ЛИТЕРАТУРА

1. *Вершик А. М., Керов С. В.* В кн.: Итоги науки. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 26, ВИНИТИ, М., 1985, с. 3–56. **2.** *Вершик А. М., Кохась К. П.* Алгебра и анализ, **2**, вып. 6, 98–106 (1990). **3.** *Кохась К. П.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **283**, 140–155 (2001). **4.** *Лидл Р., Нидеррайтер Г.* Конечные поля. тт. 1, 2, Мир, М., 1988. **5.** *Смирнов С. В.* ДАН СССР. **170**, №3, 524–525 (1966).

Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: kpk@kk1437.spb.edu

Поступило в редакцию
10 мая 2002 г.

УДК 512

Антивандермондовы системы и плоские деревья*

© 2002. Ю. Ю. Кочетков

1. Введение. Мы рассматриваем многочлены вида

$$p(z) = (1 - x_1 z)^{k_1} \cdots (1 - x_n z)^{k_n} \in \mathbb{C}[z]$$

($k_1, \ldots, k_n$ — целые положительные числа), у которых кроме критических точек $a_1 = 1/x_1, \ldots, a_n = 1/x_n$ имеется еще только одна критическая точка 0.

Критические точки многочлена p — это корни его производной p'. Кратность критической точки равна ее кратности как корня многочлена p' плюс 1. Поэтому кратность нуля равна

$$\sum_{i=1}^{n} k_i - 1 - \sum_{i=1}^{n} (k_i - 1) + 1 = n.$$

Если 0 — критическая точка многочлена p кратности n, то у p ровно 2 критических значения — 0 и 1, т. е. p является обобщенным многочленом Чебышёва.

Очевидное соотношение

$$p'(z) = p(z)\left[-\frac{k_1 x_1}{1 - x_1 z} - \cdots - \frac{k_n x_n}{1 - x_n z}\right] = p(z)\,\frac{(\sum k_i) z^{n-1}}{\prod (z - a_i)}$$

является необходимым и достаточным условием того, что 0 — критическая точка многочлена p кратности n. Сокращая на p, получаем соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{z - a_i} = \frac{(\sum k_i) z^{n-1}}{\prod (z - a_i)}\,. \tag{1}$$

Нетрудно видеть, что соотношение (1) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} k_1 x_1 + \cdots + k_{n-1} x_{n-1} + k_n x_n &= 0, \\ k_1 x_1^2 + \cdots + k_{n-1} x_{n-1}^2 + k_n x_n^2 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_1 x_1^{n-1} + \cdots + k_{n-1} x_{n-1}^{n-1} + k_n x_n^{n-1} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

*Эта работа была поддержана РФФИ, проект №98-01-00329.

Система (2) называется антивандермондовой системой, потому что представляет собой обычную вандермондову систему (т. е. систему с матрицей Вандермонда), но у которой изменены роли неизвестных и коэффициентов. Решение системы (2) определено с точностью до мультипликативного множителя; поэтому мы всегда будем считать, что $x_n = 1$.

Условие (1) и система (2) имеют смысл и при вещественных k_i. Берч доказал (не опубликовано), что система (2) имеет ровно $(n-1)!$ различных решений, если $k_i > 0$. В дальнейшем под целым случаем мы будем понимать случай целых положительных k_i, а под вещественным — случай вещественных положительных k_i.

Нас будет интересовать степень поля определения решения системы (2). Наиболее интересен здесь случай $n = 5$. Л. Заппони доказал [3] (см. также [1, 4]), что если число $k_1 \cdots k_5(k_1 + \cdots + k_5)$ — полный квадрат, то решение определено над полем степени 12 (а не 24). В настоящей работе анонсировано доказательство сильного обобщения результата Заппони.

2. Антивандермондовы системы и плоские деревья. Решения системы (2) имеют изящную геометрическую интерпретацию [1]. Пусть $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = 1 \in \mathbb{C}$ — решение. Как уже указывалось, в этом случае многочлен $p(z)$ является обобщенным многочленом Чебышёва и имеет ровно два критических значения 0 и 1. Прообраз $p^{-1}[0,1]$ представляет собой связное дерево диаметра 4: центральная вершина (центр) валентности n находится в начале координат, n вершин валентностей $k_1, \ldots, k_n$ (боковые вершины) соединены с центром ребрами и находятся в точках $a_1 = 1/x_1, \ldots, a_{n-1} = 1/x_{n-1}, a_n = 1$ соответственно, остальные вершины имеют валентность 1.

Пусть k_i попарно различны (именно этот случай и будет нас интересовать); тогда такое дерево определено (с точностью до изотопии) циклическим порядком валентностей боковых вершин при обходе центра против часовой стрелки. А так как вершина валентности k_n находится в точке 1, то дерево определено перестановкой чисел $k_1, \ldots, k_{n-1}$. У нас есть $(n-1)!$ перестановок и $(n-1)!$ решений системы (2). Известно [1], что существует взаимно однозначное соответствие между решениями системы (1) и классами изотопии описанных выше плоских деревьев.

Определение. Дерево, отвечающее четной перестановке $k_1, \ldots, k_{n-1}$, мы будем называть *четным* деревом, а нечетной — *нечетным*. Соответственно мы разбиваем множество из $(n-1)!$ решений системы (1) на два подмножества — *подмножество четных решений* и *подмножество нечетных решений*.

Замечание. Четные и нечетные решения можно определить и в вещественном случае. Для этого рассмотрим плоскую вещественную кривую

$$\prod_{i=1}^{n} |1 - x_i z|^{k_i} = 1.$$

Если $x_1, \ldots, x_n$ — решение системы (1), то кривая представляет собой «n-лепестковый цветок с центром в начале координат», причем точка $a_i = 1/x_i$ находится внутри своего лепестка. (В целом случае ребро, соединяющее центр с боковой вершиной валентности k_i, также находится внутри своего лепестка.) Циклический порядок лепестков и определяет четность или нечетность решения.

Перепишем соотношение (1) в виде

$$\sum_{i=1}^{n}(z-a_1)\cdots\widehat{(z-a_i)}\cdots(z-a_n)=(k_1+\cdots+k_n)z^{n-1}. \tag{3}$$

Последовательно подставляя в (3) $z=a_1, z=a_2, \ldots, z=a_n$ и перемножая полученные равенства, получаем

$$(-1)^{n(n-1)/2}\Delta^2\prod_{i=1}^{n}k_i=(k_1+\cdots+k_n)^n\prod_{i=1}^{n}a_i^{n-1}, \tag{4}$$

где $\Delta=\prod_{i<j}(a_i-a_j)$. Соотношение (4) показывает, что a_i попарно различны (так как $\Delta\neq 0$).

Если $n=2k+1$ нечетно, то равенство (4) можно переписать в виде

$$\frac{\Delta}{\prod a_i^k}=(k_1+\cdots+k_n)^k\left((-1)^{k(2k+1)}\frac{\sum k_i}{\prod k_i}\right)^{1/2}. \tag{5}$$

Другими словами, множество решений S разбивается на два подмножества, $S=S_+\cup S_-$, решения, для которых левая часть формулы (5) положительна, и решения, для которых левая часть формулы (5) отрицательна.

Теорема 1. *Подмножество S_+ является подмножеством четных (нечетных) решений, а подмножество S_- является подмножеством нечетных (четных) решений.*

Эта теорема была впервые доказана Л. Заппони в его диссертации (см. также [3]) с помощью сложной техники штребелевых дифференциалов. Простое доказательство см. в [4].

Исключая из системы (2) все переменные, кроме x_{n-1}, мы получим многочлен $F(x_{n-1},k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{Z}[x_{n-1},k_1,\ldots,k_n]$ степени $(n-1)!$ по x_{n-1}. В дальнейшем переменную x_{n-1} в F мы будем обозначать через x. При фиксированных k_i корни многочлена $F(x)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с решениями системы (2) (если $F(x)$ не имеет кратных корней). Поэтому мы можем разбить множество корней на два подмножества: подмножество четных корней и подмножество нечетных корней.

3. Основные результаты. Далее будет изучаться случай $n=5$. Здесь многочлен $F(x,k_1,\ldots,k_5)$ имеет степень 24 по x, он однороден степени 24 по k_i. Кроме того, F симметричен по k_1, k_2, k_3 и

$$x^{24}F(1/x,k_1,k_2,k_3,k_4,k_5)=F(x,k_1,k_2,k_3,k_5,k_4).$$

Громоздкость F как многочлена от 6 переменных (в нем примерно 100 000 членов) не позволяет вычислить его непосредственно, используя базисы Грёбнера или результанты. Он был найден интерполяционными методами. Знание F является необходимым для доказательства основного результата этой работы.

При $n=5$ соотношение (6) можно записать в виде

$$\frac{\Delta}{(\prod a_i^2)(\sum k_i)^2}=\pm\sqrt{d}, \tag{6}$$

где $d=k_1k_2k_3k_4k_5(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5)$. Величину $\pm\sqrt{d}$ мы будем называть инвариантом решения $x_1,\ldots,x_5$ (корня γ многочлена $F(x)$) и обозначать через

$i(x_1,\dots,x_5)$ $(i(\gamma))$. Пусть $\gamma_1,\dots,\gamma_{12}$ — множество четных корней многочлена $F(x)$, а $\gamma'_1,\dots,\gamma'_{12}$ — множество нечетных корней. Тогда

$$F(x)=G(x)H(x), \quad \text{где } G(x)=\prod_i(x-\gamma_i),\ H(z)=\prod_i(x-\gamma'_i).$$

Замечание. Так как $F(x)\in\mathbb{Z}[x]$, то корни многочлена $F(x)$ разбиты на 12 пар сопряженных (если $F(x)$ не имеет вещественных корней). Если γ и $\bar\gamma$ — корни, то они имеют одинаковую четность, потому что перестановки $(k_{i_1},k_{i_2},k_{i_3},k_{i_4})$ и $(k_{i_4},k_{i_3},k_{i_2},k_{i_1})$ имеют одинаковую четность. Таким образом, 12 пар сопряженных корней этого многочлена разбиты на 6 пар четных и 6 пар нечетных. Вопрос о существовании его вещественных корней (даже в вещественном случае) открыт. Из геометрических соображений понятно, что такой корень обязан быть кратным.

Теорема 2. *Если d — полный квадрат, то в разложении $F=GH$ многочлены G и H определены над $\mathbb{Q}$.*

Доказательство. Каждому корню γ отвечает решение $x_1,\dots,x_5$ системы (1), по которому, в свою очередь, вычисляется инвариант $i(\gamma)=\pm\sqrt{d}$. Пусть $g\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Тогда $g(\gamma)=\gamma'$, где γ' также является корнем многочлена $F(x)$. Нам нужно доказать, что γ и γ' имеют одинаковую четность, т. е. что $i(\gamma)=i(\gamma')$. Но $i(\gamma')=i(g(\gamma))=g(i(\gamma))=i(\gamma)$, так как $\sqrt{d}$ — целое число. $\square$

Следствие 1. *Если d не является полным квадратом, то G и H определены над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.*

Доказательство. Доказательство дословно совпадает с доказательством теоремы 2, только теперь $g\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\sqrt{d}))$. $\square$

Следствие 2. *Если многочлен F неприводим над $\mathbb{Q}$, то его группа Галуа импримитивна.*

Доказательство. Пусть K — поле разложения многочлена F и $g\in\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Либо $g(\sqrt{d})=\sqrt{d}$ и тогда g переводит четные корни в четные и нечетные в нечетные, либо $g(\sqrt{d})=-\sqrt{d}$ и тогда g переводит четные корни в нечетные и нечетные в четные. $\square$

Замечание. Аналогичные результаты справедливы для нечетного $n=4k+1$. Если $n=4k+3$, то разложение $F=GH$ определено над мнимым квадратичным полем $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$.

Теперь сформулируем теорему о разложении для $n=5$ в общей ситуации.

Теорема 3. *При $n=5$ в кольце $\mathbb{Z}[x,k_1,\dots,k_5][\delta]$, $\delta^2=k_1\cdots k_5(k_1+\dots+k_5)$, имеет место разложение $F=(A+\delta B)(A-\delta B)$, где $A\in\mathbb{Z}[x,k_1,\dots,k_5]$ имеет степень 12 по x, однороден и имеет степень 12 по k_i, $B\in\mathbb{Z}[x,k_1,\dots,k_5]$ имеет степень 9 по x, однороден и имеет степень 9 по k_i. Кроме того, $B=x^3(x-1)^3C$, где C принадлежит $\mathbb{Z}[x,k_1,\dots,k_5]$ и имеет степень 3 по x.*

Замечание. Теорема 3 *не* утверждает, что разложение $F=(A+\delta B)(A-\delta B)$ связано с четными и нечетными корнями. Чтобы установить такую связь, надо воспользоваться теоремой 1.

Литература

1. *Shabat G., Zvonkin A.* Contemp. Math., **178**, 233–275 (1994). **2.** *Кочетков Ю. Ю.* УМН, **52**, вып. 4, 203–204 (1997). **3.** *Zapponi L.* Compos. Math., **122**, 113–133 (2000). **4.** *Kochetkov Yu.* In: Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Springer-Verlag, 2000, pp. 447–455.

Московский институт электроники и математики
e-mail: yuyuk@kochetkov.mccme.ru

Поступило в редакцию
15 января 2001 г.

УДК 517.982

О мультипликаторах на множестве рядов Радемахера в симметричных пространствах*

© 2002. Г. П. Курбера, В. А. Родин

1. Введение. Пусть E — симметричное пространство измеримых на $[0,1]$ функций. Мы будем обозначать через $\Lambda(\mathscr{R},E)$ пространство измеримых функций $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$, для которых $fg\in E$ для любого п.в. сходящегося ряда Радемахера $g=\sum c_nr_n$, такого, что $\sum c_nr_n\in E$, где $r_n(t)=\operatorname{sign}\sin(2^n\pi t)$, $n\geqslant 1$, — функции Радемахера. Снабженное нормой

$$\|f\|_\Lambda=\sup\Big\{\|fg\|_E : g=\sum c_nr_n\in E,\ \|g\|_E\leqslant 1\Big\},$$

пространство $\Lambda(\mathscr{R},E)$ становится банаховым функциональным пространством. Пространство $\Lambda(\mathscr{R},E)$ можно рассматривать как пространство операторов, определенных умножением на измеримую функцию и действующих из замыкания в E линейного подпространства $[r_n]_E$, образованного функциями Радемахера, на все пространство E. В работе [6, Theorem 6] было получено описание симметричных пространств E, для которых $[r_n]_E$ изоморфно ℓ_2. А именно, если G — это замыкание множества ограниченных функций в пространстве Орлича L_{Φ_2} с $\Phi_2(t)=\exp|t|^2-1$, то G непрерывно вложено в E. В этом случае норму в $\Lambda(\mathscr{R},E)$ можно записать в эквивалентном виде следующим образом:

$$\|f\|_\Lambda=\sup\Big\{\|fg\|_E : g=\sum c_nr_n,\ \sum c_n^2\leqslant 1\Big\}.$$

В [3] рассматривался вопрос, должно ли пространство $\Lambda(\mathscr{R},E)$ быть всегда изоморфным некоторому симметричному пространству? Было показано, что для широкого класса классических симметричных пространств E, для которых $[r_n]_E$ изоморфно ℓ_2, ответ отрицательный. Это так, например, для пространств $L_{p,q}$ и для обширного множества пространств Лоренца и Орлича (см. [3, p. 122]). В данной работе мы рассматриваем противоположную задачу. Изучаются условия, при которых пространство $\Lambda(\mathscr{R},E)$ изоморфно некоторому симметричному пространству. В разд. 3 дано описание пространств E, для которых $\Lambda(\mathscr{R},E)$ изоморфно L_∞. Отметим, что в работе [3] были показаны некоторые примеры таких пространств — это пространства Орлича $E=L_{\Phi_q}$ с $\Phi_q(t)=\exp|t|^q-1$ при

*Исследования первого автора поддержаны DGES, грант PB96-1321-C02-01, а второго — РФФИ, грант 98-01-00044.