УДК 517.95

А. В. Романов

Конечномерность динамики на аттракторе для нелинейных параболических уравнений

Показано, что одномерные полулинейные параболические уравнения второго порядка обладают свойством конечномерности динамики на аттракторе. В том числе, это верно для уравнений реакции–диффузии с конвекцией на $(0,1)$.

Найдены новые топологические критерии конечномерности динамики на инвариантных компактах для класса диссипативных уравнений параболического типа в пространствах Банаха. Динамика таких уравнений на аттракторе $\mathscr{A}$ конечномерна (описывается некоторым ОДУ), если $\mathscr{A}$ можно вложить в конечномерное C^1-подмногообразие фазового пространства.

Библиография: 29 наименований.

Введение

Настоящая статья, как и предшествующая ей работа [1], посвящена одному новому подходу к изучению предельных режимов полулинейных параболических уравнений

$$\partial_t u = -Au + F(u), \qquad u = u(t), \tag{1}$$

в банаховом пространстве X с линейным неограниченным секториальным оператором A и "относительно слабой" нелинейностью F. Предполагаем, что (1) порождает гладкий диссипативный полупоток в X^α, где $0 \leqslant \alpha < 1$, а $\{X^\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ – определяемая оператором A шкала пространств Банаха [2].

Обсуждаются условия, при которых динамика (1) на инвариантном компакте $\mathscr{K} \subset X^\alpha$ может быть описана обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) с липшицевым векторным полем в $\mathbb{R}^n$, что подразумевает липшиц-сопряженность соответствующих фазовых полупотоков на $\mathscr{K}$ и некотором инвариантном для ОДУ компакте $\mathscr{K}_1 \subset \mathbb{R}^n$. В этом случае говорим о *конечномерной динамике на* $\mathscr{K}$. Если уравнение (1) обладает компактным аттрактором $\mathscr{A} \subset X^\alpha$ – инвариантным множеством, равномерно притягивающим шары $\mathscr{B} \subset X^\alpha$ при $t \to +\infty$, то наибольший интерес представляет эффект конечномерности динамики на $\mathscr{A}$, или, в терминологии [1], *конечномерности предельной динамики* (1).

Гипотезу о конечномерном характере финальных режимов нелинейных параболических уравнений высказывал уже Хопф [3]. Первые конкретные результаты в этом направлении (типа "конечности числа определяющих мод") получили Фойяш, Проди [4] и Ладыженская [5], причем в работе [5] было установлено наличие компактного аттрактора $\mathscr{A}$ для широкого класса задач (1). Конечномерность динамики на $\mathscr{A}$ трактовалась тогда О. А. Ладыженской как возможность восстановления полных траекторий $\{u(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathscr{A}$ по их проекции в подходящее конечномерное подпространство $Y \subset X^\alpha$. Удобным инструментом доказательства конечномерности инвариантных компактов (1) стала общая теорема Малле-Паре [6] о гладких вполне непрерывных отображениях в гильбертовом пространстве, а также ее банахова версия [7]. Различные методы оценки размерности (хаусдорфовой, фрактальной, ляпуновской) аттракторов эволюционных уравнений изложены в [8]–[10]. Цельный взгляд на проблему конечнопараметрического отслеживания траекторий распределенных динамических систем представлен не так давно Чуешовым [11].

В работе Мане [12] для уравнений (1) в гильбертовом пространстве с самосопряженным оператором A было сформулировано (см. также [10], [13]) так называемое *условие спектрального скачка*, позволяющее построить инерциальное многообразие $\mathscr{M} \subset X^\alpha$. Речь идет о гладкой или липшицевой конечномерной инвариантной поверхности, содержащей аттрактор $\mathscr{A}$ и притягивающей шары $\mathscr{B} \subset X^\alpha$ с экспоненциальной скоростью. При этом $\mathscr{M}$ устроено как график, и сужение уравнения (1) на $\mathscr{M}$ дает инерциальную форму – ОДУ в $\mathbb{R}^n$, моделирующее не только точное поведение решений $u(t)$ на $\mathscr{A}$, но и (асимптотически по $t \to +\infty$) фазовую динамику (1) в X^α. Как видим, существование инерциального многообразия ("асимптотическая конечномерность") является несколько более сильным свойством, чем конечномерность предельной динамики. К сожалению, условие спектрального скачка, предполагающее значительную разреженность спектра A, оказалось весьма ограничительным, и к настоящему моменту теория инерциальных многообразий зашла, по существу, в тупик.

В то же время есть основания полагать, что для конкретной диссипативной системы доказать конечномерность динамики на аттракторе иногда проще, чем установить наличие инерциального многообразия. В качестве первого (и, конечно, не последнего) подтверждающего примера здесь предлагаются одномерные параболические уравнения

$$u_t = u_{xx} + f(x, u, u_x), \qquad x \in (0,1), \tag{2}$$

при разделенных или периодических краевых условиях с гладкой функцией f, чьи характеристики гарантируют глобальное (по $t > 0$) существование и надлежащие оценки решений смешанной задачи. Самосопряженный полуограниченный снизу оператор $A = -\partial_{xx}$ в $X = L^2(0,1)$ определяет гильбертову шкалу пространств $\{X^\theta\}$. Считаем, что при некотором $\alpha \in (3/4, 1)$ уравнение (2) порождает в X^α гладкий полупоток и обладает компактным аттрактором $\mathscr{A} \subset X^\alpha$. Один из главных выводов статьи (теорема 3.3) состоит в том, что фазовая динамика (2) на $\mathscr{A}$ конечномерна. Между тем, до сих пор неизвестно, всегда ли существует в данной ситуации инерциальное многообразие. Согласно [1] конечномерность предельной динамики [2] имеет такие следствия: векторное поле уравнения липшицево на $\mathscr{A}$ в X^α-метрике, а полупоток расширяется на $\mathscr{A}$ до липшицева в X^α-метрике потока; аттрактор $\mathscr{A}$ есть часть конечномерного липшицева многообразия (типа графика) $\mathscr{M} \subset X^\alpha$. С другой стороны, уравнение (2) на окружности допускает периодические по t решения $u(t, \cdot)$ и конечномерность динамики на аттракторе позволяет утверждать, что периоды таких решений ограничены снизу положительной постоянной $c = c(f)$.

Конечномерность предельной динамики можно получить также для систем уравнений вида (2) с $u(0) = u(1) = 0$ и с $(d(x)u_x)_x$ вместо u_{xx}, где $d(x) > 0$ на

$[0,1]$ – гладкий, единый по всем компонентам системы, неоднородный "коэффициент диффузии".

Базой доказательства теоремы 3.3 служат результаты § 1, 2 для абстрактного уравнения (1), представляющие самостоятельный интерес. Пусть A – дискретный секториальный оператор в X, функция F принадлежит $C^2(X^\alpha, X)$ при каком-то $\alpha \in [0,1)$ и ограничена на шарах X^α, $|\cdot|_\alpha$ – норма в X^α. Теорема 1.4 устанавливает два новых, по сравнению с [1], критерия конечномерности динамики (1) на инвариантных компактах $\mathscr{K} \subset X^\alpha$. Первый из них – относительная компактность в X^α множества точек $w = (u-v)/|u-v|_\alpha$, $u,v \in \mathscr{K}$, $u \neq v$. Другой сводится к наличию для каждой точки $w \in \mathscr{K}$ такой X^α-окрестности $\mathscr{V} \supset w$ и такого конечномерного непрерывного в X^α проектора P, что

$$|u-v|_\alpha \leqslant c|P(u-v)|_\alpha$$

на $\mathscr{V} \cap \mathscr{K}$, $c = c(\mathscr{K}, w, P)$. Если пространство X нерефлексивно, то нужна еще непрерывность P в $X^{\alpha-1}$. Далее, теорема 1.5 описывает связь между конечномерностью динамики на инвариантном компакте $\mathscr{K} \subset X^\alpha$ и вложимостью (тождественной) $\mathscr{K}$ в достаточно регулярное конечномерное подмногообразие $\mathscr{M} \subset X^\alpha$. Именно, C^1-гладкость $\mathscr{M}$ обеспечивает конечномерность фазовой динамики на $\mathscr{K}$; обратное же верно, если $\mathscr{M}$ – липшицево многообразие. Подчеркнем, что многообразие $\mathscr{M}$ не предполагается инвариантным.

Заметим, что для справедливости некоторых из перечисленных утверждений дополнительно требуется базисность в X^α конечномерных инвариантных подпространств оператора A, упорядоченных определенным образом.

Все эти построения носят топологический характер, но в гильбертовом случае теоремы 2.3, 2.8 дают и аналитические условия на векторное поле $G(u) = F(u) - Au$ уравнения (1), гарантирующие конечномерность его предельной динамики. Указанные условия подразумевают декомпозицию

$$G(u) - G(v) = \bigl(B_0(u,v) - B(u,v)\bigr)(u-v)$$

на аттракторе $\mathscr{A} \subset X^\alpha$, где $B_0(u,v)$ – поле линейных непрерывных отображений $X^\alpha \to X^\alpha$, а $B(u,v)$ – поле линейных неограниченных секториальных операторов в X, подобных нормальным. Требуется также достаточная (но при $\alpha \neq 0$ меньшая, чем для спектра $\sigma(A)$ в условии спектрального скачка) разреженность множества $\Sigma = \bigcup_{u,v \in \mathscr{A}} \sigma(B(u,v))$. Отсюда при некоторых технических ограничениях на поля операторов B_0, B делается вывод о применимости второго критерия теоремы 1.4 и, стало быть, о конечномерности динамики на $\mathscr{A}$.

Такой сценарий успешно реализуется для одномерных полулинейных параболических уравнений (2), однако соответствующий переход к размерности $\geqslant 2$ остается проблемным даже в "простой" ситуации $f = f(x,u)$. Не удается пока установить и конечномерность предельной динамики для двумерной системы Навье–Стокса. Между тем, аргументация работы [1; § 4] позволяет рассчитывать, в принципе, на положительное решение данной проблемы при периодических краевых условиях. Дальнейшие усилия должны быть направлены на ослабление довольно жестких предположений теорем 2.3 и 2.8, что позволит расширить список уравнений параболического типа, демонстрирующих конечномерную динамику на аттракторе.

Естественно возникающий вопрос о существовании уравнений (1), не обладающих конечномерной предельной динамикой, вряд ли решается просто. По крайней мере в сходной ситуации с асимптотической конечномерностью фазовой динамики ответ (утвердительный) на вопрос подобного рода получен лишь совсем недавно. Речь идет о предъявленном в [14] примере уравнения (1) без инерциального C^1-многообразия $\mathscr{M} \subset X^\alpha$. Построить аналогичный контрпример с заменой класса гладкости $\mathscr{M}$ на Lip пока не удается.

Важно упомянуть весьма интересные работы Камаева [15], [16], в которых дана конструкция инвариантного C^1-непрерывного семейства гладких устойчивых многообразий конечной коразмерности для аттрактора уравнений типа (2) и соответствующих систем уравнений. Было бы полезно выявить в общем случае зависимость между наличием такого семейства многообразий и конечномерностью предельной динамики эволюционных задач (1).

Здесь не представлены количественные оценки фазовой размерности ОДУ, описывающего предельную динамику (1), и их сравнение с известными оценками размерности аттрактора или же инерциального многообразия (если таковое имеется). Эта несомненно перспективная тема выходит за рамки настоящей публикации и может стать предметом дальнейших исследований.

§ 1. Топологические условия

Уточним ряд понятий, связанных с уравнением (1), и напомним некоторые известные свойства таких уравнений (см., в частности, [2]).

Пусть X – бесконечномерное сепарабельное банахово пространство с нормой $|\cdot|$ и $\sigma(\,\cdot\,)$, $\|\cdot\|$, $R(\lambda;\,\cdot\,)$ – спектр, норма, резольвента линейных операторов в X. Замкнутый линейный оператор A в (1) с плотной областью определения $\mathscr{D}(A) \subset X$ предполагаем секториальным и дискретным. Первое означает, что при надлежащих $k > 0$ и $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ спектр $\sigma(A)$ лежит в секторе $|\operatorname{Im}\lambda| < k \operatorname{Re}(\lambda-\lambda_0)$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а вне его

$$\|R(\lambda; A)\| \leqslant M/(1+|\lambda-\lambda_0|), \qquad M = M(A, k, \lambda_0).$$

Дискретность A понимается как компактность $R(\lambda; A)$. Считаем, в дальнейшем, что $\lambda_0 = 0$, или, эквивалентно, $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$ (т.е. $\operatorname{Re}\lambda > 0$ на $\sigma(A)$). Это позволяет корректно определить для всех $\theta \in \mathbb{R}$ степени A^θ и банаховы пространства $X^\theta = \mathscr{D}(A^\theta)$ с нормой $|u|_\theta = |A^\theta u|$. При $\theta < 0$ операторы A^θ вполне непрерывны в X и $\mathscr{D}(A^\theta)$ есть пополнение X по норме $|\cdot|_\theta$. Кроме того: $X^0 = X$ и $X^1 = \mathscr{D}(A)$; для $\beta < \theta$ вложения $X^\theta \subset X^\beta$ вполне непрерывны; при $\beta, \theta \in \mathbb{R}$ операторы A^β изометрично отображают $X^{\theta+\beta}$ на X^θ.

Используем обозначения $BC^\nu(Y_1, Y_2)$, $\nu \in \mathbb{Z}^+$, или $BC(Y_1, Y_2)$ для классов ограниченных на шарах C^ν-гладких или непрерывных отображений $\Pi\colon Y_1 \to Y_2$ пространств Банаха Y_1, Y_2.

Если $\alpha \in [0,1)$ и $F \in BC^2(X^\alpha, X)$, то отвечающая (1) задача Коши с $u(0) = u_0 \in X^\alpha$ имеет сильное локальное решение $u(t) \in C^2((0,t^*), X^\alpha) \cap C\bigl([0,t^*), X^\alpha\bigr)$ для $t^* = t^*(u_0) > 0$, причем фактически $u(t) \in X^1$ на $(0,t^*)$. Постулируем еще диссипативность (1) в X^α, т.е. глобальное по $t > 0$ существование решений $u(t) = \Phi_t u_0$ и наличие такого (втягивающего) шара $\mathscr{B}_0 \subset X^\alpha$, что $\Phi_t \mathscr{B} \subset \mathscr{B}_0$ для каждого шара $\mathscr{B} \subset X^\alpha$ при $t > t_0(\mathscr{B})$. Тогда фазовый полупоток $\{\Phi_t\}_{t\geqslant 0}$ –

класса C^2 как отображение $(0,\infty)\times X^\alpha \to X^\alpha$. Для произвольного множества $\mathscr{U}\subset X^\alpha$ ограниченность образа $\Phi_t\mathscr{U}$ в X^θ при $t>0$, $\alpha<\theta<1$ (а значит, и относительная компактность $\Phi_t\mathscr{U}$ в X^α) следует из X^α-ограниченности трубки тока $\bigcup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\Phi_\tau\mathscr{U}$ с помощью доводов типа [2, теорема 3.3.6]. Отсюда явствует, что эволюционные операторы Φ_t компактны на любом шаре $\mathscr{B}\subset X^\alpha$, коль скоро $t>t_0(\mathscr{B})$.

Итак, принимаем три основные гипотезы:

(H1) линейный оператор A дискретен и секториален, спектр $\sigma(A)$ счетен и $\operatorname{Re}\sigma(A)>0$;

(H2) $F\in BC^2(X^\alpha,X)$ при некотором $\alpha\in[0,1)$;

(H3) уравнение (1) диссипативно в X^α.

Требование счетности $\sigma(A)$ является чисто техническим. В гильбертовом пространстве предположению (H1) удовлетворяет всякий дискретный нормальный оператор со спектром в секторе $|\operatorname{Im}\lambda|<k\operatorname{Re}\lambda$ при $k=\mathrm{const}>0$, например любой дискретный положительно определенный оператор.

Обозначаем через $G(u)$ векторное поле $F(u)-Au$ уравнения (1). Множество $\mathscr{U}\subset X^\alpha$ инвариантно, если $\Phi_t\mathscr{U}=\mathscr{U}$ для $t>0$ (так что, на самом деле, $\mathscr{U}\subset X^1$). Ограниченные инвариантные подмножества X^α относительно компактны. В условиях (H1)–(H3) фазовый полупоток $\{\Phi_t\}$ обладает (см. [8]–[10]) компактным аттрактором $\mathscr{A}$ – максимальным ограниченным инвариантным подмножеством X^α. Как показано в [1, § 4], функция $G\colon\mathscr{A}\to X^\alpha$ гёльдерова в X^α-метрике и $|u|_1\leqslant\mathrm{const}$ на $\mathscr{A}$. Последнее справедливо и при $F\in BC^1(X^\alpha,X)$, что доказывается без труда, если перейти к интегральной форме записи в (1). Непосредственно из [1, теорема 1.4] следует

Лемма 1.1. *Функция $A\colon\mathscr{A}\to X$ гёльдерова в X^α-метрике.*

Замечание 1.2. Гипотеза (H1) выполняется одновременно для операторов $A\colon X^1\to X$ и $A\colon X^{1+\beta}\to X^\beta$ с $\beta>0$. Таким образом, заменив в (H2), (H3) пару пространств (X^α,X) на $(X^{\alpha+\beta},X^\beta)$, можно перенести все вышеперечисленные свойства динамики (1) на фазовое пространство $X^{\alpha+\beta}$. То же верно и в контексте последующих построений.

Наличие втягивающего шара для полупотока $\{\Phi_t\}$ необходимо только как гарантия существования компактного аттрактора.

Замечание 1.3. Если ограничиться изучением динамики (1) на произвольных инвариантных компактах $\mathscr{K}\subset X^\alpha$, то вместо (H3) достаточно постулировать продолжимость решений $u(t)$ на $(0,\infty)$ при всех начальных значениях $u_0\in X^\alpha$.

Оба замечания относятся в полной мере и к результатам [1].

Для $a>0$ обозначим через $\mathscr{P}_a$ конечномерный спектральный проектор оператора A в X, соответствующий части спектра с $\operatorname{Re}\lambda<a$. Проекторы $\mathscr{P}_a$ коммутируют с A^α и непрерывны в X и X^α.

Скажем (см. [1, определение 1.1]), что фазовая динамика (1) на инвариантном компакте $\mathscr{K}\subset X^\alpha$ *конечномерна*, если найдутся ОДУ с липшицевым векторным полем и разрешающим потоком $\{\varphi_t\}$ в $\mathbb{R}^n$, а также липшицево вложение $\Psi\colon\mathscr{K}\to\mathbb{R}^n$ такие, что

$$\Psi\Phi_t u=\varphi_t\Psi u,\qquad u\in\mathscr{K},\quad t\geqslant 0.$$

При $\mathscr{K} = \mathscr{A}$ в том же смысле говорится о конечномерности предельной динамики уравнения (1).

Согласно [1, теорема 1.6] следующие утверждения равносильны:

(FD) фазовая динамика на $\mathscr{K}$ конечномерна;

(VF) $|G(u) - G(v)|_\alpha \leqslant c|u - v|_\alpha$ для $u, v \in \mathscr{K}$, $c = c(\mathscr{K})$;

(Fl) полупоток $\{\Phi_t\}$ на $\mathscr{K}$ инъективен и расширяется до липшицева в X^α-метрике потока;

(GrF) при некотором $a > 0$ имеем оценку $|u - v|_\alpha \leqslant c|\mathscr{P}_a(u - v)|_\alpha$ для $u, v \in \mathscr{K}$, $c = c(\mathscr{K}, a)$;

(Gr) найдется конечномерный непрерывный в X^α (и в $X^{\alpha-1}$, если X нерефлексивно) проектор P такой, что $|u - v|_\alpha \leqslant c|P(u - v)|_\alpha$ при $u, v \in \mathscr{K}$, $c = c(\mathscr{K}, P)$;

(EM) метрики X^α и $X^{\alpha-1}$ на $\mathscr{K}$ эквивалентны.

Эта теорема устанавливает логический цикл (VF)$\to$(Fl)$\to$(GrF)$\to$(Gr)$\to$(EM)$\to$(VF) и импликации (FD)$\to$(Fl), (Gr)$\to$(FD). При этом переход (Fl)$\to$(GrF) требует дополнительного условия [1, предположение 1.4] на оператор A в терминах характеристик полугруппы $\{\exp(-tA)\}_{t\geqslant 0}$.

Сформулируем еще два критерия конечномерности динамики на инвариантных компактах.

Теорема 1.4. *Пусть*

$$\lim_{a\to\infty} |u - \mathscr{P}_a u|_\alpha = 0 \tag{3}$$

при всех $u \in X^\alpha$ и $\mathscr{K}$ – инвариантный компакт уравнения (1) *в X^α. Тогда каждое из следующих утверждений равносильно конечномерности динамики на $\mathscr{K}$:*

(KC) *множество $\mathscr{K}^0$ точек вида $w = (u - v)/|u - v|_\alpha$ с $u, v \in \mathscr{K}$, $u \neq v$, относительно компактно в X^α;*

(GrL) *для всякого $w \in \mathscr{K}$ найдутся X^α-окрестности $\mathscr{V} \supset w$ и конечномерный непрерывный в X^α* (*а также в $X^{\alpha-1}$, если X нерефлексивно*) *проектор P такие, что $|u - v|_\alpha \leqslant c|P(u - v)|_\alpha$ на $\mathscr{V} \cap \mathscr{K}$, $c = c(\mathscr{K}, w, P)$.*

Подчеркнем, что в (GrL) ранг P может зависеть от w.

Доказательство. Установим логическую цепь (FD)$\to$(KC)$\to$(GrL)$\to$(FD). Поскольку, как мы знаем, (FD)$\to$(Fl), (GrF)$\to$(Gr)$\to$(FD), (EM)$\to$(Fl) и, очевидно, (Gr)$\to$(GrL), то достаточно получить импликации (Fl)$\to$(KC)$\to$(GrF) и (GrL)$\to$(EM).

Покажем, что (Fl) влечет (KC). Пусть $\alpha < \theta < 1$. При $t > 0$ верна (см. [17, лемма 5.2]) оценка $|\Phi_t u - \Phi_t v|_\theta \leqslant c_t|u - v|_\alpha$ на $\mathscr{K}$ с $c_t = c(\mathscr{K}, \theta; t)$. Отсюда находим, пользуясь свойством (Fl) полупотока $\{\Phi_t\}$, что

$$|u - v|_\theta \leqslant c_1|\Phi_{-1}u - \Phi_{-1}v|_\alpha \leqslant N|u - v|_\alpha, \qquad N = \text{const}.$$

Итак, $\big|(u - v)/|u - v|_\alpha\big|_\theta \leqslant N$ на $\mathscr{K}$, множество $\mathscr{K}^0$ ограничено в X^θ и, стало быть, относительно компактно в X^α.

Установим импликацию (KC)$\to$(GrF). Из (3) явствует, что $\|I - \mathscr{P}_a\|_\alpha \leqslant \text{const}$[1], следовательно (по теореме Арцела), сходимость проекторов $\mathscr{P}_a \to I$ при $a \to \infty$

[1]Здесь и всюду далее $I = \mathrm{id}$.

равномерна на относительно компактном множестве $\mathscr{K}^0 \subset X^\alpha$ и $|h-\mathscr{P}_a h|_\alpha \leqslant \varepsilon_a |h|_\alpha$ с $\varepsilon_a \to 0$, $h=u-v$ для $u,v\in\mathscr{K}$. Если взять $\varepsilon_a<1$, $c=(1-\varepsilon_a)^{-1}$, то $|h-\mathscr{P}_a h|_\alpha \leqslant c\varepsilon_a|\mathscr{P}_a h|_\alpha$ и $|u-v|_\alpha \leqslant c|\mathscr{P}_a(u-v)|_\alpha$ на $\mathscr{K}$.

Осталось показать, что (GrL)→(EM). Пусть $\delta>0$ – число Лебега [18, п. 2.13.4] открытого (будем считать конечного) покрытия компакта $\mathscr{K}$ множествами $\mathscr{U}(w)=\mathscr{V}\cap\mathscr{K}$; тогда любая пара точек $u,v\in\mathscr{K}$ с $|u-v|_\alpha<\delta$ лежит в одном из $\mathscr{U}(w)$. Действуя, как при выводе импликации (Gr)→(EM) в [1, теорема 1.6], приходим к оценке $|u-v|_\alpha \leqslant c|u-v|_{\alpha-1}$ на X^α-замыкании каждого из множеств $\mathscr{U}(w)$ с единой константой $c>0$. Для $u,v\in\mathscr{K}$ с $|u-v|_\alpha\geqslant\delta$ аналогичное соотношение также справедливо, иначе мы имели бы абсурдную ситуацию существования таких сходящихся в X^α-метрике последовательностей $\{u_l\},\{v_l\}\subset\mathscr{K}$, что $|u_l-v_l|_\alpha\geqslant\delta$, но $|u_l-v_l|_{\alpha-1}\to 0$ при $l\to\infty$. Наконец, противоположное неравенство $|u-v|_\alpha\geqslant c'|u-v|_{\alpha-1}$ на $\mathscr{K}$ следует из непрерывности вложения $X^\alpha\subset X^{\alpha-1}$. Теорема 1.4 доказана полностью.

Теперь у нас есть расширенный логический цикл (VF)→(Fl)→(KC)→(GrF)→(Gr)→(GrL)→(EM)→(VF) наряду с импликациями (FD)→(Fl) и (Gr)→(FD), где предположение (3) использовано лишь в переходе (KC)→(GrF). По существу, (3) означает базисность в X^α конечномерных инвариантных подпространств оператора A, отвечающих упорядоченным по возрастанию $\operatorname{Re}\lambda$ спектральным множествам $\{\lambda\in\sigma(A)\colon \operatorname{Re}\lambda=\mathrm{const}\}$, и заведомо выполнено, коль скоро A – спектральный [19] оператор в X, а значит, и в X^α. Когда пространство X гильбертово, в этом качестве подходят, скажем, операторы A, подобные нормальным.

Перейдем к обсуждению условия конечномерности фазовой динамики на инвариантном компакте $\mathscr{K}\subset X^\alpha$, представляющего особый интерес. Теорема 1.5 работы [1] устанавливает связь между вложимостью $\mathscr{K}$ в конечномерное (достаточно регулярное) подмногообразие $\mathscr{M}\subset X^\alpha$ и конечномерностью динамики на $\mathscr{K}$. Здесь данному утверждению будет придана форма, близкая к окончательной по порядку гладкости $\mathscr{M}$.

Теорема 1.5. *Пусть $\mathscr{K}$ – инвариантный компакт уравнения* (1) *в X^α и для оператора A справедливо соотношение* (3). *Если $\mathscr{K}\subset\mathscr{M}$, где $\mathscr{M}$ – конечномерное C^1-подмногообразие в X^α, то фазовая динамика на $\mathscr{K}$ конечномерна. Обратно, если динамика на $\mathscr{K}$ конечномерна, то найдется такое $a>0$, что множество $\mathscr{K}$ принадлежит графику некоторой равномерно липшицевой функции, действующей из $\mathscr{P}_aX^\alpha$ в $(I-\mathscr{P}_a)X^\alpha$.*

Эта теорема анонсирована в [20]. Отличие ее от упомянутого результата [1] состоит в понижении требуемого класса гладкости $\mathscr{M}$ с C^2 до C^1 и нюансах в ограничениях на линейный оператор A. Как видим, предельная динамика (1) конечномерна, коль скоро аттрактор $\mathscr{A}$ можно вложить в конечномерное C^1-многообразие $\mathscr{M}\subset X^\alpha$.

Доказательство. Вторая (обратная) часть теоремы доказывается так же, как в [1]. Уточним только, что необходимая для этого импликация (FD)→(GrF) верна при условии (3) на оператор A.

Далее исходим из включения $\mathscr{K}\subset\mathscr{M}$. Конечномерное C^1-многообразие $\mathscr{M}$ в банаховом пространстве X^α локально устроено как график гладкой функции над касательным подпространством. Поэтому для каждой точки $w\in\mathscr{M}$ найдутся непрерывный в X^α проектор P ранга $n = \dim \mathscr{M}$, постоянная $c = c(\mathscr{M}, w, P)$ и замкнутый шар $\mathscr{V} = \{u \in X^\alpha\colon |u - w|_\alpha \leqslant \varepsilon\}$ с $\varepsilon = \varepsilon(w)$ такие, что $|u - v|_\alpha \leqslant c|P(u - v)|_\alpha$ на $\mathscr{M}(w) = \mathscr{V} \cap \mathscr{M}$. Ясно, что $\mathscr{M}(w)$ – компактное C^1-многообразие размерности n. Пользуясь [1, лемма 2.3], выберем непрерывный в X^α и $X^{\alpha-1}$ проектор P_0 ранга n таким образом, чтобы

$$|(P - P_0)(u - v)|_\alpha \leqslant (2c)^{-1}|u - v|_\alpha, \qquad u, v \in \mathscr{M}(w).$$

Отсюда без труда получаем оценку $|u-v|_\alpha \leqslant 2c|P_0(u-v)|_\alpha$ на $\mathscr{M}(w)$. Тем самым, инвариантный компакт $\mathscr{K}$ обладает свойством (GrL), и по теореме 1.4 фазовая динамика на $\mathscr{K}$ конечномерна. Доказательство завершено.

Замечание 1.6. Если предельная динамика уравнения (1) конечномерна, то периоды его периодических решений ограничены снизу положительным числом.

Это есть следствие определения конечномерной динамики на аттракторе и известной оценки снизу [21] периодов периодических решений ОДУ в $\mathbb{R}^n$ через константу Липшица соответствующего векторного поля.

§ 2. Аналитический подход

Главная цель данного параграфа – нахождение конструктивных условий на коэффициенты уравнения (1) в гильбертовом пространстве X, влекущих свойство (GrL) аттрактора $\mathscr{A} \subset X^\alpha$, а значит, и конечномерность динамики на $\mathscr{A}$. Полученные условия будут затем использованы в § 3 для доказательства конечномерности предельной динамики параболических уравнений (2). Ряд необходимых для изложения вспомогательных результатов вынесен в § 4.

Там, где не указано иное, пространство X по-прежнему банахово. Введем обозначения: $\mathscr{N} = \mathscr{A} \times \mathscr{A}$; D – дифференцирование Фреше; $\mathscr{L}(X^\theta, X^\beta)$ – пространство непрерывных линейных операторов, действующих из X^θ в X^β, и $\mathscr{L}(X^\theta) = \mathscr{L}(X^\theta, X^\theta)$; $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_\alpha$ – нормы в $\mathscr{L}(X)$, $\mathscr{L}(X^\alpha)$ и $\|\cdot\|_{\alpha,0}$, $\|\cdot\|_{0,\alpha}$ – нормы в $\mathscr{L}(X^\alpha, X)$, $\mathscr{L}(X, X^\alpha)$. Объектом нашего внимания станут векторные (в основном операторные) поля $\Pi(u,v)$ на $\mathscr{N}$ со значениями в различных пространствах Банаха Y. Множество $\mathscr{N}$ снабдим метрикой, индуцированной из $X^\alpha \times X^\alpha$.

Определение 2.1. Непрерывное поле $\Pi\colon \mathscr{N} \to Y$ называем *регулярным*, если для любых $u, v \in \mathscr{A}$ функция $\Pi(\Phi_t u, \Phi_t v)\colon [0,\infty) \to Y$ – класса C^1 с равномерно по u, v ограниченной производной в нуле $\partial_t \Pi(u,v)$.

Из гладкости полупотока $\{\Phi_t\}$ и инвариантности компакта $\mathscr{A} \subset X^\alpha$ следует регулярность тождественного вложения $\mathscr{N} \to X^\alpha \times X^\alpha$, а стало быть, и регулярность всякого поля $\Pi\colon \mathscr{N} \to Y$, продолжимого до C^1-отображения в $(X^\alpha \times X^\alpha)$-окрестность множества $\mathscr{N}$. При этом

$$\partial_t \Pi(u,v) = D\Pi(u,v)(\partial_t u, \partial_t v), \qquad \partial_t u = G(u) = F(u) - Au.$$

Действуем далее по плану, намеченному во введении. Для $u, v \in \mathscr{A}$ полагаем

$$T(u,v) = T_0(u,v) + \int_0^1 DF(\tau u + (1-\tau)v)\, d\tau, \tag{4а}$$

$$B(u,v) = \omega I + A - T(u,v), \tag{4б}$$

где T_0 – произвольное (пока) поле операторов, ограниченное со значениями в $\mathscr{L}(X^\alpha)$ и регулярное со значениями в $\mathscr{L}(X^\alpha, X)$, а $\omega > 0$ – числовой параметр. Здесь $T = T_0 + T_1$, $T_1(u,u) = DF(u)$, и поскольку $F \in C^2(X^\alpha, X)$, то $T_1(u,v) \in \mathscr{L}(X^\alpha, X)$. Поле T_1 продолжается с $\mathscr{N}$ до C^1-отображения $X^\alpha \times X^\alpha \to \mathscr{L}(X^\alpha, X)$, откуда вытекает регулярность поля $T\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X^\alpha, X)$. Операторы $T_0(u,v)$ в (4а) играют роль искусственной поправки, призванной "улучшить" свойства поля $B(u,v)$. Заметим, что

$$\mathscr{D}(B(u,v)) \equiv \mathscr{D}(A) = X^1, \qquad B(u,v) \in \mathscr{L}(X^1, X)$$

и по интегральной теореме о среднем значении

$$G(u) - G(v) = \bigl(B_0(u,v) - B(u,v)\bigr)(u-v), \qquad B_0(u,v) = \omega I - T_0(u,v).$$

Пусть

$$\Sigma = \bigcup_{u,v\in\mathscr{A}} \sigma(B(u,v)), \qquad\qquad \mathscr{R} = \mathbb{C}\setminus\Sigma,$$
$$\Gamma_a = \{\lambda\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Re}\lambda = a\}, \qquad \Gamma(a,\xi) = \{\lambda\in\mathbb{C}\colon a-\xi \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant a+\xi\}$$

при $a > \xi > 0$. Число ω в (4б) выбирается так (см. ниже лемму 4.1), чтобы обеспечить соотношение $\operatorname{Re}\Sigma > 0$ для $\Sigma = \Sigma(\omega)$. Если $\Gamma_a \subset \mathscr{R}$, то обозначаем символом $P_a(u,v)$ непрерывный в X спектральный проектор оператора $B(u,v)$, отвечающий части спектра с $\operatorname{Re}\lambda < a$, и записываем $Q_a(u,v) = I - P_a(u,v)$. Согласно [2; § 1.4, 1.5] операторы $B(u,v)$ дискретны и секториальны в X, $\mathscr{D}(B^\alpha) = X^\alpha$, степени B^α, $B^{-\alpha}$ коммутируют с P_a, Q_a и резольвентой $R(\lambda; B)$. Проекторы $P_a(u,v)$ имеют конечный ранг $n = n(a)$ для всех $u,v \in \mathscr{A}$. Кроме того, $P_a, Q_a \in \mathscr{L}(X^\alpha)$, а формулируемые далее леммы 4.2, 4.3 гарантируют регулярность полей операторов $P_a, Q_a\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X^\alpha)$, $B^\alpha\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X^\alpha, X)$, $B^{-\alpha}\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X, X^\alpha)$. Регулярность поля P_a имеет следствием оценку

$$\|\partial_t P_a(u,v)\|_\alpha \leqslant m(a) \tag{5}$$

на $\mathscr{N}$ с $m(a) < \infty$. Сформулируем еще одно важное понятие.

Определение 2.2. В случае гильбертова пространства X будем говорить, что поле $B\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X^1, X)$ *равномерно скалярного типа*, если $B(u,v) = S^{-1}(u,v)H(u,v)S(u,v)$ на $\mathscr{N}$, где линейные операторы $H(u,v)$ нормальны в X, поле $S\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X)$ регулярно, а поле $S^{-1}\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X)$ ограничено.

В данной формулировке $B(u,v)$ – операторы скалярного типа (см. [19]) при всех $u,v \in \mathscr{A}$. Для случая $T_0 = 0$, $u = v$ представление $B = S^{-1}HS$ из определения 2.2 фактически использовалось Камаевым [15], [16] в связи с изучением фазовой динамики вблизи аттрактора уравнений (скалярных или векторных) чуть более широкого класса, чем (2). В цитированных работах к линеаризации правой части уравнения применялось либо обычное преобразование Лиувилля, либо [16] некоторая его модификация.

В контексте определения 2.2 отметим неравенства

$$\|S(u,v)\| \leqslant \gamma, \qquad \|S^{-1}(u,v)\| \leqslant \gamma, \qquad \|\partial_t S(u,v)\| \leqslant \gamma_1 \tag{6}$$

на $\mathscr{N}$ с $\gamma, \gamma_1 = \mathrm{const}$. Ясно, что $\sigma(B) = \sigma(H)$ и $P'_a = SP_aS^{-1}$, $Q'_a = SQ_aS^{-1}$ – ортогональные спектральные проекторы нормальных операторов H. Подчеркнем, что область определения $\mathscr{D}(H) = S\mathscr{D}(B) = SX^1$ зависит, вообще говоря, от u, v.

Если X – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и при каком-то $a > \omega$ прямая Γ_a лежит в $\mathscr{R}$, то для $u, v \in \mathscr{A}$, $h = u - v$ принимаем

$$p = S(u,v)B^\alpha(u,v)P_a(u,v)h, \qquad q = S(u,v)B^\alpha(u,v)Q_a(u,v)h,$$
$$W_a(u,v) = \frac{1}{2}\big(|q|^2 - |p|^2\big).$$

Векторные поля $p(u,v)$, $q(u,v)$ регулярны со значениями в X (как комбинации регулярных полей), а значит, регулярно и числовое поле $W_a(u,v)$. Существенным в дальнейшем оказывается следующее предположение о динамике уравнения (1):

$$\partial_t W_a(u,v) + 2(a-\omega)W_a(u,v) \leqslant 0 \tag{7}$$

для $u, v \in \mathscr{A}$. Поскольку $Q'_aS = SQ_a$, $Q_aB^\alpha = B^\alpha Q_a$ и $Q_a^2 = Q_a$, то

$$Q'_aq = Q'_aSB^\alpha Q_ah = SB^\alpha Q_ah = q.$$

Точно так же $P'_ap = p$, и ортогональность проекторов P'_a, Q'_a приводит к равенству $(p,q) = 0$. Соотношение (7) есть нелинейный аналог сходного по форме требования [13, теорема 5], позволяющего построить инерциальное многообразие для уравнения (1) с самосопряженной линейной частью. При $|q| \geqslant |p|$ и соответственно при $|q| \leqslant |p|$ неравенство (7) дает нелинейные обобщения хорошо известных в теории эволюционных систем “свойства сдавливания” и “условия конуса” [10, гл. 8].

Пусть L, N – зависящие лишь от A, F, T_0 постоянные из лемм 4.1, 4.3 (см. ниже) и $\|T_0(u,v)\|_\alpha \leqslant K$ на $\mathscr{N}$.

Теорема 2.3. *Допустим, что пространство X гильбертово, оператор A обладает свойством* (3) *и* $\operatorname{Re}\Sigma > 0$ *для* $\Sigma = \Sigma(\omega)$. *Предположим, что*:

а) $B\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X^1, X)$ *есть поле операторов равномерно скалярного типа*;

б) *множество $\mathscr{R}$ содержит полосу $\Gamma(a,\xi)$ с $a > \omega$, $\xi \geqslant \gamma\gamma_1 + \gamma^2N + \gamma^2L^2(K + m(a))$.*

Тогда справедливо соотношение (7) *и предельная динамика уравнения* (1) *конечномерна.*

Заметим, что в оценке ξ лишь величина m зависит от a. Ключевым для вывода теоремы является следующее утверждение.

Лемма 2.4. *Условия теоремы* 2.3 *влекут неравенство* (7).

Доказательство. Опускаем в обозначениях векторных полей на $\mathscr{N}$ зависимость от $u, v \in \mathscr{A}$ и, как правило, от a. Например, $P_a(u,v) = P$, $Q_a(u,v) = Q$. Для регулярных полей операторов на $\mathscr{N}$ записываем, кратко, $\partial_t S(u,v) = S_t$ и т.д. Если $h = u - v$, то $\partial_t h = \partial_t u - \partial_t v = \omega h - T_0h - Bh$. При этом $h \in X^1$, а поскольку $\partial_t h = G(u) - G(v) \in X^\alpha$ и $T_0h \in X^\alpha$, то $Bh \in X^\alpha$. Но $X^\alpha = \mathscr{D}(B^\alpha)$, так что[2] $h \in \mathscr{D}(B^{1+\alpha})$ и $B^\alpha h \in X^1$.

---

[2] $h \in \mathscr{D}(B^2)$ при $T_0 \in \mathscr{L}(X^1)$, в частности при $T_0 = 0$.

Исходим из выражения $\partial_t W_a = (\partial_t q, q) - (\partial_t p, p)$ с $q = SB^\alpha Qh,\ p = SB^\alpha Ph$, $p + q = SB^\alpha h$. Преобразуем сначала величину $(\partial_t q, q)$. Положим $V = SB^\alpha Q$ и $U = B^{-\alpha} S^{-1}$; тогда $q = Vh,\ h = U(p+q),\ \partial_t q = V_t h + V\partial_t h$ или, подробнее,

$$\partial_t q = (V_t U + \omega VU - VT_0 U - VBU)(p+q).$$

Будем пользоваться равенствами $QB^\alpha = B^\alpha Q$, $QB^{-\alpha} = B^{-\alpha} Q,\ B = S^{-1}HS$ и $Q = S^{-1}Q'S$, а также $Q'p = 0,\ Q'q = q$. Как видим, $SB^\alpha h \in SX^1 = \mathscr{D}(H)$, значит, $q = SB^\alpha Qh = Q'SB^\alpha h \in \mathscr{D}(H)$ и $p = SB^\alpha h - q \in \mathscr{D}(H)$. Легко находим, что $VU(p+q) = q,\ VBU(p+q) = Hq,\ VT_0 U = Q'U_1$ с $U_1 = SB^\alpha T_0 B^{-\alpha} S^{-1}$. Далее, $Q_t + P_t = 0$ и

$$V_t = S_t B^\alpha Q + S(B^\alpha)_t Q - SB^\alpha P_t = J_1 + J_2 - J_3.$$

Элементарные выкладки приводят к формулам: $J_1 U = V_1 Q'$, где $V_1 = S_t S^{-1}$; $J_2 U = V_2 Q'$ с $V_2 = S(B^\alpha)_t B^{-\alpha} S^{-1}$; $J_3 U = V_3$ с $V_3 = SB^\alpha P_t B^{-\alpha} S^{-1}$. Таким образом, $(J_1 U)(p+q) = V_1 q,\ (J_2 U)(p+q) = V_2 q$ и

$$(\partial_t q, q) = ((V_1 + V_2)q, q) - (V_3(p+q), q) - (U_1(p+q), q) + ((\omega I - H)q, q).$$

Мы воспользовались тем, что $(Q')^* = Q'$ в X и, следовательно, $(Q'U_1(p+q), q) = (U_1(p+q), q)$.

Действуя вполне аналогично, приходим к выводу, что

$$(\partial_t p, p) = ((V_1 + V_2)p, p) + (V_3(p+q), p) - (U_1(p+q), p) + ((\omega I - H)p, p).$$

Из неравенств (6) и неравенства (22), приведенного в приложении, явствуют оценки $\|V_1\| \leqslant \gamma\gamma_1$, $\|V_2\| \leqslant \gamma^2 N$. Кроме того, $\|V_3\| \leqslant \gamma^2 \|B^\alpha P_t B^{-\alpha}\|$. Очевидные тождества

$$\|B^\alpha P_t B^{-\alpha}\| = \|A^{-\alpha} B^\alpha P_t B^{-\alpha} A^\alpha\|_\alpha, \quad \|A^{-\alpha} B^\alpha\|_\alpha = \|B^\alpha A^{-\alpha}\|,$$
$$\|B^{-\alpha} A^\alpha\|_\alpha = \|A^\alpha B^{-\alpha}\|$$

обеспечивают с учетом (5), (6), (18) неравенство $\|V_3\| \leqslant \varkappa = \gamma^2 L^2 m(a)$. Уже отмечалось, что $(p, q) = 0$, поэтому

$$\big|(V_3(p+q), p+q)\big| \leqslant \varkappa\big(|p|^2 + |q|^2\big).$$

Та же техника дает оценку $\|U_1\| \leqslant \varkappa_0 = \gamma^2 L^2 K$ и, тем самым,

$$\big|(U_1(p+q), p) - (U_1(p+q), q)\big| \leqslant \varkappa_0 |p+q| \cdot |p-q| = \varkappa_0\big(|p|^2 + |q|^2\big).$$

Наконец, $(Hq, q) \geqslant (a+\xi)|q|^2$ и $(Hp, p) \leqslant (a-\xi)|p|^2$, так как оператор H нормален, $q \in Q'X,\ \ p \in P'X$. Обозначая $\varkappa_1 = \gamma\gamma_1 + \gamma^2 N$, $\varkappa_2 = \varkappa + \varkappa_0$ и суммируя все сказанное, получаем в итоге

$$\begin{aligned} \partial_t W_a + 2(a-\omega)W_a &= (\partial_t q, q) - (\partial_t p, p) + (a-\omega)\big(|q|^2 - |p|^2\big) \\ &\leqslant \varkappa_1 |q|^2 + \varkappa_2\big(|p|^2 + |q|^2\big) - \xi|q|^2 + \varkappa_1 |p|^2 - \xi|p|^2 \\ &= (\varkappa_1 + \varkappa_2 - \xi)\big(|p|^2 + |q|^2\big) \leqslant 0, \end{aligned}$$

ибо $\xi \geqslant \varkappa_1 + \varkappa_2$ по предположению леммы. Доказательство завершено.

Иногда ограничение на ξ в теореме 2.3 можно упростить.

Замечание 2.5. Если $\alpha = 0$, $T_0 = 0$ и операторы $B(u,v)$ нормальны, то в условии б) теоремы 2.3 имеем $\xi \geqslant m(a)$.

Здесь постоянные γ_1, K, N равны нулю и γ, L равны 1. Подобная ситуация возникает для уравнений реакции–диффузии $u_t = \Delta u + f(x,u)$ в конечных областях $\mathbb{R}^l$, $l \geqslant 1$.

Лемма 2.6. *Пусть пространство X рефлексивно, $\mathscr{K}$ – инвариантный компакт уравнения* (1) *в X^α и оператор A удовлетворяет предположению* (3). *Если при некотором $a > 0$ прямая $\Gamma_a \subset \mathscr{R}$ и*

$$|Q_a(u,v)(u-v)|_\alpha \leqslant c|P_a(u,v)(u-v)|_\alpha \tag{8}$$

для $u, v \in \mathscr{K}$, $c = c(\mathscr{K}, a)$, то фазовая динамика на $\mathscr{K}$ конечномерна.

Доказательство. Полагаем $P_a(w) = P_a(w,w)$ при $w \in \mathscr{K} \subset \mathscr{A}$. По лемме 4.2 поле проекторов $P_a \colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X^\alpha)$ непрерывно в $(X^\alpha \times X^\alpha)$-метрике. Для каждого $w \in \mathscr{K}$ возьмем такую X^α-окрестность $\mathscr{V} \supset w$, что

$$\|P_a(w) - P_a(u,v)\|_\alpha \leqslant (2+2c)^{-1}$$

на $\mathscr{V} \cap \mathscr{K}$. Коль скоро $h = u - v$, то

$$\begin{aligned} |h|_\alpha &\leqslant |P_a(u,v)h|_\alpha + |Q_a(u,v)h|_\alpha \\ &\leqslant (1+c)|P_a(u,v)h|_\alpha \leqslant \frac{1}{2}|h|_\alpha + (1+c)|P_a(w)h|_\alpha, \end{aligned}$$

откуда $|u-v|_\alpha \leqslant (2+2c)|P_a(w)(u-v)|_\alpha$ для $u, v \in \mathscr{V} \cap \mathscr{K}$. Это означает, что компакт $\mathscr{K}$ обладает свойством (GrL) и по теореме 1.4 динамика на $\mathscr{K}$ конечномерна. Лемма доказана.

Таким образом, получен еще один (достаточный) критерий конечномерности динамики (1) на инвариантных компактах.

Осталось сделать совсем немного, чтобы завершить доказательство теоремы 2.3. Вновь опускаем кое-где в обозначениях зависимость от $u, v \in \mathscr{A}$ и $a > \omega$. Аттрактор $\mathscr{A}$ – инвариантное множество, значит, всякое решение $u(t)$ уравнения (1) с $u(0) = u_0 \in \mathscr{A}$ продолжается по t на $\mathbb{R}$ и $u(t) \in \mathscr{A}$. Пока не утверждается, что это продолжение единственно при $t < 0$. В силу тождеств $B^\alpha Q = QB^\alpha$, $SQ = Q'S$ и ограниченности $\mathscr{A}$ в X^α имеем

$$2W_a(u,v) \leqslant |q|^2 = |SB^\alpha Qh|^2 = |Q'SB^\alpha h|^2 \leqslant \gamma^2 L^2 |h|_\alpha^2 \leqslant \mathrm{const}$$

для $u, v \in \mathscr{A}$ и $h = u - v$. Здесь использованы ортогональность проектора Q' в X и неравенства (6), (18). Если теперь $u_0, v_0 \in \mathscr{A}$, $\zeta(t) = W_a(u(t), v(t))$ и $\lambda = 2(a - \omega) > 0$, то из (7) вытекает, что $\zeta(0) \leqslant e^{\lambda t}\zeta(t)$, $t < 0$. Но $\zeta(t) \leqslant \mathrm{const}$, поэтому $\zeta(0) \leqslant 0$, т.е. $W_a(u,v) \leqslant 0$ на $\mathscr{N}$ или же $|q| \leqslant |p|$ с $q = SB^\alpha Qh$, $p = SB^\alpha Ph$. Опять учитывая (6) и (18), находим

$$|p| \leqslant \gamma |B^\alpha Ph| \leqslant \gamma L |Ph|_\alpha.$$

С другой стороны,

$$|Qh|_\alpha = |A^\alpha Qh| = |A^\alpha B^{-\alpha} S^{-1} q| \leqslant \gamma L |q|.$$

Отсюда выводим оценку (8) с $c = \gamma^2 L^2$, по лемме 2.6 фазовая динамика на $\mathscr{A}$ конечномерна и теорема 2.3 доказана полностью.

Замечание 2.7. В гильбертовом случае соотношение (7) влечет оценку (8), а также неравенство $W_a(u,v) \leqslant 0$ на $\mathscr{N}$.

Выясним, как связано условие б) теоремы 2.3 с геометрией совокупного (по $u, v \in \mathscr{A}$) спектра Σ операторов $B(u,v)$. При этом будет обсуждаться ситуация, когда дополнение $\mathscr{R} = \mathbb{C} \setminus \Sigma$ содержит вертикальные полосы $\Gamma(a,\xi)$ со сколь угодно большими значениями a, ξ. Считаем, что надлежащий выбор числа $\omega > 0$ в (4б) и параметров $k > 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ позволяет локализовать множество Σ в области

$$\Omega(k,\theta) = \bigl\{x + iy \in \mathbb{C}\colon x > 0,\ |y| < kx^{\theta}\bigr\}.$$

При $\theta = 1$ это всегда возможно согласно лемме 4.1. При $\theta < 1$ такая локализация Σ характерна для полулинейных параболических уравнений с частными производными в конечных областях $\mathbb{R}^l$.

Из условия а) теоремы 2.3 следует оценка

$$\|R(\lambda;B)\| \leqslant \gamma^2/r(\lambda), \qquad B = B(u,v),$$

где $r(\lambda)$ – расстояние[3] от точки $\lambda \in \mathscr{R}$ до Σ, а γ – постоянная в (6). Действительно, $R(\lambda;B) = S^{-1}R(\lambda;H)S$ и $\|R(\lambda;H)\| \leqslant 1/r(\lambda)$ в силу нормальности операторов $H = H(u,v)$. Для $u, v \in \mathscr{A}$ и $\Gamma_a \subset \mathscr{R}$ лемма 4.2 дает представление

$$\partial_t P_a(u,v) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} E(\lambda;u,v)\,d\lambda \tag{9}$$

с голоморфным по $\lambda \in \mathscr{R}$ ядром $E(\lambda;u,v) \in \mathscr{L}(X^{\alpha})$, причем

$$\|E(\lambda;u,v)\|_{\alpha} \leqslant \frac{M}{r^2(\lambda)}\bigl(|\lambda|^{\alpha} + r^{\alpha}(\lambda)\bigr) \tag{10}$$

с $M = M(A,F,T_0)$.

Исходя из включений $\Sigma \subset \Omega(k,\theta)$ и $\mathscr{R} \supset \Gamma(a,\xi)$ при некоторых $a > \xi > \omega$, оценим величину $m(a)$ в (5) через параметры a, ξ, θ. Пусть $\chi(y)$ – такая положительная миноранта функции $r(a+iy)$ на $\mathbb{R}$, что $\chi(y) \leqslant |a+iy|$; тогда для $\lambda = a + iy$ правая часть (10) мажорируется выражением $2M|a+iy|^{\alpha}/\chi^2(y)$. Если еще $\chi(y) = \chi(-y)$, то

$$m(a) \leqslant \frac{2M}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{|a+iy|^{\alpha}}{\chi^2(y)}\,dy. \tag{11}$$

Будем обозначать через $c, c_1, \dots$ положительные постоянные, зависящие лишь от k, θ, M. Увеличив при необходимости числа ω и k, имеем $\Sigma \subset \Omega(k,\theta) \cap \Omega(k,1)$. Значения a, ξ предполагаем столь большими, сколь требуют нижеследующие рассуждения.

Начнем анализ правой части (11) со случая $\theta = 0$. Полагаем $\chi(y) = \xi$ на $[0,k]$, $\chi(y) = (\xi^2 + (y-k)^2)^{1/2}$ на (k,∞) и $\chi(y) = \chi(-y)$ при $y < 0$. Понятно, что $\chi(y) \leqslant r(a+iy)$, $\chi(y) \leqslant |a+iy|$ для всех $y \in \mathbb{R}$. Пользуясь оценками $|a +$

[3] Нетрудно показать, что Σ замкнуто, а потому $r(\lambda) > 0$.

$iy|^\alpha \leqslant a^\alpha + k^\alpha$ при $0 \leqslant y \leqslant k$, $|a+iy|^\alpha \leqslant a^\alpha + k^\alpha + (y-k)^\alpha$ при $y > k$ и производя интегрирование, получаем неравенство

$$m(a) \leqslant ca^\alpha/\xi.$$

Далее, пусть $\theta = 1$. Положим $\chi(y) = \xi$ на $[0, 2ka]$, $\chi(y) = (y-ka)/(1+k^2)^{1/2}$ на $(2ka, \infty)$ и $\chi(y) = \chi(-y)$ при $y < 0$. При $y > 2ka$ величина $\chi(y)$ есть расстояние от точки $a+iy$ до границы сектора $\Omega(k,1)$, поэтому $\chi(y) \leqslant r(a+iy)$, $\chi(y) \leqslant |a+iy|$ на $\mathbb{R}$. Записав

$$|a+iy|^\alpha \leqslant a^\alpha(1+(2k)^\alpha)$$

при $0 \leqslant y \leqslant 2ka$,

$$|a+iy|^\alpha \leqslant a^\alpha + (ka)^\alpha + (y-ka)^\alpha$$

при $y > 2ka$ и интегрируя в (11), выводим оценку

$$m(a) \leqslant ca^{\alpha+1}/\xi^2.$$

В случае $0 < \theta < 1$ обозначим $\nu = \theta^{-1} > 1$ и $\varkappa = k^{-\nu}$. Для $x_0 > a$ и $y_0 = kx_0^\theta$ нормаль к параболе $y = kx^\theta$ в (x_0, y_0) пересекает прямую $x = a$ в точке с ординатой

$$y_1 = z(x_0) = y_0 + \nu\varkappa^2 y_0^{2\nu-1} - \nu\varkappa a y_0^{\nu-1},$$

или, что то же, $z(x_0) = kx_0^\theta + \nu k^{-1}(x_0 - a)x_0^{1-\theta}$. Таким образом, $z'(x_0) > 0$, $y_0 < y_1$. Считаем, не теряя общности, $y_0 > 1$. Если $z(a+\xi) \leqslant 2ka$, то найдем x_0 (а затем y_0) из условия $z(x_0) = y_1$, $y_1 = 2ka$; тогда $a(2k + cy_0^{\nu-1}) \geqslant c_1 y_0^{2\nu-1}$, $a \geqslant c_2 y_0^\nu$. Если же $z(a+\xi) > 2ka$, то принимаем $y_0 = k(a+\xi)^\theta$, $y_1 = z(a+\xi)$. Так или иначе, $1 < y_0 < y_1$, $y_0 \leqslant c_3 a^\theta$ и $y_1 \geqslant 2ka$. Простые геометрические доводы, учитывающие вогнутость функции $y = kx^\theta$, показывают, что расстояние от любой точки $\lambda = a+iy, y_0 \leqslant y \leqslant y_1$, до ветви параболы с $x \geqslant a+\xi$ превосходит величину $\rho(y) = (\xi^2 + (y-y_0)^2)^{1/2}$. Тем более это верно при $0 \leqslant x < a - \xi$.

Полагаем $\chi(y) = \xi$ на $[0, y_0]$, $\chi(y) = \rho(y)$ на $(y_0, y_1]$, $\chi(y) = (y-ka)/(1+k^2)^{1/2}$ при $y > y_1$ и $\chi(y) = \chi(-y)$ при $y < 0$. Как видим, $\chi(y) \leqslant r(a+iy)$ при $y_0 < y \leqslant y_1$. На $[0, y_0]$ подобная оценка очевидна, а для $y > y_1$ установлена ранее.

С другой стороны, $\chi(y) \leqslant |a+iy|$ на $\mathbb{R}$. Имеем также $|a+iy|^\alpha \leqslant a^\alpha + y_0^\alpha$ при $0 \leqslant y \leqslant y_0$, $|a+iy|^\alpha \leqslant a^\alpha + y_0^\alpha + (y-y_0)^\alpha$ при $y_0 < y \leqslant y_1$ и $|a+iy|^\alpha \leqslant a^\alpha + (ka)^\alpha + (y-ka)^\alpha$ при $y > y_1$. Оценивая теперь правую часть (11), приходим к неравенству

$$m(a) \leqslant c_4 a^\alpha/\xi + c_5 a^{\alpha+\theta}/\xi^2.$$

Во всех трех случаях мы использовали декларированную выше свободу выбора параметров a, ξ.

Итак, условие на ξ в теореме 2.3 при достаточно больших $a > 0$ обретает такую форму: $\xi \geqslant ca^{\alpha/2}$ для $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha/2$ и $\xi \geqslant ca^{(\alpha+\theta)/3}$ для $\alpha/2 < \theta \leqslant 1$, где $c = c(A, F, T_0)$. Пороговое значение $\theta = \alpha/2$ возникает из равенства $(\alpha+\theta)/3 = \alpha/2$.

Получаем, тем самым, важное следствие теоремы 2.3.

ТЕОРЕМА 2.8. *Пусть пространство X гильбертово, оператор A обладает свойством* (3) *и выполнено предположение* а) *теоремы* 2.3. *Допустим еще, что множество $\mathscr{R}$ содержит полосы $\Gamma(a_n, \xi_n)$ с $a_n, \xi_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и $\Sigma \subset \Omega(k,\theta) \cap \Omega(k,1)$ для некоторых $k > 0$, $\theta \in [0,1]$. Возьмем $\beta = \alpha/2$ при $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha/2$ и $\beta = (\alpha+\theta)/3$ для $\alpha/2 < \theta \leqslant 1$.*

Тогда если $a_n^{\beta} = o(\xi_n)$ при $n \to \infty$, то динамика уравнения (1) *на аттракторе конечномерна и справедливо соотношение* (7) *с подходящим $a > 0$.*

Отметим, что $\beta \leqslant (\alpha+1)/3 < 2/3$. Кроме того, $\theta = 0$, коль скоро $\Sigma \subset \mathbb{R}$.

Если A – самосопряженный положительный оператор в гильбертовом пространстве X, то нетрудно установить (варьируя параметр ω) включение $\Sigma \subset \Omega(k,\alpha)$ с надлежащим $k > 0$, так что в теореме 2.8 имеем $a_n^{2\alpha/3} = o(\xi_n)$ при $n \to \infty$. Известное же условие спектрального скачка (см. [12], [10], [13]), гарантирующее существование инерциального многообразия уравнения (1), дает здесь в сопоставимых терминах более жесткое (для значений $\alpha > 0$) ограничение $a_n^{\alpha} = o(\xi_n)$ при $n \to \infty$. Таким образом, в классе эволюционных систем (1) конечномерность предельной динамики выглядит свойством более общего порядка, чем наличие инерциального многообразия.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.9. Предположение а) теоремы 2.3 относительно поля операторов $B(u,v)$ можно ослабить, заменив требование $\mathscr{L}(X^{\alpha})$-ограниченности корректирующего поля T_0 в (4а) на $\mathscr{L}(X^{\alpha}, X^{\alpha-\varepsilon})$-ограниченность с достаточно малым $\varepsilon > 0$. Соответствующая версия теоремы 2.8 должна привести к новым приложениям развитой здесь и в [1] теории.

§ 3. Уравнение в частных производных

Покажем, что полученные результаты позволяют установить конечномерность предельной динамики уравнений (2). Дифференциальный оператор $\partial_{xx} h = h_{xx}$ в $L^2(0,1)$ рассматриваем либо с краевыми условиями Штурма

$$h(0)\cos\mu_0 + h_x(0)\sin\mu_0 = 0, \qquad h(1)\cos\mu_1 + h_x(1)\sin\mu_1 = 0 \tag{12а}$$

при $\mu_0, \mu_1 \in (-\pi/2, \pi/2]$, либо с периодическими условиями

$$h(0) = h(1), \qquad h_x(0) = h_x(1). \tag{12б}$$

Необходимые для дальнейшего изложения сведения о пространствах дифференцируемых функций можно найти в [22]–[24].

Пусть $\mathfrak{I} = [0,1]$ в случае (12а) и $\mathfrak{I}$ – окружность длины 1 в случае (12б). Обозначаем через $\mathscr{H}^s = \mathscr{H}^s(\mathfrak{I})$ обобщенные L^2-пространства Соболева с произвольными $s \geqslant 0$. Заметим, что при $s > 1/2$ пространство $\mathscr{H}^s$ суть банахова алгебра [22, п. 2.8.3]. Оператор $u \to u_x$ непрерывен из $\mathscr{H}^{s+1}$ в $\mathscr{H}^s$. Используя теоремы вложения, нетрудно заключить, что для целых s, $\nu \geqslant 1$ и гладкой функции $g\colon \mathfrak{I} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ отображение $u \to g(x,u,u_x)$ принадлежит классу $BC^{\nu}(\mathscr{H}^{s+1}, \mathscr{H}^s)$ при $g \in C^{s+\nu}$ и классу[4] $BC(\mathscr{H}^{s+1}, \mathscr{H}^s)$ при $g \in C^s$.

Требования к функции $f(x,u,p)\colon \mathfrak{I} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ в (2) выглядит так.

[4]Классы отображений BC^{ν}, BC определены в § 1.

Предположение 3.1. *Функция f принадлежит C^3. Если в случае* (12а) $\mu_j = 0$ *для* $j = 0$ *или* $j = 1$, *то* $f(j, 0, p) = 0$ *для всех* $p \in \mathbb{R}$.

Сведем уравнение (2) к виду (1) с $X = L^2(\mathfrak{I})$. Линейный оператор ∂_{xx} самосопряжен в X. При надлежащем выборе числа $\varkappa \geqslant 0$ оператор $A = \varkappa I - \partial_{xx}$ положительно определен [25, гл. 1] и дискретен, удовлетворяет, тем самым, гипотезе (H1) и порождает гильбертову полушкалу $\{X^\alpha\}_{\alpha \geqslant 0}$. Как известно [23, гл. 5], X^α – замкнутые подпространства (с эквивалентной нормой) в $\mathscr{H}^{2\alpha}$, причем $X^\alpha = \mathscr{H}^{2\alpha}$ в случае (12б). Последнее верно и в ситуации (12а) для $\alpha \leqslant 1/4$ (для $\alpha \leqslant 3/4$, когда $\mu_0, \mu_1 \neq 0$). При $\alpha > 3/4$ имеют место непрерывные вложения $X^\alpha \subset C^1(\mathfrak{I})$, $X^{\alpha+1/2} \subset C^2(\mathfrak{I})$. Непрерывно, конечно, и вложение $C(\mathfrak{I}) \subset X$. Отсюда, в частности, делаем вывод, что $F \in BC^3(X^\alpha, X)$ для отображения $F\colon u \to \varkappa u + f(x, u, u_x)$. Если при каком-то $\alpha \in (3/4, 1)$ уравнение (2) диссипативно в X^α, то для его абстрактной формы $\partial_t u = -Au + F(u)$ справедливы основные гипотезы (H1)–(H3), а стало быть, и все конструкции § 1, 2. При этом фактически избыточное по сравнению с (H2) предположение 3.1 о нелинейной части (2) влечет дополнительные качества фазовой динамики. Пусть $\mathscr{A}$ – аттрактор и $\{\Phi_t\}$ – диссипативный полупоток (2) в X^α, $\mathscr{N} = \mathscr{A} \times \mathscr{A}$, Y – пространство Банаха.

Замечание 3.2. В предположениях 3.1 и (H3) с $\alpha \in (3/4, 1)$ уравнение (2) обладает следующими свойствами:

а) аттрактор $\mathscr{A}$ ограничен в $X^{3/2}$ или в X^2 при условиях (12а) или (12б) соответственно;

б) регулярно всякое непрерывное в $(X^\alpha \times X^\alpha)$-метрике поле $\Pi\colon \mathscr{N} \to Y$, продолжимое до C^1-отображения $X^1 \times X^1 \to Y$.

В самом деле, принимая во внимание связь между X^s и $\mathscr{H}^{2s}$, находим из 3.1, что $F \in BC^2(X^1, X^{1/2})$, а в случае (12б), сверх того, $F \in BC^1(X^{3/2}, X^1)$. Замечания 1.2, 1.3 позволяют теперь установить компактность $\mathscr{A}$ в X^1 и гладкость отображения $(t, u) \to \Phi_t u\colon (0, \infty) \times X^1 \to X^1$, что обеспечивает регулярность (см. определение 2.1) тождественного вложения $\mathscr{N} \to X^1 \times X^1$, а значит, и свойство б). Наконец, утверждения а) следуют из указанных замечаний непосредственно.

Различные признаки X^α-диссипативности (2) можно получать на основе известных априорных оценок [26], [9], [27] решений таких уравнений с помощью абстрактных функционально-аналитических методов [2], [9], [28]. Например, рассмотренные в [9, гл. 1, § 7] ограничения $f(x, u, 0) \operatorname{sign} u \to -\infty$ при $|u| \to \infty$ равномерно по $x \in \mathfrak{I}$,

$$|f| + |f_x| + |f_u| \leqslant M(u)(1 + p^2), \qquad |f_p| \leqslant M(u)(1 + |p|),$$

на удовлетворяющую предположению 3.1 функцию $f(x, u, p)$ гарантируют X^α-диссипативность (при $3/4 < \alpha < 1$) задач (2), (12а) с $\mu_0 = \mu_1 = 0$ и периодической задачи (2), (12б). Действительно, при каждом $u_0 \in X^\alpha \subset C^1(\mathfrak{I})$ уравнение (2) имеет локальное решение $u(t) \in C([0, t^*), X^\alpha)$, $u(t) \in X^1$ на $(0, t^*)$. Если же $u_0 \in X^1$, то в силу замечания 1.2 $u(t) \in C([0, t^*), X^1)$. В любом случае $u(t) \in X^{3/2}$ для $t \in (0, t^*)$, т.е. $u(t)$ принадлежит классу Гёльдера $C^{2+\delta}(\mathfrak{I})$ с некоторым $0 < \delta < 1$, и применимы теоремы 1.7.2, 2.5.1 из [9]. Хотя цитированные утверждения подразумевают граничное условие Дирихле, все необходимые для их вывода рассуждения проходят и в периодической ситуации. Так или иначе, для уравнений (2) устанавливается глобальное по $t > 0$ существование решений

$$u(t) = \Phi_t u_0 \in X^\alpha \cap C^{2+\delta}(\mathfrak{I}), \qquad u_0 \in X^\alpha,$$

а также равномерная $(C(\mathfrak{I}), C(\mathfrak{I}))$-ограниченность по $t \geqslant 0$ фазового полупотока $\{\Phi_t\}$ в X^α и наличие инвариантного компакта $\mathscr{A} \subset X^\alpha$, являющегося $(C(\mathfrak{I}), C^{2+\delta}(\mathfrak{I}))$-аттрактором. Здесь сохранена удобная терминология [9]. Далее, вложения $X^\alpha \subset C(\mathfrak{I})$ и $C^{2+\delta}(\mathfrak{I}) \subset \mathscr{H}^2$ непрерывны, значит, $\mathscr{A}$ есть (X^α, X^1)-аттрактор ($\mathscr{A}$ равномерно притягивает шары $\mathscr{B} \subset X^\alpha$ при $t \to +\infty$ по норме X^1), откуда с запасом следует диссипативность (2) в X^α.

Поясним, почему для задач (2), (12) не удается построить инерциальное многообразие. Если занумеровать собственные числа λ_n оператора A по возрастанию и положить $a_n = (\lambda_{n+1} + \lambda_n)/2$, $\xi_n = (\lambda_{n+1} - \lambda_n)/2$ для $n \geqslant 1$, то [25] $a_n \sim cn^2$ и $\xi_n \sim cn$ при $n \to \infty$, $c = \mathrm{const}$. Условие спектрального скачка $a_n^\alpha = o(\xi_n)$, обеспечивающее "асимптотическую конечномерность" фазовой динамики, подразумевало бы тут неравенство $\alpha < 1/2$, принципиально невозможное даже в самых жестких ограничениях на зависящую от u_x нелинейность f.

Между тем, предельная динамика уравнения (2) конечномерна.

Теорема 3.3. *Допустим, функция $f\colon \mathfrak{I} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ удовлетворяет предположению* 3.1 *и* $\alpha \in (3/4, 1)$. *Тогда если уравнение* (2) *с каким-то из краевых условий* (12) *диссипативно в X^α, то его фазовая динамика на аттракторе конечномерна.*

Доказательство сводится к проверке требований теоремы 2.8. Соотношение (3), разумеется, выполнено для положительно определенного оператора A. Если $u, h \in X^\alpha$, то

$$DF(u)h = \varkappa h + f_u(x, u, u_x)h + f_p(x, u, u_x)h_x.$$

Полагаем

$$b(x; u, v) = \int_0^1 f_p(x, w, w_x)\, d\tau, \qquad b_0(x; u, v) = \int_0^1 f_u(x, w, w_x)\, d\tau \tag{13}$$

при $u, v \in X^\alpha$, $w = \tau u + (1-\tau)v$. Данные выражения удобно трактовать как интегралы Бохнера со значениями в тех или иных функциональных пространствах, что позволяет применять к их анализу соответствующую технику [29, гл. 3]. Так как $f \in C^3$, то $f_p, f_u \in C^2$ и отображения $\Pi_1\colon u \to f_p(x, u, u_x)$, $\Pi_2\colon u \to f_u(x, u, u_x)$ принадлежат классу $BC(\mathscr{H}^3, \mathscr{H}^2)$. Согласно замечанию 3.2, а) выпуклая оболочка $\mathscr{A}^c$ аттрактора $\mathscr{A}$ ограничена в $X^{3/2} \subset \mathscr{H}^3$, следовательно, множества $\Pi_1\mathscr{A}^c$, $\Pi_2\mathscr{A}^c$ ограничены в $\mathscr{H}^2$. Это влечет равномерную по $(u, v) \in \mathscr{N}$ ограниченность функций b, b_0 (а также b^2) в нормах банаховых алгебр $\mathscr{H}^2$ и $C^1(\mathfrak{I})$. В случае (12б), исходя из X^2-ограниченности $\mathscr{A}$, получаем таким же образом равномерную $\mathscr{H}^3$-ограниченность указанных функций.

Запишем, следуя формату (4),

$$T(u, v)h = T_0(u, v)h + \varkappa h + b_0(x; u, v)h + b(x; u, v)h_x, \tag{14а}$$

$$B(u, v) = (\omega + \varkappa)I - \partial_{xx} - T(u, v) \tag{14б}$$

для $u, v \in \mathscr{A}$. Напомним, что поле операторов T_0 на $\mathscr{N}$ должно быть ограничено со значениями в $\mathscr{L}(X^\alpha)$ и регулярно со значениями в $\mathscr{L}(X^\alpha, X)$. Возьмем сперва $T_0 = 0$ и выберем число $\omega > 0$ с помощью леммы 4.1. Обозначим через $S(u,v)$ непрерывный в $X = L^2(\mathfrak{I})$ оператор умножения на положительную функцию $\psi(x;u,v) \in C^2[0,1]$ такую, что $(\ln\psi)_x = b/2$ и $\psi\big|_{x=0} = 1$. В периодическом случае, вообще говоря, $\psi\big|_{x=1} \neq 1$ и $\psi \notin C(\mathfrak{I})$. Преобразование $\eta = S(u,v)h$ для $h \in X^1$ дает возможность представить операторы $B = B(u,v)$ в виде $B = S^{-1}HS$, где $H = H(u,v)$,

$$H(u,v)\eta = \omega\eta - \eta_{xx} - q(x;u,v)\eta \tag{15}$$

и $q = b_0 - b^2/4 - b_x/2$. Функции $q \in \mathscr{H}^1 \subset C(\mathfrak{I})$ равномерно по $u, v \in \mathscr{A}$ ограничены в норме $\mathscr{H}^1$. Для операторов H область определения $\mathscr{D}(H)$ совпадает с $S\mathscr{D}(B)$, где $\mathscr{D}(B) = \mathscr{D}(A) = X^1$, т.е. при переходе от B к H краевые условия могут измениться. Тем не менее, тип (12а) в целом сохраняется и операторы $H(u,v)$ оказываются самосопряженными в X. Условия же (12б) трансформируются в $\eta(1) = \rho\eta(0)$, $\eta_x(1) = \rho\eta_x(0)$ с $\rho = \psi\big|_{x=1}$ (ибо функции f_p, b периодичны по x), и тут $H(u,v)$ при $\rho \neq 1$ не являются даже нормальными. В обоих случаях[5] $\|S\| = |\psi|_C$, регулярность поля операторов $S\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X)$ будет следовать из регулярности поля функций $\psi(\,\cdot\,;u,v)\colon \mathscr{N} \to C[0,1]$, а последняя, в свою очередь, из регулярности поля функций $b(\,\cdot\,;u,v)\colon \mathscr{N} \to C(\mathfrak{I})$. Пользуясь C^1-гладкостью нелинейного оператора $(u,v) \to f_p(x,w,w_x)\colon X^\alpha \times X^\alpha \to C(\mathfrak{I})$ с $w = \tau u + (1-\tau)v$, $\tau \in [0,1]$ и дифференцируя под знаком интеграла в (13) по параметру $(u,v) \in X^\alpha \times X^\alpha$, заключаем, что отображение $\Pi\colon (u,v) \to b(\,\cdot\,;u,v)$ принадлежит классу $C^1(X^\alpha \times X^\alpha, C(\mathfrak{I}))$, а значит, его сужение на $\mathscr{N}$ регулярно. Точно так же доказывается регулярность поля функций $b_0\colon \mathscr{N} \to C(\mathfrak{I})$ в (13), а регулярность поля $b^2\colon \mathscr{N} \to C(\mathfrak{I})$ явствует из регулярности b и мультипликативной структуры $C(\mathfrak{I})$.

Итак, в случае Штурма (12а) операторы $H(u,v)$ самосопряжены, поле S регулярно и $\|S^{-1}\| = |\psi^{-1}|_C \leqslant \mathrm{const}$ на $\mathscr{N}$, следовательно, $B\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X^1, X)$ есть поле операторов равномерно скалярного типа в смысле определения 2.2. Так как совокупный спектр $\Sigma = \Sigma(B) \subset \mathbb{R}^+$, то условие $\Sigma \subset \Omega(k,\theta) \cap \Omega(k,1)$ теоремы 2.8 выполняется тривиально с $\theta = 0$ и любым $k > 0$.

Установим необходимую разреженность Σ. Пользуясь асимптотикой [25, гл. 1] собственных чисел операторов вида (15), обнаруживаем, что в терминах теоремы 2.8 здесь можно взять $a_n = \pi^2 n^2 + cn$, $\xi_n = \pi^2 n + c_1$ с $n \geqslant n_0$, где величины c, c_1, n_0 зависят от μ_0, μ_1 и общей мажоранты $\mathscr{H}^1$-норм функций $q(\,\cdot\,;u,v)$. В этих же терминах $\beta = \alpha/2 < 1/2$, $a_n^\beta = o(\xi_n)$ при $n \to \infty$ и для задач (2), (12а) теорема 3.3 доказана.

Обратимся к периодическому случаю (12б). Положим теперь $T_0(u,v)h = -q(x;u,v)h$ в равенстве (14а). Соответственно изменится поле операторов $B(u,v)$ в (14б). В данной ситуации пространство $X^\alpha = \mathscr{H}^{2\alpha}$ – банахова алгебра и, как уже говорилось, функции b, b_0, b^2 равномерно по $(u,v) \in \mathscr{N}$ ограничены в норме $\mathscr{H}^3$, а потому $|q(\,\cdot\,;u,v)|_1 \leqslant \mathrm{const}$. Тем более, $|q(\,\cdot\,;u,v)|_\alpha \leqslant \mathrm{const}$, так что мультипликаторы $T_0(u,v)$ принадлежат $\mathscr{L}(X^\alpha)$ и $\|T_0(u,v)\|_\alpha \leqslant \mathrm{const}$ для $u, v \in \mathscr{A}$. Из (14б), (15) следует представление $B = S^{-1}H_0S$, в котором $S(u,v)$ – операторы, определенные выше, а $H_0 = H_0(u,v) = \omega I - \partial_{xx}$ с краевыми условиями

[5] $|\cdot|_C$ – норма в $C[0,1]$.

$h(1) = \rho h(0),\ h_x(1) = \rho h_x(0)$ и $\rho = \rho(u,v) = \psi(x;u,v)\big|_{x=1} > 0$. При этом собственные числа λ и собственные функции $\chi(x)$ оператора $(-\partial_{xx})$ легко вычисляются:

$$\begin{array}{lll} \lambda_0 = -\ln^2 p, & \lambda_{n,1} = (2\pi n - i\ln\rho)^2, & \lambda_{n,2} = (2\pi n + i\ln\rho)^2, \\ \chi_0 = \rho^x, & \chi_{n,1} = \rho^x e^{2\pi nix}, & \chi_{n,2} = \rho^x e^{-2\pi nix} \end{array} \tag{16}$$

для $n \geqslant 1$. Система функций $\{\chi_0, \chi_{n,1}, \chi_{n,2}\}$ полна и ортогональна в $L^2(\mathfrak{I})$ с весом ρ^{-2x}, значит, $H_0 = S_0^{-1} H_1 S_0$, где операторы $H_1 = H_1(u,v)$ нормальны в X, $\mathscr{D}(H_1) = \mathscr{D}(A) = X^1,\ S_0(u,v)h = \rho^{-x}h$ для $h \in X$. Как видим, $B = S_1^{-1} H_1 S_1$ с $S_1 = S_0 S$, причем $\|S_1^{-1}\| \leqslant \|S^{-1}\| \cdot \|S_0^{-1}\| \leqslant \mathrm{const}$ на $\mathscr{N}$.

В контексте требований теоремы 2.8 и определения 2.2 нам нужна регулярность полей операторов $S_1\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X),\ T_0\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X^\alpha, X)$. Доказанная выше регулярность полей ψ, S влечет то же свойство для полей $S_0, S_1\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X)$. Вложение $X^\alpha \subset C(\mathfrak{I})$ непрерывно, так что $\|T_0\|_{\alpha,0} \leqslant c|q|$ (тут $|\cdot|$ – норма в X, постоянная c не зависит от q) и поле T_0 регулярно, коли таковым является поле функций $q\colon \mathscr{N} \to X,\ q = b_0 - b^2/4 - b_x/2$. Поля функций b_0, b^2 на $\mathscr{N}$ регулярны со значениями в $C(\mathfrak{I})$ и, тем более, со значениями в X.

Пусть $\Pi_\tau(u,v) = (f_p(x,w,w_x))_x$ с $w = \tau u + (1-\tau)v$, $\tau \in [0,1]$ и произвольными $u = u(x),\ v = v(x) \in X^1$, а $\Pi(u,v)$ – результат интегрирования $\Pi_\tau(u,v)$ по τ. Ясно, что $\Pi(u,v) = (b(x;u,v))_x$ для $u,v \in \mathscr{A} \subset X^1$, поэтому в силу замечания 3.2, б) регулярность поля функций $b_x\colon \mathscr{N} \to X$ будет следствием включений $\Pi\big|_{\mathscr{N}} \in C(\mathscr{N}, X)$, $\Pi \in C^1(X^1 \times X^1, X)$. Поскольку $f \in C^3$ и $f_p \in C^2$, то отображение $u \to f_p(x,u,u_x)$ принадлежит классу $BC^1(X^1, X^{1/2})$, стало быть, $\Pi_\tau \in C^1(X^1 \times X^1, X)$. Дифференцируя интегральное выражение для Π по параметру $(u,v) \in X^1 \times X^1$, находим, что $\Pi \in C^1(X^1 \times X^1, X)$. Далее, операторы $u \to g(x,u,u_x)$, $g = f_{px},\ f_{pu}, f_{pp}$, действуют непрерывно из X^α в $C(\mathfrak{I})$ и $(f_p(x,u,u_x))_x = f_{px} + f_{pu}u_x + f_{pp}u_{xx}$ для $u \in \mathscr{A}^c \subset X^1$. По лемме 1.1 функция $u \to Au\colon \mathscr{A} \to X$, $Au = \varkappa u - u_{xx}$, непрерывна в X^α-метрике. Последнее верно и для отображений $u \to u_{xx},\ u \to u_x$ множества $\mathscr{A}^c$ в X. Таким образом, $\Pi_\tau, \Pi\big|_{\mathscr{N}} \in C(\mathscr{N}, X)$, поля b_x, q, T_0 регулярны и $B(u,v)$ – поле операторов равномерно скалярного типа на $\mathscr{N}$.

Остается уточнить значение ω в (14б) и найти достаточно широкие лакуны во множестве $\Sigma = \Sigma(B) \subset \mathbb{C} = \{x + iy\}$. Пусть $\omega > \ln^2\rho(u,v) + 1$ на $\mathscr{N}$; тогда из (16) следует, что $\Sigma \subset \Omega(k,\theta),\ \theta = 1/2,\ k = 2(\omega-1)^{1/2}$. Фактически же Σ принадлежит области $|y| \leqslant k(x-1)^\theta$, а значит, $\Sigma \subset \Omega(k_1, 1)$ с $k_1 = k_1(\omega) > 0$. При этом в формате теоремы 2.8 естественно взять $a_n = 4\pi^2(n^2 + n + 1/2)$, $\xi_n = 2\pi^2(n + 1/2)$ для $n > \omega/2\pi^2$. Кроме того, $\theta > \alpha/2$ и $\beta = (\alpha+\theta)/3 < 1/2$, ибо $\alpha < 1$, а потому $a_n^\beta = o(\xi_n)$ при $n \to \infty$. Как результат получаем конечномерность предельной фазовой динамики для задачи (2), (12б). Теорема 3.3 доказана полностью.

Отметим, что теорема 2.8 обеспечивает еще свойство (7) динамики (2) на аттракторе $\mathscr{A}$, причем структура числовой формы W_a и значение параметра a в (7) зависят от выбора T_0, ω в (14).

Конечномерной предельной динамикой обладает, например, уравнение реакции–диффузии с нелинейной конвекцией

$$u_t = u_{xx} + (g(x,u))_x + g_0(x,u), \qquad x \in (0,1),$$

при стандартных условиях в $x = 0, 1$. Ограничения на гладкие функции g, g_0 диктуются предположением 3.1 и требованием диссипативности данного уравнения в X^α с $\alpha \in (3/4, 1)$.

Замечание 3.4. Теорема 3.3 обобщается на одномерные системы

$$u_t^j = (d(x)u_x^j)_x + f_j(x, u, u_x), \qquad 1 \leqslant j \leqslant l,$$

с $u = (u^1, u^2, \dots, u^l)$, граничным условием Дирихле и гладким на $[0,1]$ коэффициентом $d(x) > 0$, если использовать в доказательстве упоминавшийся уже аналог преобразования Лиувилля [16].

По-видимому, конечномерность предельной динамики может быть доказана также для полулинейных параболических уравнений на $(0,1)$ порядка выше двух при не слишком патологических граничных условиях и подходящих ограничениях на нелинейную часть. Это предполагает, однако, определенную модификацию построений § 2 (см. замечание 2.9) и настоящего параграфа.

§ 4. Приложение

Здесь собраны технического рода утверждения, связанные со свойствами производной векторного поля $F(u) - Au$ уравнения (1) в банаховом пространстве X. Как и ранее, исходим из основных гипотез (H1)–(H3). Записываем $\lambda = x + iy$ для $\lambda \in \mathbb{C}$. Напоминаем, что $\mathscr{A}$ – аттрактор (1) в X^α, $\mathscr{N} = \mathscr{A} \times \mathscr{A}$, спектр $\sigma(A)$ принадлежит сектору $\Omega = \{\lambda\colon |y| < kx\}$ с $k > 0$ и $\|R(\lambda; A)\| \leqslant M/(1 + |\lambda|)$ в $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \Omega$ для резольвенты $R(\lambda; A) = (A - \lambda I)^{-1}$. Обозначения пространств и норм линейных операторов соответствуют обозначением, принятым в § 2. Поля операторов T, B на $\mathscr{N}$ задаются равенствами (4а), (4б) с $\omega \geqslant \omega_0$, где ω_0 – постоянная из нижеследующей леммы, причем поле $T\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X^\alpha, X)$ регулярно в смысле определения 2.1.

Лемма 4.1. *Для $\omega \geqslant \omega_0 > 0$ и $B = B(u,v)$ с $u, v \in \mathscr{A}$ спектр $\sigma(B) \subset \Omega$,*

$$\|R(\lambda; B)\| \leqslant \frac{M_1}{1 + |\lambda|} \tag{17}$$

при $\lambda \in \Omega_1$ и

$$\|A^\alpha B^{-\alpha}\| \leqslant L, \qquad \|B^\alpha A^{-\alpha}\| \leqslant L. \tag{18}$$

Константы M_1, L зависят лишь от A. Постоянная ω_0 зависит от A, F, T_0, где T_0 – поле операторов в (4а).

Будем использовать неравенство моментов [2, теорема 1.4.4]

$$\|A^\alpha V\| \leqslant \Theta \|AV\|^\alpha \|V\|^{1-\alpha} \tag{19}$$

для секториального оператора A с V, $AV \in \mathscr{L}(X)$ и $\Theta = \Theta(k, M)$. Всюду дальше $c, c_1, \dots$ – константы, зависящие только от A, F, T_0. Условимся отождествлять зависимость тех или иных величин от оператора A и от его параметров (k, M), хотя последние и выбираются по A неоднозначно.

Доказательство. Регулярность поля операторов $T = T(u,v)$ влечет соотношение $\|TA^{-\alpha}\| \leqslant c$ на $\mathscr{N}$. Пусть $R = R(\lambda; A)$ для $\lambda \in \Omega_1$; тогда (формально) $R(\lambda; A-T) = R(I-TR)^{-1}$ и $\lambda \notin \sigma(A-T)$, если $\|TR\| < 1$. Ясно, что

$$\|TR\| = \|TA^{-\alpha}A^{\alpha}R\| \leqslant c\|A^{\alpha}R\|.$$

Так как $AR = I + \lambda R \in \mathscr{L}(X)$, то (19) обеспечивает неравенство

$$\|A^{\alpha}R\| \leqslant \Theta\|AR\|^{\alpha}\|R\|^{1-\alpha}.$$

Отсюда явствует, что

$$\|TR\| \leqslant c\Theta\bigl(\|R\|^{1-\alpha} + |\lambda|^{\alpha}\|R\|\bigr).$$

Используя оценку на $R(\lambda; A)$, получаем

$$\|TR\| \leqslant c_1(1+|\lambda|)^{\alpha-1}, \qquad c_1 = c\Theta(M^{1-\alpha} + M).$$

Таким образом, $\|TR\| \leqslant 1/2$ при $|\lambda|^{1-\alpha} \geqslant 2c_1$ и геометрические соображения показывают, что для всех $u, v \in \mathscr{A}$ спектр $\sigma(A - T(u,v))$ лежит в секторе $|y| < k(x+\omega_0)$ с $\omega_0 = \rho\varkappa$, $\rho^{1-\alpha} = 2c_1$, $\varkappa = (1+k^{-2})^{1/2}$, где $\omega_0 = \omega_0(k, M, T)$, т.е. фактически ω_0 зависит от A, F, T_0. Вне указанного сектора $\|TR\| \leqslant 1/2$ и $\|(I-TR)^{-1}\| \leqslant (1-\|TR\|)^{-1} \leqslant 2$, а потому

$$\|R(\lambda; A-T)\| \leqslant 2\|R(\lambda; A)\| \leqslant 2M/(1+|\lambda|).$$

Если теперь $\omega \geqslant \omega_0$ в (4б), то $\sigma(B(u,v)) \subset \Omega$ и $\|R(\lambda; B)\| \leqslant 2M/(1+|\lambda-\omega|)$ на Ω_1. Решив простую задачу на экстремум, находим

$$|\lambda| \leqslant \varkappa|\lambda - \omega|, \qquad \|R(\lambda; B)\| \leqslant M_1(1+|\lambda|)$$

с $M_1 = 2\varkappa M$ при $\lambda \in \Omega_1$. Ограниченность в X операторов $A^{\alpha}B^{-\alpha}$, $B^{\alpha}A^{-\alpha}$ вытекает из [2, теорема 1.4.6]. Внимательный анализ соответствующих выкладок [2] показывает, что нормы данных операторов оцениваются через величины k, M, $M_1 = M_1(k, M)$. Это завершает доказательство леммы.

Напомним еще, что $r(\lambda)$ – расстояние от $\lambda \in \mathbb{C}$ до совокупного спектра $\Sigma = \Sigma(B)$, $\mathscr{R} = \mathbb{C} \setminus \Sigma$ и Γ_a – прямая $x = a$ в $\mathbb{C}$. Как только что установлено, $\Sigma \subset \Omega$, $\mathscr{R} \supset \Omega_1$. Проекторы P_a определены в § 2.

Лемма 4.2. *Если $\Gamma_a \subset \mathscr{R}$ при некотором $a > 0$ и*

$$\|R(\lambda; B)\| \leqslant \frac{c}{r(\lambda)} \quad \text{на} \quad \mathscr{R} \tag{20}$$

для $B = B(u,v)$, $u, v \in \mathscr{A}$, то поле проекторов $P_a\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X^{\alpha})$ регулярно, а для $\partial_t P_a(u,v)$ справедливо интегральное представление (9) с голоморфным по $\lambda \in \mathscr{R}$ и удовлетворяющим оценке (10) ядром $E(\lambda; u, v) \in \mathscr{L}(X^{\alpha})$.

Доказательство. Возьмем в $\mathbb{C}$ треугольный положительно ориентированный контур $\Gamma \subset \mathscr{R}$ с вершинами $(0,0)$, $(a,-ka)$ и (a,ka), где k – параметр секториального оператора A. Пусть $(u,v) \in \mathscr{N}$, $T = T(u,v)$, $R = R(\lambda; B) = R(\lambda; u,v)$ для $\lambda \in \mathscr{R}$. Исходим из формулы Рисса

$$P_a(u,v) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda; u,v)\,d\lambda. \tag{21}$$

Поскольку $BR = I + \lambda R$, то $BR \in \mathscr{L}(X)$, $B^\alpha R \in \mathscr{L}(X)$ и $R \in \mathscr{L}(X, X^\alpha)$. С учетом (18) имеем

$$\|R\|_{0,\alpha} = \|A^\alpha R\| = \|A^\alpha B^{-\alpha} B^\alpha R\| \leqslant L\|B^\alpha R\|.$$

Положив $V = R$ в неравенстве (19) и заменив A на секториальный оператор B, выводим оценку

$$\|B^\alpha R\| \leqslant \Theta\bigl(\|R\|^{1-\alpha} + |\lambda|^\alpha \|R\|\bigr),$$

причем по лемме 4.1 $\Theta = \Theta(k, M_1) = \Theta(A)$.

Как видим из (20),

$$\|R\|_{0,\alpha} \leqslant c_1\bigl(\|R\|^{1-\alpha} + |\lambda|^\alpha\|R\|\bigr) \leqslant K(\Lambda)$$

на $\Lambda \times \mathscr{N}$ для произвольного замкнутого множества $\Lambda \subset \mathscr{R}$. Регулярность поля $T\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X^\alpha, X)$ в сочетании со вторым резольвентным тождеством [24, п. 3.2.1] позволяют установить при каждом $\lambda \in \Lambda$ регулярность поля операторов $R\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X, X^\alpha)$ наряду с соотношением $\partial_t R = R\partial_t T R$ и неравенством

$$\|\partial_t R\|_{0,\alpha} \leqslant c_2\bigl(\|R\|^{1-\alpha} + |\lambda|^\alpha\|R\|\bigr)^2 \leqslant K_1(\Lambda).$$

Отметим, что для $\Lambda = (-\infty, 0]$ доводы текущего абзаца верны и без условия (20), если использовать вместо него оценку (17).

Итак, $\|R(\lambda; u,v)\|_{0,\alpha} \leqslant \mathrm{const}$ на $\Gamma \times \mathscr{N}$. Упомянутое резольвентное тождество дает возможность перенести непрерывность поля $R\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X, X^\alpha)$ с $\lambda \in \Gamma$ на поле $P_a\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X, X^\alpha)$. Функция $\partial_t T(\Phi_t u, \Phi_t v)\colon (u,v,t) \to \mathscr{L}(X^\alpha, X)$ ограничена на $\mathscr{N}\times[0,\infty)$ и непрерывна по $t \geqslant 0$, значит, функция $\partial_t R(\lambda; \Phi_t u, \Phi_t v)\colon (\lambda, u, v, t) \to \mathscr{L}(X, X^\alpha)$ ограничена на $\Gamma \times \mathscr{N} \times [0,\infty)$ и непрерывна по $t \geqslant 0$. Тем самым, интеграл (21) можно дифференцировать по параметру t в силу уравнения (1) и поле проекторов P_a регулярно со значениями в $\mathscr{L}(X, X^\alpha)$, а тем более со значениями в $\mathscr{L}(X^\alpha)$. Для производной в нуле $\partial_t P_a(u,v)$ получаем пока выражение типа (9) с голоморфным на $\mathscr{R}$ ядром

$$E(\lambda) = E(\lambda; u,v) = -\partial_t R(\lambda; u,v) \in \mathscr{L}(X^\alpha)$$

и контуром интегрирования Γ. В силу (18) и тождества $RB^\alpha = B^\alpha R$ находим, что

$$\|R\|_\alpha = \|A^\alpha B^{-\alpha} R B^\alpha A^{-\alpha}\| \leqslant L^2\|R\|.$$

Поскольку $\|\partial_t T\|_{\alpha,0} \leqslant c_3$, то

$$\|E(\lambda)\|_\alpha \leqslant c_3\|R\|_{0,\alpha}\|R\|_\alpha \leqslant c_4\bigl(\|R\|^{2-\alpha} + |\lambda|^\alpha\|R\|^2\bigr)$$

на $\mathscr{R}$ и искомая оценка (10) следует из неравенства (20). Согласно (17) при $\lambda \to \infty$ в Ω_1 величина $\|R(\lambda; B)\| = O(|\lambda|^{-1})$, а потому $\|E(\lambda)\|_\alpha = O(|\lambda|^{\alpha-2})$, $\alpha < 1$. Отсюда, учитывая голоморфность $E(\lambda)$, выводим для $\partial_t P_a(u,v)$ окончательное представление (9) с контуром интегрирования Γ_a. Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Пусть* $B = B(u,v)$, $u,v \in \mathscr{A}$; *тогда поля операторов* $B^{-\alpha}\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X, X^\alpha)$ *и* $B^\alpha\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X^\alpha, X)$ *регулярны. Справедлива оценка*

$$\|(\partial_t B^\alpha)B^{-\alpha}\| \leqslant N \tag{22}$$

на $\mathscr{N}$ *с постоянной* $N = N(A, F, T_0)$.

Доказательство. Считаем, не теряя общности, что $\alpha > 0$. Тогда, как известно [2, § 1.4],

$$B^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{0} |\lambda|^{-\alpha} R(\lambda; B)\, d\lambda \tag{23}$$

для $B = B(u,v)$. При $\lambda \leqslant 0$ промежуточные результаты предыдущего доказательства гарантируют регулярность поля $R(\lambda; B)\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X, X^\alpha)$ и равенство $\partial_t R = R\partial_t TR$. Найденные там же оценки на R и $\partial_t R$ запишем с помощью (17) в виде

$$\|R\|_{0,\alpha} \leqslant c_1(1+|\lambda|)^{\alpha-1}, \qquad \|\partial_t R\|_{0,\alpha} \leqslant c_2(1+|\lambda|)^{2\alpha-2}.$$

Подчеркнем, что все это верно без условия (20) на $R(\lambda; B)$. Второе резольвентное тождество позволяет перенести непрерывность поля $R\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X, X^\alpha)$ с $\lambda \leqslant 0$ на поле $B^{-\alpha}\colon \mathscr{N} \to \mathscr{L}(X, X^\alpha)$. Функция $\psi(\lambda) = |\lambda|^{-\alpha}(1+|\lambda|)^{2\alpha-2}$ интегрируема на $(-\infty, 0)$. Применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и рассуждая, как выше, заключаем, что выражение (23) можно дифференцировать по параметру t в силу уравнения (1) и поле $B^{-\alpha}$ регулярно. Пользуясь (18), имеем

$$\|B^\alpha \partial_t R\| = \|B^\alpha A^{-\alpha} A^\alpha \partial_t R\| \leqslant L\|\partial_t R\|_{0,\alpha} \leqslant c_3(1+|\lambda|)^{2\alpha-2}.$$

Из (23) следует теперь неравенство $\|B^\alpha \partial_t B^{-\alpha}\| \leqslant N$ для $u,v \in \mathscr{A}$ с $N = N(A, F, T_0)$.

Осталось заметить, что $B^\alpha B^{-\alpha} = I$ и $\|B^\alpha\|_{\alpha,0} = \|B^\alpha A^{-\alpha}\| \leqslant L$. Регулярность поля B^α получаем из регулярности $B^{-\alpha}$ с помощью очевидных операторных преобразований. При этом $(\partial_t B^\alpha)B^{-\alpha} + B^\alpha \partial_t B^{-\alpha} = 0$, стало быть, $\|(\partial_t B^\alpha)B^{-\alpha}\| = \|B^\alpha \partial_t B^{-\alpha}\| \leqslant N$ и лемма доказана.

Список литературы

1. *Романов А. В.* Конечномерная предельная динамика диссипативных параболических уравнений // Матем. сб. 2000. Т. 191. №3. С. 99–112.
2. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
3. *Hopf E.* A mathematical example displaing features of turbulence // Comm. Pure Appl. Math. 1948. V. 1. № 4. P. 303–322.
4. *Foias C., Prodi G.* Sur le comportement global des solutions non-stationnaires des equations de Navier–Stokes en dimension 2 // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1967. V. 39. P. 1–34.
5. *Ладыженская О. А.* О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье–Стокса // Записки научн. семин. ЛОМИ. 1972. Т. 27. С. 91–115.
6. *Mallet-Paret J.* Negatively invariant sets of compact maps and an extension of a theorem of Cartwright // J. Differ. Equat. 1976. V. 22. № 2. P. 331–348.
7. *Mane R.* On the dimension of the compact invariant sets of certain non-linear maps // Lecture Notes in Math. V. 898. N. Y.: Springer-Verlag, 1981. P. 230–242.

8. *Ладыженская О. А.* О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье–Стокса и других уравнений с частными производными // УМН. 1987. Т. 42. №6. С. 25–60.
9. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
10. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. 2-nd ed. N.Y.: Springer-Verlag, 1997.
11. *Чуешов И. Д.* Теория функционалов, однозначно определяющих асимптотическую динамику бесконечномерных диссипативных систем // УМН. 1998. Т. 53. №4. С. 77–125.
12. *Mane R.* Reduction semilinear parabolic equations to finite dimensional C^1 flows // Lecture Notes in Math. V. 597. N. Y.: Springer-Verlag, 1977. P. 361–378.
13. *Романов А. В.* Точные оценки размерности инерциальных многообразий для нелинейных параболических уравнений // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. №4. С. 36–54.
14. *Романов А. В.* Три контрпримера в теории инерциальных многообразий // Матем. заметки. 2000. Т. 68. №3. С. 439–447.
15. *Камаев Д. А.* Семейства устойчивых многообразий одномерных параболических уравнений // Матем. заметки. 1996. Т. 60. №1. С. 11–23.
16. *Камаев Д. А.* Семейства устойчивых многообразий инвариантных множеств систем параболических уравнений // УМН. 1992. Т. 47. №5. С. 179–180.
17. *Brunovsky P., Terescak I.* Regularity of invariant manifolds // J. Dyn. Differ. Equat. 1991. V. 3. № 3. P. 313–337.
18. *Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н.* Введение в топологию. 2-е изд. (доп.). М.: Наука, 1995.
19. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. 3. Спектральные операторы. М.: Мир, 1974.
20. *Романов А. В.* Конечномерность динамики на аттракторе для полулинейных параболических уравнений // Международная конференция, посвященная 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина. Тезисы докладов. Оптимальное управление и добавления. М.: Изд-во МГУ, 1998. С. 324–325.
21. *Yorke J. A.* Periods of periodic solutions and the Lipschitz constant // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 22. № 2. P. 509–512.
22. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986.
23. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
24. Функциональный анализ. Справочная математическая библиотека / Ред. С. Г. Крейн. М.: Наука, 1973.
25. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
26. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
27. *Amann H.* Global existence for semilinear parabolic systems // J. Reine Angew. Math. 1985. V. 360. P. 47–83.
28. *Hoshino H., Yamada Y.* Solvability and smoothing effect for semilinear parabolic equations // Funkc. Ekv. 1991. V. 34. № 3. P. 475–494.
29. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.

Поступило в редакцию
20.VII.2000