\to 0$ *при* $|x| \to \infty)$. *Предположим, что переходные вероятности диффузионного процесса задаются плотностью:* $P(t, x, \Gamma) = \int_\Gamma p(t, x, y) dy$, *где функция* $p(t, x, y)$, *опеделённая на* $(0, \infty) \times R^d \times R^d$, *непрерывна по всем трём переменным вместе с первой частной производной по* t *и частными производными первых двух порядков по* x_i, x_j. *Пусть, наконец, имеют место оценки*

$$|p|, \left|\frac{\partial p}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial p}{\partial x_i}\right|, \left|\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}\right| \le C(t, y)\varphi(x),$$

где $C(t, y)$ *– непрерывная положительная функция на* $(0, \infty) \times R^d$. *Тогда переходная плотность удовлетворяет следующему уравнению:*

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x)\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial x_i} \qquad (1)$$

или, короче, $\frac{\partial p}{\partial t} = L_x p.$

Нижний индекс x означает, что оператор применяется к плотности при фиксированных t, y как к функции от x. Уравнение (1) называется ***обратным уравнением Колмогорова.***

Введём ограничения на коэффициенты a_{ij}, b_i: пусть функции a_{ij} дважды, а b_i один раз непрерывно дифференцируемы. Тогда для дифференциального оператора L определён сопряжённый оператор L^*:

$$L^* g(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 [a_{ij}(x) g(x)]}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_i \frac{\partial [b_i(x) g(x)]}{\partial x_i}.$$

Теорема 3. *Пусть* $(\xi_t(\omega), P_x)$ *- диффузионный процесс с производящим оператором* L. *Предположим, что плотность вероятностей перехода обладает непрерывными частными производными первого порядка по* t *и первых двух порядклв по* y_i, y_j. *Тогда переходная плотность удовлетворяет уравнению:*

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 [a_{ij}(y) p(t,x,y)]}{\partial y_i \partial y_j} - \sum_i \frac{\partial [b_i(y) p(t,x,y)]}{\partial y_i} \qquad (2)$$

или $\frac{\partial p}{\partial t} = L_y^* p.$

Уравнение (2) называется ***прямым уравнением Колмогорова или уравнением Фоккера-Планка.***

Для неоднородного по времени процесса $(\xi_t, P_{s,x})$ можно доказать аналоги теорем 2 и 3. Уравнения (1) и (2) при этом принимают следующий вид:

$$-\frac{\partial p(s,t,x,y)}{\partial s} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(s,x)\frac{\partial^2 p(s,t,x,y)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(s,x)\frac{\partial p(s,t,x,y)}{\partial x_i} \qquad (1')$$

$$\frac{\partial p(s,t,x,y)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2[a_{ij}(t,y)p(s,t,x,y)]}{\partial y_i \partial y_j} - \sum_i \frac{\partial[b_i(t,y)p(s,t,x,y)]}{\partial y_i} \qquad (2')$$

С точки зрения теории дифференциальных уравнений уравнение (1') означает, что плотность вероятностей перехода есть ***фундаментальное решение*** параболического уравнения

$$\frac{\partial u(s,t,x,y)}{\partial s} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(s,x)\frac{\partial^2 u(s,t,x,y)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(s,x)\frac{\partial u(s,t,x,y)}{\partial x_i} = 0$$

Определение 4. Фундаментальным решением уравнения (1') назовём функцию $p(s,t,x,y), s < t, x \in R^d, y \in R^d$, со следующими свойствами:

1. Функция $p(s,t,x,y)$ в области $\{0 \le s < t \le T, x \in R^d, y \in R^d\}$ непрерывна по совокупности переменных s,t,x,y вместе с производными $\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial p}{\partial t}$ и удовлетворяет уравнению (1') по переменным x, s при фиксированных t, y. При этом функция $p(s,t,x,y)$ ограничена во всякой области $t - s + |y - x| \ge \delta$, где $\delta > 0$.
2. Для любой непрерывной и ограниченной в R^d функции $\varphi(y)$ и для любых $x \epsilon R^d$, $t \in [0,T]$ выполняется соотношение

$$\lim_{s\to t-0}\int_{R^d} p(s,t,x,y)\varphi(y)dy = \varphi(x),$$

причём стремление к пределу равномерно относительно x во всякой ограниченной области его изменения в пространстве R^d.
Простейший пример фундаментального решения

$$p(s,t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{-\frac{|y-x|^2}{2(t-s)}}.$$

Важность понятия фундаментального решения обусловлена тем, что с его помощью можно представить решение задачи Коши для рассматриваемого параболического уравнения, а именно:

$$u(s,x) = \int p(s,t,x,y)f(y)dy\,, s < t,$$

единственное ограниченное решение задачи Коши для рассматриваемого параболического уравнения с «конечным» условием $u(t_{-},x) = f(x)$. Кроме того, найти фундаментальное решение - значит найти переходную плотность соответствующего диффузионного процесса. В этом курсе мы рассмотрим метод нахождения фундаментального решения, предложенный более ста лет назад E.E. Levi (2007, русский перевод: УМН, вып. VIII, 1940, 249-292). Мы рассмотрим сначала классический вариант этого метода в том виде, как его предложил сам Е. Леви, затем рассмотрим модификацию этого метода, предложенную Мак Кином и Зингером (1967). Метод параметрикса в форме Мак Кина и Зингера замечателен тем, что допускает дискретную версию и позволяет развить новый метод получения локальных предельных теорем о сходимости последовательности марковских цепей к диффузионному процессу.

Лекция 10. Стохастический аналог конечномерной линейной управляемой системы. Нижняя граница для переходной плотности, метод цепочки (chaining method).

Литература:

- F. Delarue, S. Menozzi. Density Estimation for a Random Noise Propagating through a Chain of Differential Equations, J. Func. Anal., 259, 2010. №6, 1577-1630.
- J.-M. Coron. Control and nonlinearity. Mathematical Surveys and Monographs, 136, AMS, 2007.
- R. Bass. Diffusion processes and Elliptic Operators. Springer. 1997.

Для фиксированного начального значения $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in (R^d)^2$ и функции $\varphi \in L^2\left((0,T); R^d\right)$ рассмотрим линейную детерминированную систему с управлением

$$\dot{\boldsymbol{S}}_t = \boldsymbol{L}_t \boldsymbol{S}_t + B\Sigma_t \varphi_t, \;\; S_0 = x \qquad (1)$$

Решение при заданной φ_t будем обозначать $S_t(\varphi)$. В уравнении (1) предполагается, что $\boldsymbol{L}_t$ – измеримое, $\mathcal{M}_{2d}(R)$ - значное семейство, Σ_t - измеримое, $\mathcal{M}_d(R)$ - значное семейство (напомним, что $\mathcal{M}_k(R)$ - множество $k \times k$ матриц с вещественными коэффициентами). $2d \times 2d$ матрица $\boldsymbol{L}_t$ состоит из четырёх $d \times d$ блоков и имеет вид

$$\boldsymbol{L}_t = \begin{pmatrix} [L_t]_{1,1} & [L_t]_{1,2} \\ \alpha_t^1 & [L_t]_{2,2} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

($\boldsymbol{A}^{linear}$): Будем предполагать, что элементы $\boldsymbol{L}_t$ ограничены константой κ, а детерминант $d \times d$ матрицы α_t^1 положителен для всех $t \in [0,T]$. Относительно $d \times d$ матрицы Σ_t предположим, что спектр матрицы $A_t = \Sigma_t {\Sigma_t}^*$ содержится в $\left[\Lambda^{-1}, \Lambda\right], \Lambda \geq 1,$ для всех $t \in [0,T]$.

Стохастическим аналогом системы (1) является система

$$d\boldsymbol{G}_t = \boldsymbol{L}_t \boldsymbol{G}_t dt + B\Sigma_t dW_t, t \in [0,T]. \qquad (3)$$

Пусть $\boldsymbol{K}_t$ - ковариационная матрица гауссовского процесса $\boldsymbol{G}_t$.

Предложение 6. *Пусть выполнены условия* ($\boldsymbol{A}^{linear}$). *Тогда детерминированная система (1) допускает управление (см.*

Определение 15 Лекции 9) и матрица $\boldsymbol{K}_t$ *невырождена. В этом случае гауссовская плотность вектора* $\boldsymbol{G}_T$ *с начальным условием* $\boldsymbol{G}_0 = x$ *и конечным условием* $\boldsymbol{G}_T = y$ *имеет вид*

$$q(0,T,x,y) = (2\pi)^{-d} det^{-1/2}(\boldsymbol{K}_T) exp\left(-\frac{I_{linear}(T,x,y)}{2}\right),$$

где

$$I_{linear}(T,x,y) = \inf\left\{\int_0^T |\varphi_t|^2 dt\right\} : S_0(\varphi) = x, S_T(\varphi) = y\} = \langle \mathcal{R}(T,0)x - y, \boldsymbol{K}_T^{-1}[\mathcal{R}(T,0)x - y]\rangle \qquad (4)$$

(здесь $\mathcal{R}$ *- резольвента линейной системы* $\dot{\boldsymbol{S}}_t = \boldsymbol{L}_t \boldsymbol{S}_t$*).*

Доказательство Предложения 6 содержится в работе F. Delarue и S. Menozzi (2010, Предложение 3.1). Заметим только, что $\boldsymbol{K}_T$ совпадает с матрицей Грама $\mathfrak{C}_T$ системы (1) и равенство (4) является следствием Предложения 5 (формула (17)) и Замечания 5 Лекции 9.

Определение 18. *Скажем, что гауссовский процесс* $(\boldsymbol{G}_t)_{0\le t\le T}$ *удовлетворяет свойству GSP (good scaling property) с параметром* $c \ge 1$, *если для всех* $t \in [0,T]$, *для ковариационной матрицы* $\boldsymbol{K}_t$ *выполнено двойное неравенство*

$$c^{-1}t^{-1}|\mathbb{T}_t x|^2 \le \langle \boldsymbol{K}_t x, x\rangle \le c t^{-1}|\mathbb{T}_t x|^2$$

для всех $x \in R^{2d}$.

Предложение 7. *Пусть выполнено условие* $(\boldsymbol{A}^{linear})$, *и для всех* $t \in [0,T]$, α_t^1 *принадлежит замкнутому выпуклому в пространстве* $GL_d(R)$ *множеству* $\mathcal{E}$. *Тогда найдётся постоянная* $c \ge 1$, *зависящая только от* $\mathcal{E}, \kappa, \Lambda, T$, *такая, что* $(\boldsymbol{G}_t)_{0\le t\le T}$ *удовлетворяет свойству GSP с параметром* c.

Доказательство. Предположим сначала, что $T = 1$. Из представления решения (3) в виде

$$\boldsymbol{G}_t = \mathcal{R}(t,0)\boldsymbol{x} + \int_0^t \mathcal{R}(t,s)B\Sigma_s dW_s$$

получим, что

$$\boldsymbol{K}_t = \int_0^t \mathcal{R}(t,s)BA_sB^*[\mathcal{R}(t,s)]^* ds \qquad (5)$$

и, следовательно, без ограничения общности можно считать, что A_t - единичная матрица для всех $t \in [0,1]$. Определим $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ как множество отображений $t \in [0,1] \to \boldsymbol{L}_t$, где матрица $\boldsymbol{L}_t$ определена в (2) и удовлетворяет условиям Предложения 7. Нетрудно видеть, что для каждого фиксированного t_0, отображение $\boldsymbol{L}: L^2([0,1], \mathcal{M}_{2d}(R)) \to \mathcal{R}(t_0,\cdot) \in C([0,1], \mathcal{M}_{2d}(R))$ является непрерывным, если гильбертово пространство $L^2([0,1], \mathcal{M}_{2d}(R))$ снабдить топологией слабой сходимости, а пространство $C([0,1], \mathcal{M}_{2d}(R))$ - топологией равномерной сходимости. Из представления (5) следует также (надо рассмотреть композицию двух отображений), что отображение $\boldsymbol{L}: L^2([0,1], \mathcal{M}_{2d}(R)) \to \boldsymbol{K}_1 \in \mathcal{M}_{2d}(R)$ непрерывно. Согласно Предложению 6, $\det \boldsymbol{K}_1 > 0$ для любого $\boldsymbol{L} \in \boldsymbol{\mathcal{E}}$. Если $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ - компактное подмножество $L^2([0,1], \mathcal{M}_{2d}(R))$, снабжённого топологией слабой сходимости, то $\exists \gamma \in [0,1]$ такое, что $\inf\{\det(\boldsymbol{K}_1), \boldsymbol{L} \in \boldsymbol{\mathcal{E}}\} \geq \gamma$ и $\sup\{\|\boldsymbol{K}_1\|, \boldsymbol{L} \in \boldsymbol{\mathcal{E}}\} \leq \gamma^{-1}$, то есть спектр матрицы $\boldsymbol{K}_1$ ограничен сверху и снизу равномерно по $\boldsymbol{L} \in \boldsymbol{\mathcal{E}}$:

$$\exists c \geq 1, c^{-1}|x|^2 \leq \langle \boldsymbol{K}_1 x, x \rangle \leq c|x|^2 \qquad (6)$$

Для всех $x \in R^{2d}$. То, что $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ является компактом в слабой топологии, следует из того, что $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ ограничено и замкнуто (даже в сильной топологии). Общий случай $\boldsymbol{K}_t, t \in (0,1)$ следует из свойства подобия системы, которое надо применить к случаю линейной системы (3) (мы рассмотрели это свойство выше для общей системы (2) Лекции 9). Следует перейти к гауссовскому процессу $\hat{G}_s^t = t^{1/2} \mathbb{T}_t^{-1} G_{st}, s \in [0,1]$, и применить (6). Подробности оставляем читателю в качестве упражнения.

Рассмотрим теперь *нелинейную* управляемую систему, соответствующую СДУ (2) Лекции 9 и задачу нахождения оптимального управления

$$I(T_0, x_0, y_0) = inf \left\{ \int_0^T |\varphi_t|^2 dt : \varphi_0 = x_0, \ \varphi_T = y_0 \right\},$$

где

$$\dot{\phi}_t = \boldsymbol{F}(\phi_t) + B\varphi_t, 0 \leq t \leq T, \phi_0 = x_0. \qquad (7)$$

В следующих двух предложениях мы докажем, что $I(T, x_0, y_0)$ имеет тот же порядок, что и $T|\mathbb{T}_T^{-1}(\theta_T(x_0) - y_0)|^2$. Сначала мы найдём нижнюю границу для $\big(I(t,\cdot,\cdot)\big)_{0 \le t \le T}$.

Предложение 8. *Существует постоянная* $C > 0$, *зависящая только от условий* $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** , **(ND-**η) *и* T *такая, что для любого* $0 < t \le T$, *для всех* $x, y \in R^{2d}$

$$I(t, x, y) \ge Ct|\mathbb{T}_t^{-1}(\theta_t(x) - y)|^2.$$

Доказательство. Напомним, что $\boldsymbol{\theta}_t(x)$ является решением системы

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_t = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta}_t), \boldsymbol{\theta}_0 = x.$$

Фиксируем $t \in (0, T]$ и $x \in R^{2d}$, линеаризуем систему и рассмотрим управление $\varphi \in L^2([0,T], R^d)$ вместе с соответствующим этому управлению решением ϕ, $\phi_0 = x$. Имеем

$$\dot{\phi}_s - \dot{\boldsymbol{\theta}}_s(x) = \boldsymbol{L}_s\big(\phi_s - \boldsymbol{\theta}_s(x)\big) + B\varphi_s, 0 \le s \le t, \tag{8}$$

где

$$\boldsymbol{L}_s = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \boldsymbol{D_x F}\Big(\boldsymbol{\theta}_s(x) + \lambda\big(\phi_s - \boldsymbol{\theta}_s(x)\big)\Big)\, d\lambda \in \mathcal{M}_{2d}(R)$$

и $\boldsymbol{D_x F}$ – матрица пространственных производных вектора $\boldsymbol{F} \in R^{2d}$. Матрица $\boldsymbol{D_x F}$ имеет вид (2), где, согласно условиям $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** , **(ND-**η), все элементы блоков ограничены, а блок $\alpha_t^1 \in \mathcal{E}$. Мы можем рассматривать, таким образом, линейную систему (8) как линейную управляемую систему с начальным условием $\mathbf{0}$ и конечным условием $\phi_t - \boldsymbol{\theta}_t(x)$. Из Предложений 6 и 7 (с $\Sigma_t \equiv I_d$ *в* (1)) следует, что

$$\int_{0}^{t} |\varphi_s|^2 ds \ \ge Ct|\mathbb{T}_t^{-1}[\phi_t - \boldsymbol{\theta}_t(x)]|^2.$$

Найдём теперь верхнюю границу для $\big(I(t,\cdot,\cdot)\big)_{0 \le t \le T}$.

Предложение 9. *Существует постоянная* $C > 0$, *зависящая только от условий* $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** , **(ND-**η) *и* T, *такая, что для любого* $0 < t \le T$, *для всех* $x, y \in R^{2d}$ *существует управление* $(\varphi_s)_{0 \le s \le t} \in R^d$ *со следующими свойствами:*

1. $\sup_{0 \le s \le t}|\varphi_s|^2 \le C|\mathbb{T}_t^{-1}[\boldsymbol{\theta}_t(x) - y]|^2$.

2. *Решение* $(\phi_s)_{0\le s\le t}$, *соответствующее этому управлению* $(\varphi_s)_{0\le s\le t}$, *с начальным условием* $\phi_0 = x$, *достигает* y *в момент t, то есть* $\phi_t = y$.

В частности,

$$I(t,x,y) < Ct|\mathbb{T}_t^{-1}(\theta_t(x) - y)|^2.$$

Доказательство. Фиксируем $t \in (0,T]$ и $x,y \in R^{2d}$. Мы ищем путь $(\phi_s)_{0\le s\le t}$, соответствующий управлению $(\varphi_s)_{0\le s\le t}$, такой, что его супремум не превосходит (с точностью до мультипликативной константы) $|\mathbb{T}_t^{-1}[\boldsymbol{\theta}_t(x) - y]|^2$, и такой, что $\phi_0 = x, \phi_t = y$

$$\dot{\phi}_s = \boldsymbol{F}(\phi_s) + B\varphi_s, 0 \le s \le t.$$

Вычитая путь $\left(\boldsymbol{\theta}_s(x)\right)_{0\le s\le t}$, являющийся решением системы ОДУ

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_s = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta}_s), \boldsymbol{\theta}_0 = x,$$

мы приходим к эквивалентной задаче нахождения пути из $\mathbf{0}$ в $y - \boldsymbol{\theta}_t(x)$ для *нелинейной* управляемой системы с функцией $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta}_s(x) + \cdot) - \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{\theta}_s(x)\right)$. Таким образом, без ограничения общности, мы можем предположить, что $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ является начальной точкой, $y - \boldsymbol{\theta}_t(x)$ – конечной точкой и $\boldsymbol{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Тогда, линеаризуя нелинейную систему, мы можем написать

$$\dot{\phi}_s = \boldsymbol{L}(\phi_s)\phi_s + B\varphi_s, 0 \le s \le t, \tag{9}$$

где

$$\boldsymbol{L}(\phi_s) = \int_0^1 \boldsymbol{D_x F}(\lambda\phi_s)\, d\lambda.$$

Для нахождения решения системы (9) используем теорему о неподвижной точке. Идея состоит в том, чтобы с каждым путём $(z_s)_{0\le s\le t} \in R^{2d}$ связать линейную задачу управления вида (1) (с $\Sigma_t \equiv I_d$ *и с матрицей* $(\boldsymbol{L}_s^{\boldsymbol{z}})_{0\le s\le t} = \int_0^1 \boldsymbol{D_x F}(\lambda z_s)\, d\lambda$) и искать неподвижную точку. Мы оставляем читателю в качестве упражнения проверить, что для каждого z пара $((\boldsymbol{L}_s^z)_{0\le s\le t}, I_d)$ удовлетворяет условиям Предложения 7. В частности, спектр K_t^z - ковариационной матрицы в момент t или, что то же самое, матрицы Грама $\mathfrak{C}_t^{\boldsymbol{z}}$, лежит в некотором интервале $[\gamma^{-1}, \gamma]$, где $\gamma > 0$ и не зависит от z. По Теореме 3.40 (Coron (2007)) отсюда следует, что линейная система (9) глобально управляема на $[0,t]$, то есть для каждой пары $x, y \in R^{2d}$ существует управление $(\varphi_s)_{0\le s\le t} \in L^\infty((0,t);R^d)$ такое, что решение задачи Коши

$$\dot{\phi}_s = \boldsymbol{L}(\phi_s)\phi_s + B\varphi_s, \phi_0 = x$$

удовлетворяет конечному условию $\phi_t = y$. Соответствующее управление имеет вид

$$\varphi_s = B^*[\mathcal{R}^{\phi}(t,s)]^*\left[K_t^{\phi}\right]^{-1}\big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{x})\big), 0 \le s \le t, \qquad (10)$$

где $\mathcal{R}^{\phi}$ – резольвента линейной системы $\dot{\phi}_s = \boldsymbol{L}(\phi_s)\phi_s$. Пункт 2 Предложения 9, таким образом, доказан. Для доказательства п.1 воспользуемся свойством подобия системы. Рассмотрим гауссовский процесс на $[0,1]$

$$\widehat{\boldsymbol{G}}_s^t = t^{1/2}\mathbb{T}_t^{-1}\boldsymbol{G}_{st}, s \in [0,1]. \qquad (11)$$

Очевидно, он удовлетворяет стохастическому уравнению

$$d\widehat{\boldsymbol{G}}_s^t = \widehat{\boldsymbol{L}}_s^t\widehat{\boldsymbol{G}}_s^t ds + B\widehat{\Sigma}_s^t d\widehat{W}_s^t, \widehat{\boldsymbol{G}}_0^t = t^{1/2}\mathbb{T}_t^{-1}x,$$

где

$$\widehat{\boldsymbol{L}}_s^t = t\mathbb{T}_t^{-1}L_{st}\mathbb{T}_t, \widehat{\Sigma}_s^t = \Sigma_{\mathrm{st}}, \widehat{W}_s^t = t^{-1/2}W_{st}.$$

При этом резольвенты связаны соотношением

$$\widehat{\mathcal{R}}^t(s_1, s_0) = \mathbb{T}_t^{-1}\mathcal{R}(s_1 t, s_0 t)\mathbb{T}_t. \qquad (12)$$

Полагая $s_1 = 1, s_0 = \frac{s}{t} < 1$, получим из (11), (12)

$$\mathcal{R}^{\phi}(t,s) = \mathbb{T}_t\widehat{\mathcal{R}}^{\phi,t}\left(1,\frac{s}{t}\right)\mathbb{T}_t^{-1}, \boldsymbol{K}_t^{\phi} = t^{-1}\mathbb{T}_t\widehat{\boldsymbol{K}}_1^{\phi,t}\mathbb{T}_t.$$

Учитывая, что $B^*t\mathbb{T}_t^{-1} = B^*$, из (10) получим

$$\varphi_s = B^*t\mathbb{T}_t^{-1}[\widehat{\mathcal{R}}^{\phi,t}\left(1,\frac{s}{t}\right)]^*\left[\widehat{\boldsymbol{K}}_1^{\phi,t}\right]^{-1}\mathbb{T}_t^{-1}\big(y - \boldsymbol{\theta}_t(x)\big) \qquad (13)$$

Коэффициенты преобразованного на отрезок $[0,1]$ уравнения снова удовлетворяют условиям ($\boldsymbol{R} - \eta$), **(UE)** , (**ND**-η), элементы матриц $\widehat{\mathcal{R}}^{\phi,t}\left(1,\frac{s}{t}\right)$ и $\left[\widehat{\boldsymbol{K}}_1^{\phi,t}\right]^{-1}$ ограничены ко нстантой, зависящей только от этих условий и T. Отсюда сразу следует п. 1 Предложения 9.

Доказательство нижней границы методом цепочки (chaining method).

Мы теперь имеем все необходимые вспомогательные утверждения для того, чтобы доказать нижнюю оценку в неравенствах (3) Теоремы В. Напомним (R. Bass, 1997), что в случае невырожденной диффузии идея получения нижней оценки для переходной плотности $p(s,t,x,y)$ методом цепочки состояла в рассмотрении

последовательности «зацепляющихся» шаров, образующих цепочку, центры шаров были расположены на прямой, соединяющей точки x и y**.** В нашем случае следует рассматривать последовательность эллипсоидов с центрами, лежащими на оптимальном пути $(\phi_s)_{0\le s\le T}$, построенном в Предложении 9 (где следует положить $t=T$).
Для фиксированных $x,x'\in R^{2d}, 0\le s<t\le T,$ $(T>0$ будет выбрано позднее, но оно предполагается достаточно малым) для $N\ge 1$ имеем из оценки (5) Лекции 9

$$p(s,t,x,x')\ge$$
$$\tilde p(s,t,x,x')-\sum_{k=1}^{N}\int_s^t\int_{R^{2d}}\tilde p(s,u,x,y)\left|H^{\otimes k}(u,t,y,x')\right|dydu$$
$$-\int_s^t\int_{R^{2d}}p(s,u,x,y)\left|H^{\otimes (N+1)}(u,t,y,x')\right|dydu.$$

Из второго неравенства Леммы 11, которое остаётся верным при замене $(t,1)$ на (u,t), имеем

$$p(s,t,x,x')\ge \tilde p(s,t,x,x')-$$
$$\sum_{k=1}^{N}C(k)\int_s^t\int_{R^{2d}}\tilde p(s,u,x,y)(t-u)^{\frac{k\eta}{2}-1}g_{C(k),t-u}\big(y-\boldsymbol{\theta}_{u,t}(x')\big)dydu$$
$$-C(N+1)\int_s^t\int_{R^{2d}}p(s,u,x,y)(t-u)^{\frac{(N+1)\eta}{2}-1}\times$$
$$g_{C(N+1),t-u}\big(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\theta}_{u,t}(x')\big)dydu.$$

Выберем $\lfloor N\eta/2\rfloor\ge 2d+1.$ Тогда, в силу Лемм 10 -12 и неравенств (10) Лекции 9

$$p(s,t,x,x')\ge \tilde p(s,t,x,x')-$$
$$C\,\frac{(t-s)^{\eta/2}}{(t-s)^{2d}}\exp\left(-C^{-1}(t-s)\left|\mathbb{T}_{t-s}^{-1}\big(\boldsymbol{\theta}_{t,s}(x)-x'\big)\right|^2\right)\ge$$

$$\frac{C^{-1}}{(t-s)^{2d}}\exp\left(-C(t-s)\left|\mathbb{T}_{t-s}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}_{t,s}(x)-x'\right)\right|^2\right)-$$
$$C\frac{(t-s)^{\eta/2}}{(t-s)^{2d}}\exp\left(-C^{-1}(t-s)\left|\mathbb{T}_{t-s}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}_{t,s}(x)-x'\right)\right|^2\right),$$

где нижняя граница для $\tilde{p}(s,t,x,x')$ может быть получена аналогично верхней границе для $\tilde{p}(s,t,x,x')$, приведённой в Лемме 11. Постоянная C зависит только от условий $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** , **(ND**-η). Обозначим

$$d_{s,t}(x,x') := (t-s)^{\frac{1}{2}}\left|\mathbb{T}_{t-s}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}_{t,s}(x)-x'\right)\right|.$$

Если $d_{s,t}(x,x') \le 1$, то
$p(s,t,x,x') \ge (t-s)^{-2d}\left[C^{-1}\exp(-C) - CT^{\eta/2}\right]$.
Следовательно, для $T \le (2C^2)^{-2/\eta}\exp\left(-\frac{2C}{\eta}\right)$

$$p(s,t,x,x') \ge C_0(t-s)^{-2d}, C_0 = \exp(-C)\,(2C)^{-1}. \qquad (14)$$

Итак, для $x,x' \in R^{2d}$, если $d_T(x,x') \triangleq d_{0,T}(x,x') \le 1$, то для достаточно малых T применима оценка (14). Для $d_T(x,x') > 1$ необходимо применить метод цепочки (chaining method). Мы собираемся определить множества, чьи центры равномерно распределены относительно множеств уровня энергии $I(T,x,x')$, соответствующей оптимальному пути $(\phi_s)_{0\le s\le T}, \phi_0 = x, \phi_T = x'$, построенному в Предложении 9. Напомним, что $(\varphi_s)_{0\le s\le T} \in L^\infty((0,T);R^d)$ - соответствующее оптимальное управление, заданное формулой (10) (где следует положить $t=T$). Определим разбиение отрезка $[0, I(T,x,x')]$

$$t_i = \begin{cases} := \inf\left\{t\in[t_{i-1},T]: \int_{t_{i-1}}^{t}|\varphi_s|^2 ds = \frac{I(T,x,x')}{M_0}\right\} \wedge \left(t_{i-1}+\frac{T}{M_0}\right), \\ \qquad \textit{если}\ t_{i-1} < T\left(1-\frac{2}{M_0}\right) \\ := T, \quad \textit{если}\ t_{i-1} \ge T\left(1-\frac{2}{M_0}\right), \end{cases}$$

где число $M_0 := \lceil K d_T^2 \rceil \ge 3$ *для* $K \ge 3$, число K будет выбрано позднее. Положим $\varepsilon_i := t_{i+1} - t_i, i \ge 1$.

Лемма 13 (контроль шага по времени). *Существует постоянная* $C_1 \le 1$, *зависящая только от условий* $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** , **(ND**-η), *и целое* $M_1 \in [\frac{M_0}{2}, \frac{M_0}{C_1}]$ *такие, что* $t_{M_1} = T$ *и*

$$\forall i \in \{0,1,\dots,< M_1 - 1\}, C_1\frac{T}{M_0} \le \varepsilon_i \le 2\frac{T}{M_0}. \qquad (15)$$

Доказательство. Положим $M_1 = \inf\{k \ge 1 : t_k = T\}$. Очевидно, множество M_1 не пусто. Верхняя граница в (15) следует из определения семейства $(t_i)_{i\ge 1}$. Предположим теперь, что $t_i < T\left(1 - \frac{2}{M_0}\right)$ для $0 \le i \le M_1 - 1$. Предположим также, что $t_{i+1} - t_i < \frac{T}{M_0}$ (в противном случае $\varepsilon_i = \frac{T}{M_0}$). Тогда, по построению семейства $(t_i)_{i\ge 1}$

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi_s|^2 ds = \frac{I(T,x,x')}{M_0}.$$

Согласно Предложению 9

$$\sup_{0\le s\le T}|\varphi_s| \le C|\mathbb{T}_T^{-1}(\boldsymbol{\theta}_T(x) - x')| = CT^{-1/2}d_T,$$

где постоянная C зависит только от условий $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** , **(ND-**η**)**. Следовательно,

$$\frac{I(T,x,x')}{M_0} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi_s|^2 ds \le C^2\varepsilon_i T^{-1} d_T^2.$$

Из оценок Предложений 8 и 9 следует, что, модифицируя, если потребуется, константу C, получим

$$\frac{d_T^2}{M_0} \le C^2\varepsilon_i T^{-1} d_T^2,$$

откуда следует нижняя оценка (15). Интервал значений для M_1 сразу следует из полученных оценок для ε_i.

Положим теперь для всех $i \in \{0,1,\dots,M_1\}$ $y_i = \phi_{t_i}$ (здесь $(t_i)_{i\ge 1}$ те же, что и в Лемме 13, а $(\phi_s)_{0\le s\le T}$ - путь из x в x', соответствующий оптимальному управлению Предложения 9). В частности, $y_0 = x$, $y_{M_1} = x'$. Введём следующие множества

$$B_i := \Big\{z \in R^{2d} : K^{1/2}\rho\left(\left|\mathbb{T}_{K\rho^2}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1}) - z)\right| + \left|\mathbb{T}_{K\rho^2}^{-1}(z - \boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i+1}}(y_{i+1}))\right|\right) \le K^{-1/2}\Big\},$$

где $\rho = \frac{T^{\frac{1}{2}} d_T}{M_0}$. Имеем очевидную оценку снизу (с $x_0 = x$ и $x_{M_1} = x'$)

$$p(0, T, x, x') \geq \int_{\prod_{i=1}^{M_1-1} B_i} \prod_{i=0}^{M_1-1} p(t_i, t_{i+1}, x_i, x_{i+1}) dx_1 dx_2 \dots dx_{M_1-1}. \quad (16)$$

Следующая лемма, доказательство которой мы приведём ниже, позволяет завершить получение нижней границы в Теореме B, а вместе с этим и завершить доказательство Теоремы B.

Лемма 14. *Существует постоянная K_0, зависящая только от условий $(\boldsymbol{R} - \eta)$,* **(UE)** , **(ND**-η), *такая, что при $K \geq K_0$*

$$\begin{aligned}
&\forall i \in \{0,1, \dots, < M_1 - 2\}, \forall (x_i, x_{i+1}) \in B_i \times B_{i+1}, \\
&\varepsilon_i^{1/2} \left| \mathbb{T}_{\varepsilon_i}^{-1} \left(\boldsymbol{\theta}_{t_{i+1}, t_i}(x_i) - x_{i+1} \right) \right| \leq 1, \qquad (17) \\
&\forall x_1 \in B_1, \quad \varepsilon_0^{1/2} \left| \mathbb{T}_{\varepsilon_0}^{-1} \left(\boldsymbol{\theta}_{t_1, 0}(x) - x_1 \right) \right| \leq 1, \\
&\forall x_{M_1-1} \in B_{M_1-1}, \quad \varepsilon_{M_1-1}^{1/2} \left| \mathbb{T}_{\varepsilon_{M_1-1}}^{-1} \left(\boldsymbol{\theta}_{T, t_{M_1-1}}(x_{M_1-1}) - x' \right) \right| \leq 1.
\end{aligned}$$

Более того, для $K \geq K_0$ и для того же C_1, что и в Лемме 13, получим

$$\forall i \in \{0,1, \dots, < M_1 - 1\}, \qquad |B_i| \geq C_1 \rho^{4d}, \qquad (18)$$

где $|B_i|$ —мера Лебега множества B_i.

Закончим доказательство Теоремы B в предположении, что Лемма 14 доказана. Лемму 14 докажем ниже.

Пусть $K \geq K_0$. Из (14), (16), (17) получим

$$p(0, T, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \geq \frac{C_0}{\varepsilon_0^{2d}} \prod_{i=1}^{M_1-1} \frac{C_0}{\varepsilon_i^{2d}} |B_i|, \qquad (19)$$

Подставляя нижнюю границу из (18) и верхнюю границу из (15) в (19), при $\rho = T^{1/2} d_T / M_0$, получим

$$p(0, T, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \geq \left(\frac{C_0 C_1}{2^{2d}} \right)^{M_1} \left(\frac{M_0}{T} \right)^{2d} \left(\frac{d_T^2}{M_0} \right)^{(M_1-1)2d}.$$

Далее, по определению M_0 , $M_0 - 1 \leq K d_T^2$ (напомним, что $d_T(x, x') > 1$), поэтому $\frac{d_T^2}{M_0} \geq \frac{1}{K+1}$. Полагая

$$C_2 := \frac{C_0 C_1}{(2(K+1))^{2d}} < 1,$$

(для K достаточно большого), получим

$$p(0,T,x,x') \geq C_2^{M_1}(K+1)^{2M_1 d}\left(\frac{M_0}{T}\right)^{2d}(K+1)^{-2(M_1-1)d} =$$

$$T^{-2d}(K+1)^{2d}(M_0)^{2d}C_2^{M_1} \geq T^{-2d}C_2^{M_1} = T^{-2d}\exp\left(-M_1 \ln\left(\frac{1}{C_2}\right)\right).$$

По Лемме 13 $M_1 \leq \frac{M_0}{C_1}$, поэтому

$$p(0,T,x,x') \geq T^{-2d}\exp\left(-\frac{M_0}{C_1}\ln\left(\frac{1}{C_2}\right)\right) =$$

$$T^{-2d}\exp\left(-\frac{1}{C_1}\ln\left(\frac{1}{C_2}\right)\right)\exp\left(-\frac{M_0-1}{C_1}\ln\left(\frac{1}{C_2}\right)\right) \geq$$

$$T^{-2d}\exp\left(-\frac{1}{C_1}\ln\left(\frac{1}{C_2}\right)\right)\exp\left(-\frac{Kd_T^2}{C_1}\ln\left(\frac{1}{C_2}\right)\right). \qquad (20)$$

Напомним, что $K > K_0$ выбрана так, чтобы $\ln\left(\frac{1}{C_2}\right)$ был положителен. При таком выборе все параметры зависят только от условий $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** , **(ND**-η). Оценка (20) даёт желаемую нижнюю грань для коротких времён T. Для произвольного интервала $[0,T]$ его следует разбить на конечное число коротких интервалов, применить марковское свойство и Лемму 10 для оценки снизу свёрток.

Доказательство Леммы 14. Начнём с доказательства неравенств (17). Зафиксируем $(x_i, x_{i+1}) \in B_i \times B_{i+1}$, $i = \{1,2,\dots,M_1-2\}$. Согласно неравенствам (10) Лекции 9, найдётся постоянная C_3, зависящая только от условий $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** , **(ND**-η), такая, что

$$Q_i := \varepsilon_i^{1/2}\left|\mathbb{T}_{\varepsilon_i}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}_{t_{i+1},t_i}(x_i) - x_{i+1}\right)\right| \leq$$

$$C_3\varepsilon_i^{1/2}\left|\mathbb{T}_{\varepsilon_i}^{-1}\left(x_i - \boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i+1}}(x_{i+1})\right)\right| \leq C_3\varepsilon_i^{1/2}\left\{\left|\mathbb{T}_{\varepsilon_i}^{-1}\left(x_i - \boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1})\right)\right| +\right.$$

$$\left.\left|\mathbb{T}_{\varepsilon_i}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1}) - y_i\right)\right| + \left|\mathbb{T}_{\varepsilon_i}^{-1}\left(y_i - \boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i+1}}(x_{i+1})\right)\right|\right\} := Q_i^1 + Q_i^2 + Q_i^3.$$

Имеем

$$Q_i^1 \leq C_3\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_i^{\frac{1}{2}-j}\left|\left(x_i - \boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1})\right)_j\right| =$$

$$C_3 \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\varepsilon_i}{K\rho^2}\right)^{\frac{1}{2}-j} (K\rho^2)^{\frac{1}{2}-j} \left|\left(x_i - \boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1})\right)_j\right|.$$

Из (15) и определений ρ и M_0 следует оценка

$$\frac{\varepsilon_i}{K\rho^2} \geq C_1 \frac{M_0}{Kd_T^2} \geq C_1.$$

Таким образом, для $j = 1,2$

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{K\rho^2}\right)^{\frac{1}{2}-j} \leq (C_1)^{\frac{1}{2}-j} \leq C_1^{-2}$$

и

$$Q_i^1 \leq C_3 C_1^{-2} \sum_{j=1}^{2} (K\rho^2)^{\frac{1}{2}-j} \left|\left(x_i - \boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1})\right)_j\right| =$$

$$C_3 C_1^{-2} K^{1/2} \rho \left|\mathbb{T}_{K\rho^2}^{-1}\left(x_i - \boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1})\right)\right| \leq C_3 C_1^{-2} K^{-1/2},$$

где в последнем неравенстве мы использовали то, что $x_i \in B_i$. Слагаемое Q_i^3 оценивается аналогично, откуда $Q_i^1 + Q_i^3 \leq 2C_3 C_1^{-2} K^{-1/2}$. Из Предложений 8 и 9 и из выбора узлов разбиения $(t_i)_{i\geq 1}$ следует, что найдётся постоянная C_4, зависящая только от условий $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** , (**ND**-η), такая, что

$$Q_i^2 \leq C_4 I(t_{i-1}, t_i, y_{i-1}, y_i) \leq C_4 \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi_s|^2 ds \leq C_4 \frac{I(T, x, x')}{M_0} \leq$$

$$C_4^2 \frac{d_T^2}{M_0} \leq \frac{C_4^2}{K}.$$

Таким образом, $\forall i \in \{0,1, \dots, < M_2 - 1\}$ $Q_i \leq 1$, если выбрать K достаточно большим (относительно величин, являющихся функциями только параметров условий $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** , (**ND**-η)).

Для $x_1 \in B_1$ *и* $x_{M_1-1} \in B_{M_1-1}$слагаемые

$$Q_0 := \varepsilon_0^{\frac{1}{2}} \left|\mathbb{T}_{\varepsilon_0}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}_{t_1,0}(x) - x_1\right)\right|$$

и

$$Q_{M_1-1} := \varepsilon_{M_1-1}^{1/2} \left|\mathbb{T}_{\varepsilon_{M_1-1}}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}_{T,t_{M_1-1}}(x_{M_1-1}) - x'\right)\right| \leq$$

$$C_3\varepsilon_{M_1-1}^{1/2}\left|\mathbb{T}_{\varepsilon_{M_1-1}}^{-1}\left(x_{M_1-1}-\boldsymbol{\theta}_{t_{M_1-1},T}(x')\right)\right|$$

могут быть оценены аналогично $Q_i^1,\ i\in\{0,1,\dots,<M_2-1\}$. Таким образом, неравенства (17) доказаны. Остаётся оценить снизу Лебеговы меры множеств $(B_i)_{i\in\{1,2,\dots,M_1-1\}}$. Рассмотрим для $i\in\{0,1,\dots,<M_1-1\}$ эллипсоиды $E_i:=\left\{z\in R^{2d}: K^{1/2}\rho\left|\mathbb{T}_{K\rho^2}^{-1}(y_i-z)\right|\le\frac{1}{3}K^{-1/2}\right\}$. Имеем

$$|E_i|=C_5 3^{-2d}K^{-d}(K\rho^2)^{2d},$$

где постоянная C_5 зависит только от d. Модифицируя константу C_5, если необходимо, получим, что $|E_i|\ge C_5\rho^{4d}$ для $K\ge1$. Покажем, что $E_i\subset B_i$. Пусть $z\in E_i$. Оценим сверху R_i

$$R_i:=K^{1/2}\rho\left(\left|\mathbb{T}_{K\rho^2}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1})-z)\right|+\right.$$

$$\left.\left|\mathbb{T}_{K\rho^2}^{-1}(z-\boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i+1}}(y_{i+1}))\right|\right)\le K^{1/2}\rho\left(\left|\mathbb{T}_{K\rho^2}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1})-y_i)\right|+\right.$$

$$\left.2\left|\mathbb{T}_{K\rho^2}^{-1}(y_i-z)\right|+\left|\mathbb{T}_{K\rho^2}^{-1}(y_i-\boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i+1}}(y_{i+1}))\right|\right):=R_i^1+R_i^2+R_i^3.$$

По определению множества E_i слагаемое R_i^2 не превосходит $\frac{2}{3}K^{-1/2}$. Имеем также

$$R_i^1\le C_6\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\varepsilon_i}{K\rho^2}\right)^{j-\frac12}\varepsilon_i^{\frac12-j}\left|\left(\boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1})-y_i\right)_j\right|\le$$

$$C_6\left(\frac{2M_0}{Kd_T^2}\right)^2\varepsilon_i^{1/2}\left|\mathbb{T}_{\varepsilon_i}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{t_i,t_{i-1}}(y_{i-1})-y_i)\right|\le\frac{C_6^2}{K}\left(\frac{2(Kd_T^2+1)}{Kd_T^2}\right)^2\le$$

$$\frac{16C_6^2}{K}.$$

Слагаемое R_i^3 может быть оценено аналогично. Отсюда следует, что $R_i\le K^{-1/2}$, если K выбрать достаточно большим. Теорема B тем самым полностью доказана.

Лекция 2.
Построение фундаментального решения методом Е.Е. Леви.

Литература:

- А.М.Ильин, А.С. Калашников, О.А. Олейник. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. Успехи мат. наук, т. XVII, вып. 3 (105), с. 3-146, 1962.
- A. Friedman. Partial differential equations of parabolic type. Prentice-Hall, 1964.

В этой лекции мы опишем основные этапы метода параметрикса в том виде, как он изложен в статье А. М.Ильина, А.С. Калашникова и О.А. Олейник (1962). Следует отметить, что обозначения этой статьи и некоторые операторы, введённые в ней, несколько отличаются от тех, которые мы будем использовать в дальнейшем. Различия касаются определения прямого и сопряжённого операторов (они «меняются местами», см. уравнения (1) и (2) ниже) и точки, в которой «замораживаются» коэффициенты. У нас это будет «конечная» точка (t, y), а в статье А.М.Ильина, А.С. Калашникова и О.А. Олейник – это «начальная» точка (s, x). Все эти различия не носят принципиального характера, мы сохраняем обозначения статьи для удобства читателя.

Рассмотрим уравнения

$$\frac{\partial p(s,t,x,y)}{\partial t} = L_y p = \sum_{i,j} a_{ij}(t,y) \frac{\partial^2 p(s,t,x,y)}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_i b_i(t,y) \frac{\partial p(s,t,x,y)}{\partial y_i} \qquad (1)$$

и

$$-\frac{\partial p(s,t,x,y)}{\partial s} = L_x^* p = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 [a_{ij}(s,x) p(s,t,x,y)]}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_i \frac{\partial [b_i(s,x) p(s,t,x,y)]}{\partial x_i} \qquad (2)$$

Теорема 4. *Пусть все коэффициенты уравнения (1) ограничены и непрерывны в* $\overline{H} = \{0 \le t \le T, y \in R^d\}$ *по совокупности переменных* (t, y) *и удовлетворяют условию Гёльдера по y:*

$$\left|a_{ij}(t, y') - a_{ij}(t, y)\right| \le M|y' - y|^{\alpha},$$

$$|b_i(t, y') - b_i(t, y)| \le M|y' - y|^{\alpha},$$

Пусть, кроме того, коэффициенты a_{ij} *в* $\overline{H}$ *удовлетворяют условию Гёльдера по* t:

$$\left|a_{ij}(t', y) - a_{ij}(t, y)\right| \le M|t' - t|^{\alpha}.$$

Предположим также, что выполнено условие равномерной эллиптичности:

$$\underline{\mu}\sum_{i=1}^{d}\theta_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\,(t, y)\theta_i\theta_j \le \bar{\mu}\sum_{i=1}^{d}\theta_i^2.$$

При этих предположениях существует единственное фундаментальное решение $p(s, t, x, y)$ *уравнения (1) в слое* $H = \{0 < t \le T, x \in R^d\}$.

Для $p(s, t, x, y)$ *справедливы оценки:*

$$|p(s, t, x, y)| \le M(t - s)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{\mu_1|y - x|^2}{t - s}\right),$$

$$\left|\frac{\partial p(s, t, x, y)}{\partial x_i}\right| \le M(t - s)^{-\frac{d+1}{2}} \exp\left(-\frac{\mu_1|y - x|^2}{t - s}\right),$$

$$\left|\frac{\partial^2 p(s, t, x, y)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \le M(t - s)^{-\frac{d+2}{2}} \exp\left(-\frac{\mu_1|y - x|^2}{t - s}\right),$$

$$\left|\frac{\partial^2 p(s, t, x, y)}{\partial t}\right| \le M(t - s)^{-\frac{d+2}{2}} \exp\left(-\frac{\mu_1|y - x|^2}{t - s}\right),$$

где M *и* μ_1 *- положительные постоянные. Функция* $p(s, t, x, y)$ *положительна всюду при* $t > s$. *Если в* $\overline{H} = \{0 \le t \le T, x \in R^d\}$ *существуют ограниченные и непрерывные производные* $\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_j}, \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}, \frac{\partial b_i}{\partial y}$, *удовлетворяющие условию Гёльдера по y,* *то* $p(s, t, x, y)$ *как функция переменных* s, x *при* $t > s$ *удовлетворяет уравнению (2), сопряжённому к (1).*

Доказательство. Подробное доказательство довольно длинно (стр. 69-83 статьи А.М.Ильина, А.С. Калашникова и О.А. Олейник) . Мы укажем только основные этапы доказательства.

Шаг 1. Будем искать фундаментальное решение в виде:

$$p(s,t,x,y) = \tilde{p}(s,t,x,y) + \int_s^t d\tau \int_{R^d} \tilde{p}(\tau,t,z,y)\Phi(s,\tau,x,z)dz \qquad (3)$$

где функция $\tilde{p}(s,t,x,y)$ задана соотношением

$$\tilde{p}(s,\tau,x,z) = [4\pi(\tau-s)]^{-\frac{d}{2}}(\det\|a_{ij}\ (s,x)\ \|)^{-1/2}$$

$$\exp\left(-\frac{\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}^{-1}(s,x)(z_i-x_i)\left(z_j-x_j\right)}{4(\tau-s)}\right).$$

Отметим ещё раз, что у «замороженной» гауссовской плотности заморозка производится в «начальной» точке (s,x). Ядро $\Phi(s,\tau,x,z)$ подлежит определению. Предполагается, что ядро $\Phi(s,\tau,x,z)$ непрерывно по совокупности переменных при $\tau > s$ и при любых x,z допускает оценку

$$|\Phi(s,\tau,x,z)| < M(\tau-s)^{-\frac{d}{2}-1+\lambda_1} \exp\left(-\frac{\mu_2|z-x|^2}{\tau-s}\right), \qquad (4)$$

где $\lambda_1 > 0, \mu_2 > 0$. Предполагается также, что при $|y'-y|^2 < a(t-\tau)$, где $a > 0$, справедлива оценка

$$|\Phi(\tau,t,z,y') - \Phi(\tau,t,z,y)| \leq M|y'-y|^{\lambda_2}(t-\tau)^{-\frac{d}{2}-1+\lambda_3}$$
$$\times \exp\left(-\frac{\mu_3|y-z|^2}{t-\tau}\right), \qquad (5)$$

где $\lambda_i > 0, \mu_3 > 0,\ i = 2,3$. В предположениях (4) и (5) доказывается, что функция $V(s,t,x,y)$, задающая несобственный интеграл в (3)

$$V(s,t,x,y) = \int_s^t d\tau \int_{R^d} \tilde{p}(\tau,t,z,y)\Phi(s,\tau,x,z)dz$$

непрерывна по совокупности аргументов и обладает непрерывными частными производными

$\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial y_i}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y}$, $i, j = 1,2, \ldots, d,$ при $t > s$. Для всех упомянутых частных производных получены явные выражения.

Шаг 2. Для того, чтобы $\left(L_y - \frac{\partial}{\partial t}\right) p = 0$ необходимо, чтобы искомая функция Ф удовлетворяла следующему интегральному уравнению

$$\Phi(s, t, x, y) = \left(L_y - \frac{\partial}{\partial t}\right) \tilde{p}(s, t, x, y) + \int_s^t d\tau \int_{R^d} \left(L_y - \frac{\partial}{\partial t}\right) \tilde{p}(\tau, t, z, y) \Phi(s, \tau, x, z) dz \tag{6}$$

Решение этого уравнения ищется в виде

$$\Phi(s, t, x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(s, t, x, y), \tag{7}$$

где

$$\Phi_1(s, t, x, y) = \left(L_y - \frac{\partial}{\partial t}\right) \tilde{p}(s, t, x, y),$$

$$\Phi_{m+1}(s, t, x, y) = \int_s^t d\tau \int_{R^d} \left(L_y - \frac{\partial}{\partial t}\right) \tilde{p}(\tau, t, z, y) \Phi_m(s, \tau, x, z) dz.$$

Заметим, что $\Phi_1(s, t, x, y) = \sum_{i,j=1}^{d} \left[a_{ij}(t, y) - a_{ij}(s, x)\right] \frac{\partial^2 \tilde{p}(s,t,x,y)}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(t, y) \frac{\partial \tilde{p}(s,t,x,y)}{\partial y_i}$.

Шаг 3. Индукцией по m нетрудно доказать, что ряд (7) быстро сходится к решению интегрального уравнения (6), причём сходимость равномерна в любой области вида $\{t - s \geq \delta, x \in R^d, y \in R^d, \delta > 0\}$. Более того, имеет место оценка

$$|\Phi_m(s, t, x, y)| \leq M^m \frac{\Gamma^m(\alpha)}{\Gamma(m\alpha)} (t - s)^{m\alpha - \frac{d}{2} - 1} \exp\left(-\frac{\mu_4 |y - x|^2}{t - s}\right), \tag{8}$$

m=1,2,… Далее, используя свойства гёльдеровости коэффициентов a_{ij} и b_i можно показать, что сумма ряда $\Phi(s, t, x, y)$ действительно удовлетворяет неравенствам (4) и (5) и, таким образом, функция $p(s, t, x, y)$ в (3) при $t > s$ непрерывна по совокупности аргументов вместе с первыми и вторыми производными по x и

$$\left(L_y - \frac{\partial}{\partial t}\right) p(s, t, x, y) = 0.$$

Остальные свойства фундаментального решения для построенной функции $p(s,t,x,y)$ следуют из представления (3) и того, что они выполнены для функции $\tilde{p}(s,t,x,y)$. Гауссовские оценки для $p(s,t,x,y)$ и её производных следуют из соответствующих оценок для $\tilde{p}(s,t,x,y)$ и неравенств (8).

Шаг 4. Положительность и единственность $p(s,t,x,y)$ следует из свойств решений задачи Коши. Здесь используется то, что функция

$$u(s,x)=\int_{R^d} p(s,t,x,y)\varphi(y)dy$$

является ограниченным решением задачи Коши для уравнения

$$\left(L_y-\frac{\partial}{\partial t}\right)u=0$$

в слое $H_s=\{0\le s<t\le T, x\in R^d\}$ с «конечным» условием $u(t_-,x)=\varphi(x)$, где $\varphi(x)-$произвольная непрерывная финитная функция. Наконец, то, что $p(s,t,x,y)$ по переменным s,x удовлетворяет сопряжённому уравнению (2), доказывается также как и в работе А. М. Ильин, А.С. Калашников, О.А. Олейник, стр. 82-83. Мы видим, что доказательство теоремы довольно сложно и длинно, и неясно, как получить дискретный аналог, адаптированный к задаче аппроксимации цепей Маркова.

Лекция 3.
Построение фундаментального решения методом Мак Кина и Зингера.

Литература:

- V. Konakov and E. Mammen. Local limit theorems for transition densities of Markov chains converging to diffusions. *Prob. Th. Rel. Fields*, 117:551–587, 2000.
- McKean, H.P., Singer, I.M.: Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. *J. Differential Geometry* 1, 43–69, 1967.

Мы возвращаемся к обозначениям первой лекции. Рассмотрим диффузионный процесс $X(t)$, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения (СДУ)

$$dX(t) = b\big(X(t)\big)dt + \sigma\big(X(t)\big)dW(t), X(0) = x, t \in [0,1],$$

где $W(t)$ – стандартный d – мерный винеровский процесс, $\sigma(z)$ – симметрическая матрица такая, что матрица $a(z) = \sigma(z) \cdot \sigma^*(z)$ удовлетворяет условию равномерной эллиптичности.
Предположим, что функции $b(z)$ и $a(z)$ ограничены и удовлетворяют условию Гёльдера, кроме того, существуют ограниченные и непрерывные производные $\frac{\partial a_{ij}}{\partial z_j}, \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial z \partial z_j}, \frac{\partial b_i}{\partial z_i}$, удовлетворяющие условию Гёльдера. Тогда существует переходная плотность $p(t-s,x,y)$, которая является фундаментальным решением прямого и обратного уравнений Колмогорова

$$-\frac{\partial p(t-s,x,y)}{\partial s} = L_x p =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 p(t-s,x,y)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x)\frac{\partial p(t-s,x,y)}{\partial x_i} \qquad (1)$$

и

$$\frac{\partial p(t-s,x,y)}{\partial t} = L_y^* p =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2[a_{ij}(y)p(t-s,x,y)]}{\partial y_i \partial y_j} - \sum_i \frac{\partial[b_i(y)p(t-s,x,y)]}{\partial y_i}\ . \quad (2)$$

Наша ближайшая цель - получить представление переходной плотности $p(t-s,x,y)$ в виде бесконечного ряда, членами которого являются гауссовские плотности, свёрнутые с сингулярным ядром. Опишем соответствующую конструкцию. Для каждого $0 < s < 1$ и $x, y \in R^d$ определим дополнительный диффузионный процесс $\tilde{X} = \tilde{X}_{s,x,y}$. Этот процесс определён на интервале $s \le t \le 1$ и является решением следующего стохастического дифференциального уравнения (СДУ):

$$d\tilde{X}(t) = b(y)dt + \sigma(y)dW(t), \tilde{X}(s) = x, t \in [s,1].$$

Процессы $\tilde{X}_{s,x,y}$ будем называть **замороженными диффузиями** (поскольку коэффициенты СДУ «заморожены» в точке y). Отметим, что «замораживание» коэффициентов СДУ для $\tilde{X}$ производится в *конечной* точке y. Переходная плотность $\tilde{p}^y(t-s,x,y)$ такой диффузии - гауссовская

$$\tilde{p}^y(t-s,x,y) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}(t-s)^{-\frac{d}{2}}(\det a(y))^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times \exp\left(-\frac{1}{2(t-s)}\{y-x-b(y)(t-s)\}^* a^{-1}(y)\{y-x - b(y)(t-s)\}\right)$$

Важно отметить, что переменная y входит в выражение для плотности **двояко**: как аргумент плотности и как точка, в которой заморожены коэффициенты СДУ.

Введём необходимые для дальнейшего обозначения. Сингулярное ядро $H(t-s,x,y)$ определим следующим образом

$$H(t-s,x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(a_{ij}(x)-a_{ij}(y)\right)\frac{\partial^2\tilde{p}(t-s,x,y)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i \left(b_i(x)-b_i(y)\right)\frac{\partial \tilde{p}(t-s,x,y)}{\partial x_i}$$

Введём также бинарную операцию $\otimes$ типа свёртки

$$(f \otimes g)(s,t,x,y) = \int_s^t d\tau \int_{R^d} f(s,\tau,x,z) g(\tau,t,z,y) dz$$

Лемма 1. *Для* $0 \le s < t \le 1$ *имеет место следующее представление*

$$p(t-s,x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} (\tilde{p} \otimes H^{(r)})(t-s,x,y), \tag{3}$$

где, по определению, $\tilde{p} \otimes H^{(0)} = \tilde{p}$, $\tilde{p} \otimes H^{(r)} = \left(\tilde{p} \otimes H^{(r-1)}\right) \otimes H\right)$

Доказательство. Имеет место следующее тождество

$$p(t-s,x,y) - \tilde{p}^y(t-s,x,y) =$$

$$\int_s^t du \frac{\partial}{\partial u}\left[\int_{R^d} p(u-s,x,z)\, \tilde{p}^y(t-u,z,y) dz\right] =$$

$$\int_s^t du \int_{R^d} \frac{\partial}{\partial u}[p(u-s,x,z)]\, \tilde{p}^y(t-u,z,y) +$$

$$p(u-s,x,z) \frac{\partial}{\partial u}[\tilde{p}^y(t-u,z,y)] dz$$

$$= \int_s^t du \int_{R^d} [L_z^* p(u-s,x,z)\, \tilde{p}^y(t-u,z,y) -$$

$$p(u-s,x,z) \tilde{L}_z^y \tilde{p}^y(t-u,z,y)\big] dz =$$

$$\int_s^t du \int_{R^d} p(u-s,x,z)\left(L_z-\tilde{L}_z^y\right)\tilde{p}^y(t-u,z,y)dz$$

$$=(p\otimes H)(t-s,x,y).$$

Первое равенство следует из обычной формулы Ньютона-Лейбница и того, что $p(0,x,y)=\tilde{p}(0,x,y)=\delta(y-x)$. Далее используются прямое и обратное уравнения Колмогорова, определение ядра и операции $\otimes$. Последнее уравнение может быть записано кратко следующим образом: $p=\tilde{p}+p\otimes H$. Итерируя, получим ряд (3). Ряд (3) быстро сходится к функции $p(t-s,x,y)$.

Лемма 2. *Существуют* $C<\infty$ *и* $c>0$ *такие, что при всех* $0\le s<t\le T, x\in R^d, y\in R^d$, *справедливы оценки*

$$\tilde{p}^y(t-s,x,y)\le Cp_c(t-s,x,y),$$

$$\left|\tilde{p}\otimes H^{(r)}(t-s,x,y)\right|\le C^{r+1}(t-s)^{\frac{r}{2}}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{r+1}}{\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)}p_c(t-s,x,y),\qquad(4)$$

где

$$p_c(t-s,x,y)=\left(\frac{c}{2\pi(t-s)}\right)^{d/2}\exp\left(-c\frac{|y-x|^2}{t-s}\right),0<c<\infty.$$

Так как $\Gamma(r\lambda)\ge[r\lambda-1]!$ для $r\lambda>2$, то из оценки (4) вытекает абсолютная и равномерная сходимость ряда (3) при $t>s$, а также справедливость для функции $p(t-s,x,y)$ оценки

$$p(t-s,x,y)\le Cp_c(t-s,x,y)$$

Задача 1. Убедиться прямой выкладкой, что функция $p(t-s,x,y)$, определенная рядом (3), является решением уравнений (1) и (2).

Дискретный аналог метода параметрикса для цепей Маркова.

Пусть на отрезке $[0,1]$ задана последовательность разбиений $\Gamma_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,1\right\}$ и последовательность цепей Маркова $X_t^{(n)}$ с дискретным временем и непрерывным пространством состояний.

Цепи $X_t^{(n)}$определены на решётке $\Gamma_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$, имеют начальное распределение $\delta_{x_0}(\cdot)$, а динамика этой цепи описывается следующим рекуррентным соотношением

$$X_{\frac{i+1}{n}}^{(n)} = X_{\frac{i}{n}}^{(n)} + \frac{1}{n} b\left(X_{\frac{i}{n}}^{(n)}\right) + \frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon_{\frac{i+1}{n}}^{(n)}, \tag{5}$$

$0 \le i \le n-1, X_0^{(n)} = x.$

Рассмотрим семейство плотностей $q_x(\cdot)$, параметризованное точками евклидова пространства $x \in R^d$, и удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\int_{R^d} z q_x(z) dz = 0, \forall x \in R^d.$
2. $\int_{R^d} z_i z_j q_x(z) dz = a_{ij}(x).$

Сделаем «марковские» предположения относительно ошибок $\varepsilon_{\frac{i+1}{n}}^{(n)}$, а именно: предположим, что условное распределение

$$\mathcal{L}\left(\varepsilon_{\frac{i+1}{n}}^{(n)} \mid X_{\frac{i}{n}}^{(n)} = x_i, X_{\frac{i-1}{n}}^{(n)} = x_{i-1}, \dots\right)$$

зависит только от последнего значения x_i и имеет плотность $q_{x_i}(\cdot)$, то есть является элементом семейства $q_x(\cdot)$, соответствующим значению параметра $x = x_i$. В условиях равномерной эллиптичности матрицы $\|a_{ij}\|$ для любого $t > s,\ s \in \Gamma_n,\ t \in \Gamma_n$ существует переходная плотность $p_n(t-s, x, \cdot)$. По аналогии с семейством «замороженных» диффузий, введём семейство **«замороженных» цепей Маркова.** Для каждого $0 < s = \frac{j}{n} < 1$ и $x, y \in R^d$ определим цепь Маркова $\tilde{X}_t^{(n)} = \tilde{X}_{s,x,y}^{(n)}$. Эта цепь определена на решётке $\{\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}, \dots, 1\}$ следующим рекуррентным соотношением

$$\tilde{X}_{\frac{i+1}{n}}^{(n)} = \tilde{X}_{\frac{i}{n}}^{(n)} + \frac{1}{n} b(y) + \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\varepsilon}_{\frac{i+1}{n}}^{(n)}, \tag{6}$$

$j \le i \le n-1$, $\tilde{X}^{(n)}_{\frac{j}{n}} = x$, где условное распределение

$$\mathcal{L}\left(\tilde{\varepsilon}^{(n)}_{\frac{i+1}{n}} \mid \tilde{X}^{(n)}_{\frac{i}{n}} = x_i, \tilde{X}^{(n)}_{\frac{i-1}{n}} = x_{i-1}, \ldots\right)$$

имеет плотность $q_y(\cdot)$, не зависящую от условия. Нетрудно видеть, что при этих предположениях приращения $\tilde{X}^{(n)}_{\frac{i+1}{n}} - \tilde{X}^{(n)}_{\frac{i}{n}}$ независимы при разных i и полное приращение $\tilde{X}^{(n)}_1 - \tilde{X}^{(n)}_0$ на отрезке $[0,1]$ является суммой n независимых, одинаково распределённых случайных векторов $\tilde{X}^{(n)}_{\frac{i+1}{n}} - \tilde{X}^{(n)}_{\frac{i}{n}}, i = 0,1,\ldots,n-1$. Обозначим через $\tilde{p}^y_n(t-s,x,\cdot)$ переходную плотность этой цепи. Введём необходимые для дальнейшего обозначения. Сначала определим дискретный аналог H_n ядра H, где

$$H(t-u,z,y) = \left(L_z - \tilde{L}^y_z\right)\tilde{p}^y(t-u,z,y).$$

Пусть $\varphi \in C^\infty_0(R^d)$, рассмотрим инфинитезимальные операторы цепей (5) и (6)

$$L^n\varphi(x) = \frac{E\left(\varphi\left(X^{(n)}_{\frac{1}{n}}\right)\middle| X^{(n)}_0 = x\right) - \varphi(x)}{\frac{1}{n}},$$

$$\tilde{L}^{n,y}\varphi(x) = \frac{E\left(\varphi\left(\tilde{X}^{(n)}_{\frac{1}{n}}\right)\middle| \tilde{X}^{(n)}_0 = x\right) - \varphi(x)}{\frac{1}{n}}.$$

Для $j' > j$ рассмотрим

$$H_n\left(\frac{j'}{n} - \frac{j}{n}, z, y\right) = \left(L^n - \tilde{L}^{n,y}\right)\tilde{p}^y_n\left(\frac{j'}{n} - \frac{j+1}{n}, z, y\right) \qquad (7)$$

Введём дискретный аналог $\otimes_n$ бинарной операции $\otimes$

$$(f \otimes_n g)\left(\frac{j'}{n} - \frac{j}{n}, x, y\right) = \sum_{i=j}^{j'-1}\frac{1}{n}\int_{R^d} f\left(\frac{i}{n} - \frac{j}{n}, x, z\right) g\left(\frac{j'}{n} - \frac{i}{n}, z, y\right) dz.$$

В этом определении мы принимаем следующее соглашение: все суммы вида $\sum_{i=j}^{j'-1} \ldots$, где $j' \le j$ мы полагаем равными нулю. Таким образом, ряды вида

$$\sum_{r=0}^{\infty} \tilde{p}_n \otimes_n H_n^{(r)}(1,x,y) \text{ и } \sum_{r=0}^{\infty} (\tilde{p} \otimes_n H^{(r)})(1,x,y),$$

которые мы будем рассматривать в дальнейшем, на самом деле содержат только конечно число членов, отличных от нуля: при $r > n$ соответствующие слагаемые равны нулю.

Следующая лемма является дискретным аналогом Леммы 1.

Лемма 3. Для $0 \le j < j' \le n$ имеет место следующее разложение

$$p_n\left(\frac{j'}{n} - \frac{j}{n}, x, y\right) = \sum_{r=0}^{j'-j} \tilde{p}_n \otimes_n H_n^{(r)}\left(\frac{j'}{n} - \frac{j}{n}, x, y\right) \qquad (8)$$

Доказательство. По определению

$$H_n\left(\frac{j'}{n} - \frac{j}{n}, z, y\right) =$$

$$n\left[\iint \left\{p_n\left(\frac{1}{n}, z, v\right) - \tilde{p}_n^y\left(\frac{1}{n}, z, v\right)\right\} \tilde{p}_n^y\left(\frac{j'}{n} - \frac{j+1}{n}, v, y\right) dv\right]$$

Используя марковское свойство, получим следующие тождества

$$p_n\left(\frac{j'}{n} - \frac{j}{n}, x, y\right) - \tilde{p}_n^y\left(\frac{j'}{n} - \frac{j}{n}, x, y\right) = \sum_{i=j}^{j'-1} \frac{1}{n} \int p_n\left(\frac{i}{n} - \frac{j}{n}, x, z\right)$$

$$\times n\left[\iint \left\{p_n\left(\frac{1}{n}, z, v\right) - \tilde{p}_n^y\left(\frac{1}{n}, z, v\right)\right\} \tilde{p}_n^y\left(\frac{j'}{n} - \frac{i+1}{n}, v, y\right) dvdz\right]$$

$$= \sum_{i=j}^{j'-1} \frac{1}{n} \int p_n\left(\frac{i}{n} - \frac{j}{n}, x, z\right) H_n\left(\frac{j'}{n} - \frac{i}{n}, z, y\right) dz$$

$$= p_n \otimes_n H_n\left(\frac{j'}{n} - \frac{j}{n}, x, y\right)$$

Итерируя последнее тождество, получим (8).

Итак, мы получили два представления. Для переходной плотности диффузии - бесконечный ряд

$$p(t-s,x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}(\tilde{p}\otimes H^{(r)})(t-s,x,y), \tag{9}$$

а для переходной плотности цепи Маркова – конечный ряд

$$p_n\left(\frac{j'}{n}-\frac{j}{n},x,y\right)=\sum_{r=0}^{j'-j}\tilde{p}_n\otimes_n H_n^{(r)}\left(\frac{j'}{n}-\frac{j}{n},x,y\right). \tag{10}$$

Мы хотим оценить близость $p(1,x,y)$ и $p_n(1,x,y)$, для этого достаточно сравнить правые части разложений в ряд этих плотностей. Для оценки близости правых частей нужно научиться контролировать следующие величины:

1. «Хвосты» рядов (9) и (10), т.е. суммы слагаемых при $r\geq N$.
2. Контролировать ошибку, возникающую при замене операции $\otimes$ её дискретным аналогом $\otimes_n$.
3. Контролировать ошибку в классической многомерной локальной предельной теореме для плотностей (ошибка замены $\tilde{p}$ на $\tilde{p}_n$).
4. Оценить ошибку, возникающую от замены непрерывного ядра H дискретным ядром H_n.

Лекция 4.
Контроль близости разложений для переходных плотностей диффузий и цепей Маркова.

Литература:

- V. Konakov and E. Mammen. Local limit theorems for transition densities of Markov chains converging to diffusions. *Prob. Th. Rel. Fields*, 117:551–587, 2000.
- Konakov V. Small time asymptotics in local limit theorems for Markov chains converging to diffusions. Prépublication PMA-1052, février 2006. (http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/05/93/36/PDF/C0045a.pdf).
- V. Konakov and E. Mammen. Edgeworth type expansions for Euler schemes for stochastic differential equations. *Monte Carlo Methods Appl.*, 8–3:271–285, 2002.

Сформулируем основные предположения. Рассмотрим семейство плотностей $q_x(\cdot), x \in R^d$, удовлетворяющее следующим условиям:

A1. $\int_{R^d} z q_x(z)dz = 0, \int_{R^d} z_i z_j q_x(z)dz = a_{ij}(x), \forall x \in R^d, a = \sigma\sigma^*$.

A2. Условие равномерной эллиптичности:

$0 < \underline{C} \leq \theta^* a(x)\theta \leq \bar{C} < \infty, \forall x \in R^d, \|\theta\| = 1.$

A3. Существуют натуральное число $S = 2dS' + 4$ и функция $\psi(y), y \in R^d$, такие, что

$$\sup_{y \in R^d} \psi(y) < \infty, \int_{R^d} \|y\|^S \psi(y)dy < \infty,$$

$$|D_y^\nu q_x(y)| \leq \psi(y), \forall (x,y) \in R^{2d}, |\nu| = 0,1,2,3,4.$$

$$|D_x^\nu q_x(y)| \leq \psi(y), \forall (x,y) \in R^{2d}, |\nu| = 0,1,2.$$

B1. Функции $b(x)$ и $\sigma(x)$ вместе с их производными до четвёртого порядка ограничены равномерно по x.

Напомним, что нам нужно оценить близость двух разложений:

$$p(1,x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}(\tilde{p}\otimes H^{(r)})(1,x,y), \tag{1}$$

и

$$p_n(1,x,y)=\sum_{r=0}^{n}\tilde{p}_n\otimes_n H_n^{(r)}\,(1,x,y). \tag{2}$$

Оценим сначала «хвост» ряда (1). Для этого воспользуемся оценкой (4) Лекции 3:

$$\left|\tilde{p}\otimes H^{(r)}(1,x,y)\right|\le\frac{C^{r+1}}{\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)}p_c(1,x,y), \tag{3}$$

где

$$p_c(t-s,x,y)=\left(\frac{c}{2\pi(t-s)}\right)^{d/2}\exp\left(-\frac{c|y-x|^2}{t-s}\right).$$

Для ряда (2) справедлив следующий аналог оценки (3), доказанный в статье V. Konakov and E. Mammen (2000, Лемма 3.11):

Лемма 4. *Имеет место следующая оценка*

$$\left|\tilde{p}_n\otimes_n H_n^{(r)}(1,x,y)\right|\le\frac{C^{r+1}}{\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)}\zeta_{\frac{S-2d-4}{d}}(y-x), \tag{4}$$

где $\zeta_k(u)=\frac{1}{1+\|u\|^k}$.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема А. *Пусть выполнены условия **А1-А3** и **В1**. Тогда при* $n\to\infty$ *справедлива следующая оценка*

$$\sup_{x,y\in R^d}\left(1+\|y-x\|^{2S'-2}\right)|p(1,x,y)-p_n(1,x,y)|=O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Сформулируем сразу одну задачу. Для решения первой её части достаточно, по-видимому, воспроизвести, с некоторыми уточнениями, доказательство Теоремы А. Решение второй части этой задачи мне неизвестно.

Задача 2*.

1. Пусть семейство плотностей зависит ещё и от шага разбиения: $q_x(\cdot)=q_x^{(n)}(\cdot)$, условия **А2** и **А3** выполнены равномерно по n, а вместо условия **А1** потребуем

$$\int_{R^d} zq_x^{(n)}(z)dz = m^{(n)}(x), \int_{R^d} z_i z_j q_x^{(n)}(z)dz = a_{ij}^{(n)}(x),$$

причём

$$m^{(n)}(x) \to m(x), \qquad a_{ij}^{(n)}(x) \to a_{ij}(x) \text{ при } n \to \infty.$$

Доказать, что утверждение сформулированной выше теоремы остаётся верным.

2. Как можно усилить неравномерную оценку скорости сходимости в Теореме А, если дополнительно предположить, что у функции $\psi(y)$ существует конечный экспоненциальный момент:

$$\exists\lambda > 0 \text{ такое, что } \int_{R^d} \exp(\lambda\|y\|)\psi(y)dy < \infty\ ?$$

Доказательство теоремы. Доказательство разобьем на шесть этапов (шагов).

Шаг 1. Контроль «хвоста» разложения (1).

Воспользуемся известным разложением гамма функции при больших значениях её аргумента

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}x^{x-1/2}\exp\big(-x + \mu(x)\big), \mu(x) = \frac{\theta}{12x}, 0 < \theta < 1. \quad (5)$$

Используя оценку (3) и разложение (5), получим, что при достаточно больших n

$$\sum_{r=n}^{\infty}(\tilde{p} \otimes H^{(r)})(1,x,y) = O(\exp(-n))p_c(1,x,y). \quad (6)$$

Следующий шаг состоит в сравнении двух рядов

$$\sum_{r=0}^{n}(\tilde{p} \otimes H^{(r)})(1,x,y)$$

и

$$\sum_{r=0}^{n}(\tilde{p} \otimes_n H^{(r)})(1,x,y).$$

То есть надо оценить ошибку, возникающую при замене интегралов их римановыми суммами.

Шаг 2. Контроль ошибки при переходе от $\otimes$ к $\otimes_n$.

Имеет место очевидное тождество для $r = 1,2,3,\dots$

$$\left(\tilde{p} \otimes H^{(r)}\right)\left(\frac{j}{n}, x, y\right) - \left(\tilde{p} \otimes_n H^{(r)}\right)\left(\frac{j}{n}, x, y\right) =$$

$$\left[\left(\tilde{p} \otimes H^{(r-1)}\right) \otimes H - \left(\tilde{p} \otimes H^{(r-1)}\right) \otimes_n H\right]\left(\frac{j}{n}, x, y\right) +$$

$$\left[\left(\tilde{p} \otimes H^{(r-1)}\right) - \left(\tilde{p} \otimes_n H^{(r-1)}\right)\right] \otimes_n H\left(\frac{j}{n}, x, y\right).$$

Суммируя эти тождества по r от $r = 1$ до $r = \infty$ и, учитывая линейность операций $\otimes$ и $\otimes_n$, получим

$$(p - p^d)\left(\frac{j}{n}, x, y\right) = \left[(p \otimes H) - (p \otimes_n H)\right]\left(\frac{j}{n}, x, y\right) +$$
$$(p - p^d) \otimes_n H\left(\frac{j}{n}, x, y\right), \tag{7}$$

где

$$p^d\left(\frac{j' - j}{n}, x, y\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\tilde{p} \otimes_n H^{(r)}\right)\left(\frac{j' - j}{n}, x, y\right).$$

Итерируя равенство (7), получим

$$(p - p^d)\left(\frac{j}{n}, x, y\right) = \left[(p \otimes H) - (p \otimes_n H)\right]\left(\frac{j}{n}, x, y\right) +$$
$$\left[(p \otimes H) - (p \otimes_n H)\right] \otimes_n \Phi\left(\frac{j}{n}, x, y\right), \tag{8}$$

где

$$\Phi\left(\frac{j' - j}{n}, x, y\right) = \sum_{r=1}^{\infty} H^{(r)}\left(\frac{j' - j}{n}, x, y\right).$$

Оценим сначала первое слагаемое в правой части (8). Обозначим

$$\lambda_u(z) = p(u, x, z) H\left(\frac{j}{n} - u, z, y\right).$$

Тогда, разлагая в ряд Тейлора по u, получим

$$\left[(p \otimes H) - (p \otimes_n H)\right]\left(\frac{j}{n}, x, y\right) =$$

$$\sum_{i=0}^{j-1} \int_{i/n}^{(i+1)/n} du \int_{R^d} \left[\lambda_u(z) - \lambda_{i/n}(z)\right] dz$$
$$= \sum_{i=0}^{j-1} \int_{i/n}^{(i+1)/n} \left(u - \frac{i}{n}\right) du \int_{R^d} \lambda'_{\frac{i}{n}}(z) dz$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{j-1} \int_{i/n}^{(i+1)/n} \left(u - \frac{i}{n}\right)^2 \int_0^1 (1-\delta) \int_{R^d} \lambda''_s(z)|_{s=s_i} dz\, d\delta du, \tag{9}$$

где $s_i = \frac{i}{n} + \delta\left(u - \frac{i}{n}\right)$. Заметим, что

$$\int_{R^d} \lambda'_{\frac{i}{n}}(z) dz = \int_{R^d} \frac{\partial}{\partial u}\left[p(u,x,z) H\left(\frac{j}{n} - u, z, y\right)\right]_{u=i/n} dz =$$

$$\int_{R^d} \frac{\partial}{\partial u}[p(u,x,z)]_{u=i/n} H\left(\frac{j-i}{n}, z, y\right)$$
$$+ p\left(\frac{i}{n}, x, z\right) \frac{\partial}{\partial u}\left[H\left(\frac{j}{n} - u, z, y\right)\right]_{u=\frac{i}{n}} dz =$$

$$\int_{R^d} L_z^* p(i/n, x, z) \left(L - \tilde{L}\right) \tilde{p}\left(\frac{j-i}{n}, z, y\right) dz$$
$$- \int_{R^d} p(i/n, x, z) \left(L - \tilde{L}\right) \tilde{L} \tilde{p}\left(\frac{j-i}{n}, z, y\right) dz =$$

$$\int_{R^d} p\left(\frac{i}{n}, x, z\right) \left(L^2 - 2L\tilde{L} + \tilde{L}^2\right) \tilde{p}\left(\frac{j-i}{n}, z, y\right) dz. \tag{10}$$

Обозначим

$$A_0\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)=\left(L^2-2L\tilde{L}+\tilde{L}^2\right)\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right).$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{j-1}\int\limits_{i/n}^{(i+1)/n}\left(u-\frac{i}{n}\right)du\int\limits_{R^d}\lambda'_{\frac{i}{n}}(z)dz=\frac{1}{2n}p\otimes_n A_0\left(\frac{j}{n},x,y\right). \qquad (11)$$

Прямой подсчёт даёт следующее выражение для $A_0\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)$

$$A_0\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)=\frac{1}{4}\sum_{p,q,r,l=1}^{d}\left(\sigma_{pq}(z)-\sigma_{pq}(y)\right)\left(\sigma_{rl}(z)-\sigma_{rl}(y)\right)$$

$$\times\frac{\partial^4\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)}{\partial z_p\partial z_q\partial z_r\partial z_l}+\sum_{p,q,r=1}^{d}\left(\sigma_{pq}(z)-\sigma_{pq}(y)\right)\left(b_r(z)-b_r(y)\right)$$

$$\times\frac{\partial^3\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)}{\partial z_p\partial z_q\partial z_r}+\sum_{p,q,r,l=1}^{d}\frac{\sigma_{pq}}{2}\frac{\partial\sigma_{rl}(z)}{\partial z_p}\frac{\partial^3\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)}{\partial z_q\partial z_r\partial z_l}+(\leq 2), \qquad (12)$$

где через (≤ 2) обозначена сумма членов, содержащих производные $\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)$ по z не выше второго порядка. Отсюда следует, что $\forall\varepsilon, 0<\varepsilon<\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2n}\left|p\otimes_n A_0\left(\frac{j}{n},x,y\right)\right|\leq C(\varepsilon)\cdot n^{-\frac{1}{2}}\cdot j^{-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\cdot p_c\left(\frac{j}{n},x,y\right). \qquad (13)$$

В самом деле, (13) следует из (12), известных оценок для производных гауссовской плотности $\tilde{p}$, условия **B1** и следующей оценки, справедливой при фиксированных q,r,l

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{j-1}\frac{1}{n}\left|\int_{R^d}p\left(\frac{i}{n},x,z\right)\frac{\partial^3\tilde{p}\left(\frac{j-i}{n},z,y\right)}{\partial z_q\partial z_r\partial z_l}dz\right|\leq$$

$$Cn^{-1/2}j^{-3/2}p_c\left(\frac{j}{n},x,y\right)+$$

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{n}\left|\int_{R^d}\frac{\partial p(\frac{i}{n},x,z)}{\partial z_q}\frac{\partial^2\tilde{p}\left(\frac{j-i}{n},z,y\right)}{\partial z_r\partial z_l}dz\right|\leq$$

$$Cn^{-1/2}j^{-3/2}p_c\left(\frac{j}{n},x,y\right)+$$

$$Cn^{-(1-\varepsilon)}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{n}\times\frac{1}{\sqrt{i/n}}\times\frac{1}{(\frac{j-i}{n})^{1-\varepsilon}}p_c\left(\frac{j}{n},x,y\right)$$

$$\leq C(\varepsilon)\cdot n^{-\frac{1}{2}}\cdot j^{-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\cdot p_c\left(\frac{j}{n},x,y\right).$$

Оценим теперь второе слагаемое в правой части (9). Запишем выражение для второй производной по s функции $\lambda_s(z)$

$$\lambda''_s(z)=\frac{\partial^2 p(s,x,z)}{\partial s^2}H\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)+2\frac{\partial p(s,x,z)}{\partial s}\frac{\partial H\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)}{\partial s}$$

$$+p(s,x,z)\frac{\partial^2 H(\frac{j}{n}-s,z,y)}{\partial s^2}. \tag{14}$$

Используя прямое и обратное уравнение Колмогорова, получим из (14) после несложных вычислений

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{j-1}\int\limits_{i/n}^{(i+1)/n}\left(u-\frac{i}{n}\right)^2\int\limits_0^1(1-\delta)\int\limits_{R^d}\lambda''_s(z)|_{s=s_i}dz=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{j-1}\int\limits_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}}\left(u-\frac{i}{n}\right)^2\int\limits_0^1(1-\delta)$$

$$\times\int_{R^d}p(s,x,z)A_1\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)|_{s=s_i}dzd\delta du, \tag{15}$$

где

$$A_1\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)=\left(L^3-3L^2\tilde{L}+3L\tilde{L}^2-\tilde{L}^3\right)\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right).$$

Очевидно, $A_1\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)$ является дифференциальным оператором шестого порядка. Несложные, но длинные вычисления приводят к следующей формуле для $A_1\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)$

$$A_1\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)=\frac{1}{8}\sum_{i,j,p,q,l,r=1}^{d}\left(\sigma_{ij}(z)-\sigma_{ij}(y)\right)\left(\sigma_{pq}(z)-\sigma_{pq}(y)\right)$$

$$\times\left(\sigma_{lr}(z)-\sigma_{lr}(y)\right)\frac{\partial^6\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)}{\partial z_i\partial z_j\partial z_p\partial z_q\partial z_l\partial z_r}+$$

$$+\frac{3}{4}\sum_{i,j,p,q,l=1}^{d}\left(\sigma_{ij}(z)-\sigma_{ij}(y)\right)\left(\sigma_{pq}(z)-\sigma_{pq}(y)\right)\left(b_l(z)-b_l(y)\right)$$

$$\times\frac{\partial^5\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)}{\partial z_i\partial z_j\partial z_p\partial z_q\partial z_l}+\frac{3}{4}\sum_{i,j,p,q,l,r=1}^{d}\sigma_{ij}(z)\frac{\partial\sigma_{pq}(z)}{\partial z_i}\left(\sigma_{lr}(z)-\sigma_{lr}(y)\right)$$

$$\times\frac{\partial^5\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)}{\partial z_j\partial z_p\partial z_q\partial z_l\partial z_r}+\ (\leq 4),\qquad(16)$$

где через (≤ 4) обозначена сумма членов, содержащих производные $\tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)$ не выше четвёртого порядка. Из условия **B1** на коэффициенты σ_{ij} и m_i и (16) следует, что оценка сверху для левой части (15) будет, с точностью до константы, такая же, как и для следующей суммы при фиксированных p,q,l,r

$$\left|\sum_{i=0}^{j-1} \int\limits_{i/n}^{(i+1)/n} \left(u-\frac{i}{n}\right)^2 \int\limits_0^1 (1-\delta)\right.$$

$$\left.\times \int_{R^d} \left[p(s,x,z)\frac{\partial^4 \tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)}{\partial z_p \partial z_q \partial z_l \partial z_r}\right]|_{s=s_i} dz d\delta du\right|. \qquad (17)$$

Интегрируя по частям относительно z_p, и, произведя подстановку $\frac{w}{n}=u-\frac{i}{n}$, получим, что сумма в (17) равна

$$\left|\sum_{i=0}^{j-1} \int\limits_{i/n}^{(i+1)/n} \left(u-\frac{i}{n}\right)^2 \int\limits_0^1 (1-\delta)\right.$$

$$\left.\times \int_{R^d} \left[\frac{\partial p(s,x,z)}{\partial z_p}\frac{\partial^3 \tilde{p}\left(\frac{j}{n}-s,z,y\right)}{\partial z_q \partial z_l \partial z_r}\right]|_{s=s_i} dz d\delta du,\right|$$

$$\leq Cn^{-2} p_c\left(\frac{j}{n},x,y\right) \int\limits_0^1 w^2 \int\limits_0^1 (1-\delta)$$

$$\sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{n} \times \frac{1}{\left[\frac{i}{n}+\frac{\delta w}{n}\right]^{1/2}} \times \frac{1}{\left[\frac{j-i}{n}-\frac{\delta w}{n}\right]^{3/2}} d\delta dw$$

$$\leq \frac{C}{n} p_c\left(\frac{j}{n},x,y\right) B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \int\limits_0^1 w^{3/2} dw +$$

$$Cn^{-2} p_c\left(\frac{j}{n},x,y\right) \int\limits_0^1 w^2 \int\limits_0^1 (1-\delta) \times$$

$$\sum_{i=1}^{j-2} \frac{1}{n} \times \frac{1}{\left[\frac{i}{n}+\frac{\delta w}{n}\right]^{1/2}} \times \frac{1}{\left[\frac{j-i}{n}-\frac{\delta w}{n}\right]^{3/2}} d\delta dw$$

$$\le \frac{C}{n} p_c\left(\frac{j}{n}, x, y\right) + Cn^{-(\frac{3}{2}-\varepsilon)} p_c\left(\frac{j}{n}, x, y\right) \int_0^1 w^2 \int_0^1 (1-\delta)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

$$\sum_{i=1}^{j-2} \frac{1}{n} \times \frac{1}{\left[\frac{i}{n} + \frac{\delta w}{n}\right]^{1/2}} \times \frac{1}{\left[\frac{j-i}{n} - \frac{\delta w}{n}\right]^{1-\varepsilon}} d\delta dw$$

$$\le \frac{C}{n} p_c\left(\frac{j}{n}, x, y\right) + Cn^{-(\frac{3}{2}-\varepsilon)} p_c\left(\frac{j}{n}, x, y\right) \int_0^1 (1-\delta)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} d\delta \int_0^1 w^2 dw$$

$$\times \int_0^{\frac{j}{n}} \frac{t^{-1/2} dt}{\left[\frac{j}{n} - t\right]^{1-\varepsilon}}$$

$$\le \frac{C}{n} p_c\left(\frac{j}{n}, x, y\right) + Cn^{-1} B\left(\frac{1}{2}, \varepsilon\right) p_c\left(\frac{j}{n}, x, y\right) \le \frac{C(\varepsilon)}{n} p_c\left(\frac{j}{n}, x, y\right).$$

(18)

Из (9), (13) и (18) следует, что

$$\left|[(p \otimes H) - (p \otimes_n H)]\left(\frac{j}{n}, x, y\right)\right| \le Cn^{-1/2} p_c\left(\frac{j}{n}, x, y\right).$$

(19)

Далее, для ядра $\Phi\left(\frac{j'-j}{n}, x, y\right) = \sum_{r=1}^{\infty} H^{(r)}\left(\frac{j'-j}{n}, x, y\right)$ в в статье V. Konakov and E. Mammen (2002) получена оценка

$$\left|\Phi\left(\frac{j'-j}{n}, x, y\right)\right| \le \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{\frac{j'-j}{n}}} p_c\left(\frac{j'-j}{n}, x, y\right). \qquad (20)$$

Из (8), (19) и (20) получим

$$|[(p \otimes H) - (p \otimes_n H)] \otimes_n \Phi(1, x, y)| \le C(\varepsilon) n^{-1/2} p_c(1, x, y),$$

$$\left|(p - p^d)(1, x, y)\right| \le Cn^{-1/2} p_c(1, x, y). \qquad (21)$$

Задача 3. Доказать, что при $r = 0,1,2, \dots n$ справедливы неравенства

$$\left|\tilde{p} \otimes_n H^{(r)}(1,x,y)\right| \leq \frac{C^{r+1}}{\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)} p_c(1,x,y).$$

Вывести отсюда оценки

$$\left|\sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n H^{(r)}(1,x,y)\right| \leq C p_c(1,x,y),$$

$$\left|\sum_{r=n}^{\infty} (\tilde{p} \otimes_n H^{(r)})(1,x,y)\right| \leq C\exp(-n)\, p_c(1,x,y).$$

где константа C не зависит от n, x и y.

Лекция 5.
Контроль близости разложений для переходных плотностей диффузий и цепей Маркова (продолжение).

Литература:

- R.N. Bhattacharya, R. Ranga Rao. Normal Approximation and Asymptotic Expansions. John Wiley & Sons, 1976.
- V. Konakov and E. Mammen. Local limit theorems for transition densities of Markov chains converging to diffusions. *Prob. Th. Rel. Fields*, 117:551–587, 2000.

Шаг 3. Контроль ошибки при переходе от ядра H_n к ядру H.
Введём следующие обозначения

$$\zeta_k(u) = \frac{1}{1+\|u\|^k}, \ \zeta_{\rho,k}(u) = \rho^{-d}\zeta_k\left(\frac{u}{\rho}\right),$$

$$K_n\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) = \left(L_x - \tilde{L}_x^y\right)\tilde{p}_n^y\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right),$$

$$M_n\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) = 3n^{-1/2}\sum_{|\nu|=3}\sum_{|\mu|=1}\int_{R^d}\int_0^1 D_y^\mu q_y(\theta)(x-y)^\mu \times$$

$$\frac{\theta^\nu}{\nu!}D_x^\nu\tilde{p}_n^y\left(\frac{k-j-1}{n}, x+\delta\theta n^{-\frac{1}{2}}, y\right)(1-\delta)^2 d\delta d\theta.$$

Для дальнейшего нам понадобится лемма, которая доказывается применением классической многомерной локальной предельной теоремы (R. Bhattacharya and R.Rao (1976, Теорема 19.3). Доказательство этой леммы для случая $0 \le |\nu| \le 2$ содержится в работе V. Konakov and E. Mammen (2000, Лемма 3.7).
Лемма 5. *Для всех* $k > j$, *для всех* x *и* y *и для всех* ν, $0 \le |\nu| \le 4$, *справедлива следующая оценка*

$$\left|D_x^\nu\tilde{p}_n^y\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right)\right| \le C\rho^{-|\nu|}\zeta_{\rho,S-2}(y-x).$$

Здесь $\rho = \sqrt{\frac{k-j}{n}}$.

Лемма 6. *Для* $k > j+1$ *справедлива следующая оценка*

$$\left|H_n\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) - K_n\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) - M_n\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right)\right|$$

$$\leq \frac{C}{\sqrt{n}} \rho^{-1} \zeta_{\rho, S-4}(y-x),$$

где $\rho = \sqrt{\frac{k-j}{n}}, C < \infty$. *Для* $k = j+1$ *положим* $K_n = 0, M_n = H_n$.

Доказательство. Пусть $k > j+1$. Имеем

$$H_n\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) = H_n^1\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) - H_n^2\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right),$$

где

$$H_n^1\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) = n\left[\int_{R^d} p_n\left(\frac{1}{n}, x, z\right)\{\tilde{p}_n^y\,(\frac{k-j-1}{n}, z, y)\right.$$

$$\left. - \tilde{p}_n^y(\frac{k-j-1}{n}, x, y)\}dz\right], \qquad (1)$$

$$H_n^2\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) = n\left[\int_{R^d} \tilde{p}_n^y\left(\frac{1}{n}, x, z\right)\{\tilde{p}_n^y\,(\frac{k-j-1}{n}, z, y)\right.$$

$$\left. - \tilde{p}_n^y(\frac{k-j-1}{n}, x, y)\}dz\right]. \qquad (2)$$

Произведём в правой части (1) замену переменных

$$\theta = \sqrt{n}(z-x) - \frac{1}{\sqrt{n}} b(x).$$

Обозначим $\lambda(z) = \tilde{p}_n^y\left(\frac{k-j-1}{n}, z, y\right)$, $h(\theta) = \frac{\theta}{\sqrt{n}} + \frac{b(x)}{n}$. Тогда (1) перепишем в виде

$$H_n^1\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)=n\int\limits_{R^d} q_x(\theta)[\lambda(x+h(\theta))-\lambda(x)]d\theta. \qquad (3)$$

Разложим $\lambda(x)$ в ряд Тэйлора с остаточным членом

$$\lambda(x+h(\theta))-\lambda(x)=\sum_{1\le|\nu|\le 2}\frac{h(\theta)^\nu}{\nu!}(D^\nu\lambda)(x)$$

$$+3\sum_{|\nu|=3}\frac{h(\theta)^\nu}{\nu!}\int\limits_0^1(1-\delta)^2(D^\nu\lambda)\big(x+\delta h(\theta)\big)d\delta.$$

Подставляя это разложение в (3), получим

$$H_n^1\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)=L_x\tilde{p}_n^y\left(\frac{k-j-1}{n},x,y\right)+\frac{1}{n}\sum_{|\nu|=2}\frac{b(x)^\nu}{\nu!}(D^\nu\lambda)(x)$$

$$+3n\sum_{|\nu|=3}\int\limits_{R^d}\int\limits_0^1 q_x(\theta)\frac{h(\theta)^\nu}{\nu!}(1-\delta)^2(D^\nu\lambda)\big(x+\delta h(\theta)\big)d\delta d\theta.$$

Аналогично получим

$$H_n^2\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)=\tilde{L}_x^y\tilde{p}_n^y\left(\frac{k-j-1}{n},x,y\right)+\frac{1}{n}\sum_{|\nu|=2}\frac{b(y)^\nu}{\nu!}(D^\nu\lambda)(x)$$

$$+3n\sum_{|\nu|=3}\int\limits_{R^d}\int\limits_0^1 q_x(\theta)\frac{\tilde{h}(\theta)^\nu}{\nu!}(1-\delta)^2(D^\nu\lambda)\left(x+\delta\tilde{h}(\theta)\right)d\delta d\theta,$$

где $\tilde{h}(\theta)=\frac{\theta}{\sqrt{n}}+\frac{b(y)}{n}$. Для завершения доказательства достаточно доказать следующие два неравенства

$$\frac{1}{n}|b(x)^\nu-b(y)^\nu||(D^\nu\lambda)(x)|\le\frac{C}{\rho n}\zeta_{\rho,S-4}(y-x),\forall\nu,|\nu\,|=2 \qquad (4)$$

$$\Bigg|3n\sum_{|\nu|=3}\int\limits_{R^d}\int\limits_0^1[q_x(\theta)\frac{h(\theta)^\nu}{\nu!}(D^\nu\lambda)\big(x+\delta h(\theta)\big)-q_y(\theta)\frac{\tilde{h}(\theta)^\nu}{\nu!}$$

$$\times (D^\nu\lambda)\left(x+\delta\tilde{h}(\theta)\right)](1-\delta)^2 d\delta d\theta - M_n\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right)\Bigg|$$

$$\leq \frac{C}{\rho\sqrt{n}}\zeta_{\rho,S-2}(y-x). \qquad (5)$$

Неравенство (4) следует из Леммы 5 и условия **B1**. Для доказательства (5) заметим, что при $|\nu| = 3$

$$\max\{\left|\tilde{h}(\theta)^\nu\right|, |h(\theta)^\nu|\} \leq Cn^{-3/2}(1+\|\theta\|)^3,$$

$$\left|\tilde{h}(\theta)^\nu - h(\theta)^\nu\right| \leq Cn^{-2}(1+\|\theta\|)^2\|x-y\|.$$

Кроме того, заметим, что $M_n\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right)$ содержит члены первого порядка разложения в ряд Тэйлора разности $q_x(\theta) - q_y(\theta)$ под знаком интеграла. Поэтому левая часть (5) не превосходит

$$Cn^{-1}\|y-x\| \sum_{|\nu|=3} \int_{R^d}\int_0^1 \psi(\theta)(1+\|\theta\|)^2$$

$$\times (D^\nu\lambda)\big(x+\delta h(\theta)\big)(1-\delta)^2 d\delta d\theta$$

$$+Cn^{-\frac{1}{2}} \sum_{|\nu|=3} \int\limits_{R^d}\int\limits_0^1 \psi(\theta)(1+\|\theta\|)^3\{(D^\nu\lambda)\big(x+\delta h(\theta)\big)$$

$$-(D^\nu\lambda)\left(x+\delta\tilde{h}(\theta)\right)\} d\delta d\theta \ + Cn^{-\frac{1}{2}}\|y-x\|^2 \sum_{|\nu|=3} \int\limits_{R^d}\int\limits_0^1 \psi(\theta) \times$$

$$(1+\|\theta\|)^2 (D^\nu\lambda)\big(x+\delta h(\theta)\big) d\delta d\theta. \qquad (6)$$

Воспользуемся следующей грубой оценкой. Предположим, что $\|v\| \leq \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\frac{1}{1+\|u+v\|^S} \le \frac{2^{S/2} \vee (\varepsilon^S+1)}{1+\|u\|^S}. \tag{7}$$

В самом деле,

$$\langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle \ge \|u\|^2 - 2\varepsilon\|u\| = \|u\|^2\left(1-\frac{2\varepsilon}{\|u\|}\right),$$

поэтому, если $2\varepsilon \le \lambda\|u\|$, где $0<\lambda<1$, то

$$\frac{1}{1+\|u+v\|^S} \le \frac{1}{1+\|u\|^S(1-\lambda)^{S/2}} \le \frac{(1-\lambda)^{-S/2}}{1+\|u\|^S}.$$

Если же $2\varepsilon > \lambda\|u\|$, то

$$\frac{1}{1+\|u+v\|^S} \le 1 \le \frac{\lambda^{-S}(2\varepsilon)^S+1}{1+\|u\|^S}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{1+\|u+v\|^S} \le \frac{(1-\lambda)^{-S/2} \vee (\lambda^{-S}(2\varepsilon)^S+1)}{1+\|u\|^S}, \forall\lambda \in (0,1).$$

Полагая $\lambda = 1/2$, получим

$$\frac{1}{1+\|u+v\|^S} \le \frac{2^{S/2} \vee (\varepsilon^S+1)}{1+\|u\|^S}.$$

Из наших предположений следует возможность (формального) дифференцирования классического разложения Эджворта для $\tilde{p}_n^y$, что влечёт следующую оценку

$$\left|(D^\nu\lambda)\big(x+\delta h(\theta)\big)\right| \le C\rho^{-3}\zeta_{\rho,S}\big(y-x-\delta h(\theta)\big),$$

где $|\nu| = 3$. Аналогично получим

$$\left|(D^\nu\lambda)\left(x+\delta\tilde{h}(\theta)\right)\right| \le C\rho^{-3}\zeta_{\rho,S}\left(y-x-\delta\tilde{h}(\theta)\right).$$

Применяя (7) с $v = \delta h(\theta)/\rho$ и $\varepsilon = \|\theta\| + \frac{C}{\sqrt{n}}$, получим

$$\max\left\{\left|(D^\nu\lambda)\big(x+\delta h(\theta)\big)\right|, \left|(D^\nu\lambda)\left(x+\delta\tilde{h}(\theta)\right)\right|\right\}$$
$$\le C\rho^{-3}(1+\|\theta\|^S)\zeta_{\rho,S}(y-x). \tag{8}$$

Поскольку

$$\left|\delta h(\theta)+\chi\delta\left(h(\theta)-\tilde{h}(\theta)\right)\right|\leq\frac{C}{n}+\frac{\|\theta\|}{\sqrt{n}},$$

для ν с $|\nu|=4$ и χ с $|\chi|\leq 1$ аналогично получим

$$\left|(D^{\nu}\lambda)\left(x+\delta h(\theta)+\chi\delta\left(h(\theta)-\tilde{h}(\theta)\right)\right)\right|$$

$$\leq C\rho^{-4}(1+\|\theta\|^{S})\zeta_{\rho,S}(y-x).$$

Поэтому разность под знаком интеграла во втором слагаемом в (6) не превосходит

$$\left|\{(D^{\nu}\lambda)\big(x+\delta h(\theta)\big)-(D^{\nu}\lambda)\left(x+\delta\tilde{h}(\theta)\right)\}\right|$$

$$\leq C\rho^{-4}n^{-1}\|y-x\|(1+\|\theta\|^{S})\zeta_{\rho,S}(y-x). \qquad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в (6), получим, что левая часть (5) не превосходит $\frac{C}{\sqrt{n}}\rho^{-1}\zeta_{\rho,S-2}(y-x)$. Лемма доказана.

Шаг 4. Переход к вспомогательному ядру K_n+M_n.

С помощью Леммы 6 нетрудно оценить близость рядов

$$p_n\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)=\sum_{r=0}^{n}\tilde{p}_n\otimes_n H_n^{(r)}\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)$$

и

$$\sum_{r=0}^{n}\tilde{p}_n\otimes_n (K_n+M_n)^{(r)}\left(\frac{k-j}{n},x,y\right).$$

Для доказательства следующей леммы мы будем пользоваться оценками, доказанными в статье V. Konakov and E. Mammen (2000, Лемма 3.10 и Лемма 3.11):

Положим

$$\eta_{\rho}^{l,j,k}=\max\{\zeta_{\rho_1,S-4}*\ldots*\zeta_{\rho_l,S-4}:\rho_1\geq 0,\ldots\rho_l\geq 0,$$
$$\rho_1^2+\cdots+\rho_l^2=\rho^2\},$$

где " $*$ " $-$ обычная операция свёртки, $\rho^2=\frac{k-j}{n}$, $\zeta_{0,S-4}$ обозначает $\delta-$ функцию. Тогда

$$\eta_{\rho}^{l,j,k}(x) \le C^l \zeta_{\rho,\frac{S-2d-4}{d}}(x). \tag{10}$$

Кроме того, имеют место оценки

$$\left|H_n\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)\right| \le C\rho^{-1}\zeta_{\rho,S-4}(y-x),$$
$$\left|K_n\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)\right| \le C\rho^{-1}\zeta_{\rho,S-4}(y-x),$$
$$\left|M_n\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)\right| \le C\rho^{-1}\zeta_{\rho,S-4}(y-x). \tag{11}$$

Лемма 7. *Для* $0 \le j < k \le n$ *справедливо следующее представление*

$$p_n\left(\frac{k-j}{n},x,y\right) = \sum_{r=0}^{n} \tilde{p}_n \otimes_n (K_n+M_n)^{(r)}\left(\frac{k-j}{n},x,y\right) + R\left(\frac{k-j}{n},x,y\right),$$

где

$$\left|R\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)\right| \le \frac{C}{\sqrt{n}}\zeta_{\rho,\frac{S-2d-4}{d}}(y-x), \rho = \sqrt{\frac{k-j}{n}}.$$

Доказательство. По определению, для $r=0$

$$\tilde{p}_n \otimes_n H_n^{(0)}\left(\frac{k-j}{n},x,y\right) = \tilde{p}_n \otimes_n (K_n+M_n)^{(0)}\left(\frac{k-j}{n},x,y\right).$$

Для $r=1$ из Леммы 6 следует, что

$$\tilde{p}_n \otimes_n H_n\left(\frac{k-j}{n},x,y\right) = \tilde{p}_n \otimes_n (K_n+M_n)\left(\frac{k-j}{n},x,y\right) + R_1\left(\frac{k-j}{n},x,y\right),$$

где

$$\left|R_1\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)\right| = \left|\tilde{p}_n \otimes_n (H_n-K_n-M_n)\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)\right|$$

$$\le \sum_{i=j}^{k-1}\frac{1}{n}\int_{R^d} \tilde{p}_n\left(\frac{i-j}{n},x,z\right)|H_n-K_n-M_n|\left(\frac{k-i}{n},z,y\right)dz$$

$$\le \frac{C^2}{\sqrt{n}}\eta_\rho^{2,j,k}(y-x)\sum_{i=j}^{k-1}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n}{k-i}}.$$

Легко видеть, что

$$\sum_{i=j}^{k-1}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n}{k-i}} \le \int_{j/n}^{k/n}\left(\frac{k}{n}-v\right)^{-1/2}dv = \rho B\left(1,\frac{1}{2}\right),$$

Поэтому

$$\left|R_1\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)\right| \le \frac{C^2}{\sqrt{n}}\eta_\rho^{2,j,k}(y-x)\rho B\left(1,\frac{1}{2}\right).$$

Аналогичные рассуждения с использованием Леммы 6 и (11) приводят к оценке

$$\tilde{p}_n \otimes_n {H_n}^{(2)}\left(\frac{k-j}{n},x,y\right) = \tilde{p}_n \otimes_n (K_n+M_n)^{(2)}\left(\frac{k-j}{n},x,y\right) +$$

$$R_2\left(\frac{k-j}{n},x,y\right),$$

где

$$\left|R_2\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)\right| \le \frac{2C^3}{\sqrt{n}}\eta_\rho^{3,j,k}(y-x)\rho^2 B\left(1,\frac{1}{2}\right)B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Для произвольного r получим при подходящем выборе $C_1 > C$

$$\tilde{p}_n \otimes_n {H_n}^{(r)}\left(\frac{k-j}{n},x,y\right) = \tilde{p}_n \otimes_n (K_n+M_n)^{(r)}\left(\frac{k-j}{n},x,y\right) +$$

$$R_r\left(\frac{k-j}{n},x,y\right),$$

где

$$\left|R_r\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)\right| \le \frac{C_1^{r+1}}{\sqrt{n}}\eta_\rho^{r+1,j,k}(y-x)\rho^r\frac{\left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^{\mathrm{r}}}{\Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right)}.$$

Применяя оценку (10), получим

$$p_n\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)$$
$$=\sum_{r=0}^{n}\tilde{p}_n\otimes_n(K_n+M_n)^{(r)}\left(\frac{k-j}{n},x,y\right)+R\left(\frac{k-j}{n},x,y\right),$$
где
$$|R|\leq\sum_{r=1}^{\infty}|R_r|\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta_{\rho,\frac{S-2d-4}{d}}(y-x)\sum_{r=1}^{\infty}C_2^{r+1}\rho^r\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{\mathrm{r}}}{\Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right)}$$
$$\leq\frac{C}{\sqrt{n}}\zeta_{\rho,\frac{S-2d-4}{d}}(y-x).$$
Лемма доказана.

Лекция 6.
Контроль близости разложений для переходных плотностей диффузий и цепей Маркова (продолжение).

Литература:

- V. Konakov and E. Mammen. Local limit theorems for transition densities of Markov chains converging to diffusions. *Prob. Th. Rel. Fields*, 117:551–587, 2000.

Шаг 5. Контроль ошибки при замене $\tilde{p}_n$ на $\tilde{p}$.
Мы хотим оценить погрешность при замене ряда
$$\sum_{r=0}^{n} \tilde{p}_n \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)}$$
рядом
$$\sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)}.$$

Лемма 8. *Для* $0 \le j < k \le n$ *справедлива следующая оценка:*
$$\left|\sum_{r=0}^{n} (\tilde{p} - \tilde{p}_n) \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)} \left(\frac{k-j}{n}, x, y\right)\right| \le \frac{C}{\sqrt{n}} \zeta_{\rho, \frac{S-2d-4}{d}}(y - x).$$
Доказательство. Следующая оценка следует из классической многомерной локальной предельной теоремы, доказательство её содержится в работе V. Konakov and E. Mammen (2000, Лемма 3.8).
$$\left|\tilde{p}\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right) - \tilde{p}_n\left(\frac{k-j}{n}, x, y\right)\right| \le \frac{C}{\sqrt{n}} \rho^{-1} \zeta_{\rho, S-4}(y - x).$$
Используя эту оценку и неравенства (11) Лекции 5, надо, фактически, дословно повторить доказательство Леммы 7. Читатель может проделать это в качестве упражнения.

Учитывая все предыдущие оценки, мы видим, что нам осталось сделать последний шаг.

Шаг 6. Контроль погрешности при замене ядра $K_n + M_n$ ядром H.
Мы хотим оценить погрешность, возникающую при переходе от ряда

$$\sum_{r=o}^{n} \tilde{p} \otimes_n H^{(r)}(1,x,y)$$

к ряду

$$\sum_{r=o}^{n} \tilde{p} \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)}(1,x,y).$$

Имеем

$$\left|\sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n H^{(r)}(1,x,y) - \sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)}(1,x,y)\right| \leq$$
$$\left|\sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n H^{(r)}(1,x,y) - \sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n (H + M_n)^{(r)}(1,x,y)\right| +$$
$$\left|\sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n (H + M_n)^{(r)}(1,x,y) - \sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)}(1,x,y)\right|$$

$$\triangleq T_1 + T_2.$$

Оценим сначала слагаемое T_1. Для $r = 1$ имеем

$$\tilde{p} \otimes_n (H + M_n)\left(\frac{k}{n}, x, y\right) - \tilde{p} \otimes_n H\left(\frac{k}{n}, x, y\right) = \tilde{p} \otimes_n M_n\left(\frac{k}{n}, x, y\right) =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k-1} \int_{R^d} \tilde{p}(\frac{j}{n}, x, z)\, M_n\left(\frac{k-j}{n}, z, y\right) dz =$$

$$n^{-3/2} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{|\nu|=3} \sum_{|\mu|=1} a_{\nu,\mu}(j), \qquad (1)$$

где

$$a_{\nu,\mu}(j) = 3\int_{R^d}\int_{R^d}\int_0^1 \tilde{p}(\frac{j}{n}, x, z) D_y^{\mu} q_y(\theta)(z-y)^{\mu} \times$$

$$\frac{\theta^{\nu}}{\nu!} D_z^{\nu} \tilde{p}_n^y \left(\frac{k-j-1}{n}, z+\delta\theta n^{-\frac{1}{2}}, y\right)(1-\delta)^2 d\delta d\theta dz. \qquad (2)$$

Напомним, что $M_n\left(\frac{k-j}{n}, z, y\right) = H_n\left(\frac{k-j}{n}, z, y\right)$ при $k = j+1,$ и в этом случае, согласно оценкам (10) и (11) Лекции 5,

$$\frac{1}{n}\left|\int_{R^d} \tilde{p}\left(\frac{k-1}{n}, x, z\right) H_n\left(\frac{1}{n}, z, y\right) dz\right| \le \frac{C}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \eta_{\rho}^{2,0,k}(y-x)$$

$$\le \frac{C}{\sqrt{n}} \zeta_{\rho, \frac{S-2d-4}{d}}(y-x), \rho = \sqrt{\frac{k}{n}}.$$

Поэтому в дальнейшем мы рассматриваем только такие индексы j, для которых $k-j > 2$, в этом случае, очевидно, $\frac{1}{2} < \frac{k-j-1}{k-j} < 1$. Рассмотрим в (1) два подмножества индексов: $J_1 = \left\{j : j \le \frac{k}{2}\right\}$ и $J_2 = \left\{j : j > \frac{k}{2}\right\}$. Для $j \in J_1$, с учётом Леммы 5 и оценки (7) Лекции 5, получим следующую границу для $a_{\nu,\mu}(j)$:

$$|a_{\nu,\mu}(j)| \le C \int_{R^d} \tilde{p}\left(\frac{j}{n}, x, z\right) \rho_2^{-2} \zeta_{\rho_2, S-4}(y-z) dz \le$$

$$C\rho_2^{-2} \int_{R^d} \zeta_{\rho_1, S-4}(z-x) \zeta_{\rho_2, S-4}(y-z) dz \le C\rho_2^{-2} \eta_{\rho}^{2,0,k}(y-x)$$

$$(3)$$

где $\rho_1 = \sqrt{\frac{j}{n}}, \rho_2 = \sqrt{\frac{k-j}{n}}, \rho^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 = \frac{k}{n}$. Подставляя оценку (3) в (1), получим

$$n^{-3/2}\left|\sum_{j \in J_1} \sum_{|\nu|=3} \sum_{|\mu|=1} a_{\nu,\mu}(j)\right| \le$$

$$Cn^{-1/2}\eta_{\rho}^{2,0,k}(y-x)\sum_{j\in J_1}\frac{1}{n}\times\frac{1}{\left(\frac{k-j}{n}\right)}\leq$$

$$Cn^{-1/2}\eta_{\rho}^{2,0,k}(y-x)\int\limits_{0}^{k/2n}\frac{du}{\left(\frac{k}{n}-u\right)}=$$

$$Cn^{-1/2}\eta_{\rho}^{2,0,k}(y-x)\left(\ln\frac{k}{n}-\ln\frac{k}{2n}\right)=$$

$$C(\ln 2)\, n^{-1/2}\eta_{\rho}^{2,0,k}(y-x). \qquad (4)$$

Рассмотрим теперь $a_{\nu,\mu}(j)$, $j\in J_2$. Пусть $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_d)$, $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_d)$. Поскольку $|\mu|=1$, существует индекс l такой, что $\mu_l=1$. Обозначим его через $l(\mu)$. Рассмотрим сначала случай $\nu_{l(\mu)}<3$. Тогда, поскольку $|\nu|=3$, существует индекс $l^*\neq l(\mu)$ такой, что $\nu_{l^*}\geq 1$. Выполнив интегрирование по частям по переменной z_{l^*}, получим

$$a_{\nu,\mu}(j)=3\int\limits_{R^d}\int\limits_{R^d}\int\limits_{0}^{1}\frac{\partial}{\partial z_{l^*}}\tilde{p}\left(\frac{j}{n},x,z\right)D_y^{\mu}q_y(\theta)(z_{l(\mu)}-y_{l(\mu)})$$

$$\frac{\theta^{\nu}}{\nu!}D_z^{\nu^*}\tilde{p}_n^{y}\left(\frac{k-j-1}{n},z+\delta\theta n^{-\frac{1}{2}},y\right)(1-\delta)^2\,d\delta\, d\theta\, dz.$$

Здесь мультииндекс ν^* имеет те же компоненты, что и исходный мультииндекс ν, кроме компоненты с номером l^*. По переменной z_{l^*} выполнялось интегрирование по частям, поэтому $\nu_{l^*}^*=\nu_{l^*}-1$ и $|\nu^*|=2$. Отсюда, снова пользуясь оценкой (7) Лекции 5 и **А3**, получаем верхнюю границу

$$\left|a_{\nu,\mu}(j)\right|\leq C\int\limits_{R^d}\left|\frac{\partial}{\partial z_{l^*}}\tilde{p}\left(\frac{j}{n},x,z\right)\right|\rho_2^{-1}\,\zeta_{\rho_2,S-4}(y-z)dz\leq$$

$$C\rho_1^{-1}\rho_2^{-1}\eta_\rho^{2,0,k}(y-x). \tag{5}$$

Если же $\nu_{l(\mu)} = 3$, то подынтегральное выражение в (2) как функция переменной $z_{l(\mu)}$ имеет вид

$$\int f(z_{l(\mu)})(z_{l(\mu)} - y_{l(\mu)})g^{(3)}(z_{l(\mu)})dz_{l(\mu)}.$$

Интегрируя по частям и учитывая условия на бесконечности для f и g, получим

$$\int f(z_{l(\mu)})(z_{l(\mu)} - y_{l(\mu)})g^{(3)}(z_{l(\mu)})dz_{l(\mu)} =$$

$$\int f(z_{l(\mu)})\left\{\left[(z_{l(\mu)} - y_{l(\mu)})g(z_{l(\mu)})\right]^{(3)} - 3g^{(2)}(z_{l(\mu)})\right\}dz_{l(\mu)} =$$

$$-\int f'(z_{l(\mu)})\left[(z_{l(\mu)} - y_{l(\mu)})g''(z_{l(\mu)}) - g'(z_{l(\mu)})\right]dz_{l(\mu)}.$$

К последнему интегралу применимы те же оценки, что и при выводе (5), откуда снова получаем

$$\left|a_{\nu,\mu}(j)\right| \le C\rho_1^{-1}\rho_2^{-1}\eta_\rho^{2,0,k}(y-x). \tag{6}$$

Из (5), (6) следует, что

$$n^{-3/2}\left|\sum_{j\in J_2}\sum_{|\nu|=3}\sum_{|\mu|=1} a_{\nu,\mu}(j)\right| \le \frac{C}{\sqrt{n}}\eta_\rho^{2,0,k}(y-x) \times$$

$$\sum_{j\in J_2}\frac{1}{n}\rho_1^{-1}\rho_2^{-1} \le \frac{C}{\sqrt{n}}\eta_\rho^{2,0,k}(y-x)\int_0^{k/n} x^{-1/2}\left(\frac{k}{n}-x\right)^{-1/2}dx$$

$$\le \frac{C}{\sqrt{n}}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\eta_\rho^{2,0,k}(y-x). \tag{7}$$

Из (1), (4) и (7) следует оценка при $r=1$:

$$\left|\tilde p \otimes_n (H+M_n)\left(\tfrac{k}{n},x,y\right) - \tilde p \otimes_n H\left(\tfrac{k}{n},x,y\right)\right| \le \tfrac{C}{\sqrt n}\eta_\rho^{2,0,k}(y-x). \tag{8}$$

Докажем, что для $r>1$ справедлива оценка

$$\left|\tilde p \otimes_n (H+M_n)^{(r)}\left(\frac{k}{n},x,y\right) - \tilde p \otimes_n H^{(r)}\left(\frac{k}{n},x,y\right)\right| \le$$

$$\frac{rC^r\left[\Gamma\left(\frac12\right)\right]^{r-1}}{\sqrt{n}\,\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}\rho^{r-1}\eta_\rho^{r+1,0,k}(y-x) \tag{9}$$

Тогда из оценки (10) Лекции 5 и (9) будет следовать, что

$$T_1 \le \tfrac{C}{\sqrt n}\zeta_{\frac{S-2d-4}{d}}(y-x). \tag{10}$$

Для доказательства (9) запишем рекуррентное соотношение

$$\tilde p \otimes_n (H+M_n)^{(r+1)}\left(\frac{k}{n},x,y\right) - \tilde p \otimes_n H^{(r+1)}\left(\frac{k}{n},x,y\right) =$$

$$\left[\tilde p \otimes_n (H+M_n)^{(r)} - \tilde p \otimes_n H^{(r)}\right] \otimes_n (H+M_n)\left(\frac{k}{n},x,y\right) +$$

$$\left(\tilde p \otimes_n H^{(r)}\right) \otimes_n M_n\left(\frac{k}{n},x,y\right). \tag{11}$$

Для оценки $\tilde p \otimes_n H^{(r)}$ мы воспользуемся неравенствами, которые мы сформулируем в виде задачи.

Задача 4. При $r \ge 1$ справедливы неравенства

$$\left|\tilde p \otimes_n H^{(r)}\left(\frac{j}{n},x,z\right)\right| \le \frac{C^r}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}\rho_1^r p_c\left(\frac{j}{n},x,z\right), \tag{12}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\tilde p \otimes_n H^{(r)}\left(\frac{j}{n},x,z\right)\right]\right| \le \frac{C^r}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}\rho_1^{r-1} p_c\left(\frac{j}{n},x,z\right),$$

где $\rho_1 = \sqrt{j/n}$.

Неравенства (12) позволяют дословно повторить вывод оценки для $\tilde{p} \otimes_n M_n\left(\frac{k}{n}, x, y\right)$ (неравенство (7)), заменяя в рассуждениях $\tilde{p}$ на менее сингулярную функцию $\tilde{p} \otimes_n H^{(r)}$, и получить неравенство

$$\left|\left(\tilde{p} \otimes_n H^{(r)}\right) \otimes_n M_n\right)\left(\frac{k}{n}, x, y\right)\Big| \leq \frac{C^{r+1}}{\sqrt{n}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)} \rho^r \eta_\rho^{2,0,k}(y-x). \qquad (13)$$

Используя последовательно соотношения (11), нетрудно получить оценку (9). Покажем, как это сделать для $r = 2$, для $r > 2$ вычисления аналогичны. Из (13) при $r = 1$ получим

$$\left|\left(\tilde{p} \otimes_n H\right) \otimes_n M_n\right)\left(\frac{k}{n}, x, y\right)\Big| \leq \frac{C^2}{\sqrt{n}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \rho \eta_\rho^{2,0,k}(y-x), \qquad (14)$$

а из полученной выше оценки (8) и неравенств (10) и (11) Лекции 5

$$\left|[\tilde{p} \otimes_n (H+M_n) - \tilde{p} \otimes_n H] \otimes_n (H+M_n)\left(\frac{k}{n}, x, y\right)\right| \leq$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{C^2}{\sqrt{n}} \eta_{\rho_1}^{2,0,j}(z-x)\rho_2^{-1}\zeta_{\rho_2,S-4}(y-z)dz \leq \frac{C^2}{\sqrt{n}} \eta_\rho^{3,0,k}(y-x) \times$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} - \frac{j}{n}}} \leq \frac{C^2}{\sqrt{n}} \eta_\rho^{3,0,k}(y-x)\rho \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}. \qquad (15)$$

Складывая (14) и (15), и учитывая, что $\eta_\rho^{2,0,k}(y-x) \leq \eta_\rho^{3,0,k}(y-x)$, получим (9) при $r = 2$. Продолжая итерации, получим (9) для любого $r \geq 1$.

Оценим теперь T_2.

$$T_2 = \left|\sum_{r=0}^{n} [\tilde{p} \otimes_n (H+M_n)^{(r)} - \tilde{p} \otimes_n (K_n+M_n)^{(r)}](1, x, y)\right|.$$

Заметим, что

$$(H-K_n)\left(\frac{k-j}{n},z,y\right)=\left(L_z-\tilde{L}_z^y\right)\left[\tilde{p}-\tilde{p}_n^y\right]\left(\frac{k-j}{n},z,y\right).$$

Условия **A1-A3** и **B1** позволяют (формально) дифференцировать два раза классическое разложение Эджворта для разности $\left[\tilde{p}-\tilde{p}_n^y\right]\left(\frac{k-j}{n},z,y\right)$, что приводит к оценке

$$\left|(H-K_n)\left(\frac{k-j}{n},z,y\right)\right|\leq\frac{C}{\sqrt{n}}\rho^{-1}\zeta_{\rho,S-2}(y-z). \qquad (16)$$

Отсюда для $r=1$

$$\left|[\tilde{p}\otimes_n(H+M_n)-\tilde{p}\otimes_n(K_n+M_n)](\frac{k}{n},x,y)\right|=$$

$$\left|\tilde{p}\otimes_n(H-K_n)(\frac{k}{n},x,y)\right|\leq\frac{C^2}{\sqrt{n}}\rho B\left(1,\frac{1}{2}\right)\eta_\rho^{2,0,k}(y-x). \qquad (17)$$

Запишем рекуррентное соотношение, аналогичное (11)

$$\left[\tilde{p}\otimes_n(H+M_n)^{(r+1)}-\tilde{p}\otimes_n(K_n+M_n)^{(r+1)}\right]\left(\frac{k}{n},x,y\right)=$$

$$\left[\tilde{p}\otimes_n(H+M_n)^{(r)}-\tilde{p}\otimes_n(K_n+M_n)^{(r)}\right]\otimes_n(H+M_n)\left(\frac{k}{n},x,y\right)$$

$$+\left[\tilde{p}\otimes_n(K_n+M_n)^{(r)}\right]\otimes_n(H-K_n)\left(\frac{k}{n},x,y\right). \qquad (18)$$

Задача 5. Используя неравенства (11) Лекции 5, показать, что

$$\left|\tilde{p}\otimes_n(K_n+M_n)^{(r)}\left(\frac{k}{n},x,y\right)\right|\leq C^{r+1}\rho^r\eta_\rho^{r+1,0,k}(y-x)\times$$

$$B\left(\frac{1}{2},1\right)B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\times\ldots\times B\left(\frac{1}{2},\frac{r+1}{2}\right)=$$

$$C^{r+1}\rho^r\eta_\rho^{r+1,0,k}(y-x)\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^r}{\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)}. \qquad (19)$$

Из (16) – (19), аналогично оценке для T_1, получим оценку для T_2

$$T_2\leq\frac{C}{\sqrt{n}}\zeta_{\frac{S-2d-4}{d}}(y-x). \qquad (20)$$

Из (10) и (20) получаем

$$\left|\sum_{r=o}^{n} \tilde{p} \otimes_n H^{(r)}\,(1,x,y) - \sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)}\right| \leq$$

$$\frac{C}{\sqrt{n}} \zeta_{\frac{S-2d-4}{d}}(y-x).$$

Запишем теперь всю цепочку полученных аппроксимаций. Внизу, под стрелкой, мы будем указывать оценку погрешности, возникающую при этом переходе, а также где была получена эта оценка. Положим $S' = \frac{S-2d-4}{d}$.

$$p(1,x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{p} \otimes H^{(r)}(1,x,y) \quad \underbrace{\to}_{\frac{C}{\sqrt{n}} p_c(1,x,y);\ \textit{Шаг } 2}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \tilde{p} \otimes_n H^{(r)}(1,x,y) \quad \underbrace{\to}_{C\exp(-n) p_c(1,x,y);\ \textit{Шаг } 1} \sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n H^{(r)}(1,x,y)$$

$$\underbrace{\to}_{\frac{C}{\sqrt{n}} \zeta_{S'}(y-x);\ \textit{Шаг } 6} \sum_{r=0}^{n} \tilde{p} \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)}(1,x,y) \quad \underbrace{\to}_{\frac{C}{\sqrt{n}} \zeta_{S'}(y-x);\ \textit{Лемма } 8}$$

$$\sum_{r=0}^{n} \tilde{p}_n \otimes_n (K_n + M_n)^{(r)}(1,x,y) \quad \underbrace{\to}_{\frac{C}{\sqrt{n}} \zeta_{S'}(y-x);\ \textit{Лемма } 7}$$

$$\sum_{r=0}^{n} \tilde{p}_n \otimes_n {H_n}^{(r)}(1,x,y) = p_n(1,x,y).$$

Теорема А полностью доказана.

Лекция 7.
Вырожденные диффузии. Пример А.Н. Колмогорова.

Литература:

- A.N. Kolmogorov. Zufällige Bewegungen (zur Theorie der Brownschen Bewegung). Annals of Mathematics, 1934, 116-117.
- F. Delarue, S. Menozzi. Density Estimation for a Random Noise Propagating through a Chain of Differential Equations, J. Func. Anal., 259, 2010. №6, 1577-1630.
- S. Menozzi. Parametrix technique and Martingale problems for some degenerate Kolmogorov equations, Elect. Comm. In Probab., 16, 2011, 234-250.
- D. Nualart. The Malliavin Calculus and Related Topics. Springer, 2006.
- V.N. Kolokoltsov. Stochastic Hamilton-Jacobi-Bellman equation and stochastic Hamiltonian systems. J. Dynamic Contr. Syst. 2:3, 1996, 299-319.

В 1934 году А.Н. Колмогоров опубликовал статью, в которой рассмотрел следующую двумерную систему СДУ

$$X_t^{s,(x,y)} = x + b(t-s) + (2k)^{1/2}(W_t - W_s)$$
$$Y_t^{s,(x,y)} = y + \int_s^t X_u^{s,(x,y)} du \qquad (1)$$

(здесь $b \in R$ и $k \in R_+$ постояные). Нетрудно видеть, что $(X_t^{s,(x,y)}, Y_t^{s,(x,y)})-$ гауссовский процесс, переходная плотность которого даётся формулой:

$$\tilde{p}\left(s,t,(x,y),(x',y')\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi k(t-s)^2} \times$$
$$\exp\left(-\frac{\left|x'-x-b(t-s)\right|^2}{4k(t-s)} - \frac{3\left|y'-y-\frac{x'+x}{2}(t-s)\right|^2}{k(t-s)^3}\right). \qquad (2)$$

Прямой проверкой нетрудно убедиться, что $\tilde{p}\left(s,t,(x,y),\left(x',y'\right)\right)$ является фундаментальным решением обратного уравнения Колмогорова

$$-\frac{\partial\tilde{p}\left(s,t,(x,y),\left(x',y'\right)\right)}{\partial s} = \left[k\partial_{xx}^2 + b\partial_x + x\partial_y\right]\tilde{p}\left(s,t,(x,y),\left(x',y'\right)\right).$$

Задача 6. Выполнить эту проверку.

Замечание 1. Нетрудно также видеть, что формула (2) остаётся справедливой и в случае: $(X_t^{s,(x,y)}, Y_t^{s,(x,y)}) \in R^d \times R^d, d > 1$. В этом случае производящий оператор имеет вид

$$L_x = k\sum_{i=1}^d \partial_{x_i x_i}^2 + \sum_{i=1}^d b_i\partial_{x_i} + \sum_{i=1}^d x_i\partial_{y_i}.$$

Отметим некоторые замечательные свойства системы Колмогорова (1). Во-первых, несмотря на вырожденность системы (второе уравнение не содержит броуновской компоненты), переходная плотность существует и даётся формулой (2). Во-вторых, вырожденность системы приводит к тому, что первая и вторая компоненты «живут» в разных временных шкалах: первая компонента «живёт» в характерной для броуновского движения шкале $(t-s)^{1/2}$, а вторая компонента, будучи интегралом от первой компоненты, «живёт» в шкале $(t-s)^{3/2}$. И, наконец, третье важное свойство состоит в том, что из-за неограниченности коэффициента при ∂_y (слагаемое $x\partial_y$ в производящем операторе) происходит перенос начального условия x во вторую компоненту $Y_t^{s,(x,y)}$, то есть

$$EY_t^{s,(x,y)} = y + x(t-s) + b\frac{(t-s)^2}{2}$$

Окончательное выражение для плотности получается с учётом тождества

$$y' - EY_t^{s,(x,y)} = y' - y - \frac{x'+x}{2}(t-s) + \frac{t-s}{2}\left(x' - EX_t^{s,(x,y)}\right).$$

Семейство плотностей (2) обладает полугрупповым свойством:

$$\tilde{p}\left(s,v,(x,y),(w,z)\right) = \int\limits_{R^d\times R^d} \tilde{p}(s,t,(x,y),\left(x',y'\right)) \times$$

$$\tilde{p}\left(t, v, (x', y'), (w, z)\right) dx'dy'.$$

Работа Колмогорова послужила толчком к многочисленным исследованиям, так называемых, уравнений «типа Колмогорова». Наиболее общая модель, которая позволяет оставаться в рамках гауссовских границ для переходной плотности, рассмотрена в работе F. Delarue и S. Menozzi (2010). Она имеет вид:

$$\begin{aligned} dX_t^1 &= F_1(t, X_t^1, \dots, X_t^n)dt + \sigma(t, X_t^1, \dots, X_t^n)dW_t, \\ dX_t^2 &= F_2(t, X_t^1, \dots, X_t^n)dt, \\ dX_t^3 &= F_3(t, X_t^2, \dots, X_t^n)dt, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ dX_t^n &= F_n(t, X_t^{n-1}, X_t^n)dt \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь W_t - d - мерное броуновское движение, каждый процесс $\left(X_t^i\right)_{t\geq 0}$, $1 \leq i \leq n,$ также принимает значения в R^d. Для упрощения изложения мы ограничимся однородным случаем для $n = 2$, то есть рассмотрим однородную систему

$$X_t^1 = x_1 + \int_0^t b(X_s^1, X_s^2)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s^1, X_s^2)\,dW_s,$$

$$X_t^2 = x_2 + \int_0^t F(X_s^1, X_s^2)\,ds. \tag{4}$$

Система (4) может быть записана в стандартном виде

$$d\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X_t})dt + B\sigma(\boldsymbol{X}_t)dW_t, \boldsymbol{X}_0 = x, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{F} = (b, F)^* \in R^{2d}, B = \begin{pmatrix} I_d \\ 0_d \end{pmatrix} - 2d \times d$ матрица. Относительно системы (5) сделаем следующие предположения:

$(\boldsymbol{R} - \eta)$: Функции b, F удовлетворяют глобальному условию Липшица, а функция σ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\eta \in (0,1]$ с положительной константой κ.

(UE): Существует $\Lambda \geq 1, \forall\, \boldsymbol{x} \in R^{2d}, \xi \in R^d, \Lambda^{-1}|\xi|^2 \leq \langle a(\boldsymbol{x})\xi, \xi\rangle \leq \Lambda\, |\xi|^2$, где $a(\boldsymbol{x}) = \sigma(\boldsymbol{x})\sigma^*(\boldsymbol{x})$.

(**ND**-η): Отображение $x^1 \in R^d \rightsquigarrow F(x^1, x^2) \in R^d$ непрерывно дифференцируемо, его матрица частных производных $x^1 \in R^d \rightsquigarrow D_{x^1}F(x^1, x^2) \in R^d \otimes R^d$ удовлетворяет (поэлементно) условию Гёльдера по переменной x^1 с показателем $\eta \in (0,1]$ и константой κ. Существует *замкнутое выпуклое* множество $\mathcal{E} \subset GL_d(R)$ ($GL_d(R)$ - множество вещественнозначных, *обратимых* $d \times d -$ матриц) такое, что для всех $x^1 \in R^d$ матрица $D_{x^1}F(x^1, x^2)$ принадлежит множеству $\mathcal{E}$. Например, $\mathcal{E}$ может быть замкнутым шаром в $GL_d(R)$.

Прежде чем обсуждать влекут ли гипотезы ($\boldsymbol{R} - \eta$), (**UE**) и (**ND**-η) существование и единственность решения уравнения (5), напомним несколько определений, необходимых нам для дальнейшего изложения.

Определение 5. *Решение уравнения (5)- это пара **а**даптированных процессов $(\boldsymbol{X_t}, W_t)$, определённых на вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ и таких, что*

(i) $W_t -$ *стандартное* $(\mathcal{F}_t)$ *- броуновское движение;*

(ii) $\boldsymbol{X_t}$ *непрерывен, и для каждого* $t \geq 0$

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{X_0} + \int_0^t \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_s)ds + \int_0^t B\sigma(\boldsymbol{X_s})dW_s \quad P - п.н.$$

Определение 6. *Решение $(\boldsymbol{X_t}, W_t)$ называют **сильным** решением, если $\boldsymbol{X_t}$ **адаптирован к фильтрации** $\left(\overline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{W}}\right)$, то есть фильтрации W, пополненной относительно P.*

Определение 7. *Решение $(\boldsymbol{X}, W)$, не являющееся сильным решением, называют **слабым** решением.*

Определение 8. *Говорят, что для уравнения (5) имеет место **единственность по распределению (или слабая единственность)**, если для любых двух решений $(\boldsymbol{X}, W)$ и $(\widetilde{\boldsymbol{X}}, \widetilde{W})$ (которые могут быть определены даже на разных вероятностных пространствах с фильтрациями $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ и $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}_t'), P')$) с одинаковыми начальными условиями $\boldsymbol{X_0} = \widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{0}} = x$ **законы распределения $\boldsymbol{X}$** и $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ совпадают.*

Определение 9. *Говорят, что для уравнения (5) имеет место **потраекторная единственность (или сильная единственность)**, если для любых двух решений $(\boldsymbol{X}, W)$ и $(\widetilde{\boldsymbol{X}}, \widetilde{W})$,* *определённых на одном вероятностном пространстве и таких, что* $\boldsymbol{X_0} = \widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{0}} = x$, $\boldsymbol{X}$ *и* $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ *неразличимы (т.е. потраекторно* $P - п.н.$ *совпадают*).

При сформулированных условиях $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** и (**ND**-η) уравнение (5) имеет **единственное слабое решение**. Этот результат был недавно доказан в работе S. Menozzi (2011). Нас будет интересовать вопрос о существовании гладкой переходной плотности у этого решения. В случае, когда коэффициенты уравнения (5) бесконечно дифференцируемы и имеют ограниченные производные всех порядков, ответ даётся теорией Хёрмандера. На коэффициенты уравнения при этом накладываются условия невырожденности Хёрмандера, гарантирующие существование гладкой плотности. Перейти к коэффициентам класса C^∞ можно, например, свернув коэффициенты с функцией $\varphi_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-d/2}\varepsilon^{-d/2}\, exp\left(-\frac{|x|^2}{2\varepsilon}\right)$, то есть, перейдя к сглаженным коэффициентам

$$b_\varepsilon(x) = \int \varphi_\varepsilon(x-y)b(y)dy, F_\varepsilon(x) = \int \varphi_\varepsilon(x-y)F(y)dy,$$

$$\sigma_\varepsilon(x) = \int \varphi_\varepsilon(x-y)\sigma(y)dy,\ x,y \in R^{2d}. \qquad (6)$$

Из условий $(\boldsymbol{R} - \eta)$ и **(UE)** следует, что сглаженные коэффициенты принадлежат классу C^∞ и имеют ограниченные производные всех порядков. Покажем теперь, что система (5) удовлетворяет «слабому» условию Хёрмандера. Напомним сначала определение скобки Пуассона двух векторных полей. Пусть

$$X = \sum_i a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},\ \ Y = \sum_j b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

пара векторных полей класса C^∞ на R^d. Тогда для гладкой функции f имеем:

$$XYf = X(\sum_j b_j(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}) = \sum_{i,j} a_i\frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$YXf = Y(\sum_j a_j(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}) = \sum_{i,j} b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Поэтому разность $XYf - YXf$ снова является векторным полем

$$XYf - YXf = \sum_j \left\{ \sum_i \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \right\} \frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad (7)$$

Определение 10. Векторное поле $XY - YX$ называется *скобкой Пуассона* векторных полей X и Y и обозначается $[X, Y]$.
Очевидно, поле $[X, Y]$ также класса C^∞. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать сглаженные поля. Чтобы не усложнять обозначения, нижний индекс ε мы будем опускать. Производящий оператор, соответствующий системе (5), может быть записан в виде

$$\mathcal{L}_x = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i^1 \partial x_j^1} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i^1} + \sum_{i=1}^{d} F_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i^2},$$

где $x = (x^1, x^2) \in R^d \times R^d$.
Задача 7. Проверить, что этот же оператор можно записать в форме Хёрмандера как «сумму квадратов»:

$$\mathcal{L}_x = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} A_j^2 + B,$$

где векторные поля A_j и B определяются следующим образом

$$A_j = \sum_{i=1}^{d} \sigma_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i^1}, \quad B = \sum_{j=1}^{d} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j^1} + \sum_{i=1}^{d} F_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i^2}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\left(\mathrm{Tr}\big(\sigma(x)\nabla\sigma_{j\cdot}(x)\big)\right)\frac{\partial}{\partial x_j^1},$$

где через $\nabla\sigma_{j\cdot}(x)$ обозначена $d \times d-$ матрица, $i-$ ый столбец которой равен вектору градиента функции $\sigma_{ji}(x^1, x^2)$ по переменным x^1:

$$\nabla\sigma_{j\cdot}(x) = [\nabla_{x^1}\sigma_{j1}(x) \quad \dots \quad \nabla_{x^1}\sigma_{jd}(x)].$$

Рассмотрим вектор - столбцы, соответствующие координатам введённых выше векторных полей A_j и B в базисе пространства R^{2d}, т.е. в базисе $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_d^1},\frac{\partial}{\partial x_1^2},\dots,\frac{\partial}{\partial x_d^2}\right\}$:

$$A_j(x)=\begin{pmatrix}\sigma_{1j}(x)\\ \vdots\\ \sigma_{dj}(x)\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, j=1,\dots,d, \tag{8}$$

$$B(x)=\begin{pmatrix}b_1(x)-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma(x)\nabla\sigma_{1\cdot}(x))\\ \vdots\\ b_d(x)-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma(x)\nabla\sigma_{d\cdot}(x))\\ F_1(x)\\ \vdots\\ F_d(x)\end{pmatrix}$$

Условия (**UE**) и (**ND**-η) влекут «слабое» (то есть не содержащее скобок Пуассона вида $[A_i,A_j]$) условие Хёрмандера:

($\mathbf{H}_w$): $\forall x\in R^{2d}$

$$\mathrm{Span}\,\{A_1(x),\dots,A_d(x),[A_1(x),B(x)],\dots,[A_d(x),B(x)]\}=R^{2d},$$

где $[A_i(x),B(x)]$, $i=1,\dots,d$, - скобки Пуассона векторных полей $A_i(x)$ *и* $B(x)$.

Лемма 9. *Пусть выполнены условия* (**UE**) и (**ND**-η). *Тогда выполнено «слабое» условие Хёрмандера* ($\mathbf{H_w}$).

Доказательство. Применяя формулу (7) для вычисления скобки $[A_j(x),B(x)]$, получим, что координаты векторного поля $[A_j(x),B(x)]$ в базисе $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_d^2}\right\}$ имеют вид

$$\left[A_j(x),B(x)\right]=\begin{pmatrix}*\\ \left(D_{x_1^1}F(x)\right)\sigma_{\cdot j}\end{pmatrix}, j=1,\dots,d. \tag{9}$$

Здесь знаком $\divideontimes$ обозначен вектор первых d координат, точное выражение нетрудно выписать, но оно нам не понадобится, а $\sigma_{\cdot j}$ – j –ый столбец матрицы $\sigma(x)$. Утверждение леммы теперь легко следует из условий **(UE),** (**ND**-η), (8) и (9).

Существование и гладкость переходной плотности решения системы (4) со сглаженными коэффициентами (6) следует теперь из Леммы 9 и следующей теоремы:

Теорема (D. Nualart, 2006, Теорема 2.3.3, стр. 133).
Предположим, что $X_t = (X_t^1, X_t^2), t \geq 0$*, решение системы (4) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, имеющими ограниченные производные всех порядков. Пусть выполнено условие Хёрмандера* $(\mathbf{H_w})$. *Тогда для любого* $t > 0$ *случайный вектор* (X_t^1, X_t^2) *имеет бесконечно дифференцируемую плотность.*

Следствие. *Пусть выполнены условия* $(\boldsymbol{R} - \eta)$, (**UE**) *и* (**ND**-η). *Тогда решение* (X_t^1, X_t^2) *системы (4) со сглаженными коэффициентами (6) имеет бесконечно дифференцируемую переходную плотность.*

Важный частный случай системы (4) – это случай $F(X_s^1) = X_s^1$:

$$X_t^1 = x_1 + \int_0^t b(X_s^1, X_s^2)ds + \int_0^t \sigma(X_s^1, X_s^2)dW_s,$$

$$X_t^2 = x_2 + \int_0^t X_s^1 ds. \tag{10}$$

Приведём несколько примеров, в которых возникают системы вида (10). В финансовой математике, когда рассматривают опционы Азиатского типа, то есть опционы, цена исполнения которых определяется средней стоимостью активов на период его действия, X_t^1 представляет собой динамику базовых активов (underlying assets), а интеграл от них, X_t^2 , входит в функцию выплат. К системам вида (10) относятся также обобщения Гамильтоновых систем – так называемые *стохастические Гамильтоновы системы* (V. Kolokoltsov, 1996). Для функции Гамильтона $H(x,y)$ вида $H(x,y) = V(y) + \frac{|x|^2}{2}$, где V- потенциал, а $\frac{|x|^2}{2}$ −кинетическая энергия частицы с единичной массой, соответствующая стохастическая Гамильтонова система имеет вид

$$dX_t^1 = -\frac{\partial H}{\partial y}(X_t^2) - c(X_t^2)dW_t$$

$$dX_t^2 = \frac{\partial H(X_t^1)}{\partial x}dt,$$

то есть является частным случаем системы (10) с

$$b(X_s^1, X_s^2) = -\partial_y V(X_s^2),\ \sigma(X_s^1, X_s^2) = -c(X_s^2),\ \frac{\partial H(X_s^1)}{\partial x} = X_s^1.$$

Системы вида (10) возникают также при описании стохастических кинематических моделей, где компонента X_t^1 соответствует скорости частицы, а компонента $X_t^2 -$ её положению.

Лекция 8.
Вырожденные диффузии (продолжение). Основная теорема об оценке типа Аронсона для переходной плотности.

Литература:

- D. Stroock, S. Varadhan. Multidimensional diffusion processes. Springer. New York. 1979.
- R. Bass. Diffusion processes and Elliptic Operators. Springer. 1997.
- R. Bass, E. Perkins. A new technique for proving uniqueness for martingale problems. *From Probability to Geometry (I): Volume in Honor of the 60th Birthday of Jean-Michel Bismut*, pages 47-53, 2009.
- S. Menozzi. Parametrix technique and Martingale problems for some degenerate Kolmogorov equations. Elect. Comm. In Probab., 16, 2011, 234-250.
- J. Jacod, A. Shiryaev. Limit Theorems for Stochastic Processes, Springer, 1987.
- П. Биллингсли. Сходимость вероятностных мер. Наука, М., 1977 (пер. с англ.).

Мы рассматриваем систему СДУ

$$X_t^1 = x_1 + \int_0^t b(X_s^1, X_s^2)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s^1, X_s^2)\,dW_s$$

$$X_t^2 = x_2 + \int_0^t F(X_s^1, X_s^2)\,ds, \qquad (1)$$

которая может быть записана также в виде

$$d\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_t)dt + B\sigma(\boldsymbol{X}_t)dW_t,\ \ \boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{x}. \qquad (2)$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условиям $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** и **(ND-**η) Лекции 7. Для формулировки основного результата нам понадобится масштабирующая $2d \times 2d$ - матрица $\mathbb{T}_t$

$$\mathbb{T}_t = \begin{pmatrix} t\boldsymbol{I}_d & \boldsymbol{0}_d \\ \boldsymbol{0}_d & t^2\boldsymbol{I}_d \end{pmatrix}.$$

Наша ближайшая цель – доказать следующий результат.

Теорема B. *Пусть коэффициенты системы (2) удовлетворяют условиям* $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** , **(ND-**η). *Тогда для любого* $t > 0$ *и любого* *начального условия* $x \in R^{2d}$ *закон распределения вектора решений* (X_t^1, X_t^2) *системы (2) при условии* $(X_0^1, X_0^2) = x$ *абсолютно непрерывен относительно меры Лебега в* R^{2d} *с плотностью* $y^{2d} \to p(t, x, y)$. *Более того, для любого T>0 найдётся постоянная* $C_T \geq 1$, *зависящая только от* T, Λ, $\kappa, d, \mathcal{E}$, *такая, что*

$$C_T^{-1} t^{-2d} \exp(-C_T t |\mathbb{T}_t^{-1}(\boldsymbol{\theta}_t(x) - y)|^2)$$

$$\leq p(t, x, y)$$

$$\leq C_T t^{-2d} \exp(-C_T^{-1} t |\mathbb{T}_t^{-1}(\boldsymbol{\theta}_t(x) - y)|^2), \qquad (3)$$

где $\boldsymbol{\theta}_t(x) = (\theta_t^1(x), \theta_t^2(x))$ - *значение в* R^{2d} *в момент* t *решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\dot{\theta}_t^1 = b(\theta_t^1, \theta_t^2)$$
$$\dot{\theta}_t^2 = F(\theta_t^1, \theta_t^2) \qquad (4)$$

с начальным условием $\boldsymbol{\theta}_0(x) = (\theta_0^1(x), \theta_0^2(x)) = x$.

Замечание 2. Для примера А.Н. Колмогорова с $k = 1$ решение системы (4) имеет следующий вид

$$\theta_t^1 = bt + x$$
$$\theta_t^2 = b\frac{t^2}{2} + xt + y,$$

поэтому, согласно (3),

$$C_T^{-1} t^{-2} \exp\left(-C_T\left[\frac{|x' - x - bt|^2}{t} + \frac{\left|y' - y - xt - b\frac{t^2}{2}\right|^2}{t^3}\right]\right)$$

$$\leq p\big(t, (x, y), (x', y')\big)$$

$$\leq \quad C_T t^{-2} \exp\left(-C_T^{-1}\left[\frac{|x' - x - bt|^2}{t} + \frac{\left|y' - y - xt - b\frac{t^2}{2}\right|^2}{t^3}\right]\right).$$

Воспользуемся тождеством

$$y' - y - xt - b\frac{t^2}{2} = y' - y - \frac{x' + x}{2}t + \frac{1}{2}t(x' - x - bt)$$

и неравенством Юнга: $2|AB| \le \lambda^2 A^2 + \lambda^{-2} B^2,\ \forall \lambda \in R$. Выберем в неравенстве Юнга

$A = \frac{y' - y - \frac{x' + x}{2}t}{t^{3/2}},\ B = \frac{x' - x - bt}{2\sqrt{t}}$, и возьмём $\lambda > 1$ достаточно близким к 1, получим двустороннюю оценку (возможно, с другой константой C_T)

$$C_T^{-1} t^{-2} \exp\left(-C_T \left[\frac{|x' - x - bt|^2}{t} + \frac{\left| y' - y - \frac{x + x'}{2} t \right|^2}{t^3} \right] \right)$$

$$\le p\left(t, (x, y), (x', y')\right)$$

$$\le \quad C_T t^{-2} \exp\left(-C_T^{-1} \left[\frac{|x' - x - bt|^2}{t} + \frac{\left| y' - y - \frac{x + x'}{2} t \right|^2}{t^3} \right] \right)$$

Напомним, что в этом простейшем случае переходная плотность выписывается точно (формула (2) Лекции 7). Мы видим, что оценка (3) достаточно точна, она не «улавливает» только правильное значение константы C_T.

Для удобства читателя напомним Теорему Радона - Никодима, которая нам понадобится в дальнейшем.

Определение 11. *Пусть заданы две меры* μ *и* ν *на измеримом пространстве* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Говорят, что мера* μ *абсолютно непрерывна относительно меры* ν, *если из того, что* $A \in \mathcal{F}, \nu(A) = 0$ *следует* $\mu(A) = 0$. *Меры* μ *и* ν *эквивалентны, если для* $A \in \mathcal{F}, \nu(A) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mu(A) = 0$.

Определение 12. *Пусть заданы две меры* μ *и* ν *на измеримом пространстве* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Говорят, что мера* μ *имеет плотность* φ *относительно меры* ν, *если для всех* $A \in \mathcal{F}$

$$\mu(A) = \int_A \varphi \, d\nu$$

Часто пишут $\varphi = \frac{d\mu}{d\nu}$ *или* $d\mu = \varphi d\nu$.

Напомним также, что мера m на $(\Omega, \mathcal{F})$ называется σ- *конечной,* если существует последовательность A_n элементов $\mathcal{F}$ такая, что $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$ и $m(A_n) < \infty$. Очевидно, любая вероятностная мера σ- конечна.

Теорема (Радон-Никодим). *Рассмотрим две* σ- *конечные меры* μ *и* ν *на* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Тогда мера* μ *абсолютно непрерывна относительно меры* ν *тогда и только тогда, когда мера* μ *имеет плотность* φ *относительно меры* ν.

Замечание 3. Предположим, что неравенства (3) доказаны для СДУ (1) со сглаженными коэффициентами (6) (см. Лекцию 7) и с произвольным, но фиксированным $\varepsilon > 0$. Предположим также, что меры, порождённые процессами $X_t^\varepsilon = (X_t^{1\varepsilon}, X_t^{2\varepsilon})$

$$X_t^{1\varepsilon} = x_1 + \int_0^t b_\varepsilon(X_s^{1\varepsilon}, X_s^{2\varepsilon})\, ds + \int_0^t \sigma_\varepsilon(X_s^{1\varepsilon}, X_s^{2\varepsilon})\, dW_s,$$

$$X_t^{2\varepsilon} = x_2 + \int_0^t F_\varepsilon(X_s^{1\varepsilon}, X_s^{2\varepsilon})\, ds$$

слабо сходятся (при $\varepsilon \to 0$) в пространстве $C[0,T]$ к распределению процесса $X_t = (X_t^1, X_t^2)$

$$X_t^1 = x_1 + \int_0^t b(X_s^1, X_s^2)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s^1, X_s^2)\, dW_s,$$

$$X_t^2 = x_2 + \int_0^t F(X_s^1, X_s^2)\, ds$$

Тогда (П. Биллингсли (1977), Теорема 2.1) для любого $0 \le t \le T$, любого открытого множества $G \in R^{2d}$ и любой последовательности $\varepsilon_k \to 0$

$$\liminf_{\varepsilon_k \to 0} P_x\left(X_t^{\varepsilon_k} \in G\right) = \liminf_{\varepsilon_k \to 0} \int_G p^{\varepsilon_k}(t,x,y) dy \ge$$

$$P_x(X_t \in G).$$

Но для переходных плотностей $p^{\varepsilon_k}(t,x,y)$ системы (1) со сглаженными коэффициентами $b_{\varepsilon_k}(x), F_{\varepsilon_k}(x)$ и $\sigma_{\varepsilon_k}(x), x=(x_1,x_2)\in R^{2d}$, справедливы двусторонние оценки (3), причём константа C_T и отображение $\boldsymbol{\theta}_t(x_1,x_2)$ не зависят ни от последовательности ε_k, ни от выбора сглаживающей последовательности $\varphi_{\varepsilon_k}(x)$. Пусть $A\subset R^{2d}$ и Лебегова мера A равна нулю, $\lambda(A)=0$. Тогда и $\int_A p^{\varepsilon_k}(t,x,y)dy=0, \forall k=1,2,...$В силу регулярности меры Лебега в R^{2d} и оценок (3) получим, что $\forall n$ найдётся открытое множество G_n такое, что $A\subset G_n$ и $\int_{G_n} p^{\varepsilon_k}(t,x,y)dy\le \frac{1}{n}, \forall k=1,2,...$ (поскольку для $p^{\varepsilon_k}(t,x,y)$ предполагаем справедливость верхней оценки (3)). Следовательно

$$P_x(X_t\in A)\le P_x(X_t\in G_n)\le \operatorname{liminf}_{\varepsilon_k}\int\limits_{G_n} p^{\varepsilon_k}(t,x,y)dy\le\frac{1}{n}$$

В силу произвольности n заключаем, что $P_x(X_t\in A)=0$. По теореме Радона - Никодима отсюда следует, что существует измеримая функция $p(t,x,y)$ такая, что для любого борелевского множества B

$$P_x(X_t\in B)=\int_B p(t,x,y)dy.$$

Из того, что B произвольно, из определения слабой сходимости и того, что неравенства (3) выполнены для $p^{\varepsilon}(t,x,y)$ равномерно по ε следует, что переходная плотность $p(t,x,y)$ также допускает версию, удовлетворяющую неравенствам (3). В самом деле, пусть существует борелевское множество положительной меры Лебега B, $\lambda(B)=\delta>0$, такое, что при $y\in B$ нижняя граница (3) для $p(t,x,y)$ не имеет места, то есть

$$p(t,x,y)<C_T^{-1}t^{-2d}\exp(-C_T t|\mathbb{T}_t^{-1}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y})|^2),$$

откуда

$$\int\limits_B p(t,x,y)dy<\int\limits_B C_T^{-1}t^{-2d}\exp(-C_T t|\mathbb{T}_t^{-1}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y})|^2)\,dy\le$$

$$\int\limits_B p^{\varepsilon_k}(t,x,y)dy.$$

В силу регулярности Лебеговой меры в R^{2n} найдётся замкнутое множество $F \subset B, \lambda(F) > \delta/2$, для которого

$$\int_F p(t,x,y)dy < \int_F C_T^{-1} t^{-2d} \exp(-C_T t |\mathbb{T}_t^{-1}(\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y})|^2)\, dy \leq$$

$$\int_F p^{\varepsilon_k}(t,x,y)dy.$$

Но тогда

$$\limsup_{\varepsilon_k \to 0} P_x\big(X_t^{\varepsilon_k} \in F\big) > \int_F p(t,x,y)dy = P_x(X_t \in F),$$

что противоречит (П. Биллингсли (1977), Теорема 2.1) слабой сходимости мер $P_{x,t}^{\varepsilon_k}$, $P_{x,t}^{\varepsilon_k}(A) \triangleq P_x\big(X_t^{\varepsilon_k} \in A\big)$, к мере $P_{x,t}$, $P_{x,t}(A) = P_x(X_t \in A)$. Таким образом, нижняя граница для $p(t,x,y)$ имеет место почти всюду по мере Лебега в R^{2n}. Аналогично доказывается справедливость верхней границы в (3). Заметим, что при этом не утверждается, что плотность $p(t,x,y)$ гладкая.

Пусть

$$\mathcal{L}_x = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i^1 \partial x_j^1} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i^1} + \sum_{i=1}^{d} F_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i^2},$$

$x = (x^1, x^2) \in R^d \times R^d$, производящий оператор, соответствующий системе (1).

Определение 13. *Будем говорить, что проблема мартингалов имеет единственное решение, если для заданной начальной точки* $x \in R^{2d}$ *существует единственная вероятностная мера* $\mathbb{P}$ *на* $C(R^+, R^{2d})$ *такая, что, обозначая через* $(\boldsymbol{X}_t)_{t\geq 0}$ *канонический процесс, имеем* $\mathbb{P}[X_0 = x] = 1$ *и для любой* $f \in C_c^2(R^{2d}, R)$

$$f(\boldsymbol{X_t}) - f(x) - \int_0^t \mathcal{L}_x f(\boldsymbol{X_s})ds \qquad (5)$$

является $\mathbb{P} -$ *мартингалом.*

Хорошо известно, что одним из условий слабой сходимости последовательности диффузионных процессов является (слабая) единственность решения проблемы мартингалов, соответствующей производящему оператору предельного процесса. Для операторов, удовлетворяющих условию равномерной эллиптичности, вопрос единственности решения проблемы мартингалов исследован достаточно давно и полно (D. Stroock, S. Varadhan (1979), R. Bass (1997)). Для вырожденных диффузий типа Колмогорова эти условия найдены совсем недавно. Сначала R. Bass и E. Perkins предложили новый метод доказательства единственности решения проблемы мартингалов для *равномерно эллиптических операторов* (R. Bass, E. Perkins (2009)). Затем S. Menozzi (2011) перенёс метод Басса и Перкинса на случай уравнений типа Колмогорова. Сформулируем соответствующий результат S. Menozzi.

Предложение 1. *Пусть выполнены условия* $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** *и* (**ND**-η). *Тогда проблема мартингалов (5) для оператора* $\mathcal{L}_x$ *имеет решение и это решение (слабо) единственно.*

Из Предложения 1 и Теоремы 4.8 на стр. 515 монографии Ж. Жакода и А. Ширяева (1987) следует

Предложение 2. *Пусть выполнены условия* $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** *и* (**ND**-η). *Тогда меры* P_x^{ε}, *порождённые процессами* $X_t^{\varepsilon}=(X_t^{1\varepsilon},X_t^{2\varepsilon})$, *слабо сходятся (при* $\varepsilon\to 0$*) в пространстве* $C[0,T]$ *к мере* P_x, *соответствующей распределению процесса* $X_t=(X_t^1,X_t^2)$.

Из Замечания 3 и Предложения 2 следует, что для доказательства Теоремы B достаточно доказать неравенства (3) для *сглаженных коэффициентов*.

Лекция 9.
Доказательство теоремы об оценках типа Аронсона для переходной плотности.

Литература:

- D. Nualart. The Malliavin calculus and related topics. Probability and its Applications. Springer-Verlag, New York, 2000.
- V. Konakov, S. Menozzi, S. Molchanov. Explicit parametrix and local limit theorems for some degenerate diffusion processes. Annales de l'IHP, 2010, vol. 46, No.4, 908-923.
- F. Delarue, S. Menozzi. Density Estimation for a Random Noise Propagating through a Chain of Differential Equations, J. Func. Anal., 259, 2010. №6, 1577-1630.
- J.-M. Coron. Control and nonlinearity. Mathematical Surveys and Monographs, 136, AMS, 2007.

Мы рассматриваем систему СДУ

$$X_t^1 = x_1 + \int_0^t b(X_s^1, X_s^2)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s^1, X_s^2)\, dW_s$$

$$X_t^2 = x_2 + \int_0^t F(X_s^1, X_s^2)\, ds, \qquad (1)$$

которая может быть записана также в виде

$$d\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X_t})dt + B\sigma(\boldsymbol{X}_t)dW_t, \qquad (2)$$

где коэффициенты удовлетворяют условиям $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** , (**ND**-η). Как было показано выше, для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай коэффициентов класса C^∞. В этом случае из Теоремы Хёрмандера (D. Nualart (2000), Теорема 2.3.3) следует, что для любого $t \in (0, T]$ вектор $(X_t^1, X_t^2)^*$ имеет бесконечно дифференцируемую плотность $p(s,t,x,y), x, y \in R^{2d}$. Более того, эта плотность удовлетворяет обратному уравнению Колмогорова:

$$\partial_s p(s,t,x,y) + \mathcal{L}_{\boldsymbol{x}} p(s,t,x,y) = 0,$$

где

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\partial^2_{x_i^1 x_j^1} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\partial_{x_i^1} + \sum_{i=1}^{d} F_i(x)\partial_{x_i^2}$$

производящий оператор процесса $X_t = (X_t^1, X_t^2)$. Для получения верхней оценки мы хотим применить метод параметрикса. Успех метода зависит от правильно выбранного семейства «замороженных» гауссовских процессов. Семейство «замороженных» процессов получим, выбирая подходящую детерминированную кривую и линеаризуя уравнение (2) в окрестности этой кривой. В качестве такой кривой выберем решение $\boldsymbol{\theta}_{t,T}(y)$ системы *обыкновенных дифференциальных уравнений*, принимающее значение y в *конечный* момент T:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\theta}_{t,T}(y) = \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{\theta}_{t,T}(y)\right), 0 \le t \le T, \boldsymbol{\theta}_{T,T}(y) = y.$$

Замороженный гауссовский процесс $\widetilde{\boldsymbol{X}}_t$ является, таким образом, решением следующей линеаризованной около $\boldsymbol{\theta}_{t,T}(y)$ системы СДУ

$$d\widetilde{\boldsymbol{X}}_t = \left[\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{\theta}_{t,T}(y)\right) + D_x\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{\theta}_{t,T}(y)\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}_t - \boldsymbol{\theta}_{t,T}(y)\right)\right]dt$$
$$+B\sigma\left(\boldsymbol{\theta}_{t,T}(y)\right)dW_t \qquad (3)$$

Ниже мы покажем, что при наших предположениях процесс $\widetilde{\boldsymbol{X}}_t$ имеет гауссовскую переходную плотность, которую мы будем обозначать $\tilde{p}^{T,\boldsymbol{y}}(s,t,x,\cdot)$. В случае, когда точка замораживания и точка, в которой мы вычисляем плотность, совпадают, мы будем опускать верхние индексы, то есть вместо $\tilde{p}^{T,\boldsymbol{y}}(s,t,x,y)$ писать просто $\tilde{p}(s,t,x,y)$. Обозначим через $\tilde{\mathcal{L}}_{t,\boldsymbol{x}}^{T,\boldsymbol{y}}, 0 \le t \le T$, производящий оператор процесса $\widetilde{\boldsymbol{X}}_t$, определённого в (3). Как и в случае невырожденной диффузии, рассмотрим ядро $H(t,T,x,y)$

$$H(t,T,x,y) = \left[\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}} - \tilde{\mathcal{L}}_{t,\boldsymbol{x}}^{T,\boldsymbol{y}}\right]\tilde{p}(s,t,x,y).$$

Затем, используя уравнения Колмогорова, получим

$$p(0,T,x,y) = \tilde{p}(0,T,x,y) + \int_0^T \int_{R^{2d}} p(0,t,x,z)H(t,T,z,y)dtdz. \,(4)$$

Итерируя последнее равенство, получим, что для любого $N \ge 1$

$$p(0,T,x,y) = \tilde{p}(0,T,x,y) + \sum_{k=1}^{N} \int_0^T \int_{R^{2d}} \tilde{p}(0,t,x,z) H^{\otimes k}(t,T,z,y) dt dz$$

$$+ \int_0^T \int_{R^{2d}} p(0,t,x,z) H^{\otimes (N+1)}(t,T,z,y) dt dz. \qquad (5)$$

В отличие от случая невырожденной диффузии, когда итерирование можно было продолжать до бесконечности и контролировать слагаемые ряда равномерно по k, в этом случае, при выполнении только условий $(\boldsymbol{R} - \eta)$, **(UE)** , (**ND**-η), такой контроль в общем случае осуществить не удаётся (за исключением некоторых специальных случаев уравнения (1), рассмотренных в статье V. Konakov, S. Menozzi и S. Molchanov (2010). Поэтому используется другой подход. Соотношение (4) мы итерируем N раз, получаем соотношение (5) и затем доказываем, что при достаточно больших N остаточный член

$$\int_0^T \int_{R^{2d}} p(0,t,x,z) H^{\otimes (N+1)}(t,T,z,y) dt dz.$$

допускает гауссовскую оценку. Прежде чем приступить к выводу верхней оценки (3) Лекции 8, отметим одно *свойство подобия* системы (2). Для заданного $T > 0$ определим процесс $\hat{X}_t$ следующим образом:

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_t = T^{1/2} \mathbb{T}_T^{-1} \boldsymbol{X}_{Tt} \,,$$

где $2d \times 2d$ - матрица $\mathbb{T}_t$ имеет вид

$$\mathbb{T}_t = \begin{pmatrix} tI_d & \mathbf{0}_d \\ \mathbf{0}_d & t^2 I_d \end{pmatrix}.$$

Тогда, очевидно, $\widehat{\boldsymbol{X}}_t$ удовлетворяет СДУ

$$d\widehat{\boldsymbol{X}}_t = T^{3/2} \mathbb{T}_T^{-1} \boldsymbol{F}\left(T^{-1/2} \mathbb{T}_T \widehat{\boldsymbol{X}}_t\right) dt + B\sigma\left(T^{-1/2} \mathbb{T}_T \widehat{\boldsymbol{X}}_t\right) d\widehat{W}_t,$$

где $\widehat{W}_t = T^{-1/2} W_{Tt}$ – новый процесс броуновского движения. Полагая

$$\widehat{\boldsymbol{F}}(x) = T^{3/2} \mathbb{T}_T^{-1} \boldsymbol{F}\left(T^{-1/2} \mathbb{T}_T x\right), \hat{\sigma}(x) = \sigma\left(T^{-1/2} \mathbb{T}_T x\right),$$

Получим

$$d\widehat{\boldsymbol{X}}_t = \widehat{\boldsymbol{F}}\left(\widehat{\boldsymbol{X}}_t\right) dt + B\hat{\sigma}\left(\widehat{\boldsymbol{X}}_t\right) d\widehat{W}_t \qquad (6)$$

Уравнение (6) имеет тот же вид, что и уравнение (2), причём при $T \leq 1$ коэффициенты уравнения (6) снова удовлетворяют условиям $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** , (**ND**-η) с теми же самыми константами, а при $T > 1$ условия тоже выполнены, но с константами, умноженными на T^2. Выпуклое, замкнутое множество $\mathcal{E}$ в условии (**ND**-η) при этом преобразовании не меняется. При этом переходные плотности процессов $\widehat{\boldsymbol{X}}_t$ и $\boldsymbol{X_t}$ связаны соотношением

$$\hat{p}(0,1,x,y) = T^{2d} p(0,T,T^{-\frac{1}{2}}\mathbb{T}_T x, T^{-\frac{1}{2}}\mathbb{T}_T y)$$

откуда

$$\forall x,y \in R^{2d}, p(0,T,x,y) = T^{-2d}\hat{p}\left(0,1,T^{1/2}\mathbb{T}_T^{-1}x, T^{1/2}\mathbb{T}_T^{-1}y\right) \quad (7)$$

Из равенства (7) ясно, как получить оценку для переходной плотности в момент T, если известна оценка в момент $t = 1$. Предположим, что мы получили двусторонние оценки (3) Теоремы В для переходной плотности $\hat{p}(0,1,x,y)$ процесса $\widehat{\boldsymbol{X}}_t$:

$$C_T^{-1}\exp\left(-C_T\left|\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1(x)-y\right|^2\right) \leq \hat{p}(0,1,x,y)$$
$$\leq C_T\exp\left(-C_T^{-1}\left|\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1(x)-y\right|^2\right) \quad (8)$$

(постоянная C_T может зависеть от T, если исходный интервал наблюдений процесса имел вид $[0,T], T > 1$). Здесь $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_t(x) = \left(\hat{\theta}_t^1, \hat{\theta}_t^2\right), 0 \leq t \leq 1$, - решение системы ОДУ

$$\frac{d\hat{\theta}_t^1}{dt} = \hat{b}\left(\hat{\theta}_t^1, \hat{\theta}_t^2\right)$$
$$\frac{d\hat{\theta}_t^2}{dt} = \hat{F}\left(\hat{\theta}_t^1, \hat{\theta}_t^2\right)$$

с начальным условием $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0(x) = (\hat{\theta}_0^1(x), \hat{\theta}_0^2(x)) = x$. Подстановкой легко убедиться, что

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_t(x) = T^{1/2}\mathbb{T}_T^{-1}\boldsymbol{\theta}_{Tt}\left(T^{-1/2}\mathbb{T}_T x\right) \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8) и учитывая соотношение (7), получим искомую оценку (3) Теоремы В для $p(0,T,x,y)$. Таким образом, *достаточно доказать Теорему В только для* $t = 1$. Отметим ещё одно следствие соотношения (9). Отображение, задаваемое потоком $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_t, 0 \leq t \leq 1$, является диффеоморфизмом пространства R^{2d} с липшицевым обратным отображением. Отсюда имеем для любых $x, y \in R^{2d}$:

$$C^{-1}\left|x-\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1^{-1}(y)\right|^2 \leq \left|\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1(x)-y\right|^2 \leq C\left|x-\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1^{-1}(y)\right|^2.$$

Заменяя x на $T^{1/2}\mathbb{T}_T^{-1}x$, y на $T^{1/2}\mathbb{T}_T^{-1}y$ в последних неравенствах, учитывая (9) для прямого и обратного потоков, получим

$$C^{-1}|\mathbb{T}_T^{-1}[x-\boldsymbol{\theta}_T^{-1}(y)]|^2 \le |\mathbb{T}_T^{-1}[\boldsymbol{\theta}_T(x)-y]|^2 \le C|\mathbb{T}_T^{-1}[x-\boldsymbol{\theta}_T^{-1}(y)]|^2$$

$$\le C|\mathbb{T}_T^{-1}[x-\boldsymbol{\theta}_T^{-1}(y)]|^2, \qquad (10)$$

где константа C зависит только от пары $\left(\hat{b},\hat{F}\right)^*$, она не зависит от T для $T\le 1$. Неравенства (10) имеют важное следствие: оценки (3) Теоремы B справедливы как с транспортировкой начального условия x *«потоком вперёд»*, т.е. потоком $\boldsymbol{\theta}_T$, так и с транспортировкой конечного условия y *«потоком назад»,* т.е. потоком $\boldsymbol{\theta}_T^{-1}$.

Приступим к доказательству верхней оценки (3)

в Теореме B. Как мы выяснили, достаточно доказать эту оценку для $T=1$. Запишем равенство (5) для $T=1$

$$p(0,1,x,y)=\tilde{p}(0,1,x,y)+\sum_{k=1}^{N}\int_0^1\int_{R^{2d}}\tilde{p}(0,t,x,z)H^{\otimes k}(t,1,z,y)dtdz$$

$$+\int_0^1\int_{R^{2d}}p(0,t,x,z)H^{\otimes(N+1)}(t,1,z,y)dtdz. \qquad (11)$$

Для дальнейшего нам понадобится обозначение

$$g_{a,t}(y)=t^{-2d}\exp(-a^{-1}t|\mathbb{T}_t^{-1}y|^2)$$

С точностью до константы, зависящей от a и d, $g_{a,t}$ является гауссовской плотностью в R^{2d}. Для свёрток $g_{a,t}$ справедливы следующие простые оценки

Лемма 10. *Для любого* $a>0$ *существует постоянная* $c(a)$, *зависящая только от* a *и* d, *такая, что для любых* $\varepsilon,\varepsilon'>0$ *и любых* $x,x'\in R^{2d}$

$$c^{-1}(a)g_{\frac{a}{4},\varepsilon+\varepsilon'}(x-x')\le\int_{R^{2d}}g_{a,\varepsilon}(z-x)g_{a,\boldsymbol{\varepsilon}'}(z-x')dz$$

$$\le c(a)g_{a,\varepsilon+\varepsilon'}(x-x').$$

Доказательство. С точностью до константы, зависящей только от a *и* d, под знаком интеграла стоит значение плотности свёртки в нуле двух гауссовских плотностей со средними x и $-x'$ и ковариационными матрицами $[a/2]\varepsilon^{-1}\mathbb{T}_\varepsilon^2$ и $[a/2](\varepsilon')^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon'}^2$ соответственно. Сумма таких векторов – гауссовский вектор со средним $x-x'$ и ковариационной матрицей

$[a/2]\left(\varepsilon^{-1}\mathbb{T}_\varepsilon^2+(\varepsilon')^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon'}^2\right)$, где

$$\left(\varepsilon^{-1}\mathbb{T}_\varepsilon^2+(\varepsilon')^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon'}^2\right)=\begin{pmatrix}(\varepsilon+\varepsilon')I_d & \mathbf{0}_d\\ \mathbf{0}_d & \left(\varepsilon^3+(\varepsilon')^3\right)I_d\end{pmatrix}$$

Имеем

$$\left(\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}\right)^{2i-1}\le\frac{\varepsilon^{2i-1}+(\varepsilon')^{2i-1}}{2}\le\frac{(\varepsilon+\varepsilon')^{2i-1}}{2},\qquad i=1,2.$$

откуда следуют неравенства

$$\frac{1}{4}(\varepsilon+\varepsilon')^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon+\varepsilon'}^2\le\varepsilon^{-1}\mathbb{T}_\varepsilon^2+(\varepsilon')^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon'}^2\le(\varepsilon+\varepsilon')^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon+\varepsilon'}^2,$$

$$-\frac{4}{a}(\varepsilon+\varepsilon')\mathbb{T}_{\varepsilon+\varepsilon'}^{-2}\le-\frac{1}{a}\left[\varepsilon^{-1}\mathbb{T}_\varepsilon^2+(\varepsilon')^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon'}^2\right]^{-1}\le-\frac{(\varepsilon+\varepsilon')}{a}\mathbb{T}_{\varepsilon+\varepsilon'}^{-2}.$$

Кроме того

$$2^{-2d}(\varepsilon+\varepsilon')^{4d}\le\det\left[\varepsilon^{-1}\mathbb{T}_\varepsilon^2+(\varepsilon')^{-1}\mathbb{T}_{\varepsilon'}^2\right]\le(\varepsilon+\varepsilon')^{4d}.$$

Лемма доказана.

Для доказательства верхней оценки (3) Теоремы B нам понадобятся ещё две леммы. Первая лемма доказывается прямыми оценками гауссовской плотности $\tilde{p}(s,t,x,y)$, и ядра $H(t,T,x,y)$. Её доказательство содержится в статье F. Delarue, S. Menozzi (2010, Предложение 5.1). Важная вторая лемма доказывается сведением исходной задачи к детерминированной задаче управления со случайными коэффициентами. Доказательство её также содержится в статье F. Delarue, S. Menozzi (2010, Предложение 5.2).

Лемма 11. *Существует семейство констант* $C(N), N\ge 0$, *зависящих только от условий* $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** , (**ND**-η), *таких, что для всех* $N\ge 1, 0<t<1,$ *и* $x,y,z\in R^{2d}$

$$\tilde{p}(0,t,x,y) \le C(0) g_{C(0),t}(\boldsymbol{\theta}_t(x)-y),$$
$$\left|H^{\otimes N}(t,1,z,y)\right| \le C(N)(1-t)^{\frac{N\eta}{2}-1} g_{C(N),1-t}\left(z-\boldsymbol{\theta}_{t,1}(y)\right).$$

Подчеркнём, что из-за транспортировки начального условия потоком $\boldsymbol{\theta}$, при возрастании N константы $C(N)$ пересчитываются и, вообще говоря, растут с ростом N. Поэтому приходится обрывать ряд параметрикса, ограничиваясь конечным числом его членов. Для контроля остаточного члена в (11) применяется следующая лемма.

Лемма 12. *Пусть* $a>0$. *Тогда существует постоянная* $C(a)>0$, *зависящая только от условий* $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** , **(ND-**η**)**, *такая, что для всех* $t\in[0,1)$ *и* $x,y\in R^{\boldsymbol{2d}}$

$$\int\limits_{R^{2d}} p(0,t,x,z)(1-t)^{2d} g_{a,1-t}\left(z-\boldsymbol{\theta}_{t,1}(y)\right)dz$$
$$\le C(a) g_{C(a),1}(\boldsymbol{\theta}_1(x)-y).$$

Докажем теперь верхнюю оценку Теоремы B, используя Леммы 10-12.

Доказательство верхней оценки в Теореме B.

Из свойств подобия системы (2) (см. равенство (5)) следует, что достаточно получить верхнюю оценку для случая $t=1$. Первое слагаемое правой части (11) оценим с помощью первого неравенства Леммы 11, где следует положить $t=1$. Последнее слагаемое правой части (11) оценим с помощью второго неравенства Леммы 11 с $N+1=\left\lceil\frac{(4d+2)}{\eta}\right\rceil$. При таком выборе N

$$\left\lceil\frac{(4d+2)}{\eta}\right\rceil\frac{\eta}{2}-1 \ge \frac{4d+2}{2}-1=2d$$

и далее применяем оценку Леммы 12. Чтобы оценить сумму в (11), применим Лемму 10 и Лемму 11. Имеем для $k\ge 1$

$$\int\limits_0^1\int\limits_{R^{2d}} \tilde{p}(0,t,x,z)\left|H^{\otimes k}(t,1,z,y)\right|dzdt \le C(k)\int\limits_0^1\int\limits_{R^{2d}}(1-t)^{\frac{k\eta}{2}-1}$$
$$\times\, g_{C(k),t}(\boldsymbol{\theta}_t(x)-z) g_{C(k),1-t}\left(z-\boldsymbol{\theta}_{t,1}(y)\right)dzdt$$

$$\leq C(k)\int_0^1 (1-t)^{\frac{k\eta}{2}-1}\, g_{C(k),1}\left(\boldsymbol{\theta}_t(x)-\boldsymbol{\theta}_{t,1}(y)\right)dt,$$

где постоянная $C(k)$ зависит только от k и условий $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** , (**ND**-η). Поток $\boldsymbol{\theta}_{t,1}$ является диффеоморфизмом из R^{2d} *в* R^{2d} с обратным $\boldsymbol{\theta}_{1,t}$. Из полугруппового свойства потока $\boldsymbol{\theta}$ следует $|\boldsymbol{\theta}_1(x)-y| = \left|\boldsymbol{\theta}_{1,t}\left(\boldsymbol{\theta}_t(x)-\boldsymbol{\theta}_{t,1}(y)\right)\right|$. Поскольку $\boldsymbol{\theta}_{1,t}$ - Липшицев диффеоморфизм, имеем: $|\boldsymbol{\theta}_1(x)-y| \leq C\left|\boldsymbol{\theta}_t(x)-\boldsymbol{\theta}_{t,1}(y)\right|$, где постоянная C зависит только от условий $(\boldsymbol{R}-\eta)$, **(UE)** , (**ND**-η) (C может быть выбрана независимо от t, поскольку константа Липшица может быть выбрана равномерно по $0<t<1$). Доказательство верхней оценки (8) завершается следующим очевидным замечанием:

$$g_{C(k),1}(y) \leq g_{C(k),1}(y') \text{ при } |y| \geq |y'|.$$

Для доказательства нижней оценки плотности нам понадобятся некоторые элементарные факты из теории управления конечномерными линейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Конечномерные линейные управляемые системы.

Начнём с необходимых обозначений. Для $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *и* $l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ мы будем обозначать через $\mathbb{L}(R^k;R^l)-$ множество линейных отображений из R^k в R^l. Часто мы будем отождествлять $\mathbb{L}(R^k;R^l)$ с множеством $\mathcal{M}_{k,l}(R)$ - множеством $k\times l$ матриц с вещественными коэффициентами. Рассмотрим линейную систему управления с коэффициентами, зависящими от времени

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, t\in[T_0,T_1]. \qquad (12)$$

Здесь $A:(T_0,T_1)\to\mathbb{L}(R^n;R^n)$ - элемент $L^\infty\left((T_0,T_1);\mathbb{L}(R^n;R^n)\right)$ и $B:(T_0,T_1)\to\mathbb{L}(R^m;R^n)$-элемент $L^\infty\left((T_0,T_1);\mathbb{L}(R^m;R^n)\right)$.Состоянием системы является $x(t)\in R^n$, управление $u(t)\in R^m$, $\dot{x}\triangleq\frac{dx}{dt}$.

Напомним, что $L^\infty-$ пространство измеримых, существенно ограниченных функций

$$\|f\|_\infty := \inf\{C\geq 0: |f(t)|\leq C \;\; п.н.\}.$$

Определение 14. *Пусть* $b\in L^1\left((T_0,T_1);R^n\right)$. *Отображение* $x:[T_0,T_1]\to R^n$ *является решением системы*

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), t \in (T_0, T_1),$$

если $x \in C^0\big((T_0, T_1); R^n\big)$ *и удовлетворяет*

$$x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \big(A(t)x(t) + b(t)\big)dt, \ \ \forall (t_1, t_2) \in [T_0, T_1]^2.$$

В частности, для $x^0 \in R^n$ *решение* ***задачи Коши***

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), t \in (T_0, T_1), x(T_0) = x^0, \qquad (13)$$

- это функция $x \in C^0\big((T_0, T_1); R^n\big)$ *такая, что*

$$x(\tau) = x^0 + \int_{T_0}^{\tau} \big(A(t)x(t) + b(t)\big)dt, \ \ \forall \tau \in [T_0, T_1].$$

Хорошо известно, что для каждой $b \in L^1\big((T_0, T_1); R^n\big)$ и для каждой $x^0 \in R^n$ задача Коши (13) имеет единственное решение.

Определение 15. *Линейная система (12)* ***допускает управление,*** *если для каждой пары* $(x^0, x^1) \in R^n \times R^n$ *найдётся* $u \in L^2\big((T_0, T_1); R^m\big)$ *такая, что решение* $x \in C^0\big((T_0, T_1); R^n\big)$ *задачи Коши (13) удовлетворяет* $x(T_1) = x^1$. *Саму функцию* u *будем называть* ***допустимым управлением***. *Таким образом, можно сказать, что линейная система (12) допускает управление, если для каждой пары* $(x^0, x^1) \in R^n \times R^n$ *множество допустимых управлений не пусто.*

Мы хотим сформулировать необходимое и достаточное условие того, что система (12) допускает управление. Условие формулируется в терминах *резольвенты* линейной системы $\dot{x} = A(t)x$.

Определение 16. ***Резольвента*** $\mathcal{R}$ *линейной системы* $\dot{x} = A(t)x$ *- это отображение* $\mathcal{R}: [T_0, T_1]^2 \to \mathbb{L}(R^n; R^n)$ *такое, что для каждого фиксированного* $t_2 \in [T_0, T_1]$, *отображение*

$$\mathcal{R}(\cdot, t_2): [T_0, T_1] \to \mathbb{L}(R^n; R^n), t_1 \to \mathcal{R}(t_1, t_2),$$

является решением задачи Коши

$$\dot{\mathcal{M}} = A(t)\mathcal{M}, \mathcal{M}(t_2) = Id_n,$$

где Id_n *обозначает единичную* $n \times n$ *матрицу.*

Доказательства следующих трёх Предложений и Теоремы содержатся в книге J. Coron (2007).

Предложение 3.

1. $\mathcal{R} \in C^0\big([T_0,T_1]^2;\mathbb{L}(R^n;R^n)\big)$,
2. $\mathcal{R}(t_1,t_1) = Id_n, \forall t_1 \in [T_0,T_1]$,
3. $\mathcal{R}(t_1,t_2)\mathcal{R}(t_2,t_3) = \mathcal{R}(t_1,t_3), \forall (t_1,t_2,t_3) \in [T_0,T_1]^3$.

В частности, $\mathcal{R}(t_1,t_2)\mathcal{R}(t_2,t_1) = Id_n, , \forall (t_1,t_2) \in [T_0,T_1]^2$.

4. Если $A \in C^0\big([T_0,T_1];\mathbb{L}(R^n;R^n)\big)$, то $\mathcal{R} \in C^1\big([T_0,T_1]^2;\mathbb{L}(R^n;R^n)\big)$ и

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t}(t,\tau) = A(t)\mathcal{R}(t,\tau), \forall (t,\tau) \in [T_0,T_1]^2, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \tau}(t,\tau) = -\mathcal{R}(t,\tau)A(\tau), \forall (t,\tau) \in [T_0,T_1]^2. \tag{15}$$

Замечание 4. Равенство (14) следует из определения резольвенты. Равенство (15) может быть получено из (14) дифференцированием тождества $\mathcal{R}(t_2,t_1)\mathcal{R}(t_1,t_2) = Id_n$ по t_2.
Главное свойство резольвенты состоит в том, что с её помощью можно явно выписать решение задачи Коши (13).
Предложение 4. (Принцип Дюамеля). *Решение задачи Коши (13) имеет вид*

$$x(t_1) = \mathcal{R}(t_1,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{R}(t_1,\tau)b(\tau)d\tau, \ \ \forall (t_0,t_1) \in [T_0,T_1]^2.$$

В частности,

$$x(t) = \mathcal{R}(t,T_0)x^0 + \int_{T_0}^{t} \mathcal{R}(t,\tau)b(\tau)d\tau, \ \ \forall t \in [T_0,T_1].$$

То, что $x(t_1)$ является решением задачи Коши (13), проверяется прямым дифференцированием по t_1.
Определение 17. *Матрицей Грама системы*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u\ , t \in [T_0,T_1].$$

называется симметричная $n \times n$ *матрица*

$$\mathfrak{C} \triangleq \int_{T_0}^{T_1} \mathcal{R}(T_1,\tau)B(\tau)B^*(\tau)\mathcal{R}^*(T_1,\tau)d\tau. \tag{16}$$

Теорема (Калман-Хо-Нарендра). *Линейная система* $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ *допускает управление тогда и только тогда когда её матрица Грама обратима.*

Предложение 5. *Если линейная система (12) допускает управление, то*

$$I([T_0, T_1], x^0, x^1) \triangleq \inf\left\{\int_{T_0}^{T_1} |u(t)|^2 dt\right\} : x(T_0) = x^0, x(T_1) = x^1\}$$

достигается на единственном (п.н.) элементе $\bar{u}(t)$, *где*

$$\bar{u}(t) = B^*(t)\mathcal{R}^*(T_1, t)\mathfrak{C}^{-1}(x^1 - \mathcal{R}(T_1, T_0)x^0), t \in (T_0, T_1). \qquad (17)$$

Замечание 5. Для любого $x \in R^n$

$$x^*\mathfrak{C}x = \int_{T_0}^{T_1} |B^*(\tau)\mathcal{R}^*(T_1, \tau)x|^2\, d\tau.$$