Математические заметки

Том 95 выпуск 6 июнь 2014

УДК 517.91

О неосциллирующих решениях уравнений типа Эмдена–Фаулера

В. С. Самовол

В работе рассматриваются асимптотические свойства неосциллирующих решений уравнений типа Эмдена–Фаулера произвольного порядка. Статья содержит результаты исследования асимптотических свойств решений указанного уравнения, имеющих целочисленную асимптотику, а также решений, возникающих при быстром убывании коэффициента уравнения. В работе используются методы степенной геометрии при анализе асимптотического поведения решений рассматриваемых уравнений.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm10458

Введение. Рассматривается уравнение следующего вида

$$
\begin{gathered}
y^{(n)}=\frac{d^n y}{dx^n}=p(x)|y|^\sigma \operatorname{sgn} y, \qquad n\geqslant 2, \quad \sigma>1,\\
y=y(x), \qquad p(x)\in C^0, \quad x,y\in\mathbb{R}^1.
\end{gathered} \tag{1}
$$

При $n=2$ и $p(x)=\pm x^\beta$, $x>0$, $\beta=\mathrm{const}$, это известное уравнение Эмдена–Фаулера, связанное с изучением ряда физических процессов. Уравнение (1) изучалось в многочисленных работах (см., в частности, [1]–[9]).

Целью данной работы является системное описание неосциллирующих (т.е. сохраняющих знак) решений уравнения (1) при $x\to\pm\infty$ в зависимости от параметров роста функции $p(x)$. Также будут рассматриваться решения, уходящие в бесконечность при $x\to a\ne\pm\infty$.

В данной работе мы исследуем неосциллирующие решения уравнения (1), если выполняется следующее условие:

$$
|p(x)|\leqslant c|x|^{-n-\delta}, \qquad c,\delta=\mathrm{const}>0, \quad |x|\geqslant x_0>0. \tag{2}
$$

Для сравнения отметим, что в [1] содержится полное описание неосциллирующих решений уравнения (1) при выполнении условия

$$
|p(x)|\geqslant c|x|^{-n}, \qquad c=\mathrm{const}>0, \quad |x|\geqslant x_0>0. \tag{3}
$$

Напомним следующее определение.

Определение 1. Решение $y(x)$ уравнения (1) называется *продолжаемым вправо* (*влево*), если оно определено в некоторой окрестности $+\infty$ $(-\infty)$.

Непродолжаемыми в каком-либо направлении мы будем считать решения, не являющиеся продолжаемыми в соответствующем направлении.

В данной статье мы рассматриваем сохраняющие знак продолжаемые и непродолжаемые вправо (влево) решения уравнения (1) и представим асимптотические оценки таких решений при $x \to \pm\infty$.

Следующая теорема (см. [1], [3]) устанавливает существование непродолжаемых решений уравнения (1) при $p(x) > 0$.

Теорема 1. *Если $p(x) > 0$, то для любого числа a_1 существует непродолжаемое вправо решение $y(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию*

$$\lim_{x\to a_1-0} |y^{(i)}(x)| = +\infty, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1. \tag{4}$$

Теорема 2. *Если функция $p(x)$ при некотором целом l, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, удовлетворяет условию*

$$|p(x)| \leqslant cx^{-n-l(\sigma-1)-\delta}, \qquad c, \delta = \mathrm{const} > 0, \quad x \geqslant x_0 > 0, \tag{5}$$

то для любых чисел $c_m \neq 0$ уравнение (1) при $\sigma \geqslant 1$ имеет такие продолжаемые вправо решения $y_m(x)$, $m \in \{0, 1, \ldots, l\}$, что при $x \to +\infty$

$$\begin{aligned} &y_m(x) = x^m(c_m + o(x^{-\widetilde{\delta}})), \\ &y_m^{(i)}(x) = m(m-1)\cdots(m-i+1)x^{m-i}(c_m + o(x^{-\widetilde{\delta}})), && 0 \leqslant i \leqslant m, \\ &y_m^{(i)}(x) = o(x^{-i+m-\widetilde{\delta}}), && m+1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ &\widetilde{\delta} = \mathrm{const} > 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Если выполнено условие (5), то любое нетривиальное решение уравнения (1), удовлетворяющее при $x \geqslant x_0$ ограничению

$$|y(x)| \leqslant Dx^l, \qquad D = \mathrm{const} > 0, \tag{7}$$

является одним из решений вида (6), где m – целое число, $m \in \{0, 1, \ldots, l\}$.

В линейном случае $(\sigma = 1)$ существование решений вида (6) доказано в [4], нелинейная ситуация при $n = 2$ изучена в [2], общий нелинейный случай рассмотрен в [5]. При доказательстве теоремы 2 весьма эффективными оказываются методы степенной геометрии (см., например, [9], [10]). В данной работе мы представим такое доказательство.

Из теоремы 2 легко следует

Теорема 3. *Если*

$$0 > p(x) \geqslant -c_1 x^{-(n-1)\sigma-1-\delta}, \qquad c_1, \delta = \mathrm{const} > 0, \quad x \geqslant x_0 > 0, \tag{8}$$

то уравнение (1) имеет продолжаемые вправо решения $y(x)$ вида (6), где $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Других сохраняющих знак при $x \geqslant x_0$ решений уравнение (1) при условии (8) не имеет.

Следующая теорема основана на результатах, содержащихся в работах [3]–[7].

Теорема 4. *Если*

$$0 < p(x) \leqslant c_1 x^{-(n-1)\sigma-1-\delta}, \qquad c_1, \delta = \text{const} > 0, \quad x \geqslant x_0 > 0, \tag{9}$$

то верно следующее:

1) *уравнение* (1) *имеет непродолжаемые вправо решения* $y(x)$, *удовлетворяющие условию* (4);
2) *уравнение* (1) *имеет продолжаемые вправо решения вида* (6), *где* $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$;
3) *уравнение* (1) *имеет продолжаемые вправо решения*, *удовлетворяющие при больших* x *условию*

$$|y(x)| \geqslant c_2 x^{n-1+\delta/(\sigma-1)}, \qquad c_2 = \text{const} > 0. \tag{10}$$

Других сохраняющих знак при $x \geqslant x_0$ *решений уравнение* (1) *при условии* (9) *не имеет*.

Если функция $p(x)$ *удовлетворяет дополнительному условию*

$$p(x) \geqslant c_3 x^{-(n-1)\sigma-1-\delta_1}, \qquad c_3, \delta_1 = \text{const} > 0, \quad x \geqslant x_0, \tag{11}$$

то для любого продолжаемого вправо сохраняющего знак решения уравнения (1) *выполняется оценка*

$$|y(x)| \leqslant c_4 x^{n-1+\delta_1/(\sigma-1)}, \qquad c_4 = \text{const} > 0. \tag{12}$$

Теорема 5. *Если функция* $p(x)$ *при некотором* k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ (*число* k *может быть нецелым*), *удовлетворяет условию*

$$|p(x)| \geqslant c x^{-n-k(\sigma-1)}, \qquad c = \text{const} > 0, \quad x \geqslant x_0 > 0, \tag{13}$$

то любое сохраняющее знак при $x \geqslant x_0$ *решение* $y(x)$ *уравнения* (1) *удовлетворяет либо условию* (4), *либо условию*

$$|y(x)| \leqslant D x^k, \qquad D = \text{const} > 0. \tag{14}$$

Если число k *является целым*, *то вместо* (14) *выполняется более сильная оценка*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x^k} = 0. \tag{15}$$

Следующий результат, относящийся к случаю $0 < \sigma < 1$, доказан в [6]. Ниже мы покажем, что доказательство теоремы 2, основанное на методах степенной геометрии, автоматически дает обоснование и данного утверждения.

Теорема 6. *Если в уравнении* (1) $0 < \sigma < 1$ *и функция* $p(x)$ *при некотором целом* l, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, *удовлетворяет условию* (5), *то для любых чисел* $c_m \neq 0$ *уравнение* (1) *имеет такие продолжаемые вправо решения* $y_m(x)$, $m \in \{l, \dots, n-1\}$, *что при* $x \to +\infty$ *выполняются условия* (6).

Замечание. Впервые решения вида (6) для линейного уравнения (1) (где $\sigma = 1$) были обнаружены в [4]. Для нелинейного случая существование таких решений (см. теорему 2) было доказано в [2], [5]. Открытие методов степенной геометрии [9], [10] делает обнаружение и анализ таких и других решений, обладающих точной степенной асимптотикой, стандартной процедурой.

Результат, приведенный в теореме 5, является новым.

Отметим, что изложенные выше результаты дают возможность описания решений уравнения (1) также и в окрестности левой границы их области определения, что достигается заменой $x = x_0 - u$. При этом уравнения четного порядка сохраняют свой вид, а в уравнениях нечетного порядка функция $p(x)$ меняет знак.

Примеры. Примеры, иллюстрирующие теорему 1, приведены в [1].

Пример 1 (теорема 2). Рассмотрим уравнение

$$y^{(3)} = x^{-6}y^3, \qquad x \geqslant 1, \tag{16}$$

для которого выполняется (5), где $l = \delta = 1$. Используя методы степенной геометрии (см. [9; с. 261–263], вычислим слагаемые асимптотического представления решений, имеющих вид (6). Здесь и ниже мы пользуемся терминологией, принятой в [9].

Многогранник Ньютона данного уравнения представляет собой отрезок $[Q_1, Q_2]$, $Q_1 = (-3, 1)$, $Q_2 = (-6, 3)$. Вершине Q_1 соответствует укороченное уравнение $y^{(3)} = 0$, решениями которого являются функции $y_m = c_m x^m$, $m = 0, 1, 2$, $c_m = \text{const} \neq 0$. Векторные порядки этих решений $P_m = (1, m)$ принадлежат нормальному конусу вершины Q_1, если $(P_m, R) < 0$, $R = Q_2 - Q_1 = (-3, 2)$, что возможно лишь при $m = 0$ или $m = 1$.

Пусть сначала $m = 0$. Тогда сделаем в (16) замену $y = c_0 + u$. Для $u = u(x)$ получим уравнение

$$u^{(3)} = x^{-6}(c_0 + u)^3.$$

Носитель многогранника Ньютона этого уравнения состоит из пяти точек. Сам многогранник является треугольником с вершинами $Q_3 = (-6, 0)$, $Q_4 = (-6, 3)$, $Q_5 = (-3, 1)$. Нас интересует укороченное уравнение, соответствующее ребру $[Q_3, Q_5]$

$$u^{(3)} = c_0^3 x^{-6},$$

которое имеет решение $u = -c_0^3/60x^3$. Мы получили второй член разложения анализируемого решения при $x \to +\infty$. Этот процесс может быть продолжен, но мы здесь ограничимся полученным результатом

$$y_0(x) = c_0 - \frac{c_0^3}{60x^3} + \cdots, \qquad c_0 = \text{const} \neq 0. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь случай $m = 1$. Делая в (16) замену $y = c_1 x + \nu$, получаем уравнение

$$\nu^{(3)} = x^{-6}(c_1 x + \nu)^3.$$

Носитель многогранника Ньютона этого уравнения состоит из пяти точек, а сам многогранник – это треугольник с вершинами $Q_6 = (-3, 0)$, $Q_7 = (-6, 3)$, $Q_8 = (-3, 1)$. Рассмотрим укороченное уравнение, соответствующее ребру $[Q_6, Q_8]$,

$$\nu^{(3)} = c_1^3 x^{-3},$$

решением которого будет $\nu = 0.5c_1^3 \ln x$. Соответственно, уравнение (16) имеет решение следующего вида:

$$y_1(x) = c_1 x + 0.5c_1^3 \ln x + \cdots, \qquad c_1 = \mathrm{const} \neq 0. \tag{18}$$

Детальному анализу решений уравнения (1) методами степенной геометрии мы посвятим одну из следующих статей.

В следующем примере мы покажем, что в случаях, описанных в теоремах 2 и 5, уравнение (1) может иметь решения вида, отличного от (6). Общая оценка для таких решений дана в (14) и (15).

Пример 2 (теоремы 2 и 5). Рассмотрим уравнение

$$y^{(3)} = \frac{y^2 \operatorname{sgn} y}{x^3\sqrt{x}}, \qquad x \geqslant 1, \tag{19}$$

которое удовлетворяет условию (5) при $l = 0$, $\delta = 0.5$ и условию (13) при $k = 0.5$. Исследуем положительные решения данного уравнения, имеющие вид (6). Многогранник Ньютона здесь – это отрезок $[Q_1, Q_2]$, $Q_1 = (-3, 1)$, $Q_2 = (-3.5, 2)$. Вершине Q_1 соответствует укороченное уравнение $y^{(3)} = 0$, имеющее единственное семейство положительных решений $y_0 = c_0 = \mathrm{const} > 0$, векторный порядок которых принадлежит нормальному конусу вершины Q_1. После замены $y = c_0 + u$ получим уравнение

$$u^{(3)} = \frac{(c_0 + u)^2}{x^3\sqrt{x}}.$$

Рассуждая как в примере 1, выделяем укороченное уравнение $u^{(3)} = c_0^2/(x^3\sqrt{x})$, решением которого является функция $u = -8c_0^2/(15\sqrt{x})$, являющаяся вторым членом разложения исследуемых решений. Таким образом, получаем, что рассматриваемое уравнение имеет решение вида (6)

$$y_0(x) = c_0 - \frac{8c_0^2}{15\sqrt{x}} + \cdots, \qquad c_0 = \mathrm{const} > 0.$$

При этом очевидно, что у уравнения (19) имеется также решение $y(x) = 3\sqrt{x}/8$, которое не удовлетворяет условию (6), но удовлетворяет оценке (14) при $k = 0.5$.

Пример 3 (теорема 4). Уравнение

$$y^{(3)} = p(x) y^2 \operatorname{sgn} y, \qquad p(x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant 1, \\ x^{-6}, & x > 1, \end{cases} \tag{20}$$

удовлетворяет условиям (9) и (11) при $\delta = \delta_1 = 1$. Оно имеет решение $y(x) = -60/(x-1)^3$, $x < 1$, удовлетворяющее (4) при $a_1 = 1$, а также решение $y(x) = 6x^3$, $x \geqslant 1$, для которого имеет место (10) и (12). Отметим также, что данное уравнение имеет решения

$$y_0(x) = c_0 - \frac{c_0^2}{60x^3} + \cdots, \qquad y_1(x) = c_1 x - \frac{c_1^2}{6x} + \cdots,$$
$$y_2(x) = c_2 x^2 - c_2^2 (x \ln x - x) + \cdots,$$
$$c_m = \mathrm{const} > 0, \qquad 0 \leqslant m \leqslant 2, \quad x \geqslant 1,$$

удовлетворяющие (6). Приведенные разложения решений получаются с помощью методов степенной геометрии, представленных в предыдущих примерах.

Доказательства теорем. Доказательства ряда утверждений, близких к сформулированным выше теоремам, представленные в ранее опубликованных работах, перегружены, на наш взгляд, техническими деталями и различными ссылками на другие работы, что существенно затрудняет их восприятие и иногда затемняет суть дела. Для таких случаев мы приведем доказательства, позволяющие яснее раскрыть связь между решениями уравнения (1) и характеристиками функции $p(x)$.

В ряде случаев мы будем использовать "универсальную" константу $D > 0$, для которой считаем $\mu D = D$, $D^\mu = D$, $\mu = \text{const} > 0$.

Выше мы уже отмечали, что теорема 1 доказана в [1].

Доказательство теоремы 2. Заметим, что на наличие у уравнения (1) решений вида (6) указывает анализ многогранника Ньютона данного уравнения (см., например, [9; с. 262]).

Пусть условие (5) выполнено при некотором целом l, $0 \leqslant l \leqslant n-1$. Рассмотрим сначала случай $\sigma \geqslant 1$, относящийся к теореме 2. Докажем существование у (1) решений вида (6) для всех целых m, $m \in \{0, 1, \dots, l\}$, c_m – произвольные отличные от нуля константы, $\widetilde{\delta}$ – число, удовлетворяющее условию $0 < \widetilde{\delta} < \delta$. Достаточно рассмотреть только положительные решения (в противном случае делается замена $y = -\widetilde{y}$), т.е. ниже считаем $c_m > 0$.

Зафиксируем число m, $m \in \{0, 1, \dots, l\}$, и сделаем в (1) замену $y = x^m(c_m + z)$. Уравнение (1) примет вид

$$\sum_{j=0}^{m} a_j x^{m-j} z^{(n-j)} = (c_m + z)^\sigma x^{m\sigma} p(x). \tag{21}$$

Согласно [9; с. 259] сделаем логарифмическое преобразование $t = \ln x$, в результате которого получаем уравнение

$$\begin{gathered}
z_t^{(n)} + b_1 z_t^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} z_t' = (c_m + z)^\sigma p_m(t), \\
z_t^{(i)} = \frac{d^i z}{dt^i}, \quad z = z(e^t), \quad b_i = \text{const}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \\
|p_m(t)| \leqslant D e^{-((l-m)(\sigma-1)+\delta)t} \leqslant D e^{-\delta t}, \qquad t \geqslant 0.
\end{gathered}$$

Обозначая $z_t^{(i)} = u_{i+1}$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, получаем для функции $u(t)$ в малой окрестности нуля систему уравнений

$$\begin{gathered}
\dot{u} = Au + F(u) f(t) + g(t), \quad \|f(t)\| + \|g(t)\| \leqslant D_1 e^{-\delta t}, \qquad t \geqslant 0, \\
F(u) \in C^\infty, \quad F(0) = 0, \quad D_1 = \text{const} > 0.
\end{gathered} \tag{22}$$

При достаточно малом $0 < \widetilde{\delta} < \delta$ эта система уравнений имеет решение $u = u(t)$, $\|u(t)\| = o(e^{-\widetilde{\delta} t})$ при $t \to +\infty$ (см., например, [8]). Отсюда получаем, что

$$y^{(i)}(x) = m(m-1)\cdots(m-i+1) x^{m-i} \biggl(c_m + \sum_{j=1}^{i+1} d_{ij} u_j(\ln x) \biggr), \qquad 0 \leqslant i \leqslant m,$$

$$y^{(i)}(x) = x^{m-i} \sum_{j=2}^{i+1} d_{ij} u_j(\ln x), \qquad m+1 \leqslant i \leqslant n-1, \quad d_{ij} = \text{const}\,.$$

Следовательно, учитывая, что

$$\frac{d^q u_1(\ln x)}{dx^q} = \frac{\sum_{j=1}^{q+1} a_{qj} u_j(\ln x)}{x^q}, \qquad a_{qj} = \mathrm{const}, \quad 0 \leqslant q \leqslant n-1,$$

получаем, что $y = x^m(c_m + u_1(\ln x))$ – решение уравнения (1) с требуемыми свойствами (6).

Пусть теперь для решения $y(x)$ выполнено условие (7). В [5] замечено, что функция $y = y(x)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$y^{(n)} = p_1(x)y, \qquad p_1(x) = p(x)|y(x)|^{\sigma-1},$$

причем из (5) и (7) следует, что $|p_1(x)| \leqslant D_2 x^{-n-\delta}$, $D_2 = \mathrm{const} > 0$. Из предыдущей части доказательства нашей теоремы следует, что данное линейное уравнение имеет решения $y_m(x)$ вида (6) для всех целых m, $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, c_m – произвольные отличные от нуля константы, $\widetilde{\delta} > 0$. Но тогда функции $y_m(x)$, $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, образуют фундаментальную систему решений данного линейного уравнения. Следовательно, функция $y(x)$ является их линейной комбинацией: $y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j y_j(x)$, $a_j = \mathrm{const}$. Поскольку по условию $|y(x)| \leqslant Dx^l$, $D = \mathrm{const} > 0$, то $a_j = 0$, $j > l$, и $y(x) = \sum_{j=0}^{l} a_j y_j(x)$, откуда следует, что $y(x)$ является решением вида (6), где $m \in \{0, 1, \ldots, l\}$. Утверждение теоремы 2 доказано.

Обратимся теперь к доказательству теоремы 6 и рассмотрим случай $0 < \sigma < 1$.

Доказательство теоремы 6. Мы должны доказать существование у уравнения (1) решений вида (6) для всех целых m, $m \in \{l, \ldots, n-1\}$, где c_m – произвольные отличные от нуля константы, $\widetilde{\delta}$ – некоторое число, удовлетворяющее условию $0 < \widetilde{\delta} < \delta$.

Аналогично предыдущему зафиксируем число m, $m \in \{l, \ldots, n-1\}$ и сделаем в (1) замену $y = x^m(c_m + z)$, $t = \ln x$. Уравнение (1) примет вид системы (22) и, поскольку $m \geqslant l$ и $0 < \sigma < 1$, то оценка для функции $p_m(t)$ остается верной. В результате все сводится к существованию у системы (22) решения с требуемыми свойствами. Доказательство теоремы 6 закончено.

Доказательство теоремы 3. Из условия (8) следует (5), где $l = n-1$, и согласно теореме 2 у уравнения (1) существуют решения вида (6), где $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Пусть $y(x)$ – сохраняющее знак решение уравнения (1). Без ограничения общности считаем, что $y(x) > 0$. Из (8) следует, что $y^{(n)}(x) < 0$, т.е. функция $y^{(n-1)}(x)$ убывает и, следовательно, ограничена сверху некоторой константой. Тогда $y(x) \leqslant Dx^{n-1}$, $x \geqslant x_0 > 0$, $D = \mathrm{const} > 0$, и выполняются условия (5) и (7) при $l = n-1$. Из теоремы 2 получаем, что решение $y(x)$ имеет вид (6), где m – некоторое целое число, $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Существование непродолжаемых решений вида (4) доказано теоремой 1. Наличие продолжаемых вправо решений $y = y_m(x)$, $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, удовлетворяющих условию (6), следует из теоремы 2 при $l = n-1$. Перейдем теперь к доказательству того факта, что при условии (9) существуют решения вида (10), а также убедимся в том, что перечень всех возможных неосциллирующих решений уравнения (1), указанный в теореме, является исчерпывающим.

Как обычно, ограничимся рассмотрением положительных при $x \geqslant x_0$ решений уравнения (1). Пусть $y(x)$ – такое решение и $\widetilde{x}$ – правая граница его области определения. Допустим, что $\widetilde{x} < +\infty$. Поскольку $y^{(n)}(x) > 0$, $x \geqslant x_0$, то $y^{(n-1)}(x)$ возрастает при $x \geqslant x_0$. Если

$$\lim_{x\to\widetilde{x}-0} y^{(n-1)}(x) = D < +\infty,$$

то $|y(x)| \leqslant D < +\infty$ и, значит, $|y^{(n)}(x)| \leqslant D < +\infty$ и, следовательно, при $x_0 \leqslant x < \widetilde{x}$ выполнено $|y^{(i)}(x)| \leqslant D < +\infty$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Но это противоречит непродолжаемости решения. Следовательно,

$$\lim_{x\to\widetilde{x}-0} y^{(n-1)}(x) = +\infty.$$

Тогда вблизи точки $\widetilde{x}$ функция $y^{(n-2)}(x)$ будет возрастающей и аналогично вышеизложенному

$$\lim_{x\to\widetilde{x}-0} y^{(n-2)}(x) = +\infty.$$

Продолжая подобные рассуждения, приходим к выводу о том, что

$$\lim_{x\to\widetilde{x}-0} y^{(i)}(x) = +\infty, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1,$$

т.е. решение $y(x)$ удовлетворяет условию (4). Итак, при $\widetilde{x} < +\infty$ решение является непродолжаемым вправо вида (4).

Пусть теперь $y(x)$ определено при $x_0 \leqslant x < +\infty$. Тогда если

$$\lim_{x\to+\infty} y^{(n-1)}(x) = D < +\infty,$$

то $y(x) \leqslant Dx^{n-1}$, $D = \mathrm{const} > 0$, $x \geqslant x_0$, и выполняется условие (7) теоремы 2 при $l = n-1$. Следовательно, решение $y(x)$ является решением вида (6), где m – некоторое целое число, $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Остается рассмотреть случай, когда

$$\lim_{x\to+\infty} y^{(n-1)}(x) = +\infty.$$

Покажем, что такие решения действительно существуют. Этот факт доказан в [6; с. 274–276] мы ограничимся изложением основных моментов этого доказательства.

Рассмотрим какое-либо решение $y(x)$ нашего уравнения, удовлетворяющее условию (6), где $m = n-1$, $c_m > 0$. У этого решения при $x \geqslant \widetilde{x}_0$ все $y^{(i)}(x) > 0$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, где $\widetilde{x}_0 \geqslant x_0$ – некоторое число. Зафиксируем числа $b_i = y^{(i)}(\widetilde{x}_0)$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, и будем рассматривать решения $y_A(x)$ нашего уравнения, удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$y_A^{(i)}(\widetilde{x}_0) = b_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \quad y_A(\widetilde{x}_0) = A \geqslant b_0. \tag{23}$$

При этом будем рассматривать такие $A \geqslant b_0$, для которых $y_A^{(n-1)}(x) \leqslant D < +\infty$. Множество таких чисел A ограничено сверху, так как при достаточно большом A решение $y_A(x)$ будет непродолжаемым вправо. Это следует из доказательства теоремы 1 из [1]).

Пусть B – точная верхняя грань указанного множества. Рассмотрим решение $y_B(x)$. Это решение не может удовлетворять условию (4), так как согласно замечанию к доказательству указанной теоремы 1 (см. [1]), если решение $y_B(x)$ удовлетворяет (4), то любое решение с достаточно близкими начальными условиями также будет удовлетворять (4), возможно с другим значением a_1. Но тогда число B не может быть точной верхней гранью указанного множества. Таким образом, решение $y_B(x)$ не удовлетворяет условию (4) и, следовательно, оно продолжаемо вправо.

Из теоремы 2 следует, что если $y_B^{(n-1)}(x) \leqslant D < +\infty$, то $y_B(x)$ является решением вида (6). Можно показать, что в этом случае решения с близкими начальными условиями также будут удовлетворять условиям вида (6). Однако это противоречит определению числа B. Из этого следует, что

$$\lim_{x\to+\infty} y_B^{(n-1)}(x) = +\infty.$$

Покажем теперь, что при условии (9) решения $y(x)$, для которых

$$\lim_{x\to+\infty} y^{(n-1)}(x) = +\infty,$$

удовлетворяют оценке (10).

Заметим, что все функции $y^{(i)}(x)$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, являются возрастающими и положительными при больших значениях аргумента. Для простоты можно считать, что это так при $x \geqslant x_0 > 0$. Тогда при $x \geqslant x_0$

$$y^{(i)}(x) = y^{(i)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} y^{(i+1)}(t)\,dt \leqslant y^{(i)}(x_0) + (x-x_0)y^{(i+1)}(x) \leqslant Dxy^{(i+1)}(x),$$
$$0 \leqslant i \leqslant n-2, \qquad D = D(x_0) = \mathrm{const} > 0.$$

Отсюда следует оценка

$$y(x) \leqslant D_1 x^{n-1} y^{(n-1)}(x), \qquad x \geqslant x_0, \quad D_1 = D_1(x_0) = \mathrm{const} > 0. \tag{24}$$

Подставляя (24) в уравнение (1) и обозначая $z = y^{(n-1)}(x)$, получаем, что при условии (9) функция $z(x)$ удовлетворяет неравенству $z' \leqslant Dz^{\sigma}x^{-1-\delta}$, $D = \mathrm{const} > 0$. Интегрируя данное неравенство на промежутке $[x, +\infty)$, $x \geqslant x_0$, получаем

$$z(x) = y^{(n-1)}(x) \geqslant Dx^{\delta/(\sigma-1)}, \qquad x \geqslant x_0, \quad D = \mathrm{const} > 0.$$

Интегрируя данное неравенство $n-1$ раз, приходим к искомой оценке (10).

Перейдем теперь к доказательству (12) при условии выполнения неравенства (11). Как обычно, без ограничения общности рассматриваем положительное решение $y(x)$ уравнения (1). Если предел при $x \to +\infty$ возрастающей функции $y^{(n-1)}(x)$ конечен, то (11) очевидно. Рассмотрим случай, когда указанный предел равен $+\infty$. При этом при больших значениях x все функции $y^{(i)}(x)$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, будут положительными и возрастающими, а также $y^{(i)}(x) \leqslant xy^{(i+1)}(x)$, $0 \leqslant i \leqslant n-2$, из чего, в частности, следует, что

$$y(x) \leqslant x^i y^{(i)}(x), \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1. \tag{25}$$

Конструкция, лежащая в основе доказательства оценки (12), принадлежит Изобову [7].

Рассмотрим функцию $h(x)=\prod_{i=0}^{n-1} y^{(i)}(x)$. Заметим, что

$$h'(x)=h(x)\biggl(\frac{y'}{y}+\frac{y''}{y'}+\dots+\frac{y^{(n)}}{y^{(n-1)}}\biggr). \tag{26}$$

Ниже воспользуемся известным неравенством

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i z_i \geqslant \prod_{i=1}^{n} z_i^{\beta_i}, \qquad z_i\geqslant 0, \quad \beta_i>0, \quad \sum_{i=1}^{n}\beta_i=1. \tag{27}$$

Нам понадобятся числа β, $\mu>0$ такие, чтобы выполнялись условия

$$\beta_n=\beta, \quad \beta_i=\beta_{i+1}+\mu, \qquad 1\leqslant i\leqslant n-1, \qquad \sum_{i=1}^{n}\beta_i=1.$$

Для этого положим $\mu=2(1-n\beta)/(n(n-1))$, а число $\beta>0$ выберем таким, чтобы $1-n\beta>0$. Из (26) с учетом (11) и (27) получаем

$$\begin{aligned} h' &\geqslant h\biggl(\beta_1\frac{y'}{y}+\beta_2\frac{y''}{y'}+\dots+\beta_n\frac{y^{(n)}}{y^{(n-1)}}\biggr)\\ &\geqslant h\biggl(\frac{y'}{y}\biggr)^{\beta_1}\biggl(\frac{y''}{y'}\biggr)^{\beta_2}\cdot\dots\cdot\biggl(\frac{y^{(n)}}{y^{(n-1)}}\biggr)^{\beta_n}=h^{1+\mu}\frac{(y^{(n)})^{\beta}}{y^{\beta+n\mu}}\\ &\geqslant Dh^{1+\mu}y^{\beta(\sigma-1)-n\mu}x^{-\beta((n-1)\sigma+1+\delta_1)}, \qquad D=\mathrm{const}>0. \end{aligned} \tag{28}$$

Теперь уточним число β таким образом, чтобы

$$\beta(\sigma-1)-n\mu>0 \qquad \text{и} \qquad \beta((n-1)\sigma+1+\delta_1)>1. \tag{29}$$

Нетрудно видеть, что это не противоречит неравенству $1-n\beta>0$, так как $\sigma>1$. Поделим теперь обе части неравенства (28) на $h^{1+\mu}$ и проинтегрируем его на промежутке $[x,+\infty)$, в результате чего получаем

$$\begin{aligned} (h(x))^{-\mu} &\geqslant D\int_x^{+\infty} t^{-\beta((n-1)\sigma+1+\delta_1)}(y(t))^{\beta(\sigma-1)-n\mu}\,dt\\ &\geqslant D(y(x))^{\beta(\sigma-1)-n\mu}\int_x^{+\infty} t^{-\beta((n-1)\sigma+1+\delta_1)}\,dt\\ &\geqslant D(y(x))^{\beta(\sigma-1)-n\mu}x^{-\beta((n-1)\sigma+1+\delta_1)+1}, \qquad D=\mathrm{const}>0. \end{aligned} \tag{30}$$

Из (29) и того, что $\lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$, следует, что все интегралы сходятся.

Из (25) имеем неравенство $(h(x))^{-\mu}\leqslant x^{1-n\beta}y^{-n\mu}$. Подставляя его в (30), получаем требуемую оценку (12)

$$y(x)\leqslant Dx^{n-1+\delta_1/(\sigma-1)}, \qquad D=\mathrm{const}>0.$$

Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Рассмотрим решение $y(x)$ уравнения (1), сохраняющее знак при $x \geqslant x_0$. Без ограничения общности можем считать, что $y(x) > 0$ (делая в противном случае замену $y = -z$). Обозначим через $\widetilde{x}$ правую границу области определения рассматриваемого решения. Следующее стандартное рассуждение показывает, что если $\widetilde{x} < +\infty$, то $y(x)$ будет удовлетворять условию (4). Действительно, в рассматриваемом случае функция $p(x) > 0$, так как иначе при $y(x) > 0$ имеем $y^{(n)}(x) < 0$ и $y^{(n-1)}(x)$ – убывающая функция, из чего следует, что при $x_0 \leqslant x < \widetilde{x}$ все $|y^{(i)}(x)| \leqslant D$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $D = \mathrm{const} > 0$. Однако это противоречит предположению о непродолжаемости вправо рассматриваемого решения. Итак, $p(x) > 0$ и $y^{(n)}(x) > 0$, т.е. $y^{(n-1)}(x)$ – возрастающая функция. Тогда, если

$$\lim_{x \to \widetilde{x}-0} y^{(n-1)}(x) = D_1 < +\infty,$$

то $|y(x)| \leqslant D_2 < +\infty$ и, значит, $|y^{(n)}(x)| \leqslant D_3 < +\infty$ и, следовательно, при $x_0 \leqslant x < \widetilde{x}$ выполнено $|y^{(i)}(x)| \leqslant D_4 < +\infty$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Но тогда точка $\widetilde{x}$ не может быть границей области определения решения. Следовательно,

$$\lim_{x \to \widetilde{x}-0} y^{(n-1)}(x) = +\infty.$$

Тогда вблизи точки $\widetilde{x}$ функция $y^{(n-2)}(x)$ будет возрастающей и аналогично вышеизложенному $\lim_{x \to \widetilde{x}-0} y^{(n-2)}(x) = +\infty$. Продолжая подобные рассуждения, приходим к выводу о том, что

$$\lim_{x \to \widetilde{x}-0} y^{(i)}(x) = +\infty, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1,$$

т.е. решение $y(x)$ удовлетворяет условию (4).

Рассмотрим теперь положительное решение, определенное при всех $x \geqslant x_0$. Заметим прежде всего, что при больших значениях x все $y^{(i)}(x)$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, являются монотонными функциями. Без ограничения общности можем считать, что это так при $x \geqslant x_0$. Обозначим

$$\lim_{x \to +\infty} y^{(i)}(x) = D_i, \qquad 0 \leqslant D_i \leqslant +\infty.$$

Покажем, что $D_{n-1} = 0$. Действительно, если $0 < D_{n-1} \leqslant +\infty$, то при $p(x) > 0$ это противоречит лемме 1 из [1]. Если же $p(x) < 0$, то, замечая, что для больших x будет $y(x) \geqslant Dx^{n-1}$, $D = \mathrm{const} > 0$, получаем, что $y^{(n)}(x) \leqslant -Dx^{(n-k-1)(\sigma-1)-1}$. Отсюда после интегрирования следует, что $\lim_{x \to +\infty} y^{(n-1)}(x) = -\infty$, что невозможно. Заметим дополнительно, что если все $D_i = 0$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, то утверждение теоремы очевидно выполняется.

Осталось рассмотреть случай, при котором найдется число $0 \leqslant m \leqslant n-2$ такое, что

$$\lim_{x \to +\infty} y^{(i)}(x) = 0, \qquad m < i \leqslant n-1, \tag{31}$$

и $\lim_{x \to +\infty} y^{(m)}(x) = D_m$, $0 < D_m \leqslant +\infty$. Считая для простоты, что $y^{(i)}(x) > 0$, $0 \leqslant i \leqslant m$, $x \geqslant x_0$ (при необходимости делая сдвиг по оси x), отсюда получаем, что

$$y(x) \geqslant Dx^m, \quad x \geqslant x_0, \qquad D = \mathrm{const} > 0. \tag{32}$$

Подставляя (32) в уравнение (1) и интегрируя его $n-(m+1)$ раз на промежутке $[x,+\infty)$ с учетом (13) и (31), получаем

$$|y^{(m+1)}(x)| \geqslant Dx^{(m-k)(\sigma-1)-1}, \quad x \geqslant x_0, \qquad D = \mathrm{const} > 0. \tag{33}$$

Если $y^{(m+1)}(x) < 0$, то из неравенства (33) следует, что при $m \geqslant k$

$$\lim_{x\to+\infty} y^{(m)}(x) = -\infty,$$

что невозможно, а при $m < k$, очевидно, выполняется утверждение теоремы. Пусть $y^{(m+1)}(x) > 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда $m > k$, где k – число из формулы (13).

Интегрируя (33) $m+1$ раз на промежутке $[x_0, x]$, приходим к неравенству

$$y(x) \geqslant Dx^{\beta+m}, \quad x \geqslant x_0, \qquad \beta = (m-k)(\sigma-1), \quad D = \mathrm{const} > 0.$$

Повторяя подобное рассуждение j раз, придем к оценке

$$y(x) \geqslant Dx^{\beta_j+m}, \quad x \geqslant x_0, \qquad \beta_j = \beta\sigma^{j-1}, \quad D = \mathrm{const} > 0.$$

Но тогда при достаточно большом j будет $|y^{(n)}(x)| \geqslant x^h$, $h > 0$, $x \geqslant x_0 > 0$, что противоречит тому, что $\lim_{x\to+\infty} y^{(n-1)}(x) = 0$. Итак, случай $m > k$ невозможен.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $m = k$. Интегрируя неравенство (33) на промежутке $[x_0, x]$, получаем

$$y^{(k)}(x) \geqslant D \ln \frac{x}{x_0}, \quad x \geqslant x_0 \qquad D = \mathrm{const} > 0. \tag{34}$$

Здесь и ниже без ограничения общности считаем, что

$$y^{(i)}(x) > 0, \qquad 0 \leqslant i \leqslant m, \qquad x \geqslant x_0.$$

Ниже нам понадобится следующее неравенство (оно было использовано в [1] при доказательстве леммы 1):

$$\begin{gathered} \int_a^x t^p \ln^q \frac{t}{a}\, dt \geqslant \frac{1}{1+p+q^2}\, x^{p+1} \ln^q \frac{x}{\widetilde{a}}, \\ x \geqslant \widetilde{a} = a\sqrt[q]{e}, \quad a \geqslant 1, \quad p \geqslant -1, \quad q \geqslant 1. \end{gathered} \tag{35}$$

Справедливость данной оценки следует из того, что в точке $\widetilde{a}$ разность функций, находящихся в левой и правой части неравенства, положительна, в то время как разность их производных при $x \geqslant a\sqrt[q]{e}$, $a, q \geqslant 1$ неотрицательна.

Проинтегрируем неравенство (34) k раз с учетом (35). В результате получим оценку

$$y(x) \geqslant Dx^k \ln \frac{x}{x_1}, \quad x \geqslant x_1 = x_0 e^k, \qquad D = \mathrm{const} > 0.$$

Напоминаем, что $D > 0$ – так называемая “универсальная” константа.

Проведем индуктивное рассуждение.

Пусть число $r \geqslant 1$ – целое и заданы некоторые числа $x_r \geqslant x_0$, $c_r > 0$, $\omega_r \geqslant 1$. Предположим, что при $x \geqslant x_r$ выполняется неравенство

$$y(x) \geqslant \frac{1}{c_r}\, x^k \ln^{\omega_r} \frac{x}{x_r}\,, \qquad x \geqslant x_r. \tag{36}$$

Подставляя это неравенство в уравнение (1) и учитывая (13), получим

$$|y^{(n)}(x)| \geqslant \frac{c}{c_r^\sigma x^{n-k}} \ln^{\sigma\omega_r} \frac{x}{x_r}\,, \qquad x \geqslant x_r.$$

Интегрируя данное неравенство $n-k$ раз на промежутке $[x, +\infty)$ с учетом (31), приходим к оценке

$$y^{(k)}(x) \geqslant \frac{c}{(n-k-1)!\, c_r^\sigma} \ln^{\sigma\omega_r+1} \frac{x}{x_r} \geqslant \frac{c}{n!\, c_r^\sigma} \ln^{\sigma\omega_r+1} \frac{x}{x_r}\,, \qquad x \geqslant x_r.$$

Проинтегрируем теперь последнее неравенство k раз с учетом (35). В результате имеем следующую оценку

$$y(x) \geqslant \frac{1}{\widetilde{c}_r}\, x^k \ln^{\sigma\omega_r+1} \frac{x}{x_{r+1}}\,, \qquad x \geqslant x_{r+1},$$
$$\widetilde{c}_r = c^{-1} n!\, c_r^\sigma (1 + k + (\sigma\omega_r + 1)^2)^k \leqslant A\sigma_1^r c_r^\sigma,$$
$$\sigma_1 = \sigma^{2n}, \quad A = A(\sigma, n, c) = \mathrm{const} > 0, \quad x_{r+1} = x_r e^{k/(\sigma\omega_r+1)}.$$

Полагая

$$\omega_{r+1} = \sigma\omega_r + 1, \quad c_{r+1} = A\sigma_1^r c_r^\sigma, \qquad \sigma_1 = \sigma^{2n}, \quad A = A(\sigma, n, c),$$

нетрудно видеть, что

$$y(x) \geqslant \frac{1}{c_{r+1}}\, x^k \ln^{\omega_{r+1}} \frac{x}{x_{r+1}}\,, \qquad x \geqslant x_{r+1}.$$

Отсюда следует, что

$$y(x) \geqslant \frac{1}{B^{\sigma^r}} \ln^{\beta_r} \frac{x}{\widetilde{x}_0}\,, \qquad x \geqslant \widetilde{x}_0,$$
$$B = B(n, \sigma, c_1, c) = \mathrm{const} > 0,$$
$$\beta_r = \frac{\sigma^r - 1}{\sigma - 1}\,, \qquad \widetilde{x}_0 = \mu x_0, \quad \mu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma - 1}{\sigma^i - 1}\,.$$

Однако полученное неравенство приводит к противоречию при достаточно большом фиксированном x (например, при $\ln\ln x/\widetilde{x}_0 > 2(\sigma-1)\ln B$) и $r \to \infty$. Итак, равенство $m = k$ противоречит условиям теоремы.

Осталось разобрать случай $m < k$.

Проинтегрируем уравнение (1) на промежутке $[x, +\infty)$. Учитывая (13) и (31), а также возрастание функции $y(x)$, получим неравенство

$$y^{(n-1)}(x) \leqslant -D \frac{y^\sigma}{x^{n+k(\sigma-1)-1}}\,, \qquad D = \mathrm{const} > 0.$$

Опять проинтегрировав полученное неравенство на указанном промежутке, приходим к следующему:

$$y^{(n-2)}(x) \geqslant D\frac{y^\sigma}{x^{n+k(\sigma-1)-2}}\,, \qquad D = \text{const} > 0.$$

Продолжая этот процесс, в итоге получаем неравенство

$$y^{(m+1)}(x) \geqslant D\frac{y^\sigma}{x^{k(\sigma-1)+m+1}}\,, \qquad D = \text{const} > 0. \tag{37}$$

Заметим, что все функции $y^{(i)}(x)$, $0 \leqslant i \leqslant m$, являются возрастающими и положительными при больших значениях аргумента. Для простоты можно считать, что это так при $x \geqslant x_0 > 0$. Тогда при $x \geqslant x_0$ получаем следующий аналог неравенств (25):

$$y(x) \leqslant x^i y^{(i)}(x), \qquad 0 \leqslant i \leqslant m. \tag{38}$$

Далее используем описанную при доказательстве теоремы 4 конструкцию Изобова (см. [7]). Рассмотрим функцию $h(x) = \prod_{i=0}^m y^{(i)}(x)$. Как и при доказательстве теоремы 4, используем числа β, $\mu > 0$ такие, чтобы выполнялись условия

$$\beta_{m+1} = \beta, \qquad \beta_i = \beta_{i+1} + \mu, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \qquad \sum_{i=1}^{m+1} \beta_i = 1.$$

Для этого положим $\mu = 2(1-(m+1)\beta)/(m(m+1))$, а число $\beta > 0$ выберем таким, чтобы $1-(m+1)\beta > 0$. В результате с учетом (13) и (37) получаем неравенство, аналогичное (28),

$$h' \geqslant D h^{1+\mu} y^{\beta(\sigma-1)-\mu(m+1)} x^{-\beta(m+1+k(\sigma-1))}, \qquad D = \text{const} > 0. \tag{39}$$

Определим число β таким образом, чтобы

$$\beta(\sigma-1) - \mu(m+1) > 0 \qquad \text{и} \qquad \beta(m+1+k(\sigma-1)) > 1.$$

Нетрудно видеть, что это не противоречит неравенству $1-(m+1)\beta > 0$. Поделим теперь обе части неравенства (39) на $h^{1+\mu}$ и проинтегрируем его на промежутке $[x, +\infty)$, в результате чего получаем

$$h^{-\mu} \geqslant D y^{\beta(\sigma-1)-\mu(m+1)} x^{-\beta(m+1+k(\sigma-1))+1}, \qquad D = \text{const} > 0. \tag{40}$$

Из (38) следует неравенство $(h(x))^{-\mu} \leqslant x^{1-(m+1)\beta} y^{-(m+1)\mu}$. Подставляя его в (40), получаем требуемую оценку (14).

Осталось доказать (15) при целом k. Поскольку m – целое и $m < k$, то $m+1 \leqslant k$. Но из (31) очевидно следует (15).

Теорема 5 доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность А. Д. Брюно за полезные обсуждения вопросов, связанных с проблематикой данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. С. Самовол, "О решениях уравнений типа Эмдена–Фаулера", *Матем. заметки*, **95**:5 (2014), 775–789.

[2] Р. Беллман, *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1954.

[3] В. А. Кондратьев, В. С. Самовол, "О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена–Фаулера", *Дифференц. уравнения*, **17**:4 (1981), 749–750.

[4] И. М. Соболь, "Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений", *Докл. АН СССР*, **61**:2 (1948), 219–222.

[5] И. Т. Кигурадзе, "О колеблемости решений уравнения $\frac{d^m u}{dt^m} + a(t)|u|^n \operatorname{sign} u = 0$", *Матем. сб.*, **65**:2 (1964), 172–187.

[6] И. Т. Кигурадзе, Т. Ф. Чантурия, *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1990.

[7] Н. А. Изобов, "О продолжимых и непродолжимых решениях нелинейного дифференциального уравнения произвольного порядка", *Матем. заметки*, **35**:6 (1984), 829–839.

[8] И. В. Асташова, *Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа*, ЮНИТИ-ДАНА, М., 2012.

[9] А. Д. Брюно, *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях*, Наука, М., 1998.

[10] А. Д. Брюно, "Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения", *УМН*, **59**:3 (2004), 31–80.

В. С. Самовол
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», г. Москва
E-mail: 555svs@mail.ru

Поступило
03.09.2013