Письма в ЖЭТФ, том 93, вып. 10, с. 625 – 628 

# Безотражательное распространение акустических волн в атмосфере Земли

*Н. С. Петрухин*[+1)], *Е. Н. Пелиновский*[+*], *Е. К. Бацына*[+]

[+]*НИУ Высшая школа экономики, Нижегородский филиал, 603155 Нижний Новгород, Россия*

[*]*Институт прикладной физики РАН, 603950 Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 18 марта 2011 г.

Вертикальное распространение акустических волн в неоднородной сжимаемой атмосфере изучается в рамках линейной теории идеальной гидродинамики. Показывается, что при определенных условиях на параметры атмосферы исходные уравнения сводятся к уравнению Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами. Его решения описывают распространяющиеся волны с переменной амплитудой и волновым числом, которые не отражаются в атмосфере, несмотря на ее сильную неоднородность. Поток волновой энергии на таких безотражательных профилях сохраняется, что и доказывает возможность переноса энергии на большие высоты. Показано, что Стандартная Атмосфера Земли хорошо аппроксимируется четырьмя безотражательными профилями со слабыми скачками градиента скорости звука. Получено, что в широком диапазоне частот земная атмосфера является почти полностью прозрачной, что объясняет данные наблюдений и выводы, сделанные на основе численных решений в рамках исходных уравнений.

Акустико-гравитационные волны, генерируемые землетрясениями, извержениями вулканов, ураганами и цунами хорошо проникают в верхнюю атмосферу [1–5]. Между тем атмосфера Земли является сильно неоднородной по плотности и температуре, а, как известно, волны в неоднородной среде отражаются [6, 7]. Поэтому из результатов численных исследований не всегда видно, какие же слои в атмосфере способствуют прохождению волновой энергии на большие высоты, а какие отражают ее. Так, например, простейшая модель изотермической атмосферы, в которой плотность меняется по экспоненциальному закону, допускает распространение безотражательных волн, хотя их амплитуда и меняется с высотой [8, 9]. При этом акустические волны могут распространяться вертикально, в то время как гравитационные - только под углом к горизонту. Считается, что это единственный пример безотражательного распространения акустико-гравитационных волн, а в неизотермической атмосфере волны в той или иной степени отражаются, что, в частности, и подтверждали результаты некоторых аналитических и численных расчетов [10–13]. В связи с этим становится важным, на наш взгляд, поиск условий, при которых отражение волн в атмосфере минимально, или отсутствует полностью. Для этого мы применим подход основанный на трансформационных преобразованиях и алгебре Ли, развитый в математике для систем дифференциальных уравнений достаточно общего вида [14–19]. С его помощью было найдено несколько примеров безотражательного распространения волн в неоднородном океане [20–26]. Как мы покажем, земная атмосфера может быть аппроксимирована четырьмя безотражательными слоями с малыми скачками градиентов скорости звука на границах, что и подтверждает хорошее проникновение волн в верхнюю атмосферу.

Исходным для анализа адиабатических возмущений малой амплитуды в плоскослоистой атмосфере, находящейся в постоянном поле тяжести, является уравнение для завихренности, которое для вертикального распространения акустических волн имеет вид [27]

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = c^2(z)\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \left[\frac{dc^2(z)}{dz} - \gamma g\right]\frac{\partial \chi}{\partial z}, \qquad (1)$$

с коэффициентами, зависящими от единственной переменной – скорости звука $c(z)$. Здесь $\gamma$ – постоянная адиабаты и $g$ – гравитационное ускорение. При этом невозмущенная плотность атмосферы описывается формулой

$$\rho_0(z) = \rho(0)\frac{T(0)}{T(z)}\exp\left[-\int\limits_0^z \frac{dz'}{H(z')}\right], \qquad (2)$$

где $\rho(0)$ и $T(0)$ – плотность и температура, соответственно, на некотором фиксированном уровне ($z = 0$), и $H(z) = c^2(z)/\gamma g$ – высота эквивалентной однородной атмосферы на горизонте $z$.

Поставим следующую задачу. Существуют ли такие преобразования переменных, при которых урав-

1)e-mail: npetruhin@hse.ru

нение (1) с переменными коэффициентами сводится к уравнению с постоянными коэффициентами типа волнового, при этом физический смысл аргументов, времени и координаты, после замены не изменится? Если такие преобразования существуют, то тем самым мы найдем безотражательные волны в неоднородной среде, потому что в гиперболических уравнениях с постоянными коэффициентами такие волны всегда существуют. Будем искать решение уравнения (1) в виде, похожем на используемое в методе ВКБ,

$$\chi(z,t) = A(z)W(Z,t), \quad Z = Z(z), \tag{3}$$

где все функции подлежат определению. После подстановки (3) в (1) получаем уравнение Клейна – Гордона с переменными коэффициентами

$$A(z)\left[\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - c^2(z)\left(\frac{dZ}{dz}\right)^2\frac{\partial^2 W}{\partial Z^2}\right] -$$

$$-\left[\frac{d}{dz}\left(c^2 A\frac{dZ}{dz}\right) + \left(c^2\frac{dA}{dz} - \gamma g A\right)\frac{dZ}{dz}\right]\frac{\partial W}{\partial Z} -$$

$$-\frac{d}{dz}\left(c^2\frac{dA}{dz} - \gamma g A\right)W = 0, \tag{4}$$

которое сводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} = QW \tag{5}$$

при выполнении следующих условий:

$$Z(z) = \int\frac{dz}{c(z)}, \quad A(z) \sim \frac{1}{\sqrt{c(z)}}\exp\left[\int\frac{dz}{2H(z)}\right], \tag{6}$$

$$Q = \frac{1}{A}\frac{d}{dz}\left[c^2(z)\frac{dA}{dz} - \gamma g A(z)\right]. \tag{7}$$

Физический смысл функции $Z(z)$ очевиден, это есть время распространения волны в неоднородной среде. Обратим внимание, что, несмотря на сильную неоднородность атмосферы, амплитуда волны меняется по такому же закону, как и в плавно неоднородной атмосфере, давая дополнительные аргументы для обоснования получаемых решений в виде безотражательных волн. Существование бегущих волн в рамках (5) является очевидным, и мы не будем на этом останавливаться. Более важным вопросом является нахождение соответствующих профилей скорости звука из (7), обеспечивающих безотражательное распространение акустических волн. Уравнение (7) с учетом (6) приводится к виду

$$\frac{d^2u^2}{dh^2} - \frac{1}{4u^2}\left(\frac{du^2}{dh}\right)^2 + \frac{1}{u^2} = \beta, \tag{8}$$

$$u(z) = c(z)/c_0, \quad h = z/H_0, \quad H_0 = \gamma g/c_0^2,$$

$$\beta = -Q/\omega_0^2, \quad \omega_0 = \gamma g/2c_0.$$

Здесь $c_0$ – значение скорости звука на некоторой высоте $z = 0$, $H_0$ – высота однородной атмосферы для этой же высоты, $\omega_0$ – частота отсечки акустических волн, соответствующая изотермической атмосфере, скорость звука в которой равна $c_0$. Уравнение (8) интегрируется в элементарных функциях. Так, при $\beta = 0$ ($Q = 0$) имеем два профиля:

$$u = \sqrt{2|h + h_0|}, \tag{9}$$

и ($\alpha$, $h_0$ – произвольные константы)

$$h + h_0 = \pm\frac{2}{3\alpha^2}\sqrt{1+\alpha u}\,(\alpha u - 2)\,, \quad \alpha \neq 0. \tag{10}$$

Если $\beta \neq 0$ ($Q \neq 0$) существуют три профиля скорости звука:

$$(h + h_0)^2 - \beta u^2 = 1, \tag{11}$$

при $\beta > 0$ ($\alpha \neq 0$)

$$\pm h + h_0 = \frac{1}{\beta}\sqrt{\beta u^2 + \alpha u + 1} -$$

$$-\frac{\alpha}{2\beta^{3/2}}\ln\left[2\sqrt{\beta(\beta u^2 + \alpha u + 1)} + 2\beta u + \alpha\right], \tag{12}$$

и при $\beta < 0$ ($\alpha \neq 0$)

$$\pm h + h_0 = -\frac{1}{|\beta|}\sqrt{-|\beta|u^2 + \alpha u + 1} +$$

$$+\frac{\alpha}{2|\beta|^{3/2}}\arcsin\left[\frac{-2|\beta|u + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 4|\beta|}}\right]. \tag{13}$$

Таким образом, существуют 10 профилей скорости звука (с учетом другого знака в выражениях приводимых выше), зависящих от двух произвольных констант, которые обеспечивают безотражательное вертикальное распространение волн в атмосфере.

В общем случае элементарное волновое решение уравнения Клейна-Гордона (5) соответствует бегущей волне ($G$ – произвольная константа)

$$\chi(t,z) = \frac{G}{\sqrt{c(z)}} \exp\left[i\left(\omega t - K\int\frac{dz}{c(z)}\right)\right],$$

$$K = \pm\sqrt{\omega^2 + Q}. \tag{14}$$

С помощью (14) могут быть определены все компоненты волнового поля и вычислен поток энергии в вертикальном направлении [28]:

$$\Pi = \frac{1}{2}\left[p'V^* + Vp'^*\right], \tag{15}$$

где (*) означает комплексное сопряжение. Легко показать, что поток энергии равен

$$\Pi = -\frac{K\gamma\,|G|^2\,p(0)}{\omega^3} \tag{16}$$

и не зависит от $z$. В результате монохроматическая волна может распространяться на большие высоты без потери энергии. Этот вывод справедлив для волн на любом из рассмотренных безотражательных профилей. Распределение скорости звука в Стандартной Атмосфере Земли [29] иллюстрируется на

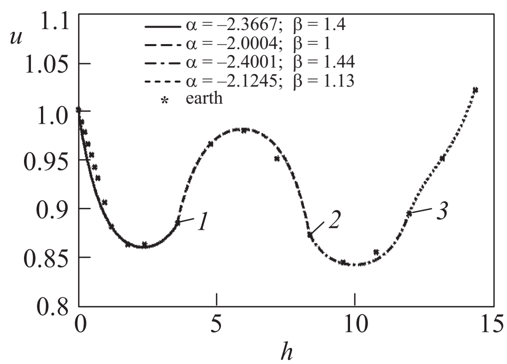


Рис. 1. Аппроксимация профиля звука в Стандартной Атмосфере Земли четырьмя безотражательными профилями

рис. 1. Здесь высота нормирована на высоту однородной атмосферы $H_0 = 8.4$ км, а скорость звука на $c(0) = 330$ м/с (оба параметра соответствуют поверхности Земли). Наблюдаемое распределение скорости звука в земной атмосфере очень хорошо аппроксимируется четырьмя безотражательными профилями (12) с различными значениями параметров $\alpha$ и $\beta$ (рис. 1). Если в точках сшивки 1 и 2 заметен скачок градиента скорости звука, то в точке 3 фактически происходит скачок второй производной. Малость скачков градиента скорости звука на границах слоев свидетельствует о малости отражения волновой энергии, что и ведет к эффективному проникновению волн в верхнюю атмосферу.

На границах сшивки безотражательных профилей должны выполняться условия непрерывности вертикальной скорости движения газа и давления, что сводится к непрерывности дивергенции скорости и ее производной. В результате коэффициент прохождения волны через границу безотражательных слоев $(js)$ есть

$$T_{js} = \frac{il_j}{(u'_j - u'_s) + i(l_j + l_s)/2}, \tag{17}$$

$$l = \sqrt{\sigma^2 - \beta}, \quad l = K/\omega_0, \quad \sigma = \omega/\omega_0, \quad u' = du/dh.$$

Энергетический коэффициент прохождения волны через границу будет определяться формулой

$$V_{js} = \frac{\Pi_s}{\Pi_j} = \frac{l_s|T_{js}|^2}{l_j}, \tag{18}$$

где $\Pi_j$ – поток энергии волны в слое $j$, определенный выражением (16).

Для получения оценки потока энергии, проходящего через все три границы слоев безотражательных профилей, необходимо перемножить величины (18), график суммарного коэффициента прохождения представлен на рис. 2 в зависимости от часто-

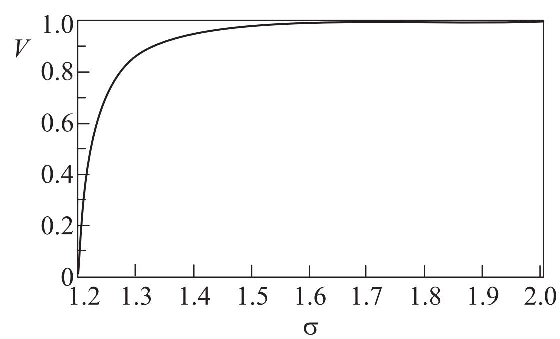


Рис. 2. Коэффициент прохождения волны через атмосферу Земли

ты волны. Это приближение справедливо без учета переотражения волн от каждого разрыва. Как следует из рис. 2, учет вторичных отражений не нужен, так как для всех волн с $\sigma > 1.5$ или с периодами, меньшими 200 с, земная атмосфера практически прозрачна. Следует отметить, что акустико-гравитационные волны с подобными периодами наблюдались в ионосфере непосредственно над эпицентрами землетрясений [4], а также после запусков космических кораблей и ракет и мощных взрывов [30–32]. Таким образом, мы по-существу доказываем, что земная атмосфера имеет параметры, близкие к безотражательным, что и объясняет хорошее проникновение волн в верхние слои, наблюдаемое в природе и в численных экспериментах.

Итак, в рамках линейной теории существует двухпараметрическое семейство профилей скорости звука, при котором волновое поле может быть представлено бегущей волной, которая не отражается в атмосфере несмотря на ее сильную неоднородность. Поток волновой энергии на таких безотражательных профилях сохраняется, что и доказывает возможность переноса энергии на большие высоты. Показано, что Стандартная Атмосфера Земли хорошо аппроксимируется четырьмя безотражательными профилями. В широком диапазоне частот земная атмосфера является почти полностью прозрачной.

Работа выполнена при поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований # 11-05-00216, # МК-6734.2010.5 и Гос. контракта № 02.740.11.0732.

---

1. Г. С. Голицын, *Динамика природных явлений: климат, планетные атмосферы, конвекция*, М.: Физматлит., 2004.
2. Г. И. Григорьев, Изв. Вузов, Радиофизика **42**, 3 (1999).
3. D. C. Fritts and M. J. Alexander, Rev. of Geoph. **41**, 1003 (2003).
4. М. Б. Гохберг, С. Л. Шалимов, *Воздействие землетрясений и взрывов на ионосферу*, М.: Наука, 2008.
5. D. Durran, *Numerical methods for wave equations in Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1999.
6. Л. М. Бреховских, *Волны в слоистых средах*, М.: Наука, 1973.
7. С. Н. Гурбатов, О. В. Руденко, А. И. Саичев, *Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии*, М.: Физматлит, 2008.
8. К. Эккарт, *Гидродинамика океана и атмосферы*, Иж.: Рег. и хаот. дин., 2004.
9. Э. Госсард, У. Хук, *Волны в атмосфере*, М.: Мир, 1978.
10. Н. С. Петрухин, Астроном. ж. **60**, 122 (1983).
11. Н. С. Петрухин, Астроном. ж. **60**, 703 (1983).
12. Н. С. Петрухин, *Колебания и волны в жидкости*, Горький: ГПИ, 1988, с. 5.
13. C. Malins and R. Erdelye, Solar Phys **246**, 41 (2007).
14. G. Bluman, SIAM J. Appl. Math. **43**, 1259 (1983).
15. G. Bluman and S. Kumei, J. Math. Phys. **28**, 307 (1987).
16. B. Seymour and E. Varley, Stud. Appl. Math. **76**, 1 (1987).
17. E. Varley and B. Seymour, Stud. Appl. Math. **78**, 183 (1988).
18. Н. Х. Ибрагимов, О. В. Руденко, Акуст. ж. **50**, № 4, 1 (2004).
19. R. Grimshaw, D. Pelinovsky, and E. Pelinovsky, Wave Motion **47**, 468 (2010).
20. И. И. Диденкулова, Н. Заибо, Е. Н. Пелиновский, Известия РАН Механика жидкости и газа **4**, 101 (2008).
21. Е. Н. Пелиновский, И. И. Диденкулова, *Нелинейные волны’* 2008, Н.Н.: ИПФ, 2009, с. 191.
22. I. Didenkulova, E. Pelinovsky, and T. Soomere, J Geoph. Res. Oceans **114**, C07006 (2009).
23. I. Didenkulova and E. Pelinovsky, Phys. Lett. A **373**, 3883 (2009).
24. Т. Г. Талипова, Е. Н. Пелиновский, Н. С. Петрухин, Океанология **49**, 673 (2009).
25. R. Grimshaw, E. Pelinovsky, and T. Talipova, J. Phys. Oceanography **40**, 802 (2010).
26. E. N. Pelinovsky and T. G. Talipova, in *Proc. IV Int. Conf. “Frontiers of nonlinear physics”*, N.N.: IAP, 2010, p. 108.
27. Г. Ламб, *Гидродинамика*, М-Л:Гостехиздат, 1947.
28. Д. Лайтхилл, *Волны в жидкостях*, М: Мир, 1981.
29. *Атмосфера Стандартная. Параметры*, ГОСТ 4401-81, 1981.
30. В. Д. Карлов, С. И. Козлов, Г. Н. Ткачев, Космич. Исслед. **18**, 266 (1980).
31. П. М. Нагорский, *Модификация F-области ионосферы мощными импульсными источниками волн в нейтральном газе*: Докторская диссертация. ТомГУ, 1998.
32. В. В. Адушкин, С. И. Козлов, А. В. Петров, *Экологические проблемы и риски воздействий ракетно-космической техники на окружающую среду*, М: Анкил, 2000.