**ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
МАТЕМАТИКИ**

Том 18 Выпуск 2
2011

Секция «Финансовая и страховая математика»

ЗВЕРЕВ О. В., ХАМЕТОВ В. М.

МИНИМАКСНОЕ ХЕДЖИРОВАНИЕ ОПЦИОНОВ ЕВРОПЕЙСКОГО ТИПА НА НЕПОЛНЫХ РЫНКАХ (ДИСКРЕТНОЕ ВРЕМЯ). II [1)]

Содержание

§ 5. Минимаксный хеджирующий портфель европейского опциона на конечном $(1, S)$-рынке

Этот параграф посвящен построению минимаксного хеджирующего портфеля европейского опциона на конечном $(1, S)$-рынке в предположении, что доходность рискового актива представляет собой последовательность независимых в совокупности одинаково распределенных случайных величин, принимающих конечное число значений.

5.1. В данном разделе мы приводим описание конечного $(1, S)$-рынка.

Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t\in N_0}, P)$ задана одномерная последовательность случайных величин $\{S_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t\in N_0}$, которая для любого $t \in N_0$ допускает представление

$$S_t = S_{t-1}(1+\rho_t), \quad S_t|_{t=0} = S_0 > 0, \tag{108}$$

где значение S_0 неслучайно, $\{\rho_t\}_{t\in N_1}$ — последовательность случайных величин ρ_t, которые в экономических задачах могут истолковываться как доходности рискового актива в моменты времени $t \in N_1$. Предположим, что $0 < S_0 \leqslant c_5$. Относительно последовательности $\{\rho_t\}_{t\in N_1}$ будем предполагать, что она не зависит от S_0 и для любого $t \in N_1$ выполнены следующие условия.

[1)] Первая часть этой статьи, которую составили разделы «Введение», «§ 1. Решение минимаксной задачи (1)», «§ 2. Минимаксное хеджирование европейского опциона на неполном рынке», «§ 3. Доказательства утверждений теорем 1–9» и «§ 4. Доказательства утверждений теорем 10–15», опубликованы в предыдущем выпуске журнала (2011, том 18, вып. 1, с. 26–54).

Условия (ρ). 1) Относительно меры P значения $\{\rho_t\}_{t\in N_1}$ составляют последовательность независимых в совокупности одинаково распределенных случайных величин.

2) для любого $t \in N_1$ случайная величина ρ_t принимает значения в конечном множестве $\Gamma \triangleq \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$ с вероятностями $p_i \triangleq P\{\rho_t = a_i\}, i = 1, 2, \dots, l$, соответственно, причем

а) $2 \leqslant l < \infty$;

б) $-1 < a_1 < 0$;

в) не существует такого $i \in \{2, 3, \dots, l\}$, что $a_i = 0$;

г) существует такое $j \in \{2, 3, \dots, l\}$, что $a_j > 0$.

Отметим, что из условий (ρ) следует, что:

1) ρ_t есть l-значная случайная величина, имеющая полиномиальное распределение и допускающая представление $\rho_t = \sum_{i=1}^{l} a_i 1_{\{\rho_t = a_i t\}}$, в котором значение $1_{\{\rho_t = a_i\}}$ равно 1 при $\rho_t = a_i$ и нулю в противном случае;

2) без ограничения общности можно считать, что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_l \leqslant \infty$;

3) для любого $t \in N_0$ случайная величина S_t положительна;

в) относительно базовой вероятностной меры P последовательность $\{S_t\}_{t\in N_0}$, определенная рекуррентным соотношением (108), является однородной марковской цепью.

5.2. Для проведения дальнейших построений нам понадобится ряд обозначений, а также замечаний, связанных с результатами, полученными в предыдущих параграфах.

Нетрудно убедиться, что описанный выше $(1, S)$-рынок является неполным уже при $l \geqslant 3$.

Обозначим $\mathfrak{R}^d_{N,m}$ такое подмножество $\mathfrak{R}_N$, что последовательность l-значных случайных величин $\{\rho_t\}_{t\in N_1}$ относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}^d_{N,m}$ является последовательностью независимых в совокупности и одинаково распределенных случайных величин.

Положим $q_i \triangleq Q\{\rho_t = a_i\}$ для $i = 1, 2, \dots, l$. Если меры P, Q принадлежат $\mathfrak{R}^d_{N,m}$, то, очевидно $0 < p_i < 0$ и $0 < q_i < 0$ для любого $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, причем $p_1 + p_2 + \dots + p_l = q_1 + q_2 + \dots + q_l = 1$. Известно [6], что в данном случае производная Радона–Никодима вероятностной меры Q относительно вероятностной меры P имеет вид

$$\frac{dQ}{dP}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N) = \prod_{i=1}^{l} \left(\frac{q_i}{p_i}\right)^{\sum_{t=1}^{N} 1_{\{\rho_t = a_i\}}}$$

Отметим, что в данном случае:

i) $\mathfrak{R}^d_{N,m} \neq \varnothing$;

ii) $\mathfrak{R}^d_{N,m}$ — выпуклое относительно слабо компактное множество.

Пусть φ: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^1$ есть ограниченная борелевская функция, обозначаемая $\varphi(x)$. Положим, что платежное обязательство имеет вид $f_N(S_\bullet) = \varphi(x)|_{x=S_N} = \varphi(S_N)$.

В данном параграфе рассматривается задача построения минимаксного хеджирующего портфеля европейского опциона с горизонтом N и платежным обязательством $\varphi(S_N)$ на описанном выше неполном конечном $(1,S)$-рынке.

Как нетрудно проверить, в данном случае справедливы утверждения теорем 10–15 и, значит, существует вероятностная мера Q^*_m, относительно которой рассматриваемый $(1,S)$-рынок является наихудшим полным. Однако утверждение теоремы 14 не дает явного выражения переходной вероятности за один шаг последовательности $(S_t,\mathcal{F}_t)_{t\in N_0}$. Поэтому, учитывая сделанные выше предположения, здесь мы рассматриваем рекуррентное соотношение (8), при помощи которого нами будет найдено явное выражение этой переходной вероятности, а также построен минимаксный хеджирующий портфель.

5.3. В данном разделе перепишем рекуррентное соотношение (8) применительно ко всем сделанным выше предположениям и замечаниям.

Введем обозначение:

$$\overline{V}^m_t \triangleq \inf_{\gamma^N_{t+1}\in D^N_{t+1}} \sup_{Q\in\mathfrak{R}^d_{N,m}} \mathbf{M}^Q\Big[\exp\Big\{\varphi(S_N)-\sum_{i=t+1}^{N}\gamma_i\Delta S_i\Big\}\Big|\mathcal{F}^S_t\Big]. \qquad (109)$$

Проводя рассуждения, аналогичные тем, что проводились при доказательстве теоремы 1, легко установить, что в рассматриваемом случае последовательность $\{\overline{V}^m_t,\mathcal{F}^S_t\}_{t\in N_1}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\overline{V}^m_{t-1} = \inf_{\gamma\in D_t} \sup_{Q\in\mathfrak{R}^d_{N,m}} \mathbf{M}^Q\left[\overline{V}^m_t e^{-\gamma S_{t-1}\rho_t}\big|\mathcal{F}^S_{t-1}\right], \quad \overline{V}^m_t|_{t=N} = e^{\varphi(S_N)}. \qquad (110)$$

Основным содержанием данного раздела является доказательство следующего утверждения.

Теорема 16. *Пусть выполнено условие (ρ), а последовательность $\{S_t,\mathcal{F}^S_t\}_{t\in N_0}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению* (108). *Пусть $\varphi(x)$ — ограниченная борелевская функция, а $\mathcal{F}^S_t$-измеримая случайная величина $\overline{V}^m_t$, определенная* (109), *удовлетворяет рекуррентному соотношению* (110).

Тогда существует такая борелевская функция $\overline{V}^m_t(x)$, со значениями в $\mathbf{R}^+$ и определенная на $N_0\times\mathbf{R}^+$, что P-п. н. имеет место соотношение $\overline{V}^m_t=\overline{V}^m_t(x)|_{x=S_t}$ для любого $t\in N_0$, причем для любых $t\in N_1$ и $x\in\mathbf{R}^+$ функция $\overline{V}^m_t(x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\overline{V}^m_{t-1}(x)=\inf_{\gamma\in\mathbf{R}^1}\sup_{\mathcal{Q}}\Big(\sum_{i=1}^{l}\overline{V}^m_t(x(1+a_i))e^{-\gamma x a_i}q_i\Big), \quad \overline{V}^m_t|_{t=N}=e^{\varphi(x)}, \qquad (111)$$

в котором верхняя грань берется по множеству $\mathcal{Q}$ всех тех $q_i\in(0,1)$, $l=1,2,\dots,l$, которые удовлетворяют соотношению $q_1+q_2+\dots+q_l=1$.

Доказательство теоремы 16. Установим сначала, что для любого $t \in N_1$ множество D_t совпадает $\mathbf{R}^1$. Для этого достаточно доказать, что для любых $t \in N_1$ и $\gamma \in \mathbf{R}^1$

$$\sup_{Q \in \mathfrak{R}^d_{N,m}} \mathrm{M}^Q \left[\overline{V}^m_t e^{-\gamma S_{t-1}\rho_t} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1} \right] < \infty \quad P\text{-п. н.} \tag{112}$$

Сначала заметим, что если $\sup_{x \in \mathbf{R}^1} |\varphi(x)| \leqslant c_6$, где c_6 — положительная константа, то для любого $t \in N_0$ справедливы неравенства

$$0 \leqslant \overline{V}^m_t \leqslant e^{c_6}. \tag{113}$$

Неравенство (113) устанавливается точно так же, как аналогичное неравенство в доказательстве теоремы 3, поэтому его обоснование не приводим.

Из (108) следует, что для любого $t \in N_0$ случайная величина S_t допускает представление

$$S_t = S_0 \prod_{i=1}^{t} (1 + \rho_i). \tag{114}$$

Попутно заметим, что если $\mathcal{F}^\rho_t \triangleq \sigma\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t\}$, то из (114) следует, что $\mathcal{F}^S_t = \mathcal{F}^\rho_t$ для любого $t \in N_1$. Кроме того, из (114) и условий (ρ) следует, что для любого $t \in N_0$ существует такая константа c_7, что

$$0 < S_t \leqslant c_5(1 + a_l)^t \leqslant c_7. \tag{115}$$

В силу леммы Дынкина–Евстигнеева [5] для любых $t \in N_1$, $Q \in \mathfrak{R}^d_{N,m}$ и $\gamma \in D_t$ имеем:

$$0 \leqslant \mathrm{M}^Q \left[\overline{V}^m_t e^{-\gamma S_{t-1}\rho_t} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1} \right] = \mathrm{M}^Q \left[\overline{V}^m_t e^{-\gamma x \rho_t} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1} \right] \Big|_{x = S_{t-1}}, \tag{116}$$

что, в силу неравенства (113), независимости в совокупности семейства случайных величин $\{\rho_t\}_{t \in N_1}$ относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}^d_{N,m}$ и условий (ρ), влечет за собой неравенства: для любых $t \in N_1$ и $x, \gamma \in \mathbf{R}^1$

$$\mathrm{M}^Q \left[\overline{V}^m_t e^{-\gamma x \rho_t} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1} \right] \leqslant e^{c_6} \mathrm{M}^Q \left[e^{-\gamma x \rho_t} \middle| \mathcal{F}^S_{t-1} \right]$$

$$= e^{c_6} \mathrm{M}^Q e^{-\gamma x \rho_t} = e^{c_6} \sum_{i=1}^{l} e^{-\gamma x a_i} q_i \leqslant e^{c_6} l e^{\gamma x a_1}. \tag{117}$$

Поэтому из и условий (ρ) следует (112). Стало быть, для любого $t \in N_1$ справедливо равенство $D_t = \mathbf{R}^1$.

Установим теперь, что $\overline{V}^m_t$ — марковская случайная функция. Последнее означает, что на $N_0 \times \mathbf{R}^+$ существует такая борелевская функция $\overline{V}^m_t(x)$ со значениями в $\mathbf{R}^+$, что

$$\overline{V}^m_t = \overline{V}^m_t(x)|_{x = S_t} \quad \text{для любого} \quad t \in N_1.$$

Для доказательства этого утверждения нам понадобится ряд дополнительных построений. Поскольку $\overline{V}^m_t$ есть $\mathcal{F}^S_t$-измеримая функция, в силу теоремы Бореля для любого $t \in N_0$ существует такая определенная на $(\mathbf{R}^+)^{t+1}$ борелевская функция $\widetilde{V}_t(x_0, x_1, \ldots, x_t)$, где $x_i \in \mathbf{R}^+$, $i = 0, 1, \ldots, t$ со значениями в $\mathbf{R}^+$, что

$$\overline{V}^m_t = \widetilde{V}_t(x_0, x_1, \ldots, x_t)|_{x_i = S_i, \; i = 0,1,\ldots,t} \quad P\text{-п. н.}$$

Поэтому для любых $t \in N_1$, $Q \in \mathfrak{R}^d_{N,m}$ и $\gamma \in D_t$ согласно (108), лемме Дынкина–Евстигнеева и условиям (ρ) справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}^Q\left[\overline{V_t^m}e^{-\gamma S_{t-1}\rho_t}\Big|\mathcal{F}^S_{t-1}\right] = \mathrm{M}^Q\left[\widetilde{V}_t(S_0,S_1,\ldots,S_{t-1},S_t)e^{-\gamma S_{t-1}\rho_t}\Big|\mathcal{F}^S_{t-1}\right]\\
&\quad= \mathrm{M}^Q\left[\widetilde{V}_t(S_0,S_1,\ldots,S_{t-1},S_{t-1}(1+\rho_t))e^{-\gamma S_{t-1}\rho_t}\Big|\mathcal{F}^S_{t-1}\right]\\
&\quad= \mathrm{M}^Q\left[\widetilde{V}_t(x_0,x_1,\ldots,x_{t-1},x_{t-1}(1+\rho_t))e^{-\gamma x_{t-1}\rho_t}\Big|\mathcal{F}^S_{t-1}\right]\Big|_{x_i=S_i,\ i=0,1,\ldots,t-1}\\
&\quad= \mathrm{M}^Q\left[\widetilde{V}_t(x_0,x_1,\ldots,x_{t-1},x_{t-1}(1+\rho_t))e^{-\gamma x_{t-1}\rho_t}\right]\Big|_{x_i=S_i,\ i=0,1,\ldots,t-1}\\
&\quad= \sum_{i=1}^{l}\widetilde{V}_t(x_0,x_1,\ldots,x_{t-1},x_{t-1}(1+a_i))e^{-\gamma x_{t-1}a_i}q_i|_{x_i=S_i,\ i=0,1,\ldots,t-1}\\
&\quad= \sum_{i=1}^{l}\widetilde{V}_t(S_0,S_1,\ldots,S_{t-1},S_{t-1}(1+a_i))e^{-\gamma S_{t-1}a_i}q_i. \qquad (118)
\end{aligned}$$

Из (118) следует, что для любых $t \in N_1$, $\gamma \in D_t$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
&\sup_{Q\in\mathfrak{R}^d_{N,m}} \mathrm{M}^Q\left[\overline{V_t^m}e^{-\gamma S_{t-1}\rho_t}\Big|\mathcal{F}^S_{t-1}\right]\\
&\qquad= \sup_{\mathcal{Q}}\sum_{i=1}^{l}\widetilde{V}_t(S_0,S_1,\ldots,S_{t-1},S_{t-1}(1+a_i))e^{-\gamma S_{t-1}a_i}q_i, \qquad (119)
\end{aligned}$$

в котором верхняя грань в правой части берется по множеству $\mathcal{Q}$ всех тех $q_i \in (0,1)$, $l = 1,2,\ldots l$, которые удовлетворяют соотношению $q_1+q_2+\cdots+q_l = 1$. В силу сделанных выше замечаний, соотношение (110) с учетом (119) примет вид

$$\begin{aligned}
&\widetilde{V}_t(S_0,S_1,\ldots,S_{t-1})\\
&\qquad= \inf_{\gamma\in\mathbf{R}^1}\sup_{\mathcal{Q}}\sum_{i=1}^{l}\left[\widetilde{V}_t(S_0,S_1,\ldots,S_{t-1},S_{t-1}(1+a_i))e^{-\gamma S_{t-1}a_i}q_i\right]. \qquad (120)
\end{aligned}$$

Докажем, что $\overline{V_t^m}$ — марковская случайная функция. Сначала установим, что для любого $t \in N_0$ на $\mathbf{R}^+$ существует такая обозначаемая $\overline{V_t^m}(x)$ борелевская функция со значениями в $\mathbf{R}^+$, что функция $\overline{V_t^m}(S_t) \triangleq \overline{V_t^m}(x)|_{x=S_t}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (120). Справедливость этого соотношения докажем методом «обратной» индукции. Поскольку $\overline{V_t^m}|_{t=N} = e^{\varphi(S_N)}$, при $t = N$ соотношение выполнено. Предположим теперь, что $\overline{V_t^m} = \overline{V_t^m}(S_t)$, и докажем, что $\overline{V_{t-1}^m} = \overline{V_{t-1}^m}(S_{t-1})$. Из рекуррентного соотношения (120) имеем представление

$$\overline{V_{t-1}^m} = \inf_{\gamma\in\mathbf{R}^1}\sup_{\mathcal{Q}}\sum_{i=1}^{l}\overline{V_t^m}(S_{t-1}(1+a_i))e^{-\gamma S_{t-1}a_i}q_i. \qquad (121)$$

Так как правая часть (121) измерима относительно σ-алгебры $\sigma\{S_{t-1}\}$, порожденной случайной величиной S_{t-1}, то и левая часть (121) измерима относительно σ-алгебры $\sigma\{S_{t-1}\}$. Значит, P-п. н. выполняется равенство $\overline{V_{t-1}^m} = \overline{V_{t-1}^m}(S_{t-1})$. Стало быть, $\overline{V_t^m}$ — марковская случайная функция. Следовательно, рекуррентное соотношение (121) примет вид (111). Доказательство закончено.

5.4. В данном разделе будет установлено, что в рекуррентном соотношении (111) «внутренняя» верхняя и «внешняя» нижняя грани достигаются. Здесь будет доказано также существование на рассматриваемом $(1,S)$-рынке единственной мартингальной меры.

Теорема 17. *Пусть выполнены условия теоремы* 16. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Для любых* $t \in N_1$, $x \in \mathbf{R}^+$ *борелевская функция* $\ln \overline{V}_t^m(x)$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$\begin{aligned} &\ln \overline{V}_{t-1}^m(x) = \inf_{\gamma \in \mathbf{R}^1} \max_{1 \leqslant i \leqslant l} [\ln \overline{V}_t^m(x(1+a_i)) - \gamma x a_i], \\ &\ln \overline{V}_t^m(x)\big|_{t=N} = \varphi(x). \end{aligned} \tag{122}$$

2) *Существуют такие отображения* $i^*\colon N_1 \times \mathbf{R}^+ \to \Gamma$, $j^*\colon N_1 \times \mathbf{R}^+ \to \Gamma$ *и* $\gamma^*\colon N_1 \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^1$, *обозначаемые, соответственно,* $i_t^*(x)$, $j_t^*(x)$, $\gamma_t^*(x)$, *что*

$$\begin{aligned} \inf_{\gamma \in \mathbf{R}^1} \max_{1 \leqslant i \leqslant l} [\ln \overline{V}_t^m(x(1+a_i)) - \gamma\, x a_i] &= \ln \overline{V}_t^m(x(1+a_{i_t^*(x)})) - \gamma_t^*(x)\, x a_{i_t^*(x)} \\ &= \ln \overline{V}_t^m(x(1+a_{j_t^*(x)})) - \gamma_t^*(x)\, x a_{j_t^*(x)}, \end{aligned} \tag{123}$$

причем для любых $t \in N_1$ *и* $x \in \mathbf{R}^+$:

а) $a_{i_t^*(x)} < 0$, $a_{j_t^*(x)} > 0$, *а* $\gamma_t^*(x)$ *имеет вид*

$$\gamma_t^*(x) = \frac{1}{x\,(|a_{i_t^*(x)}| + a_{j_t^*(x)})} \ln \frac{\overline{V}_t^m(x(1+a_{j_t^*(x)}))}{\overline{V}_t^m(x\,(1+a_{i_t^*(x)}))}; \tag{124}$$

б) *рекуррентное соотношение* (122) *с учетом* (123) *и* (124) *принимает вид*

$$\begin{aligned} &\ln \overline{V}_{t-1}^m(x) = (1-q_t^*(x)) \ln \overline{V}_t^m(x(1+a_{i_t^*(x)})) + q_t^*(x) \ln \overline{V}_t^m(x(1+a_{j_t^*(x)})), \\ &\ln \overline{V}_t^m(x)\big|_{t=N} = \varphi(x), \end{aligned} \tag{125}$$

где

$$q_t^*(x) = |a_{i_t^*(x)}| / (|a_{i_t^*(x)}| + a_{j_t^*(x)}). \tag{126}$$

3) *Существует единственная мартингальная мера* Q_m^*, *т. е. такая вероятностная мера, что*

$$\mathbf{M}^{Q_m^*}(\rho_t | \mathcal{F}_{t-1}^S) = 0 \quad \textit{для любого} \quad t \in N_1, \tag{127}$$

относительно которой:

i) *марковская случайная функция* $\{\overline{V}_t^m(S_t), \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению* (125);

ii) *последовательность* $(S_t, \mathcal{F}_t^S)_{t \in N_0}$, *удовлетворяющая рекуррентному соотношению* (108), *является такой неоднородной марковской цепью, что при каждом* $t \in N_1$ *случайная величина* ρ_t *принимает два значения* $a_{i_t^*(S_{t-1})}$ *и* $a_{j_t^*(S_{t-1})}$ *с условными вероятностями*

$$\begin{aligned} Q_m^*\{\rho_t = a_{i_t^*(S_{t-1})} | S_{t-1}\} &= 1 - q_t^*(S_{t-1}), \\ Q_m^*\{\rho_t = a_{j_t^*(S_{t-1})} | S_{t-1}\} &= q_t^*(S_{t-1}), \end{aligned} \tag{128}$$

где $q_t^*(S_{t-1}) \triangleq q_t^*(x)|_{x=S_{t-1}}$, *а* $q_t^*(x)$ *определяется* (126).

Доказательство теоремы 17. 1) Сначала заметим, что для любых $t \in N_1$ и $x \in \mathbf{R}^+$

$$\sup_{Q} \sum_{i=1}^{l} \overline{V_t^m}(x(1+a_i))e^{-\gamma x a_i} q_i = \max_{Q} \sum_{i=1}^{l} \overline{V_t^m}(x(1+a_i))e^{-\gamma x a_i} q_i.$$

Очевидно, что

$$\max_{Q} \sum_{i=1}^{l} \overline{V_t^m}(x(1+a_i))e^{-\gamma x a_i} q_i = \max_{1 \leqslant i \leqslant l} \overline{V_t^m}(x(1+a_i))e^{-\gamma x a_i}. \tag{129}$$

Поэтому рекуррентное соотношение (111) с учетом (129) примет вид

$$\overline{V_{t-1}^m}(x) = \inf_{\gamma \in \mathbf{R}^1} \max_{1 \leqslant i \leqslant l} \overline{V_t^m}(x(1+a_i))e^{-\gamma x a_i}. \tag{130}$$

Поскольку для любых $t \in N_1$ и $x \in \mathbf{R}^+$ функция $\overline{V_t^m}(x)$ положительна, из (130) следует, что $\ln \overline{V_t^m}(x)$ удовлетворяет (122).

2) Введем обозначение:

$$\psi(t, x, \gamma) \triangleq \max_{1 \leqslant i \leqslant l} [\ln \overline{V_t^m}(x(1+a_i)) - \gamma x a_i].$$

Для любых (t, x) функция $\psi(t, x, \gamma)$ является верхней огибающей [4] по $\gamma \in \mathbf{R}^1$ набора функций
$\{\ln \overline{V_t^m}\ (x(1+a_i)) - \gamma x a_i\}_{i=1,2,\ldots,l}$. Легко установить, что для любых (t, x) функция $\psi(t, x, \gamma)$ является непрерывной кусочно линейной выпуклой ограниченной снизу по $\gamma \in \mathbf{R}^1$, причем $\psi(t, x, \gamma) \to \infty$ при $|\gamma| \to \infty$. Значит, существует такая обозначаемая $\gamma_t^*(x)$ борелевская функция γ^*: $N_0 \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^1$, что $\inf_{\gamma \in \mathbf{R}^1} \psi(t, x, \gamma) = \psi(t, x, \gamma_t^*(x))$.

Найдем явный вид $\gamma_t^*(x)$. Из свойств функции $\psi(t, x, \gamma)$ следует, что для каждого (t, x) в силу условия (ρ) найдутся такие $i^*, j^* \in \Gamma$ (зависящие от (t, x)), обозначаемые ниже $i_t^*(x)$ и $j_t^*(x)$, что:

а) $a_{i_t^*(x)} < 0$, при этом

$$\psi(t, x, \gamma_t^*(x)) = \ln \overline{V_t^m}(x(1 + a_{i_t^*(x)})) - \gamma_t^*(x) x a_{i_t^*(x)}; \tag{131}$$

б) $a_{j_t^*(x)} > 0$, при этом

$$\psi(t, x, \gamma_t^*(x)) = \ln \overline{V_t^m}(x(1 + a_{j_t^*(x)})) - \gamma_t^*(x) x a_{j_t^*(xt)}. \tag{132}$$

Очевидно, что $i_t^*(x) < j_t^*(x)$ при каждом (t, x). Из (131) и (132) следует, что $\gamma_t^*(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\ln \overline{V_t^m}(x(1 + a_{i_t^*(x)})) - \gamma_t^*(x) x a_{i_t^*(x)} = \ln \overline{V_t^m}(x(1 + a_{j_t^*(x)})) - \gamma_t^*(x) x a_{j_t^*(x)}. \tag{133}$$

Разрешая уравнение (133) относительно $\gamma_t^*(x)$, получаем (124).

3) Рекуррентное соотношение (122) с учетом (124) и (132) после элементарных преобразований примет вид (125).

4) Из (125), (126) следует, что существует такая вероятностная мера Q_m^*, относительно которой: i) $\{S_t\}_{t \in N_0}$ является неоднородной марковской цепью; ii) для любого $t \in N_1$ случайная величина ρ_t принимает значения $a_{i_t^*(S_{t-1})}$ и $a_{j_t^*(S_{t-1})}$ с условными вероятностями $Q_m^*\{\rho_t = a_{i_t^*(S_{t-1})} | S_{t-1}\} = 1 - q_t^*(S_{t-1})$ и $Q_m^*\{\rho_t = a_{j_t^*(S_{t-1})} | S_{t-1}\} = q_t^*(S_{t-1})$ соответственно, где $q_t^*(S_{t-1}) = q_t^*(x)|_{x=S_{t-1}}$, причем $q_t^*(x)$ определяется (126), что немедленно влечет за собой (127). Из (127) также следует, что мера Q_m^* — единственная мартингальная. Доказательство закончено.

5.5. В данном разделе будет доказано, что построенная в разделе 5.3 мера Q_m^* является наихудшей.

Теорема 18. *Пусть выполнены условия теоремы* 17. *Тогда вероятностная мера Q_m^* является наихудшей.*

Доказательство теоремы 18 проведем методом «от противного», т.е. предположим, что мера Q_m^* не является наихудшей. Из сделанного предположения следует, что найдется такое $t \in N_0$, что в силу (121) справедливо неравенство

$$1 = \inf_{\gamma\in\mathbf{R}^1} \sup_{Q\in\mathfrak{R}^d_{N,m}} \mathrm{M}^Q\left[\frac{\overline{V}_t^m}{\overline{V}_{t-1}^m}e^{-\gamma\Delta S_t}\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right]$$
$$> \inf_{\gamma\in\mathbf{R}^1} \mathrm{M}^{Q_m^*}\left[\exp\{\Delta\ln\overline{V}_t^m - \gamma\Delta S_t\}\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right]. \qquad (134)$$

Выше (см. второе утверждение теоремы 17) было установлено существование такой $\mathcal{F}_{t-1}$-измеримой случайной величины $\gamma_t^* \triangleq \gamma_t^*(x)|_{x=S_{t-1}}$, что

$$\inf_{\gamma\in\mathbf{R}^1} \mathrm{M}^{Q_m^*}\left[\exp\{\Delta\ln\overline{V}_t^m - \gamma\Delta S_t\}\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right] = \mathrm{M}^{Q_m^*}\left[\exp\{\Delta\ln\overline{V}_t^m - \gamma_t^*\Delta S_t\}\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right].$$

Из неравенства (134) и последнего равенства следует неравенство

$$0 > \ln\mathrm{M}^{Q_m^*}\left[\exp\{\Delta\ln\overline{V}_t^m - \gamma_t^*\Delta S_t\}\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right]. \qquad (135)$$

Неравенство (135) при помощи неравенства Иенсена можно усилить:

$$0 > \mathrm{M}^{Q_m^*}\left[\Delta\ln\overline{V}_t^m - \gamma_t^*\Delta S_t\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right]. \qquad (136)$$

С другой стороны, из (127) следует мартингальное свойство последовательности $\{S_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in N_0}$ относительно меры Q_m^*. Поэтому из (125) и (127) имеем

$$0 = \mathrm{M}^{Q_m^*}\left[\Delta\ln\overline{V}_t^m\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right] = \mathrm{M}^{Q_m^*}\left[\Delta\ln\overline{V}_t^m - \gamma_t^*\Delta S_t\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right]. \qquad (137)$$

Сравнивая (136) и (137), приходим к противоречию. Значит, наше предположение неверно. Стало быть, мера Q_m^* — наихудшая. Доказательство закончено.

5.6. В данном разделе будет установлено, что относительно меры Q_m^* платежное обязательство допускает S-представление. Основным результатом данного пункта является следующее утверждение.

Теорема 19. *Пусть выполнены условия теоремы* 18. *Тогда ограниченное платежное обязательство $\varphi(S_N)$ относительно мартингальной меры Q_m^* допускает S-представление, т. е. справедливо равенство*

$$\varphi(S_N) = \mathrm{M}^{Q_m^*}\left[\varphi(S_N)|\mathcal{F}_0\right] + \sum_{i=1}^N \gamma_i^*(S_{i-1})S_{i-1}\rho_i, \qquad (138)$$

где $\gamma_i^*(S_{i-1})$ определяется соотношением (124).

Доказательство теоремы 19. Заметим, что из утверждений теорем 17, 18 следует, что рекуррентное соотношение (122) можно записать в виде

$$1 = \mathrm{M}^{Q_m^*}\left[\exp\{\Delta\ln\overline{V}_t^m - \gamma_t^*\Delta S_t\}\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right]. \qquad (139)$$

Докажем, что случайная последовательность $\{\ln \overline{V}_t^m, \mathcal{F}_t\}_{t\in N_0}$ относительно меры Q_m^* удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\Delta \ln \overline{V}_t^m = \gamma_t^* \Delta S_t, \quad \ln \overline{V}_t^m|_{t=0} = \ln \overline{V}_0^m, \quad \ln \overline{V}_t^m|_{t=N} = \varphi(S_N). \tag{140}$$

Действительно, с одной стороны, для любого $t \in N_1$ из равенства (139) в силу неравенства Иенсена следует неравенство

$$0 = \ln \mathrm{M}^{Q_m^*}\Big[\exp\{\Delta \ln \overline{V}_t^m - \gamma_t^* \Delta S_t\}\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\Big] \geqslant \mathrm{M}^{Q_m^*}\Big[\Delta \ln \overline{V}_t^m - \gamma_t^* \Delta S_t\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\Big]. \tag{141}$$

С другой стороны, из доказательства теоремы 18 следует, что имеет место равенство (137). Ясно, что неравенство (141) превратится в равенство тогда и только тогда, когда $(\Delta \ln \overline{V}_t^m - \gamma_t^* \Delta S_t)$ есть $\mathcal{F}_{t-1}^S$-измеримая случайная величина. Отсюда следует рекуррентное соотношение (140). Очевидно, что $\ln \overline{V}_t^m|_{t=0} = \ln \overline{V}_0^m$ и $\ln \overline{V}_t^m|_{t=N} = \varphi(S_N)$. Из (140) следует, что относительно меры Q_m^* имеет место S-представление (138), а также равенство $\ln \overline{V}_0^m = \mathrm{M}^{Q_m^*}[\varphi(S_N)|\mathcal{F}_0]$, поскольку мера Q_m^* — мартингальная. Доказательство закончено.

5.7. В данном разделе будет построен минимаксный хеджирующий портфель европейского опциона на конечном $(1, S)$-рынке.

Теорема 20. *Пусть выполнены условия теоремы* 19. *Тогда неполный конечный* $(1, S)$*-рынок, описываемый рекуррентным соотношением* (108), *с ограниченным платежным обязательством* $\varphi(S_N)$ *является наихудшим полным, т. е. существуют такие мера* Q_m^* *и минимаксный хеджирующий самофинансирующий портфель* $\pi^* = (\beta_t^*, \gamma_t^*)_{t\in N_0}$, *что:*

i) *предсказуемая последовательность* $(\gamma_t^*)_{t\in N_0}$ *определяется при каждом* $t \in N_1$ *соотношением* (124), *причем* γ_0^* *можно выбрать равным нулю;*

ii) *предсказуемая последовательность* $(\beta_t^*)_{t\in N_0}$ *определяется из рекуррентного соотношения*

$$\beta_t^* = \beta_{t-1}^* - S_{t-1}\Delta\gamma_t^*, \quad \beta_t^*|_{t=0} = \beta_0^*, \tag{142}$$

причем β_0^* *можно выбрать равным* $\ln \overline{V}_0^m(S_0)$;

iii) *капитал* $X_t^{\pi^*}$ *портфеля* π^* *в любой момент времени* $t \in N_0$ *допускает представления*

$$X_t^{\pi^*} = \beta_t^* + \gamma_t^* S_t \quad Q_m^*\text{-п. н.}, \tag{143}$$

$$X_t^{\pi^*} = X_0^{\pi^*} + \sum_{i=1}^{t} \gamma_i^* S_{i-1}\rho_i, \tag{144}$$

причем $X_0^{\pi^*} = \ln \overline{V}_0^m(S_0)$, *а* $X_t^{\pi^*} = \ln \overline{V}_t^m(S_t)$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению* (125) *с* $X_N^{\pi^*} = \phi(S_N)$.

Доказательство теоремы 20. Поскольку количество рискового актива γ_t^* в любой момент времени $t \in N_1$ определяется соотношением (124), в силу (19) количество безрискового актива β_t^* в любой момент времени $t \in N_1$ определяется рекуррентным соотношением (142). Поэтому капитал $X_t^{\pi^*}$ портфеля $\pi^* = (\beta_t^*, \gamma_t^*)_{t\in N_0}$ для любого $t \in N_0$ будет иметь вид (143). Из (143) и условия самофинансируемости (19) следует, что «приращение» капитала $\Delta X_t^{\pi^*}$ допускает представление

$$\Delta X_t^{\pi^*} = \gamma_t^* \Delta S_t = \gamma_t^* S_{t-1} \rho_t. \tag{145}$$

Сравнивая (140) и (145), получаем, что для любого $t \in N_1$

$$\Delta X_t^{\pi^*} = \Delta \ln \overline{V}_t^m. \tag{146}$$

Выбирая $X_0^{\pi^*} = \ln \overline{V}_0^m$, из (146) получаем, что для любого $t \in N_0$ справедливо равенство $X_t^{\pi^*} = \ln \overline{V}_t^m$. Отсюда следует, что $X_N^{\pi^*} = \ln \overline{V}_N^m = \varphi(S_N)$. Значит, $(1, S)$-рынок, описываемый рекуррентным соотношением (108), является относительно меры Q_m^* наихудшим полным, а портфель π^*, описываемый рекуррентными соотношениями (124), (125) и (142), является минимаксным хеджирующим. Доказательство закончено.

§ 6. Пример

В данном параграфе рассматривается пример расчета минимаксного хеджирующего портфеля европейского опциона на $(1, S)$-рынке в предположении, что доходность рискового актива представляет собой последовательность независимых в совокупности одинаково распределенных случайных величин, распределение вероятностей которых имеет компактный носитель.

6.1. Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t \in N_0}, P)$ задана согласованная случайная последовательность цен $\{S_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$, удовлетворяющая рекуррентному соотношению (108). Предположим, что относительно базовой меры P случайные величины $\{\rho_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_1}$ являются:

i) независимыми в совокупности и одинаково распределенными;

ii) носителем распределения вероятностей случайной величины ρ_t служит $[a, b]$, причем $-1 < a < 0 < b < \infty$.

Ясно, что в этом случае для любого $t \in N_0$ случайная величина S_t положительна P-п. н. В силу сделанных предположений последовательность $\{S_t\}_{t \in N_0}$ является относительно меры P однородной и марковской последовательностью.

Пусть φ: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^1$ есть ограниченная борелевская функция, обозначаемая $\varphi(x)$. В качестве платежного обязательства выбираем $\varphi(S_N) = \varphi(x)|_{x=S_N}$. Пусть $\mathcal{M}[a, b]$ есть множество вероятностных мер с носителями, сосредоточенными на отрезке $[a, b]$, а $\mathcal{M}^N[a, b] \triangleq \underbrace{\mathcal{M}[a, b] \times \cdots \times \mathcal{M}[a, b]}_{N}$. Известно [2], что $\mathcal{M}[a, b]$ и $\mathcal{M}^N[a, b]$ — выпуклые компакты (в топологии сходимости вероятностных мер).

Обозначим $\mathfrak{R}_{N,m}^c$ такое подмножество $\mathfrak{R}_N$, что случайные величины $\{\rho_t\}_{t \geqslant 1}$ являются относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}_{N,m}^c$ независимыми в совокупности и одинаково распределенными.

Приведем некоторые свойства множества $\mathfrak{R}_{N,m}^c$:

i) $\mathfrak{R}_{N,m}^c \neq \varnothing$;

ii) $\mathfrak{R}_{N,m}^c$ выпукло и относительно слабо компактно;

iii) относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}_{N,m}^c$ последовательность, определяемая (108), является однородной марковской.

Легко убедиться в том, что описанный выше $(1, S)$-рынок является неполным.

6.2. В этом параграфе приводится решение задачи построения минимаксного хеджирующего портфеля европейского опциона с горизонтом N на описанном выше неполном $(1, S)$-рынке.

Отметим, что в данном случае выполнены все условия теорем 4, 11, 13–15, поэтому существуют: 1) единственная наихудшая мартигальная сингулярная (относительно базовой меры) вероятностная мера, обозначаемая Q_N^*, относительно которой рассматриваемый $(1, S)$-рынок является наихудшим полным; 2) минимаксный хеджирующий портфель, обозначаемый π^*.

Следовательно, мера $Q_N^* \in |\mathcal{M}[a,b]\backslash\mathfrak{R}_{N,m}^c) \cap \mathfrak{M}_N$ есть единственная мартингальная мера и, стало быть, Q_N^* является крайней точной этого множества. В этом параграфе, основываясь на общей теореме Шоке [6, 7], мы устанавливаем явный вид распределения случайной величины ρ_t (относительно меры Q_N^*) и строим минимаксный хеджирующий портфель π^*.

6.3. В данном разделе устанавливается, что носителем меры Q_N^* служит $\{a,b\}^N$.

Так как $Q_N^* \in (\mathcal{M}[a,b]\backslash\mathfrak{R}_{N,m}^c) \cap \mathfrak{M}_N$, то, очевидно, Q_N^* является продакт мерой, т.е. $Q_N^* = \underbrace{Q_1^* \times \cdots \times Q_1^*}_{N}$, где $Q_1^* \in \mathcal{M}[a,b]$. Так как мера Q_N^* — мартингальная, то $\mathrm{M}^{Q_1^*}\rho_1 = 0$. Значит, точка нуль — это барицентр [7] меры Q_1^*. Ясно, что мера Q_1^* удовлетворяет условиям теоремы Шоке [7] (см. теорему 25 на с. 283), согласно которой носитель меры Q_1^* сосредоточен на крайних точках отрезка $[a,b]$, а это значит, что случайная величина ρ_1 относительно меры Q_1^* принимает два значения, a и b, с вероятностями $q^* = Q_1^*\{\rho_1 = a\}$ и $1 - q^*$ соответственно. Из того, что точка нуль является барицентром меры Q_1^*, сразу следует, что $q^* = b/(b + |a|)$. Таким образом, установлено, что $\operatorname{supp} Q_N^* = \{a,b\}^N$.

6.4. Обозначим

$$\overline{V_t^{mc}} \triangleq \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} \ \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_{N,m}^c} \mathrm{M}^Q \left[\exp\left\{ \varphi(S_N) - \sum_{i=t+1}^{N} \gamma_i S_{i-1}\rho_i \right\} \middle| \mathcal{F}_t^S \right]. \tag{147}$$

Поскольку Q_N^* — единственная мартингальная наихудшая вероятностная мера, то (147) примет вид

$$\overline{V_t^{mc}} \triangleq \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} \mathrm{M}^{Q_N^*} \left[\exp\left\{ \varphi(S_N) - \sum_{i=t+1}^{N} \gamma_i S_{i-1}\rho_i \right\} \middle| \mathcal{F}_t^S \right].$$

Поэтому из утверждения теоремы 1 из [3] следует, что $(\overline{V_t^{mc}}, \mathcal{F}_t^S)_{t \in N_0}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\overline{V_t^{mc}} = \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \mathrm{M}^{Q_N^*} \left[\overline{V_{t+1}^{mc}} e^{-\gamma S_t \rho_{t+1}} \middle| \mathcal{F}_t^S \right], \quad \overline{V_t^{mc}}|_{t=N} = e^{\varphi(S_N)}. \tag{148}$$

Из результатов раздела 6.3 следует, что носитель меры Q_N^* сосредоточен в точках a и b, поэтому проводя рассуждения, аналогичные тем, которые содержатся в разделах 5.2 и 5.3 § 5, нетрудно установить, что для любого $t \in N_0$:

1) $D_t = \mathbf{R}^1$;

2) существует такая борелевская функция, обозначаемая $\overline{V_t^{mc}}(x)$, что:

а) $\overline{V_t^{mc}} = \overline{V_t^{mc}}(x)|_{x=S_t}$;

б) $\overline{V_t^{mc}}(x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\overline{V_{t-1}^{mc}}(x) = \inf_{\gamma \in \mathbf{R}^1} \left[\overline{V_t^{mc}}(x(1+a)) e^{\gamma x |a|} q^* + \overline{V_t^{mc}}(x(1+b)) e^{-\gamma x b} p^* \right], \tag{149}$$

$\overline{V_t^{mc}}(x)|_{t=N} = e^{\varphi(x)}$.

Заметим, что под знаком нижней грани в правой части (149) стоит строго выпуклая по $\gamma \in \mathbf{R}^1$ функция, поэтому существует такая единственная определенная на $N_1 \times \mathbf{R}^+$ функция $\gamma_t^*(x)$ со значениями в $\mathbf{R}^1$, что

$$\begin{aligned} &\inf_{\gamma \in \mathbf{R}^1} \left[\overline{V_t^{mc}}(x(1+a)) e^{\gamma x |a|} q^* + \overline{V_t^{mc}}(x(1+b)) e^{-\gamma x b} p^* \right] \\ &\quad = \overline{V_t^{mc}}(x(1+a)) e^{\gamma_t^*(x) x |a|} q^* + \overline{V_t^{mc}}(x(1+b)) e^{-\gamma_t^*(x) x b} p^*. \end{aligned} \tag{150}$$

Из (150) следует, что $\gamma_t^*(x)$ имеет вид

$$\gamma_t^*(x) = \frac{1}{x(b+|a|)} \ln \frac{\overline{V}_t^{mc}(x(1+b))}{\overline{V}_t^{mc}(x(1+a))}. \tag{151}$$

Рекуррентное соотношение (149) после элементарных преобразований с учетом (150), (151) примет вид

$$\overline{V}_{t-1}^{mc}(x) = (\overline{V}_t^{mc}(x(1+a)))^{q^*} (\overline{V}_t^{mc}(x(1+b)))^{p^*}, \quad \overline{V}_t^{mc}(x)|_{t=N} = e^{\varphi(x)}. \tag{152}$$

Отсюда следует, что $\ln \overline{V}_t^{mc}(x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\ln \overline{V}_{t-1}^{mc}(x) = q^* \ln \overline{V}_t^{mc}(x(1+a)) + p^* \ln \overline{V}_t^{mc}(x(1+b)), \quad \ln \overline{V}_t^{mc}(x)|_{t=N} = \varphi(x). \tag{153}$$

Легко установить, что решение рекуррентного соотношения (153) имеет вид

$$\ln \overline{V}_t^{mc}(x) = \sum_{i=0}^{N-t} \varphi(x(1+a)^i(1+b)^{N-t-i}) C_{N-t}^i (q^*)^i (p^*)^{N-t-i}, \tag{154}$$

которое совпадает с известной формулой (3) (см. [1, с. 744]).

Формулы (151) и (154) дают явный вид количества рискового актива в любой момент времени $t \in N_1$ $\gamma_t^* = \gamma_t^*(x)|_{x=S_{t-1}}$.

Из (19) следует, что β_t^* — количество безрискового актива в любой момент времени $t \in N_0$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\beta_t^* = \beta_{t-1}^* - S_{t-1}\Delta\gamma_t^*, \quad \beta_t^*|_{t=0} = \beta_0^*.$$

Без ограничения общности можно считать β_0^* равным $\ln \overline{V}_0^{mc}$, а $\gamma_0^* = 0$. Таким образом, мы построили самофинансирующий портфель $\pi^* = (\beta_t^*, \gamma_t^*)_{t \in N_0}$. В силу утверждения теоремы 15 для любого $t \in N_0$ капитал портфеля $\pi^* \in \mathrm{SF}$. Капитал $X_t^{\pi^*}$ допускает представление $X_t^{\pi^*} = \ln \overline{V}_t^{mc}$ Q_N^*-п. н., где $\ln \overline{V}_t^{mc} = \ln \overline{V}_t^{mc}(x)|_{x=S_t}$, причем

i) $X_t^{\pi^*}|_{t=N} = \varphi(S_N)$ Q_N^*-п. н.;

ii) начальный капитал $X_0^{\pi^*} = \ln \overline{V}_0^{mc}$;

iii) $X_t^{\pi^*} = X_0^{\pi^*} + \sum_{i=1}^t \gamma_i^* S_{i-1}\rho_i$ Q_N^*-п. н.

В силу теорем 14, 15 рассматриваемый $(1, S)$-рынок является наихудшим полным, а портфель π^* — минимаксным хеджирующим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. Теория. М.: Фазис, 1998, 544 с.
2. *Бертсекас Д.*, *Шрив С.* Оптимальное стохастическое управление. М.: Наука, 1985, 280 с.
3. *Бояринцева Н. С.*, *Хаметов В. М.* Новая теорема о представлении мартингалов (Дискретное время). — Матем. заметки, 2004, т. 75, в. 1, с. 40–54.
4. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973, 469 с.
5. *Дынкин Е. Б.*, *Евстигнеев И. В.* Регулярные условные математические ожидания соответствий. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. XXI, в. 2, с. 334–347.
6. *Фелпс Р.* Лекции о теоремах Шоке. М.: Мир, 1968, 112 с.
7. *Мейер П. А.* Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973, 324 с.

Поступила в редакцию
20.XII.2010

ISSN 0869-8325

ТОМ 18
Выпуск 2

ОБОЗРЕНИЕ ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

В выпуске:

Секция **«Финансовая и страховая математика»**
Секция **«Прикладная вероятность и статистика»**
Секция **«Математические методы экологии»**

1 – 8
V
•
2011

ДВЕНАДЦАТЫЙ ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ
ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ

ВЕСЕННЯЯ СЕССИЯ.
НАУЧНЫЕ ДОКЛАДЫ. ЧАСТЬ II

Редакция журнала «ОПиПМ» • МОСКВА
2011