ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2009. Том 16, № 1. С. 37–43

УДК 519.178

О БЕСКОНЕЧНОСТИ МНОЖЕСТВА ГРАНИЧНЫХ КЛАССОВ В ЗАДАЧЕ О РЁБЕРНОЙ 3-РАСКРАСКЕ

Д. С. Малышев

Аннотация. Доказывается, что для задачи о рёберной 3-раскраске множество граничных классов бесконечно.

Ключевые слова: граничный класс, задача о рёберной 3-раскраске.

Введение

В цикле работ [1–4] изучалась граница между «простыми» и «сложными» классами графов для различных задач на графах в семействе *наследственных классов графов*, т. е. классов графов, замкнутых относительно изоморфизма и удаления вершин. Любой наследственный класс графов $\mathbf{X}$ может быть задан множеством своих запрещённых порождённых подграфов S, при этом принята запись $\mathbf{X} = \mathrm{Free}(S)$. Если S конечно, то класс $\mathbf{X}$ называется *конечно определённым.*

Исследование границы во всех работах указанного цикла основано на понятиях простого, сложного и граничного классов графов для рассматриваемой задачи. Наследственный класс графов называется Π-*простым*, если задача Π в этом классе полиномиально разрешима. Π-*сложным* называется наследственный класс графов, не являющийся Π-простым. Наследственный класс графов $\mathbf{X}$ называется Π-*предельным*, если существует такая бесконечная последовательность $\mathbf{X}_1 \supseteq \mathbf{X}_2 \supseteq \ldots$ Π-сложных классов графов, что $\mathbf{X} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{X}_i$. Минимальный по включению Π-предельный класс называется Π-*граничным.* Следующая теорема доказана в [4].

Теорема 1. *Если* P$\neq$NP, *то конечно определённый класс графов* $\mathbf{X}$ *является* Π-*сложным тогда и только тогда, когда* $\mathbf{X}$ *содержит какой-нибудь* Π-*граничный класс.*

Утверждения данной работы и некоторые цитируемые результаты других работ также справедливы при условии P$\neq$NP. В статье всегда предполагается справедливость этой гипотезы, поэтому неравенство

P≠NP далее не включается явно в формулировки соответствующих утверждений.

Теорема 1 раскрывает значение понятия граничного класса графов и показывает, что при известном множестве П-граничных классов полная классификация классов графов из семейства конечно определённых классов на П-простые и П-сложные достижима. Таким образом, выявление граничных классов для тех или иных задач вызывает определённый интерес.

В [2] рассматрены граничные классы для задачи о независимом множестве и показано, что некоторый конкретный класс графов является граничным для задачи о независимом множестве. В [3] понятие граничного класса применено к задаче о доминирующем множестве и для этой задачи были указаны 3 граничных класса. В [1, 4] доказана граничность двух известных классов для ряда задач на графах.

В то же время имеются классические задачи, для которых не описано ни одного граничного класса. К числу таких задач относятся задачи о гамильтоновом цикле, о вершинной 3-раскраске и о рёберной 3-раскраске, о наибольшей клике. Однако для некоторых таких задач удаётся доказать оценки мощности множества граничных классов. Так, в [4] показано, что для задачи о гамильтоновом цикле существует не менее 5 граничных классов. Аналогичная оценка справедлива и для задачи о вершинной 3-раскраске [4]. Данное обстоятельство послужило основанием для выдвижения гипотезы о существовании задачи на графах, для которой множество граничных классов является бесконечным [4].

В настоящей работе приводится конкретная задача на графах с бесконечным множеством граничных классов. Именно, неконструктивным образом доказывается, что для задачи о рёберной 3-раскраске (задачи 3-РР) множество граничных классов бесконечно.

В статье приняты следующие обозначения: $[\mathbf{K}]$ — *наследственное замыкание класса* $\mathbf{K}$, т. е. класс всех графов, изоморфных порождённым подграфам графов из $\mathbf{K}$; $\mathbf{K}^+$ — множество графов, у которых каждая из компонент связности принадлежит классу $\mathbf{K}$; $\mathbf{Deg}(3)$ — класс графов, в которых степени вершин не превосходят 3; nG — граф, получаемый бессвязным объединением n экземпляров графа G; граф $K_4 - e$ получается из графа K_4 удалением произвольного ребра e; граф B получается из графа $2K_3$ добавлением двух рёбер, соединяющих пары вершин степени 2 из разных треугольников.

1. О некоторых 3-РР-предельных классах

Введём понятие замены ребра графом G, содержащим ровно 2 вершины степени 2. Операция замены ребра $e = (a, b)$ некоторого графа графом G состоит в удалении этого ребра с последующим отождествлением вершины a с одной вершиной степени 2 графа G и вершины b — с другой вершиной степени 2 графа G. Считаем, что граф G содержит автоморфизм, переводящий вершины степени 2 друг в друга, поэтому получившийся граф не зависит от того, какая именно вершина степени 2 графа G отождествляется с вершиной a.

Назовём *несимметричной* (i, j)*-связкой* граф, получаемый из простого пути $P_{2i+2j+1}$ заменой первых i рёбер с чётными номерами на граф $K_4 - e$ и заменой последующих j рёбер с чётными номерами на граф B. *Симметричной* (i, j)*-связкой* называется граф, получаемый из простого пути $P_{4i+4j+1}$ заменой первых i рёбер с чётными номерами на граф $K_4 - e$, заменой последующих $2j$ рёбер с чётными номерами на граф B и заменой последних i рёбер с чётными номерами на граф $K_4 - e$. Очевидно, что симметричная (i, j)-связка получается отождествлением последних рёбер двух копий несимметричной (i, j)-связки.

(i, j)*-Преобразованием* графа называется операция замены каждого его ребра симметричной (i, j)-связкой. Граф, получившийся в результате выполнения этой операции с графом G, будем обозначать через $G(i, j)$. Обозначим через $\mathbf{S}(i, j)$ множество графов, получаемых применением (i, j)-преобразования к графам из $\mathbf{Deg}(3)$.

Легко видеть, что справедлива следующая

Лемма 1. *При любых натуральных i и j граф $G(i, j)$ является рёберно 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда граф G является рёберно 3-раскрашиваемым.*

Через $\widehat{T}(i, j)$ будем обозначать граф, получаемый из трёх копий несимметричной (i, j)-связки отождествлением трёх вершин степени 1, смежные вершины которых принадлежат графам $K_4 - e$. Обозначим через $\widetilde{T}(i, j)$ граф, аналогично получаемый из двух копий несимметричной (i, j)-связки. Пусть $\widehat{\mathbf{T}}_i = \left[\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \{\widehat{T}(i, j)\}\right]^+$.

Лемма 2. *Для любого натурального i класс $\widehat{\mathbf{T}}_i$ является 3-РР-предельным.*

Доказательство. Известно, что класс $\mathbf{Deg}(3)$ является 3-РР-сложным [5]. Отсюда и из леммы 1 следует, что при любых i и j класс $\mathbf{S}(i, j)$

является 3-РР-сложным. Поэтому класс $\mathbf{S}^*(i,s) = \left[\bigcup\limits_{j=s}^{\infty} \mathbf{S}(i,j)\right]$ при любых i и s является 3-РР-сложным. Покажем, что при любом i справедливо равенство $\widehat{\mathbf{T}}_i = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \mathbf{S}^*(i,j)$.

Для любого графа $G \in \widehat{\mathbf{T}}_i$ существуют такие натуральные числа n и k, что для любого $j \geqslant k$ граф G является порождённым подграфом графа $n\widehat{T}(i,j)$. Очевидно, что для любых n, i, j, s граф $n\widehat{T}(i,j)$ принадлежит классу $\mathbf{S}^*(i,s)$ (поскольку при любых i и s класс $\mathbf{S}^*(i,s)$ является наследственным). Таким образом, произвольный граф $G \in \widehat{\mathbf{T}}_i$ принадлежит классу $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \mathbf{S}^*(i,j)$. Поэтому для любого i имеет место включение $\widehat{\mathbf{T}}_i \subseteq \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \mathbf{S}^*(i,j)$.

Рассмотрим произвольный граф $G \in \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \mathbf{S}^*(i,j)$. Понятно, что $G \in \mathbf{S}^*(i,1)$, $G \in \mathbf{S}^*(i,2)$, $\ldots$, поэтому существует такая бесконечная монотонно возрастающая последовательность $\{j_d\}$, что для любого натурального d граф G принадлежит классу $\mathbf{S}^*(i,j_d)$. Пусть $d' = |V(G)|+1$. Тогда $G \in \mathbf{S}^*(i,j_{d'})$. Отсюда следует, что для некоторых n и j граф G является порождённым подграфом графа $n\widehat{T}(i,j)$. Таким образом, граф G принадлежит классу $\widehat{\mathbf{T}}_i$. Поэтому для любого i справедливо включение $\widehat{\mathbf{T}}_i \supseteq \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \mathbf{S}^*(i,j)$.

Из доказанных выше включений заключаем, что равенство $\widehat{\mathbf{T}}_i = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \mathbf{S}^*(i,j)$ справедливо при любом i. Тем самым при любом i класс $\widehat{\mathbf{T}}_i$ является 3-РР-предельным. Лемма 2 доказана.

2. О количестве граничных классов для задачи о рёберной 3-раскраске

Вершину x некоторого графа G назовём *аннигилируемой*, если выполняется одно из следующих условий:

$\deg(x) \leqslant 1$;

$\deg(x) = 2$ и существует такая вершина y графа G, что $\deg(y) \leqslant 2$ и $(x,y) \in E(G)$;

$\deg(x) = 2$ и x принадлежит некоторому порождённому подграфу $K_4 - e$ графа G;

$\deg(x) = 2$ и x принадлежит некоторому порождённому подграфу B графа G.

Пусть $\mathbf{X}$ — наследственный класс графов. Через $(\mathbf{X})^a$ обозначим множество графов из $\mathbf{X} \cap \mathbf{Deg}(3)$, не содержащих аннигилируемых вершин.

Лемма 3. *Для любого наследственного класса графов* $\mathbf{X}$ *задача* 3-РР *полиномиально сводима к той же задаче для графов класса* $(\mathbf{X})^a$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathbf{X}$. Можно считать, что $G \in \mathbf{Deg}(3)$. Предположим, что G содержит аннигилируемую вершину x. Очевидно, что если $\deg(x) \leqslant 1$, то граф G является рёберно 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда этим свойством обладает граф $G^{'} = G \setminus \{x\}$. Это же верно и в случае, когда G содержит ребро (x, y), инцидентное вершинам степени не более чем 2.

Предположим, что вершина x имеет степень 2 и принадлежит порождённому подграфу $K_4 - e$ графа G. Ясно, что в любой рёберной 3-раскраске графа G рёбра этого подграфа, неинцидентные вершине x, имеют различные цвета. Поэтому G является рёберно 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда $G^{'}$ — рёберно 3-раскрашиваемый.

Пусть $\deg(x) = 2$ и вершина x принадлежит порождённому подграфу B графа G. Через y и z обозначим вершины графа G, смежные с x. Пусть e_1 и e_2 — рёбра, инцидентные вершинам y и z соответственно и не принадлежащие множеству $\{(x, y), (x, z), (y, z)\}$. Легко проверить, что в любой рёберной 3-раскраске графа G рёбра e_1 и e_2 имеют разные цвета. Таким образом, правильная раскраска рёбер графа G в 3 цвета существует тогда и только тогда, когда такая раскраска существует и для графа $G^{'}$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\mathbf{B}$ — 3-РР*-граничный класс и граф* $G_1 \in \mathbf{B}$ *содержит аннигилируемую вершину* x. *Тогда существует такой граф* $G_2 \in \mathbf{B}$, *что* G_1 *является порождённым подграфом графа* G_2 *и вершина* x *в графе* G_2 *не является аннигилируемой.*

Доказательство. Так как $\mathbf{B}$ — 3-РР-граничный класс, то существуют такие наследственные 3-РР-сложные классы $\mathbf{B}_1 \supseteq \mathbf{B}_2 \supseteq \ldots$, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{B}_i = \mathbf{B}$. Пусть $\mathbf{B}_i^{'} = [(\mathbf{B}_i)^a]$. Ясно, что при любом i справедливо включение $\mathbf{B}_i^{'} \supseteq \mathbf{B}_{i+1}^{'}$. Из предыдущей леммы следует, что при любом i класс $\mathbf{B}_i^{'} \subseteq \mathbf{Deg}(3)$ является 3-РР-сложным. Поэтому, если $\mathbf{B}^{'} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{B}_i^{'}$, то класс $\mathbf{B}^{'}$ является предельным для задачи о рёберной 3-раскраске. Так как $\mathbf{B}_i^{'} \subseteq \mathbf{B}_i$ для любого i, то $\mathbf{B}^{'} \subseteq \mathbf{B}$, но $\mathbf{B}$ — минимальный 3-РРпредельный класс, поэтому $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$.

Пусть G_1 — граф из класса $\mathbf{B}$ такой, что в нём существует аннигилируемая вершина x. Тогда $G_1 \in \mathbf{B}'_1$, $G_1 \in \mathbf{B}'_2$, …. По построению класса $\mathbf{B}'_i$, для любого i существует такой граф $G'_i \in \mathbf{B}'_i$, что G_1 порождён в G'_i и вершина x в G'_i не является аннигилируемой. Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. В графе G'_i вершина x имеет степень, равную 3. Тогда рассмотрим граф G''_i, получаемый из G'_i удалением всех вершин, не принадлежащих G_1 и отстоящих от x на расстояние не менее чем 2. Понятно, что вершина x в графе G''_i не является аннигилируемой и $|V(G''_i)| - |V(G_1)| \leqslant 3$.

2. В графе G'_i вершина x имеет степень, равную 2. Поскольку вершина x в графе G'_i не является аннигилируемой, то x не принадлежит ни одному порождённому подграфу $K_4 - e$ графа G'_i. Рассмотрим граф G''_i, получаемый из G'_i удалением всех вершин, не принадлежащих G_1 и отстоящих от x на расстояние не менее чем 3. Легко проверить, что вершина x в графе G''_i не является аннигилируемой и $|V(G''_i)| - |V(G_1)| < 7$.

Таким образом, для любого i существует такой граф $G^i_2 \in \mathbf{B}'_i$, что G_1 порождён в G^i_2, $|V(G^i_2)| - |V(G_1)| < 7$ и вершина x в G^i_2 не является аннигилируемой. Пусть $M = \{G^1_2, G^2_2, \dots\}$. Очевидно, множество M содержит лишь конечное число попарно различных графов. Поэтому существует граф G_2, принадлежащий $\mathbf{B}'_s$ для бесконечно многих значений s. Отсюда и из включения $\mathbf{B}'_1 \supseteq \mathbf{B}'_2 \supseteq \dots$ следует, что $G_2 \in \mathbf{B}'_i$ для любого i, т. е. $G_2 \in \mathbf{B}$. Лемма 4 доказана.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 2. *Для задачи о рёберной 3-раскраске множество граничных классов является бесконечным.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что для задачи о рёберной 3-раскраске множество граничных классов конечно. Тогда для некоторой бесконечной монотонно возрастающей последовательности $\{j_s\}$ некоторый 3-РР-граничный класс $\mathbf{B}$ содержится в каждом из классов $\widehat{\mathbf{T}}_{j_s}$. Через G' и G'' обозначим графы, получаемые соответственно из графов $\widehat{T}(j_1+1,0)$ и $\widetilde{T}(j_1+1,0)$ удалением всех висячих вершин и смежных им. Пусть G — граф класса $\mathbf{B}$, являющийся максимальным по включению графом по отношению «быть порождённым подграфом графа G'». Граф G' содержит ровно шесть аннигилируемых вершин степени 2, которые обозначим $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$. Будем считать, что

$$(a_1, a_2) \in E(G'), \quad (b_1, b_2) \in E(G'), \quad (c_1, c_2) \in E(G')$$

и $\{a_1, a_2, b_1, b_2\} \subseteq V(G'')$. Рассмотрим три случая.

Если G является собственным порождённым подграфом графа G' и $G \neq G''$, то в G существует аннигилируемая вершина, не принадлежащая множеству $\{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}$. Тогда из леммы 4 и включения $\mathbf{B} \subseteq \bigcap\limits_{s=1}^{\infty} \widehat{\mathbf{T}}_{j_s}$ следует, что существует такой порождённый подграф $G^* \in \mathbf{B}$ графа G', что G является собственным порождённым подграфом графа G^*. Получаем противоречие с максимальностью G.

Если $G = G''$, то $G'' \in \mathbf{B}$. Тогда для графа $G_1 = G''$ и его вершины a_1 должен существовать такой граф $G_2 \in \mathbf{B}$, что G_1 является порождённым подграфом графа G_2 и вершина a_1 в G_2 не является аннигилируемой. Таким образом, в графе G_2 существует такая вершина x, что $(x, a_1) \in E(G_2)$ и $x \notin V(G_1)$. Отсюда и из включения $\mathbf{B} \subseteq \widehat{\mathbf{T}}_{j_1}$ следует, что в графе G_2 вершина x несмежна с вершиной a_2. Но тогда граф G_2 не принадлежит классу $\widehat{\mathbf{T}}_{j_2}$, поэтому $G_2 \notin \mathbf{B}$. Получаем противоречие.

Если $G = G'$, то рассмотрение этого случая полностью аналогично предыдущему.

Таким образом, исходное предположение неверно, т. е. множество граничных классов для задачи о рёберной 3-раскраске является бесконечным. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е., Малышев Д. С.** Критерий граничности и его применения // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 6. — С. 3–10.
2. **Alekseev V. E.** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Applied Mathematics. — 2004. — V. 132. — P. 17–26.
3. **Alekseev V. E., Korobitsyn D. V., Lozin V. V.** Boundary classes of graphs for the dominating set problem // Discrete Mathematics. — 2004. — V. 285. — P. 1–6.
4. **Alekseev V. E., Boliac R., Korobitsyn D. V., Lozin V. V.** NP-hard graph problems and boundary classes of graphs // Theoretical Computer Science. — 2007. — V. 389. — P. 219–236.
5. **Holyer I.** The NP-completeness of edge-coloring // SIAM J. Comput. — 1981. — V. 10, N 4. — P. 718–720.

Малышев Дмитрий Сергеевич,
e-mail: dsmalyshev@rambler.ru

Статья поступила
5 ноября 2008 г.