УДК 330.101.52(076.1)
ББК 65.012.1
Б92

Подготовлено при содействии НФПК —
Национального фонда подготовки кадров в рамках
программы «Совершенствование преподавания
социально-экономических дисциплин в вузах»

Рецензент:
декан факультета экономики Европейского университета в Санкт-Петербурге
доктор физико-математических наук *С.Л. Печерский*

ISBN 978-5-7598-0336-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

НАУЧИТЬСЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ

Мы представляем Вам, уважаемый читатель, задачник по микроэкономике продвинутого уровня. Эта книга уникальна не только для российской системы экономического образования, но — беремся утверждать — и для мировой. В ней Вы найдете очень компактное изложение основ современного микроэкономического анализа, практически всех его разделов. Предполагается, что данная теоретическая база в целом достаточна для решения включенных в сборник задач. И — что, может быть, самое главное — книга содержит специальный раздел, в котором приведены подробные решения многих задач. Помимо этого, данное учебное пособие снабжено подборками вопросов для текущего контроля знаний по разделам курса и вариантами экзаменационных работ.

Таким образом, мы представляем Вам книгу, которая одновременно является и учебником, и задачником, и решебником, и методическим пособием. А предназначена эта книга прежде всего студентам, аспирантам и преподавателям так называемой продвинутой микроэкономики. Вместе с тем она может успешно использоваться и при изучении микроэкономики в бакалавриате — теми, кто стремится разобраться, как устроена микроэкономика, и научиться решать стандартные и нестандартные задачи, возникающие в реальных экономических исследованиях.

Дело в том, что изучение экономики, и микроэкономики в частности, отнюдь не сводится к штудированию учебников и монографий. Главная высота, которую надо взять, — это НАУЧИТЬСЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ. Искусству (или, если хотите, умению) решать задачи, к сожалению, редко уделяют достаточное внимание в процессе экономичского образования. А ведь чтобы задачи решать, надо *научиться это делать*! Один из путей — попытаться самостоятельно решить ту или иную задачу, а потом — как в случае удачи, так и неудачи — посмотреть, *как ее надо решать*: не ответ лишь, но все подробное решение. Предлагаемое учебное пособие предназначено именно для такого вида обучения: «с учителем» либо «без учителя» оно в любом случае будет очень полезно.

Эта книга — результат творчества большого количества людей. Прежде всего ее авторов, которыми создано, решено и прокомментировано большинство задач. Кроме того в сборнике есть задачи, составленные другими, в основном западными, специалистами (их имена Вы найдете в соответствующих ссылках). Наряду с ними соавторами пособия являются и многочисленные студенты Государственного университета — Высшей школы экономики, Российской экономической школы и ряда других высших учебных заведений, которые на себе испытали эти задачи, и чей опыт, мнение и успехи учтены при создании пособия. Всем им, мы надеемся, будут благодарны те, кому доведется учиться по этой книге.

Академик РАН В.Л.Макаров, профессор М.И. Левин

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Данная книга — один из первых отечественных сборников задач по курсу микроэкономики продвинутого уровня. В него включены задачи по основным разделам современного микроэкономического анализа: теории потребителя, теории производителя, выбору в условиях неопределенности, общему экономическому равновесию, фиаско рынка в случаях общественных благ, экстерналий и асимметрии информации. Помимо подборок задач в сборнике приводятся подробные решения целого ряда задач по каждой теме, а также примеры контрольных работ для текущей проверки знаний и варианты экзаменационных работ. Особенностью данного сборника задач является то, что каждый раздел начинается с обзора основных концепций по рассматриваемой в нем проблематике. Это позволяет избежать разночтений, которые порой возникают из-за различий в терминологии. Более полное изложение теоретического материала можно найти в отдельно изданном курсе лекций: Фридман А.А. Лекции по микроэкономике: продвинутый уровень: учеб. пособие. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2007.

Задачник предназначен для студентов магистратуры, аспирантов и преподавателей экономических факультетов. Ряд задач может также использоваться при изучении продвинутого курса микроэкономики в бакалавриате.

Теперь чуть подробнее о том, как устроено учебное пособие. Задачи в нем распределены по разделам, а внутри этих разделов — по более узким темам, что весьма облегчает работу со сборником как студентам, так и преподавателям. Представленные задачи могут использоваться для домашних заданий, для разбора на семинарах и для самостоятельной работы. В пособии присутствуют задачи, объединяющие несколько тем, они могут использоваться для рубежного контроля знаний (например, для письменного экзамена). Следует также отметить, что сложность задач варьируется от стандартных упражнений, нацеленных на овладение базовыми навыками, до задач, которые представляют собой миниисследования: когда нужно самостоятельно построить модель, проанализировать ее и проинтерпретировать полученные результаты.

В пособие включены как оригинальные задачи авторов, так и задачи, заимствованные из разных источников. Для тех из них, которые уже стали «фольклором», мы не приводим ссылки на источник. Однако для многих текстуально совпадающих задач приведены соответствующие ссылки.

К задачам, помеченным звездочкой, даются решения. Как правило, это стандартные задачи, в которых отрабатываются навыки анализа базовых моделей курса. Авторы намеренно не приводят решения наиболее сложных задач, поскольку их набор пополняется не так быстро и хотелось бы оставить некоторый простор для творчества студентов.

При составлении задач основной акцент делался на содержательных моментах, а потому авторы не ставили своей целью получить в решении утверждения в наиболее общей форме. Что касается технических предпосылок, то обычно (если не оговорено противное): функции считаются дифференцируемыми; в оптимизационных задачах, где не специфицированы конкретные функции, предполагается выполнение условий регулярности.

В конце книги приводится список основной и дополнительной рекомендуемой литературы с разбивкой по разделам.

Данный сборник сформировался как результат разработки и подборки задач для домашних заданий, семинарских занятий и проверочных работ в процессе работы авторов над продвинутым курсом микроэкономики в Государственном университете — Высшей школе экономики. Авторы благодарны всем студентам, которые, решая предложенные задачи, вносили поправки и уточнения в их формулировки. Авторы также признательны своей коллеге Евгении Александровне Левиной за участие в составлении и решении ряда задач, включенных в данное пособие.

Авторы благодарны Национальному фонду подготовки кадров за финансовую поддержку данного проекта. Отдельная благодарность — анонимным рецензентам Фонда за замечания по первоначальному варианту задачника.

1
раздел

ВЫБОР ПОТРЕБИТЕЛЯ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УТВЕРЖДЕНИЯ

Предпочтения и полезность

Пусть потребитель сталкивается с разнообразными потребительскими наборами, представленными *потребительским* множеством X. Если в экономике имеется N товаров, то $X = R_+^N$. Будем считать, что потребитель имеет определенные предпочтения на множестве потребительских наборов X.

Если для потребителя набор x не хуже, чем набор y, то будем говорить, что данный потребитель *нестрого предпочитает* набор x набору y и записывать $x \succsim y$. Будем говорить, что набор x *строго предпочитается* набору y и записывать это как $x \succ y$, если набор x нестрого предпочтительнее набора y $(x \succsim y)$, а обратное $(y \succsim x)$ неверно. Будем говорить, что наборы x и y *безразличны* для потребителя и записывать $x \sim y$, если набор x нестрого предпочтительнее набора y $(x \succsim y)$ и наоборот $(y \succsim x)$.

Аксиома полноты: для любых двух наборов x и y из потребительского множества X $(x, y \in X)$ должно выполняться следующее: либо $x \succsim y$, либо $y \succsim x$.

Аксиома транзитивности: для любых трех наборов x, y и z из потребительского множества X $(x, y, z \in X)$, если $x \succsim y$ и $y \succsim z$, то $x \succsim z$.

Отношение предпочтения, удовлетворяющее аксиомам полноты и транзитивности, в дальнейшем будем называть *рациональным*.

Функцией полезности, представляющей предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, называют функцию $u: X \to R$ такую, что для любых наборов x и y из X соотношение $x \succsim y$ имеет место тогда и только тогда, когда $u(x) \geq u(y)$.

Предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, являются *строго монотонными*, если для любых двух наборов x и y из X таких, что $y \geq x$ и $y \neq x$, имеем $y \succ x$.

Предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, являются *слабо монотонными*, если для любых двух наборов x и y из X таких, что $y \geq x$, имеем $y \succsim x$.

Предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, являются *локально ненасыщаемыми*, если для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in X$ такой, что $|x - y| \leq \varepsilon$ и $y \succ x$, где $|x - y| = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$.

Предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, являются *выпуклыми*, если для любых $x, y, z \in X$ таких, что $y \succsim x$ и $z \succsim x$, имеем $\alpha y + (1 - \alpha) z \succsim x$ при любом $0 \leq \alpha \leq 1$.

Предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, являются *строго выпуклыми*, если для любых x, y, $z \in X$ таких, что $y \succsim x$, $z \succsim x$ и $y \neq z$, имеем $\alpha y + (1 - \alpha) z \succ x$ при любом $0 < \alpha < 1$.

Отношение предпочтения $\succsim$, определенное на множестве X, *непрерывно*, если для любого элемента $x \in X$ множество наборов не хуже, чем x $\{y \in X : y \succsim x\}$, и множество наборов не лучше, чем x $\{y \in X : y \precsim x\}$, являются замкнутыми множествами.

• **Необходимое условие существования функции полезности.**

Если предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, представимы с помощью функции полезности $u(\cdot)$, то эти предпочтения являются рациональными.

• Существование функции полезности.

Пусть предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, рациональны и удовлетворяют аксиоме непрерывности. Тогда существует непрерывная функция полезности $u(x)$, представляющая эти предпочтения.

Задача максимизации полезности

Пусть предпочтения потребителей представимы с помощью непрерывной функции полезности $u(x)$. Обозначим вектор цен через $p = (p_1, p_2, ..., p_N)$. Бюджетное множество потребителя можно записать как $B = \{x \in X : px \leq I\}$, где I — доход потребителя.

Тогда *задача потребителя*, которая заключается в выборе наиболее предпочтительного набора при данных ценах и уровне дохода, имеет следующий вид:

$$\max_{x \geq 0} u(x)$$

$$px \leq I.$$

Решая задачу максимизации полезности на бюджетном множестве, получаем, что каждой паре (p, I) соответствует множество наилучших при данных ценах и доходе потребительских наборов $x(p, I)$, которое будем называть *вальрасовским* или *маршалловским спросом* либо просто спросом. В общем случае $x(p, I)$ не является однозначным соответствием. Если же каждой паре (p, I) соответствует единственный наилучший потребительский набор, то $x(p, I)$ называют *функцией маршалловского спроса*. Из задачи потребителя, помимо характеристики спроса, получаем зависимость полезности от экзогенных параметров, таких, как цены и доход, если подставить найденный спрос в целевую функцию. Полученную функцию называют *косвенной функцией полезности*: $v(p, I) = u(x^*)$ где $x^* \in x(p, I)$.

• Свойства маршалловского спроса.

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция, представляющая предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$, $p >> 0$, тогда $x(p, I)$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) однородность нулевой степени относительно цен и дохода: $\left(\lambda p, \lambda I\right) = x(p,\ I)$ для любого $\lambda > 0$;

2) если предпочтения локально ненасыщаемые, то маршалловский спрос удовлетворяет бюджетному ограничению в форме равенства: для любого $x \in x(p, I)$ имеем $px = I$;

3) если предпочтения выпуклы, то $x(p, I)$ — выпуклое множество;

4) если предпочтения строго выпуклы (следовательно, $u(\cdot)$ строго квазивогнутая), то для каждой пары (p, I) множество $x(p, I)$ состоит из одного элемента, т.е. $x(p, I)$ является функцией спроса и, кроме того, $x(p, I)$ — непрерывная функция.

• **Свойства косвенной функцией полезности.**

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция, представляющая предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$, $p >> 0$. Тогда $v(p, I)$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) однородность нулевой степени относительно (p, I) : $v(\lambda p, \lambda I) = v(p, I)$ для любого $\lambda > 0$;

2) не убывает по доходу; строго возрастает по доходу, если предпочтения локально ненасыщаемы;

3) не возрастает по ценам;

4) квазивыпукла по p и I, т.е. множество $\left\{(p, I) : v(p, I) \le \bar{v}\right\}$ выпукло при любом $\bar{v}$;

5) непрерывна по p и I;

6) если предпочтения локально ненасыщаемы и строго выпуклы ($u(\cdot)$ строго квазивогнута) и функция $v(p, I)$ дифференцируема при $(\tilde{p}, \tilde{I}) >> 0$, то выполняется *тождество Роя* $x_i(\tilde{p}, \tilde{I}) = -\dfrac{\dfrac{\partial v(\tilde{p}, \tilde{I})}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial v(\tilde{p}, \tilde{I})}{\partial I}}$.

Задача минимизации расходов

Пусть $V_{\bar{u}} = \{x \in X : u(x) \ge \bar{u}\}$ — множество таких наборов из потребительского множества X, полезность которых не меньше заданного уровня $\bar{u}$. Тогда *задача минимизации расходов* примет вид

$$\min_{x \in V_{\bar{u}}} px.$$

Решения этой задачи (при различных значениях цен и полезности) обозначим через $h(p, u)$, и будем называть соответствующее отображение *компенсированным спросом* или *спросом по Хиксу*. Подставив решение задачи в целевую функцию, получаем зависимость уровня минимальных расходов от цен и уровня полезности. Полученную функцию, отражающую эту зависимость, называют *функцией расходов*. В дальнейшем будем обозначать эту функцию через $e(p, \bar{u}) : e(p, \bar{u}) = px^*$, где $x^* \in h(p, \bar{u})$.

• **Свойства компенсированного спроса.**

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция, представляющая предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$, $p >> 0$, $\bar{u} \geq u(0)$. Тогда $h(p, \bar{u})$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) однородность нулевой степени относительно цен: $h(\lambda p, \bar{u}) = h(p, \bar{u})$ для любого $\lambda > 0$;

2) ограничение задачи минимизации расходов выполняется как равенство: для любого $x^* \in h(p, \bar{u})$ имеем $u(x^*) = \bar{u}$;

3) если предпочтения выпуклы, то множество $h(p, \bar{u})$ выпукло;

4) если предпочтения строго выпуклы (следовательно, $u(\cdot)$ строго квазивогнута), то множество $h(p, \bar{u})$ состоит из одного элемента, т.е. отображение является функцией компенсированного спроса;

5) имеет место закон компенсированного спроса: для любых $x' \in h(p', \bar{u})$ и $x'' \in h(p'', \bar{u})$ имеем $p'(x' - x'') - p''(x' - x'') = (p' - p'')(x' - x'') \leq 0$.

• **Свойства функции расходов.**

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция, представляющая предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$, $p >> 0$, и $\bar{u} \geq u(0)$. Тогда $e(p, \bar{u})$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) однородность первой степени относительно цен: $e(\lambda p, \bar{u}) = \lambda e(p, \bar{u})$ для всех $\lambda > 0$;

2) возрастает по уровню полезности;

3) не убывает по ценам;

4) вогнута по ценам;

5) непрерывна;

6) если предпочтения строго выпуклы ($u(\cdot)$ строго квазивогнута) и функция $e(p,\ \overline{u})$ дифференцируема при $\overline{p} \gg 0,$ то во внутренних точках $(h \gg 0)$ имеет место *лемма Шепарда* $h_i(\overline{p},\ \overline{u}) = \dfrac{\partial e(\overline{p},\ \overline{u})}{\partial p_i}.$

Двойственность в теории потребителя

• **Теорема двойственности.**

1. Пусть $u(\cdot)$ — функция полезности, представляющая локально ненасыщаемые предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_{+}^{N}$. Если x^* — решение задачи максимизации полезности при ценах $p \gg 0$ и доходе $I > 0,$ то x^* является решением задачи минимизации расходов при $\overline{u} = u(x^*).$ Более того, $e(p,\ \overline{u}) = I.$

2. Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_{+}^{N}$. Если x^* — решение задачи минимизации расходов при $p \gg 0$ и $\overline{u} \geq u(0),$ то x^* — решение задачи максимизации полезности при ценах $p \gg 0$ и доходе $I = e(p,\ \overline{u}).$ Более того, $v(p,\ I) = \overline{u}.$

Соотношения двойственности для локально ненасыщаемых непрерывных предпочтений:

$$x(p,\ I) = h\big(p,\ v(p,\ I)\big);$$

$$h(p,\ \overline{u}) = x\big(p,\ e(p,\ \overline{u})\big);$$

$$v\big(p,\ e(p,\ \overline{u})\big) = \overline{u};$$

$$e\big(p,\ v(p,\ I)\big) = I.$$

• **Уравнение Слуцкого.**

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая строго выпуклые локально ненасыщаемые предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$. Если $x(p, I)$ и $h(p, u)$ — дифференцируемые функции маршалловского и компенсированного спроса, то для всех $\bar{p} >> 0$ и $\bar{I} > 0$ имеет место уравнение Слуцкого

$$\frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_j} - x_j(\bar{p}, \bar{I})\frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial I}.$$

• **Уравнение Слуцкого для случая натурального дохода.**

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая строго выпуклые локально ненасыщаемые предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$. Если $x(p, p\omega)$ — функция спроса при наличии натурального дохода, $x(p, I)$ — функция маршалловского спроса при фиксированном доходе и $h(p, u)$ — функция компенсированного спроса, то при условии дифференцируемости этих функций для всех $\bar{p} >> 0$ имеет место обобщенное уравнение Слуцкого

$$\frac{dx_i(\bar{p}, \bar{p}\omega)}{dp_j} = \frac{\partial h_i(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_j} + \left(\omega_j - x_j(\bar{p}, \bar{p}\omega)\right)\frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial I}.$$

Элементами s_{ij} *матрицы Слуцкого* или *матрицы коэффициентов замещения* (обозначим ее через S) являются эффекты замещения для спроса на i-й товар при изменении цены j-го блага, т.е. $s_{ij} = \dfrac{\partial h_i(p, u)}{\partial p_j}$. С учетом уравнения Слуцкого каждый элемент матрицы может быть выражен через маршалловский спрос:

$$s_{ij} = \frac{\partial h_i(p, u)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(p, I)}{\partial p_j} + x_j(p,I)\frac{\partial x_i(p, I)}{\partial I}.$$

• **Свойства матрицы замещения Слуцкого.**

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая строго выпуклые локально ненасыщаемые предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$. Пусть функция расходов $e(p, u)$ дважды непрерывно дифференцируемая, тогда матрица замещения Слуцкого $S(p, I)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $S(p,\ I)$ — симметричная матрица;
2) $S(p,\ I)$ — отрицательно полуопределенная;
3) $S(p,\ I)p=0$.

Задача восстановления предпочтений

• **Связь исходных и восстановленных предпочтений.**

1. Пусть $e(p,\ \bar{u})$ — функция расходов для рациональных, непрерывных предпочтений, определенных на множестве $X=R_+^N$ и представленных множеством $V_{\bar{u}}$. Если $\tilde{V}_{\bar{u}}$ — множество, восстановленное на основе этой функции расходов: $\tilde{V}_{\bar{u}}=\{x\in R_+^N : px\ge e(p,\ \bar{u})\ \forall p>>0\}$, то для всех $p>>0$

$$e(p,\ \bar{u})=\min_{x\in\tilde{V}_{\bar{u}}} px.$$

2. Если, кроме того, предпочтения потребителя выпуклы и слабо монотонны, то $\tilde{V}_{\bar{u}}=V_{\bar{u}}$.

• **Восстановление предпочтений по функции расходов.**

Пусть $e(p,\ \bar{u})$ — непрерывная функция, возрастающая по u, однородная первой степени, вогнутая и дифференцируемая по p, тогда $e(p,\ u)$ является функцией расходов для предпочтений, описываемых множествами $\tilde{V}_u$, т.е.

$$\tilde{V}_u=\{x\in R_+^N : px\ge e(p,\ u)\ \forall p>>0\}.$$

Измерение изменений в благосостоянии потребителя

Рассмотрим экономическую политику, в результате которой изменился вектор цен от p^0 до p^1, а доход потребителя остался прежним. Соответствующее изменение благосостояния потребителя в неких постоянных ценах $(\bar{p})$, можно оценить как разницу расходов: $e\left(\bar{p},\ v(p^1,\ I)\right)-e\left(\bar{p},\ v(p^0,\ I)\right)$.

Выбирая в качестве сопоставимых цен $\overline{p}$ исходные цены p^0, получим изменение в доходе, называемое *эквивалентной вариацией* (сокращенно *EV* — equivalent variation):

$$EV(p^0,\, p^1,\, I) = e\big(p^0,\, v(p^1,\, I)\big) - e\big(p^0,\, v(p^0,\, I)\big) = e\big(p^0,\, v(p^1,\, I)\big) - I.$$

Используя в качестве сопоставимых цен новые цены p^1, получим изменение в доходе, называемое *компенсирующей вариацией* (сокращенно *CV* — compensating variation):

$$CV(p^0,\, p^1,\, I) = e\big(p^1,\, v(p^1,\, I)\big) - e\big(p^1,\, v(p^0,\, I)\big) = I - e\big(p^1,\, v(p^0,\, I)\big).$$

Воспользовавшись леммой Шепарда, можно изобразить *CV* и *EV* как площади под соответствующими кривыми компенсированного спроса:

$$\int_{p_i^1}^{p_i^0} h_i(p,\, u^0)dp_i = \int_{p_i^1}^{p_i^0} \frac{\partial e(p,\, u^0)}{\partial p_i} dp_i = e(p^0,\, u^0) - e(p^1,\, u^0) = CV;$$

$$\int_{p_i^1}^{p_i^0} h_i(p,\, u^1)dp_i = \int_{p_i^1}^{p_i^0} \frac{\partial e(p,\, u^1)}{\partial p_i} dp_i = e(p^0,\, u^1) - e(p^1,\, u^1) = EV.$$

• Соотношение между эквивалентной и коменсирующей вариацией.

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная строго квазивогнутая функция полезности, представляющая локально ненасыщаемые предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$. Пусть цены всех товаров, кроме i-го, фиксированы $(p_{-i} = \overline{p}_{-i})$, а цена i-го товара изменяется от p_i^0 до $p_i^1 < p_i^0$, причем $x_i(p_i^0,\, \overline{p}_{-i}) > 0$ и $x_i(p_i^1,\, \overline{p}_{-i}) > 0$. Тогда:

1) $CV(p^0,\, p^1,\, I) < EV(p^0,\, p^1,\, I)$, если товар i-нормальный при $p_i \in [p_i^1,\, p_i^0]$, $\overline{p}_{-i}$ и доходе I;

2) $CV(p^0,\, p^1,\, I) > EV(p^0,\, p^1,\, I)$, если товар i-инфериорный при $p_i \in [p_i^1,\, p_i^0]$, $\overline{p}_{-i}$ и доходе I;

3) $CV(p^0, p^1, I) = EV(p^0, p^1, I)$, если товар i-нейтральный к доходу (т.е. спрос на товар не зависит от дохода) при $p_i \in [p_i^1, p_i^0]$, $\overline{p}_{-i}$ и доходе I.

Агрегирование в теории потребителя

Определим *совокупный спрос* на каждый товар как сумму индивидуальных величин спроса всех потребителей: $x(p, I^1, I^2, \ldots, I^M) = \sum_{k=1}^{M} x^k(p, I^k)$.

Совокупный спрос является функцией от суммарного дохода потребителей $x\left(p, \sum_{k=1}^{M} I^k\right) = \sum_{k=1}^{M} x^k(p, I^k)$, если кривые «доход — потребление» для всех потребителей параллельны.

• **Условие параллельности кривых «доход — потребление».** Кривые «доход — потребление» для разных потребителей параллельны при любых ценах и доходах тогда и только тогда, когда предпочтения потребителей порождают косвенную функцию полезности формы Гормана с одинаковыми коэффициентами при доходах: $v^k(p, I^k) = \alpha^k(p) + \beta(p) I^k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, M$.

Функция совокупного спроса $x(p, I)$ удовлетворяет *слабой аксиоме выявленных предпочтений*, если $px(p', I') \le I$ и $x(p, I) \ne x(p', I')$ означают, что $p'x(p, I) > I'$ для любых (p, I) и (p', I').

Функция спроса $x(p, I)$ удовлетворяет *закону спроса*, если для любых цен p, p' и дохода I имеет место $(p' - p)\big(x(p', I) - x(p, I)\big) \le 0$, причем неравенство будет строгим, если $x(p, I) \ne x(p', I)$.

• **Условие наследования слабой аксиомы при агрегировании.** Если функции агрегированного спроса удовлетворяют закону спроса, то агрегированный спрос удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

ЗАДАЧИ

1.1

Предпочтения и полезность

1.1.1. Покажите, что, если нестрогое отношение предпочтения $\succsim$ рационально, то:

(а) строгое отношение предпочтения $(\succ)$ будет асимметрично, отрицательно транзитивно, транзитивно и ациклично;

(б) отношение безразличия $(\sim)$ будет симметрично и транзитивно.

1.1.2. Покажите, что если отношение строгого предпочтения асимметрично и отрицательно транзитивно, то оно построено на основе рационального отношения нестрогого предпочтения.

1.1.3. Пусть отношение предпочтения $\succsim$, определенное на X, рационально. Покажите, что, выполняются следующие варианты (обобщенной) транзитивности:

(а) если $x, y, z \in X$ и $x \succsim y$ (или $x \sim y$) и $y \succsim z$, то $x \succsim z$;

(б)*[1] если $x, y, z \in X$ и имеют место следующие соотношения $x \succ y$ и $y \succsim z$ (или $y \sim z$), то $x \succ z$;

(в) если $x, y, z \in X$ и $x \succsim y \sim z$, то $x \succsim z$;

(г) если $x, y, z \in X$ и $x \sim y \succsim z$, то $x \succsim z$.

1.1.4. Покажите, что отношение предпочтения $\succsim$, заданное на множестве X, рационально тогда и только тогда, когда каждое конечное подмножество этого множества содержит наилучший элемент.

1.1.5. Покажите, что отношение предпочтения $\succsim$, заданное на конечном множестве X, рационально тогда и только тогда, когда существует функция полезности, представляющая эти предпочтения.

---

[1] К задачам (пунктам), отмеченным звездочкой, на с. 227—380 приводятся подробные решения.

1.1.6. Покажите, что отношение предпочтения $\succsim$, заданное на не более чем счетном множестве X, рационально тогда и только тогда, когда существует функция полезности, представляющая эти предпочтения.

1.1.7. Предположим, что $u(x)$ — функция полезности, представляющая предпочтения $\succsim$. Верны ли следующие утверждения?

(а) Если функция полезности непрерывна, то предпочтения непрерывны.

(б) Если предпочтения непрерывны, то функция полезности непрерывна.

(в) Если функция полезности монотонна (строго монотонна), то предпочтения монотонны (строго монотонны).

(г) Если предпочтения монотонны (строго монотонны), то функция полезности монотонна (строго монотонна).

(д)* Если функция полезности вогнута (строго вогнута), то предпочтения выпуклы (строго выпуклы).

(е)* Если предпочтения выпуклы (строго выпуклы), то функция полезности вогнута (строго вогнута).

1.1.8. Какие из нижеследующих функций представляют те же предпочтения, что и функция $u(x)$, в предположении, что функция $u(x)$ принимает значения разных знаков?

(а) $u(x)+\left(u(x)\right)^3$.

(б) $u(x)+10$.

(в) $u(x)-10$.

(г) $\left(u(x)\right)^{1/3}$.

(д) $\exp\left(u(x)\right)$.

(е) $-\exp\left(-u(x)\right)$.

1.1.9. При каких значениях параметра α нижеследующие функции представляют те же предпочтения, что и функция $u(x)$, если известно, что функция $u(x)$ принимает только положительные значения?

(а) $\left(u(x)\right)^{\alpha}$.

(б) $\dfrac{\alpha}{u(x)}$.

1.1.10. Какое свойство функции полезности гарантирует локальную ненасыщаемость представляемых ею предпочтений?

1.1.11*. Изобразите пример выпуклых локально ненасыщаемых предпочтений, которые:

(а) являются слабо монотонными, но не являются строго монотонными;

(б) не являются слабо монотонными.

1.1.12. Приведите примеры выпуклых предпочтений, не являющихся локально ненасыщаемыми, когда у потребителя в рассматриваемом множестве X альтернатив (потребительских наборов) существует (не существует) наилучшей альтернативы.

1.1.13. Покажите, что строго выпуклые предпочтения потребителя локально ненасыщаемы тогда и только тогда, когда у потребителя в рассматриваемом множестве X альтернатив (потребительских наборов) нет наиболее предпочитаемой альтернативы. На основе этого утверждения покажите, что строго выпуклые слабо монотонные предпочтения локально ненасыщаемы.

1.1.14. Относительно каждой из нижеприведенных функций сделайте вывод, являются ли представляемые ею предпочтения:

выпуклыми (строго выпуклыми);

локально ненасыщаемыми;

монотонными (строго монотонными);

непрерывными предпочтениями?

(а) $u(x_1, \ldots, x_N) = (x_1)^2 + \ldots + (x_N)^2$.

(б) $u(x_1, \ldots, x_N) = \max(x_1, \ldots, x_N)$.

(в) $u(x_1, \ldots, x_N) = \min(x_1, \ldots, x_N)$.

(г) $u(x_1, \ldots, x_N) = (x_1)^{1/2} + \ldots + (x_N)^{1/2}$.

(д) $u(x_1, \ldots, x_N) = x_1 + \ldots + x_n + \dfrac{1}{x_{n+1}} + \ldots + \dfrac{1}{x_N}.$

(е) $u(x_1, x_2) = \min(2x_1 - x_2, 2x_2 - x_1).$

(ж) $$u(x_1, \ldots, x_N) = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i}, \text{ если } \prod\limits_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i} < 100 \\ 100, \qquad \text{если } \prod\limits_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i} = 100, \ \alpha_i > 0. \\ \prod\limits_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i}, \text{ если } \prod\limits_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i} > 100 \end{cases}$$

1.1.15. Предположим, что предпочтения $\succsim$, заданные на множестве всех векторов (потребительских наборов) с положительными координатами, представимы функцией Кобба — Дугласа $u(x_1, \ldots, x_N) = \gamma \prod\limits_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i > 0$, $\gamma > 0$.

(а) Являются ли данные предпочтения строго выпуклыми и монотонными?

(б) Как изменится ваш ответ на пункт **(а)**, если в качестве допустимого множества рассматривать все потребительские наборы с неотрицательными коэффициентами?

1.1.16. Рассмотрите отношение предпочтения $\succsim$, для которого существует представляющая его функция полезности.

(а) Покажите, что отношение предпочтения $\succsim$ гомотетично, если функция полезности положительно однородна.

(б) Покажите, что верно и обратное утверждение: если отношение предпочтения $\succsim$ гомотетично, то существует положительно однородная (в частности, положительно однородная первой степени) функция полезности, представляющая эти предпочтения. (Заметим, что, как показывает пример лексикографических предпочтений, утверждение перестает быть справедливым, если отказаться от предположения о существовании представляющей предпочтения функции полезности.)

1.1.17*. Иван Иванович больше всего любит пиво: чем больше пива он потребляет, тем выше уровень его удовлетворенности. Он также любит чипсы: при каждом данном уровне потребления пива, чем больше чипсов потребляет Иван Иванович, тем выше уровень его полезности. Однако в первую очередь его заботит потребление пива: чем больше пива, тем лучше (независимо от того, сколько чипсов он при этом потребляет).

(а) Удовлетворяют ли предпочтения Ивана Ивановича аксиомам:
полноты;
транзитивности;
локальной ненасыщаемости;
строгой монотонности;
строгой выпуклости;
непрерывности?

(б) Почему невозможно представить предпочтения Ивана Ивановича с помощью функции полезности?

1.2

Задача максимизации полезности и задача минимизации расходов

1.2.1. Рассмотрите потребителя, который выбирает наилучший потребительский набор в пространстве двух товаров. Найдите функции маршалловского и компенсированного спроса для следующих случаев.

(а)* Товары являются абсолютными (совершенными) заменителями: $u(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$, $\alpha, \beta > 0$.

(б)* Товары являются абсолютно взаимодополняющими: $u(x) = \min\left(\dfrac{x_i}{\alpha_i}\right)_{i=1}^{n}$, $\alpha_i > 0$.

(в) Предпочтения квазилинейны и представимы функцией полезности $u(x_1, x_2) = (x_1)^{\alpha} + x_2$, где $\alpha < 1$.

1.2.2. Найдите функции спроса, косвенную функцию полезности и функцию расходов потребителя, предпочтения которого представимы функцией полезности Кобба — Дугласа: $u(x_1, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i > 0$. Покажите, что расходы такого потребителя на каждый товар являются фиксированной долей его дохода (т.е. эта доля не зависит от цен и дохода).

1.2.3. Найдите функции спроса, косвенную функцию полезности и функцию расходов потребителя, предпочтения которого представимы функцией полезности вида:

(а) $u(x_1, ..., x_N) = \max(\alpha_1 x_1, ..., \alpha_N x_N)$, $\alpha > 0$;

(б) $u(x_1, ..., x_N) = \min(\alpha_1 x_1, ..., \alpha_N x_N)$, $\alpha > 0$;

(в) $u(x_1, ..., x_N) = \min(x_1, ..., x_n) + x_{n+1} + ... + x_N$;

(г) $u(x_1, ..., x_N) = (x_1)^{\alpha} + ... + (x_N)^{\alpha}$, $\alpha_i > 0$;

(д) $u(x_1, ..., x_N) = (x_1 + ... + x_N)^{\alpha}$, $\alpha_i > 0$;

(е) $u(x_1, ..., x_N, x_{N+1}) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i} + x_{N+1}$, $\alpha_i > 0$;

(ж) $u(x_1, ..., x_N) = x_1 + ... + x_n - \frac{1}{x_{n+1}} - ... - \frac{1}{x_N}$;

(з) $u(x_1, ..., x_N) = \max(\alpha_1 x_1, ..., \alpha_N x_N) + \min(x_1, ..., x_N)$.

1.2.4*. Найдите функции спроса, косвенную функцию полезности и функцию расходов потребителя, предпочтения которого представимы функцией полезности с постоянной эластичностью замещения.

1.2.5. Найдите функции спроса, косвенную функцию полезности и функцию затрат потребителя, предпочтения которого представимы функцией полезности Стоуна: $u(x_1, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} (x_i - \gamma_i)^{\alpha_i}$, $\gamma_i \geq 0$, $\alpha_i > 0$.

1.2.6*. Покажите, что, если предпочтения потребителя локально ненасыщаемы, то бюджетное ограничение выполняется как равенство.

1.2.7. Покажите, что если предпочтения потребителя локально ненасыщаемы, и соотношение $px \geq \omega$ выполняется для всех x, таких, что $x \succ x^*$, то $px^* \geq \omega$.

Будет ли в этом случае выполняться соотношение $px \geq px^*$?

1.2.8*. Рассмотрите потребителя, функция полезности которого зависит от потребления двух товаров: x_1 и x_2. Изобразите линии уровня косвенной функции полезности в пространстве цен.

1.2.9*. Пусть предпочтения потребителя локально ненасыщаемы и представимы непрерывной функцией полезности. Относительно **каждого** из приведенных на рис. 1.1 графиков (на графиках стрелкой указано направление возрастания расходов) сделайте заключение, может ли он представлять линии уровня функции расходов для данного потребителя в пространстве цен?

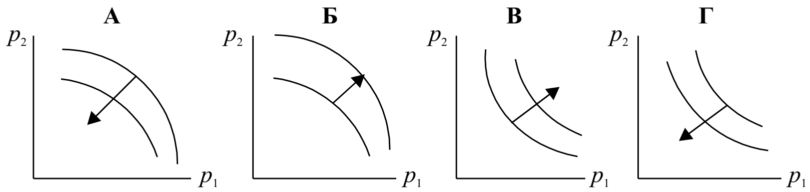

Рис. 1.1

1.2.10. При каком уровне дохода и каких условиях значение маршалловского спроса $x(p, I)$ совпадает с заданным значением хиксовского спроса $h(p, u)$?

1.2.11. При каком уровне полезности и каких условиях значение хиксовского спроса $h(p,\ u)$ совпадает с заданным значением маршалловского спроса $x(p,\ I)$?

1.2.12. При каком уровне дохода и каких условиях значение косвенной функции полезности равно заданной величине полезности $\overline{u}$?

1.2.13. При каком уровне полезности u и каких условиях значение функции расходов равно заданной величине дохода $\overline{I}$?

1.2.14. Постройте аналитические примеры и изобразите графически ситуации, когда решение задачи максимизации полезности $x(p,\ I)$ не совпадает с решением задачи минимизации расходов $h(p,\ u)$, предполагая, что в задаче минимизации расходов уровень полезности в ограничении равен $u\left(x(p,\ I)\right)$ (т.е. совпадает с максимальной полезностью, получаемой при решении первой задачи). (В примерах должны быть специфицированы функции и приведены значения экзогенных параметров.)

1.2.15. Докажите тождество Роя и лемму Шепарда на основе теоремы об огибающей.

1.2.16. Покажите, что если предпочтения потребителя гомотетичны, то функции спроса удовлетворяют соотношению $\dfrac{\partial x_i(p,\ I)}{\partial p_j} = \dfrac{\partial x_j(p,\ I)}{\partial p_i}$ для всех i и j.

1.2.17. Предположим, что строго выпуклые, строго монотонные предпочтения представляются дифференцируемой функцией полезности. Верно ли утверждение: «Предельная полезность дохода $\dfrac{\partial v(p,\ I)}{\partial I}$ положительна для любых цен и доходов»? Аргументируйте свой ответ.

1.2.18. Предположим, что для функции полезности $u(x)$ косвенная функция полезности имеет форму Гормана: $v(p,\ I) = a(p) + b(p)I$.

Как вычислить значение функции расходов этого потребителя для цен p и полезности u, если известны значения величин $a(p)$ и $b(p)$?

1.2.19. Охарактеризуете взаимосвязь между косвенной функцией полезности и функцией расходов, вычисленными для функции полезности, представляющей данные предпочтения.

1.2.20. Покажите, что если функция маршалловского спроса $x(p, I)$ порождена локально ненасыщаемыми предпочтениями, то выполняется следующее соотношение: $\sum_i \alpha^i \varepsilon_I^i = 1$, где α^i — доля расходов на благо i, ε_I^i — эластичность спроса на благо i по доходу.

1.2.21. Покажите, что если функция маршалловского спроса $x(p, I)$ является положительно однородной нулевой степени, то выполняется следующее соотношение: $\sum_i e_{p_i}^k = -\varepsilon_I^k$, где $e_{p_i}^k$ — эластичность спроса на благо k по цене блага i, ε_I^k — эластичность спроса на благо k по доходу.

1.2.22. Предпочтения потребителя описываются следующей функцией полезности: $u(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = v(x_1, ..., x_n) + x_{n+1}$. Покажите, что при достаточно большом доходе (потребитель при этом доходе предъявляет положительный спрос на благо $n+1$):

(а) косвенная функция полезности имеет вид $v(p, I) = a(p) + I$;

(б) функция $a(p)$ является выпуклой.

1.2.23. Пусть предпочтения потребителя представимы функцией $u(x) = \phi(x_1, \ldots, x_{N-1}) + x_N$, причем ϕ — возрастающая и вогнутая.

(а) Пусть набор $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{N-1}, \tilde{x}_N) >> 0$ — оптимальный набор для данного потребителя при векторе цен p и доходе I. Как изменится оптимальный выбор потребителя, если его доход возрастет на 10%?

(б) Пусть набор $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{N-1}, \tilde{x}_N) >> 0$ служит решением задачи минимизации расходов для данного потребителя при векторе цен

p и уровне полезности $\bar{u}$. Как изменится решение этой задачи, если $\bar{u}$ возрастет на 10%?

1.2.24. Матрица $S = \begin{bmatrix} \alpha & 7 & \beta \\ \gamma & -2 & \delta \\ \varepsilon & \varphi & -1 \end{bmatrix}$ является матрицей замещения Слуцкого, подсчитанной при ценах $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ и $p_3 = 3$. Найдите значения параметров α, β, γ, δ, ε, φ.

1.2.25. Могут ли все блага быть инфериорными, если предпочтения локально ненасыщаемы? Аргументируйте свой ответ.

1.2.26. Покажите, что если функция полезности потребителя сепарабельна, то ни одно из благ не может быть товаром Гиффена. Аргументируйте свой ответ.

1.2.27. Рассмотрите потребителя, предпочтения которого локально ненасыщаемы и представимы аддитивно сепарабельной дважды дифференцируемой функцией полезности: $U(x) = \sum_i u_i(x_i)$, причем $u_i(\cdot)$ строго вогнуты для любого i. Пусть потребитель обладает доходом $I > 0$, а цены товаров заданы вектором $p >> 0$. Известно, что $x(p, I) >> 0$. Покажите, что предельная полезность дохода в точке $x(p, I)$ убывает по доходу.

1.2.28. Предположим, что доход потребителя формируется эндогенно и представляет собой рыночную стоимость его первоначального запаса. Как изменится при этом тождество Слуцкого?

1.2.29*. Предпочтения потребителя описываются функцией полезности $u(x_1, x_2)$. Потребитель не имеет денег, но обладает первоначальными запасами товаров: у него есть ω_1 единиц первого товара и ω_2 единиц второго товара.

(а) Возможна ли такая ситуация, при которой повышение цены одного из товаров увеличило бы полезность этого потребителя? Объясните.

(б) Пусть цена первого товара возросла. Как изменится потребление этого товара? Прокомментируйте знаки эффекта замещения и эффекта дохода.

1.3

Двойственность в теории потребителя. Проблема восстановления предпочтений

1.3.1*. Функция расходов имеет вид $e(p_x, p_y, u) = 2u\sqrt{p_x p_y}$. Найдите функцию полезности. (*Подсказка*: используйте лемму Шепарда.)

1.3.2. При каких параметрах a и b функция $e(p, u) = aup_1^b p_2^c$ будет функцией расходов некоторого потребителя? Найдите функцию полезности этого потребителя.

1.3.3. При каких параметрах функция $e(p, u) = au\prod\limits_i (p_i)^{b_i}$ является функцией расходов потребителя? Найдите функцию полезности, соответствующую данной функции расходов.

1.3.4. Является ли функция $v(p_x, p_y, I) = Ip_x^{-\alpha} p_y^{\alpha-1}$, где $0 < \alpha < 1$, косвенной функцией полезности? Восстановите функцию полезности $u(x, y)$.

1.3.5. Предположим, что предпочтения потребителя представляются функцией полезности $u(x)$. Покажите, что функция полезности линейна $\left(u(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$ тогда и только тогда, когда косвенная функция полезности имеет вид $v(p, I) = \dfrac{I}{\min(p_i / \alpha_i)_{i=1}^{n}}$.

1.3.6*. Пусть предпочтения потребителя описываются следующей функцией полезности: $u(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \ln x_i$, $\alpha_i>0$.

(а) Считая все цены положительными, найдите функцию расходов и восстановите на ее основе функцию полезности. Совпадает ли восстановленная функция с первоначальной?

(б) Повторите все шаги пункта **(а)** для другого потребителя, функция полезности которого имеет вид $u(x)=\min_i\left(\alpha_i \ln x_i\right)_{i=1}^{n}$, $\alpha_i>0$.

(в) Обсудите процедуру восстановления предпочтений на основе косвенной функции полезности (не переходя от нее к функции расходов). Продемонстрируйте, как работает эта схема на примере пункта **(а)**.

1.3.7. Предположим, что предпочтения потребителя представляются функцией полезности $u(x)$. Покажите, что блага комплементарны $\left(u(x)=\min\left(\dfrac{x_i}{a_i}\right)_{i=1}^{n}\right)$ тогда и только тогда, когда косвенная функция полезности имеет вид $v(p,\ I)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i p_i\right)I$.

1.3.8. На рис. 1.2 изображена типичная линия уровня косвенной функции полезности в пространстве цен, т.е.

$$\left\{(p_1,\ p_2)\in R^2 : v(p_1,\ p_2,\ I)=\bar{u}\right\}.$$

(а) Изобразите на рисунке, какие цены соответствуют более высокому уровню полезности, чем $\bar{u}$.

(б) Для данного уровня полезности функция расходов также является функцией цен. Изобразите кривую постоянных расходов, т.е. множество $\left\{(p_1,\ p_2)\in R^2 : e(p_1,\ p_2,\ \bar{u})=I\right\}$.

(в) Чему равен наклон линии уровня функции v в точке $(p_1^*,\ p_2^*)$?

(г) Чему равен наклон типичной линии уровня функции e в точке (p_1^*, p_2^*)?

(д) Изобразите схематично в пространстве двух товаров типичную линию уровня функции полезности $u(x_1, x_2)$, которая могла бы соответствовать кривым безразличия косвенной функции полезности, представленным на рис. 1.2. Укажите на вашем рисунке, как мог бы выглядеть участок кривой безразличия, соответствующий излому линии уровня функции v в точке $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$.

(е) Какие другие кривые безразличия в пространстве (x_1, x_2) могут соответствовать данной косвенной функции полезности?

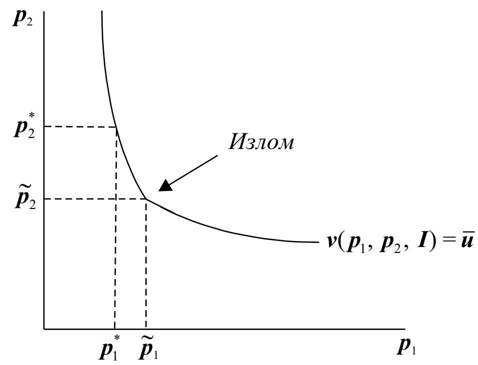

Рис. 1.2

1.3.9. Предположим, что непрерывные монотонные предпочтения потребителя допускают представление квазилинейной вогнутой функцией полезности $U(x_1, ..., x_{n-1}) + x_n$.

(а) Покажите, что если функция полезности сепарабельна, т.е. имеет вид $U(x_1, ..., x_{n-1}) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + ... + u_{n-1}(x_{n-1})$, то (при достаточно больших доходах) ей соответствует косвенная функция полезности, которая имеет форму Гормана $v(p_1, ..., p_{n-1}, 1, I) = v(p, I) = a(p) + I$, причем $a(p)$ — выпуклая сепарабельная функция. При этом если $U(x)$ — строго вогнутая функция, то $a(p)$ строго выпуклая функция и дифференцируема, если $U(x)$ дифференцируема.

(б) Покажите, что последнее утверждение из пункта **(а)**, вообще говоря, неверно при отказе от строгой вогнутости $a(p)$, приведя соответствующий контрпример.

(в) Покажите, что имеет место и обратное утверждение: если косвенная функция полезности имеет форму Гормана, причем функция $a(p)$ сепарабельна, т.е. $a(p) = a_1(p_1) + a_2(p_2) + \ldots + a_{n-1}(p_{n-1})$, то функция полезности сепарабельна, причем это единственная функция, которая имеет указанную косвенную функцию полезности. При этом если $a(p)$ строго выпукла (дифференцируема), то $U(x)$ строго вогнута (дифференцируема).

1.3.10. Покажите, что если функция полезности потребителя однородна первой степени, то:

(а) косвенная функция полезности имеет вид $v(p, I) = a(p)I$;

(б) для любых цен и доходов (p, I) выполняется соотношение

$$\frac{\partial x_i(p, I)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j(p, I)}{\partial p_i}.$$

1.3.11. Предположим, что дифференцируемая функция полезности $u(x)$ представляет строго выпуклые предпочтения. Предположим также, что предельные полезности каждого блага (величины $\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$) положительны, если $x >> 0$. Покажите, что для любого $x >> 0$ значение обратной функции спроса, $p(x)$, вычисляется по формуле $p_i(x) =$

$$= \frac{\partial u(x)/\partial x_i}{\sum_j x_j \left(\partial u(x)/\partial x_j\right)}.$$

1.3.12. Покажите, что если матрица (коэффициентов замены) Слуцкого симметрична, функция $x(p, I)$ дифференцируемая и $\left(p, x(p, I)\right) = I$, то $x(p, I)$ положительно однородная первой степени.

1.4

Измерение изменений в благосостоянии, вызванных изменением цен. Индексы цен

1.4.1. Используя графики, объясните, как соотносятся *CS*, *CV* и *EV* для товара, который является инфериорным, но не является товаром Гиффена.

1.4.2*. Верно ли, что максимальная сумма, которую потребитель готов заплатить, чтобы избежать повышения цены товара, всегда меньше, чем минимальная сумма, которую он готов получить, чтобы согласиться на повышение цены?

1.4.3*. Цена нормального товара возросла, при этом потребитель получил паушальную субсидию, равную эквивалентной вариации. Можно ли сделать вывод, что потребитель выиграл от этих изменений?

1.4.4*. Предположим, что правительство решило субсидировать стоимость парикмахерских услуг для пенсионеров. Субсидия составляет 50% цены этих услуг. Будем предполагать, что предложение абсолютно эластично по цене (т.е. продажи определяются исключительно спросом). Сравните выгоду пенсионеров от этой субсидии с издержками государства. Изобразите решение графически на двух диаграммах (одна — в пространстве двух товаров, а другая — в пространстве «количество — цена»).

1.4.5. Пусть предпочтения репрезентативного индивидуума представимы следующей функцией полезности: $u(x_1, x_2, x_3) = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$. Правительство решило осуществить политику перекрестного субсидирования: ввести налог на потребление каждой единицы первого блага, равный t% от цены первого блага, и одновременно субсидировать потребление каждой единицы второго блага в размере s% от цены второго блага. Будем предполагать, что предложение абсолютно эластично по цене (т.е. продажи определяются исключительно спросом).

(а) Найдите, при каком соотношении между s и t данная политика была бы нейтральной к государственному бюджету.

(б) Оцените (в денежных единицах) выигрыш (потери) репрезентативного потребителя в результате реализации данной программы.

(в) Докажите, что каковы бы ни были предпочтения потребителя, рассматриваемая программа не может улучшить его благосостояние.

1.4.6. Рассмотрите репрезентативного потребителя, который полностью расходует свой доход на два потребительских блага. Предположим, что был введен налог t на каждую единицу первого блага. Будем предполагать, что предложение абсолютно эластично по цене (т.е. продажи определяются исключительно спросом). Ответьте на следующие вопросы, изображая решение графически на двух рисунках (один должен давать ответ через бюджетные линии и кривые безразличия, а другой — изображать функции спроса).

(а) Какой дополнительный доход могло бы получить государство, заменив налог на первый товар паушальным налогом так, чтобы потребитель при этом остался на той же кривой безразличия?

(б) Какую максимальную сумму потребитель готов заплатить в качестве взятки правительству за то, чтобы оно собирало ту же сумму налога, но не в виде налога на первый товар, а в виде паушального налога?

(в) На какую величину надо уменьшить доход потребителя, чтобы его полезность изменилась так же, как и в результате введения налога на первый товар?

(г) Какова разница между доходом от налога и величиной, найденной в пункте **(в)**?

(д) Прокомментируйте соотношения между величинами, найденными в пунктах **(а)**, **(б)** и **(в)**. Как эти величины соотносятся с ΔCS, CV и EV?

1.4.7. Правительство страны Z пообещало индексировать зарплаты госслужащих соответственно индексу потребительских цен, который рассчитывается как индекс Ласпейраса. Верно ли, что если правительство выполнит свое обещание, то такая схема оплаты труда улучшит благосостояние всех занятых в бюджетной сфере?

1.4.8*. Рассмотрите задачу потребителя, где вместо фиксированного дохода I он обладает и неким первоначальным запасом потребительских благ $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N) \neq 0$.

(а) Рассмотрите изменение цен от p^0 до p'. По аналогии со случаем фиксированного дохода определите денежные меры изменения благосостояния (CV_ω и EV_ω), выписав соответствующие формулы. Изобразите эти меры схематично на графике для случая двухтоварной экономики.

(б) Пусть цены всех благ, кроме первого, остались неизменными, а цена первого блага возросла: $p_1' > p_1^0$. Считайте, что первое благо является нормальным товаром и потребитель является чистым продавцом этого блага. Как будут соотноситься CV_ω и EV_ω в рассматриваемой ситуации? (Графики могут служить лишь иллюстрацией вашего ответа, но не должны заменять аналитическое решение.)

1.4.9. Мистер X работает на государственном предприятии, получая заработную плату wL (w — ставка заработной платы, а L — рабочее время), и одновременно он получает пенсию, равную величине P. В этих условиях мистер X работал L^* часов в месяц, а его расходы на потребление составляли C^* руб. в месяц. (В качестве товаров в этой задаче выступают свободное время (l) и совокупное потребление товаров (C). Сумма свободного и рабочего времени равна лимиту времени T — в данном случае месяцу.) Функция полезности зависит от C и l.

(а) Государство планирует повысить ставку заработной платы и сократить пенсию таким образом, чтобы комбинация (C^*, L^*) лежала на новой бюджетной линии мистера X. Побудит ли это изменение мистера X работать больше или меньше?

(б) Если повышение ставки заработной платы не будет сопровождаться изменением пенсии, изменится ли рабочее время в том же направлении, что и в случае **(а)**? Объясните причину.

(в) Можно ли сказать, что изменение пенсии в соответствии с пунктом **(а)** дает точную меру изменения благосостояния мистера X в результате роста ставки заработной платы?

1.5

Агрегирование в теории потребителя

1.5.1. Функция расходов потребителей типа A имеет вид $e^A(p_1, ..., p_N, u) = \prod_{i=1}^{N}(p_i)^{\beta}$, $\beta > 0$. Функция полезности потребителей типа B задается как $u^B(x_1, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N}(x_i)^{\alpha_i}$, $\alpha_i > 0$.

(а) Найдите маршалловский спрос каждого потребителя на каждый товар.

(б) При каких значениях существует функция совокупного спроса, которая не зависит от распределения дохода между потребителями?

1.5.2. Предположим, что в результате выборочного обследования M домохозяйств были собраны понедельные данные относительно потребления домохозяйств, их доходов и текущих цен на приобретаемые товары и услуги. Каждое домохозяйство также заполняло анкету, отвечая на качественные вопросы относительно своих доходов и расходов. Известно, что каждое из обследованных домохозяйств заявило: если бы у них были свободные средства, то они всегда (при любых ценах и доходах) нашли бы, как их потратить с пользой для семьи. В результате исследования были найдены функции маршалловского спроса и косвенная функция полезности для каждого домохозяйства, которые имеют вид $x(p, I^k, \delta^k)$ и $v(p, I^k, \delta^k)$ соответственно, где δ^k — экзогенный параметр, отражающий предпочтения домохозяйства *k*, который зависит от набора характеристик домохозяйства (например, от количества детей в семье). Считайте, что функции были построены корректно.

(а) Возможно ли, что при некоторых ценах и распределении доходов сумма стоимости совокупного спроса всех домохозяйств по всем благам будет строго меньше совокупного дохода этих домохозяйств?

(б) Предположим, цены на все товары возросли на 15%, что сопровождалось ростом дохода каждого из наблюдаемых домохозяйств на 15%. Зафиксируют ли исследователи изменения в совокупном спросе? Если да, то какие, если нет, то почему?

(в) Изменится ли ваш ответ по пункту **(б)**, если известно, что рост цен на 15% сопровождался ростом совокупного дохода наблюдаемых домохозяйств на 15%?

(г) Приведите достаточное условие, гарантирующее, что совокупный спрос зависит только от совокупного дохода $I = \sum_k I^k$ и совокупной характеристики домохозяйств в выборке $\delta = \sum_k \delta^k$. Докажите, что это условие является достаточным.

1.5.3. Покажите, что для гомотетичных предпочтений кривые «доход — потребление» являются лучами, выходящими из начала координат.

1.5.4. Покажите, что если предпочтения потребителей могут быть представлены функциями полезности, косвенные функции полезности которых имеют форму Гормана $v^k(p, I^k) = a^k(p) + b(p)I^k$, то совокупный спрос таких потребителей зависит лишь от совокупного дохода, но не его распределения, т.е. эффекты доходов таких потребителей «уравновешивают друг друга». Покажите, что кривые «доход — потребление» в этом случае параллельны.

1.5.5. Пусть функция расходов для потребителя k имеет вид $e^k(p,\ u^k) = a^k(p)u^k + b(p)$. Будут ли кривые «доход — потребление» этих потребителей параллельными прямыми при любом векторе цен p?

1.5.6. Пусть в экономике M потребителей, функции полезности которых имеют вид $u^k(x_1^k,\ x_2^k,\ x_3^k) = v^k(x_1^k,\ x_2^k) + x_3^k$, причем v^k — вогнутые функции и $k = 1,\ \ldots,\ M$. Верно ли, что в этой экономике при достаточно больших доходах потребителей совокупный спрос зависит от цен и совокупного дохода потребителей, т.е. является инвариантным по отношению к распределению совокупного дохода?

1.5.7. Приведите пример предпочтений, когда выбор каждого потребителя согласуется со слабой аксиомой выявленных предпочтений, а совокупный спрос не удовлетворяет слабой аксиоме. Рассмотрите случай двух потребителей и двух благ. Приведите графическую иллюстрацию.

Б 92 **Бусыгин, В. П.** Сборник задач по курсу микроэкономики продвинутого уровня [Текст] / В. П. Бусыгин, Е. В. Покатович, А. А. Фридман ; Гос. ун-т — Высшая школа экономики. — М. : Изд. дом ГУ ВШЭ, 2007. — 385, [3] с. з 3000 экз. — ISBN 978-5-7598-0336-2 (в пер.).

В сборник включены задачи по основным разделам микроэкономики: теории потребителя, теории производителя, выбору в условиях неопределенности, общему экономическому равновесию, фиаско рынка в случаях общественных благ, экстерналий и асимметрии информации. Каждый раздел начинается с компактного обзора основных определений и положений по соответствующей тематике, необходимых для решения предлагаемых задач. Для целого ряда задач в заключительном разделе книги представлены подробные решения. Как правило, это типовые задачи, в которых отрабатываются навыки анализа базовых моделей курса. Приводится список рекомендуемой литературы, основной и дополнительной.

Для студентов, аспирантов и преподавателей экономических вузов, факультетов и специальностей.

УДК 330.101.52(076.1)
ББК 65.012.1

Учебное издание

Бусыгин Владимир Петрович
Покатович Елена Викторовна
Фридман Алла Александровна

Сборник задач по курсу микроэкономики продвинутого уровня

Зав. редакцией *О.А. Шестопалова*
Редактор *Е.Н. Ростиславская*
Художественный редактор *А.М. Павлов*
Компьютерная верстка и графика: *Н.Е. Пузанова*
Корректор *Е.Е. Андреева*

Подписано в печать 12.04.2007. Формат 60×88 $^1/_{16}$. Бумага офсетная
Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,52.
Уч.-изд. л. 18,52. Тираж 3000 экз. Заказ № . Изд. № 524

ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Тел./факс: (495) 772-95-71