

Было выявлено, что  $\frac{\partial p_s^*}{\partial M} < 0$ , соответственно, рост массы сектора однопродуктовых фирм делает соответствующий сектор сравнительно более привлекательным для потребителей и вынуждает супермаркет снижать цену на дифференцированный товар. Также установлено, что  $\frac{\partial \Pi_S}{\partial M} < 0$ ,  $\frac{\partial \Pi_D}{\partial N} < 0$ , что соответствует интуиции: рост масс предлагаемых в соответствующем секторе разновидностей товара ведет к росту числа потребителей, посещающих данный сектор. Как следствие, прибыль конкурирующего сектора снижается. Соответственно, выводы из модели в целом не противоречат эмпирическим сведениям о том, что развитие супермаркетов на периферии может способствовать сокращению сектора розничной торговли в центре города.

### Литература

1. Dixit, A.K., Stiglitz, J.E. Monopolistic competition and optimum product diversity // *American Economic Review*. 1977. No. 67. pp. 297–308.
2. Fogelson, R.M. *Downtown. Its Rise and Fall, 1880–1950*. New Haven: Yale University Press, 2005.
3. Ottaviano G.I.P., Tabuchi T., Thisse J.-F. Agglomeration and trade revisited // *International Economic Review*. 2002. No. 43. pp. 409-36.
4. Ushchev P., Sloev I., Thisse J. Do we go shopping downtown or in the 'burbs? // *Journal of Urban Economics*. 2015. Vol. 85. No. 1. P. 1-15.

### Асимптотическая устойчивость смешанных равновесий для итеративных процессов в биматричных играх

**А.С. Скоробогатов**

НИУ ВШЭ г. Санкт-Петербург  
190008, г. Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, д.16  
e-mail: skorobogat@mail.ru

Согласно одной из распространенных интерпретаций смешанного равновесия в его основе лежат статистические частоты выбора чистых стратегий игроками в ходе повторяющихся взаимодействий. В координационных играх в зависимости от начальных условий может наблюдаться сходимость к различным равновесиям Нэша. В отличие от чистых равновесий, асимптотическое приближение к смешанному равновесию может не допускать координации. Васиным (2010; Vasin, 1999) были раскрыты динамические свойства смешанного равновесия в непрерывном времени. Смешанное равновесие, согласно его результатам, является либо вырожденной точкой,

либо центром, либо седлом соответствующей автономной дифференциальной системы. В последнем случае асимптотическая динамика координационной игры фактически исключает координацию. В первых же двух случаях координация имеет место в течение определенной доли истории игры.

В дискретном времени соответствующая асимптотическая динамика в окрестности смешанного равновесия фактически исключает координацию (Young, 1998). Однако такой результат возможен при определенных свойствах платежной матрицы. В настоящей статье рассматриваются свойства платежной матрицы, при которых итеративный процесс никогда не сходится к смешанному равновесию, даже если начинается с самого смешанного равновесия. В содержательном смысле это важно, поскольку отсутствие сходимости к смешанному равновесию фактически делает асимптотически устойчивыми только чистые равновесия с соответствующими следствиями для общего выигрыша игроков.

Пусть игра  $n$  игроков задается как  $G = (X_i, u_i)_{1 \leq i \leq n}$ , где  $X_i$  – это множество чистых стратегий  $i$ -го игрока;  $u_i(x) = u_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – функция выигрыша  $i$ -го игрока, аргументами которой являются стратегии всех  $n$  игроков. Стратегический выбор  $n$  игроков на каждом такте времени мыслится как точка

в ограниченном  $n$ -мерном стратегическом пространстве  $X = \prod_{i=1}^n X_i$ . В каждый

момент истории игры имеется реализация из  $n$  чистых стратегий  $x' \in X$ , выбор которых делается на основе оценочных смешанных стратегий  $p'_i(x_i)$ . Набор из  $n$  смешанных стратегий задает вероятность каждой комбинации чистых стратегий как соответствующее произведение распределений

$$p'(x') = \prod_{i=1}^n p'_i(x'_i \mid x'_i \in X_i) \in \Delta, \text{ где } \Delta = \prod_{i=1}^n \Delta_i, \text{ а } \Delta_i \text{ – множество всех вероятностных}$$

распределений на стратегическом множестве  $i$ -го игрока  $X_i$ . Функция ожидаемого выигрыша  $i$ -го игрока будет определяться как  $u_i(p) = \sum_{x \in X} u_i(x)p(x)$ ,

а наилучший – как  $x_i^*(p') = \left\{ x_i \in X_i : \forall x'_i \in X_i, u_i(x_i, p'_{-i}) \geq u_i(x'_i, p'_{-i}) \right\}$ .

Состояние этой игры в каждый момент определяется комбинацией смешанных стратегий, которая в случае игры «два игрока – две стратегии» определяется как вектор  $p = [p_1(x_i), p_2(x_i)]$ . Смешанная стратегия каждого игрока  $p_i \in [0,1]$  определяется статистически как доля игр в их истории, в которых игрок выбирал первую стратегию. Соответственно,  $tp_i$  – количество случаев использования игроком первой стратегии к моменту времени  $t$ . Наилучший ответ игроков в каждый момент времени определяется как  $x^*(p') = [x_1^*(p'), x_2^*(p')]$ , где стратегия определяется как бинарная переменная

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ый игрок выбирает первую стратегию} \\ 0, & \text{если } i\text{-ый игрок выбирает вторую стратегию} \end{cases}$$

Тогда состояние игры в каждый момент времени можно определить с помощью системы (Brown, 1951; Young, 1998)

$$p'^{t+1} = \frac{tp' + x^*(p')}{t+1}.$$

Если выразить изменение смешанной стратегии как

$$p'^{t+1} - p' = \frac{1}{t+1}[x^*(p') - p'],$$

то множество значений выражения в скобках в правой части для  $i$ -го игрока можно определить как

$$[x_i^*(p') - p'] \in \begin{cases} [0,1], & \text{если } i\text{-ый игрок выбрал первую стратегию} \\ [-1,0], & \text{если } i\text{-ый игрок выбрал вторую стратегию} \end{cases}$$

В плане общего выигрыша игроков смешанное равновесие в координационной игре уступает чистым равновесиям. Это можно проиллюстрировать на примере. Пусть матрица выигрышей имеет следующие значения

$$\{a_{ij}, b_{ij}\} = \begin{pmatrix} 2,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда найдем равновесные смешанные стратегии игроков  $p_1^* = 2/3$  и  $p_2^* = 1/3$ . Тогда совокупный ожидаемый выигрыш сторон в смешанном равновесии будет равен  $4/3$ , что значительно ниже совокупного выигрыша, равного 3, в случае любого чистого равновесия. При этом, чистое равновесие обеспечит

дополнительный выигрыш по сравнению со смешанным равновесием даже тому игроку, который получит меньшую часть общего выигрыша, поскольку получит 1 вместо  $2/3$ . Данные потери в случае смешанного равновесия игроки несут по причине отсутствия координации в их действиях. В данном случае в действиях игроков будет наблюдаться координация в  $4/9$  времени (вероятность координации была бы еще меньше при большей разнице в выигрышах игроков при двух соглашениях). Соответственно, в  $5/9$  игр игроки не получают никакого выигрыша, тогда как в случае чистого равновесия во всех раундах игроки имели бы положительный выигрыш.

Однако, как отмечает Янг (Young, 1998, pp. 35-36), такой результат смешанного равновесия в отношении общего благосостояния будет справедлив только в непрерывном времени и, соответственно, для бесконечного количества раундов на каждом временном интервале. Динамика игры в этом случае определялась бы как  $\dot{p}(t) = [x^*(p') - p']/t$ . В дискретном же времени, если начальная точка лежит на линии  $p_2 = (p_1^* + p_2^*) - p_1$ , динамика игры будет определяться постоянным перескакиванием через точку смешанного равновесия. И хотя состояние игры будет асимптотически приближаться к смешанному равновесию, в каждый момент времени координация будет отсутствовать и стороны будут получать нулевые выигрыши.

Матрица вероятностей перехода для данного примера будет определяться как

$$\{p_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где в качестве первого и второго состояний системы взяты  $x = [1, 0]$  и  $x = [0, 1]$ . Таким образом, игра, будучи в первом состоянии, в половине случаев оставалось в тот же состоянии, в половине случаев переходила во второе состояние; будучи же во втором состоянии, всегда переходила в первое состояние. Стационарное распределение для этой матрицы будет  $p^* = [2/3, 1/2]$ , т. е. как раз совпадает с равновесными смешанными стратегиями игроков.

Однако, если сумма значений равновесных смешанных стратегий не равна единице, сходимости к смешанному равновесию не будет. И даже если на

каком-то шаге система достигает смешанного равновесия, на следующем шаге она уже выйдет из него. В рассмотренном примере это видно, если добавить второму игроку единицу при выборе им второй стратегии, так что платежная

матрица будет иметь вид  $\{a_y, b_y\} = \begin{pmatrix} 2,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,3 \end{pmatrix}$ . Здесь даже если игра начинается со

смешанного равновесия  $p^* = (0.75, 0.33)$ , со следующего шага начнется движение в сторону одного из чистых равновесий в зависимости от допущения о выборе чистой стратегии в ответ на равновесную смешанную стратегию оппонента. С точки зрения общего благосостояния это означает, что небольшое изменение платежной матрицы приводит к тому, что при любом начальном распределении стратегий стороны достигнут координации и связанных с ней выигрышей.

### Литература

- Васин А.А. (2010). Эволюционная теория игр и экономика. Часть 2. Устойчивость равновесий. Особенности эволюции социального поведения // Журнал Новой Экономической Ассоциации, №5. С. 10-27.
- Brown G.W. (1951). Iterative Solutions of Games by Fictitious Play // Activity Analysis of Production and Allocation. T. C. Koopmans (ed.), New York: Wiley. Pp. 374-376.
- Vasin A.A. (1999). On stability of mixed equilibria // Nonlinear Analysis, vol. 38. Pp. 793-802.
- Young P.H. (1998). Individual Strategy and Social Structure. An Evolutionary Theory of Institutions. Princeton NJ: Princeton University Press.

### Показатель чистой настоящей стоимости (NPV) и его свойства

М.В. Соколов

СПб ЭМИ РАН

190013, Санкт-Петербург, ул. Серпуховская, 36-38

e-mail: mvsokolov@eu.spb.ru

**Ключевые слова:** эффективность инвестиционных проектов, чистая настоящая стоимость (NPV), коэффициент дисконтирования

Чистая настоящая стоимость (чистая приведенная стоимость, чистый дисконтированный доход, net present value), далее NPV, является одним из ключевых показателей при оценке эффективности инвестиционных проектов. Для практических целей вполне достаточно определения NPV как суммы дисконтированных компонент денежного потока по проекту. Для большинства теоретических моделей, напротив, требуется распространение этого определения на случай проектов со счетным числом компонент денежного потока (дискретные модели с бесконечным горизонтом планирования), непрерывным денежным