МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ

УДК 517.951

А.А. Абрашкин [1], Е.М. Громов [2], В.В. Тютин [2]

СПЕКТР ИДЕАЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Институт прикладной физики Российской академии наук[1],
Государственный университет – Высшая школа экономики, Нижегородский филиал[2]

Система уравнений для средней скорости и напряжений Рейнольдса рассматривается в предположении малости процессов диффузии, релаксации и вязкости. Такое состояние турбулентности названо идеальным. Показано, что соответствующий ему спектр имеет форму спектра абсолютно черного тела.

Ключевые слова: турбулентность, квазичастицы.

Спектральная плотность энергии турбулентности как функция волнового числа возмущений (или их частоты) представляет несимметричную колоколообразную кривую, спадающую на бесконечности. Она находится из эксперимента. Традиционно на ней выделяют три основных участка [1]. Длинноволновый, соответствующий энергосодержащим вихрям, коротковолновый, где преобладает диссипация, и промежуточный – инерционный, в границах которого как раз и осуществляется процесс передачи энергии от крупных вихрей более мелким. Границы инерционного интервала определяются неравенством $\lambda_0^{-1} >> k >> L^{-1}$, где λ_0 - внутренний масштаб турбулентности; L - ее внешний масштаб турбулентности; k - волновое число. В области $k > \lambda_0^{-1}$ происходит диссипация кинетической энергии. Для инерционного интервала построена математическая теория, основанная на анализе размерностей. Она восходит к работам А.Н. Колмогорова и в настоящее время подтверждена во многих экспериментах. Участок спектральной кривой, соответствующий инерционному интервалу, описывается законом Обухова – Колгоморова.

Длинноволновая область спектра удовлетворяет условию $\lambda_0^{-1} >> k > L^{-1}$. Она существенно шире инерционного интервала. В качестве характерных пространственных масштабов, присущих ей, можно указать размер энергосодержащих вихрей k_*^{-1}, соответствующий максимуму спектральной кривой. Если инерционная подобласть спектра характеризуется интенсивным взаимодействием вихрей, то длинноволновым вихрям это присуще в значительно меньшей степени. Вязкость на них влияет слабо. Самые крупные из них те, которые и ассоциируются со средним движением, являются анизотропными. Но по мере уменьшения пространственного масштаба вследствие эффекта растяжения вихревых трубок они становятся все более и более изотропными. Теоретические расчеты, объясняющие длинноволновую часть спектра, в принципе отсутствуют.

В настоящей работе найден спектр однородной изотропной развитой турбулентности для одного частного случая (идеальной турбулентности), когда в рамках полуэмпирического описания можно пренебречь вязкостью жидкости, а также диффузией и релаксацией возмущений поля скорости, то есть процессами, вносящими в систему диссипацию.

Турбулентно-электродинамическая аналогия

Систему уравнений для средней скорости течения $\overline{u_i}$ и напряжений Рейнольдса τ_{ij} можно записать в следующем виде [2]:

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i}=0; \qquad \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t}+\overline{u_\alpha}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}=0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t}+\overline{u_\alpha}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_\alpha}+\tau_{i\alpha}\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_\alpha}+\tau_{j\alpha}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_\alpha}=0. \tag{2}$$

Здесь $\overline{p}$ - среднее давление (черта – знак осреднения). Величины индексов i, j, α “пробегают” значения $1,2,3$; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Все величины безразмерные. При записи системы (1), (2) предполагается, что жидкость невязкая и число Рейнольдса $\mathrm{Re}\to\infty$. “Незамкнутые” слагаемые, входящие в уравнения (2) и описывающие эффекты диффузии и релаксации, положены равными нулю.

При отличном от нуля тензоре напряжений Рейнольдса эта система определяет состояние “идеальной” турбулентной среды. Ее решение

$$\overline{u_i}=\overline{u_i}^0=0; \quad \overline{p}=\overline{p}^0=\mathrm{const}; \quad \tau_{ij}=\tau_{ij}^0=c^2\delta_{ij} \tag{3}$$

соответствует неподвижной (в среднем) турбулизованной жидкости с постоянным средним давлением и однородным и изотропным распределением пульсаций скорости. Выражение для скорости c определяется равенством

$$c=\sqrt{\tau_{ii}^0/3}=\left[\left(\overline{u_1'^2}+\overline{u_2'^2}+\overline{u_3'^2}\right)/3\right]^{1/2}, \tag{4}$$

где u_i' - пульсационные компоненты скорости.

Рассмотрим течение, соответствующее малым отклонениям от движения (3). Введем возмущения для компонент средней скорости ξ_i и тензора Рейнольдса η_{ij}, а также возмущение среднего давления $\zeta=\overline{p}-\overline{p}^0$ и подставим их в уравнения (1), (2). После пренебрежения квадратичными слагаемыми получим следующую систему уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}=0; \qquad \frac{\partial \xi_i}{\partial t}+\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}=0;\\ \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial t}+c^2\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\right)=0; \quad .\end{gathered} \tag{5}$$

Из второго уравнения (5) следует, что

$$\frac{\partial \eta_{\alpha\alpha}}{\partial t}+2c^2\frac{\partial \varsigma_\alpha}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial \eta_{\alpha\alpha}}{\partial t}=\frac{\partial \gamma}{\partial t},$$

так что $\gamma=\gamma_0(x_i)$ является функцией только пространственных координат. Будем предполагать ее заданной.

Введем векторные поля $\vec{E}=(E_i), \vec{H}$ и скаляр ρ тождествами:

$$E_i=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta_{ij}-\frac{\gamma_0}{3}\delta_{ij}\right), \quad \vec{H}=c\,rot\,\vec{\xi}, \qquad \rho=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta_{ij}-\frac{\gamma_0}{3}\delta_{ij}\right).$$

В результате получаем, что система уравнений (5) эквивалентна системе уравнений Максвелла:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + rot\vec{E} = 0, \quad div\vec{H} = 0; \quad div\,\vec{E} = 4\pi\rho; \ \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - rot\vec{H} = 0. \tag{6}$$

Впервые на существование такой турбулентно-электродинамической аналогии для идеальной жидкости указал У. Томсон (лорд Кельвин) [3]. Этот же результат был позднее получен О.В. Трошкиным [4, 5]. Основной вывод этих работ состоит в том, что однородная изотропная турбулентная среда способна переносить связанные колебания полей ξ_i и η_{ij}.

Электромагнитное поле принято рассматривать как совокупность фотонов. Но тогда и поле возмущений однородной турбулентности можно интерпретировать как совокупность квазичастиц, каждой из которых поставлены в соответствие энергия ε_t и квазиимпульс $\vec{p}_t$, определяемые следующими соотношениями $\varepsilon_t = \hbar\omega,\ \vec{p}_t = \hbar\vec{k}$, $\hbar$ - постоянная Планка [6]. Такие квазичастицы было предложено называть турбулонами. Величины энергии и квазиимпульса для них связаны равенством $\varepsilon_t = c \cdot p_t$.

Турбулоны – элементарные возмущения турбулентного поля. Они обусловлены поперечными колебаниями усредненных гидродинамических полей. Идея турбулонов является естественным следствием турбулентно-электродинамической аналогии, ее логическим развитием. Турбулоны вводятся в рассмотрение по аналогии с фотонами. Как и фотоны, они служат примером проявления корпускулярно-волнового дуализма. Их введение не противоречит классическому описанию турбулентности в рамках уравнения Навье-Стокса, а дополняет его.

Равновесный спектр ансамбля турбулонов

Примем гипотезу, что турбулентное состояние жидкости порождается ансамблем турбулонов. Поскольку все диссипативные процессы внутри жидкости отсутствуют, то полное число турбулонов в системе не меняется, и спектр является стационарным. Такая ситуация в чистом виде реализуется для сверхтекучей жидкости (кстати, для неё не вызывает никаких возражений существование квантованных возбуждений в течении). Для реальной турбулентности результаты такого подхода интересны, прежде всего, в области энергосодержащих вихрей (большие масштабы).

При принятых предположениях для описания статистики турбулонов можно воспользоваться подходом, развитым для описания равновесного теплового излучения [7]. Как и фотоны, турбулоны подчиняются статистике Бозе – Эйнштейна. Их число dQ_t, содержащееся в спектральном интервале $d\nu = d\omega/2\pi$, равно

$$dQ_t(\nu) = \frac{8\pi V}{c^3}\frac{\nu^2 d\nu}{\exp\left((h\nu - \mu)/W\right) - 1}\ , \tag{7}$$

здесь V - объем; $h = 2\pi\hbar$; μ, W - постоянные. В статистической физике $W = KT$ (K - постоянная Больцмана, T - температура), а $\mu < 0$ - химический потенциал. В нашем случае используется формальная аналогия, поэтому будем считать W и μ просто параметрами микротеории. В теории излучения абсолютно чёрного тела число частиц фотонного газа является переменной величиной, поэтому химический потенциал полагается равным нулю [7]. Для рассматриваемого турбулонного газа число частиц Q_t постоянно, а значит, и нет необходимости накладывать дополнительное ограничение на величину μ.

Для спектра энергии $S(\nu)$ справедлива следующая формула:

$$S(\nu) = h\nu\frac{dQ_t}{d\nu} = \frac{8\pi hV}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp\left((h\nu - \mu)/W\right) - 1}\ . \tag{8}$$

Следует отметить, что это соотношение определяет колоколообразную кривую, качественно соответствующую спектру реальной турбулентности. Для сопоставления закона (8) с экспериментально измеренным спектром $S^e(\nu)$ следует выбрать значения свободных параметров W, μ. Сделать это можно, например, связав значения двух спектральных функций в точках их максимума.

Пусть экспериментально найденная функция принимает максимальное значение $S^e_{\max}$ в точке $\nu_{\max}$. Спектр (8) также имеет максимум в ней, если выполняется условие

$$e^{\chi}(3-\chi)=e^{\mu/W}; \quad \chi = h\nu_{\max}/W. \tag{9}$$

С другой стороны, справедливо соотношение

$$\chi=\frac{\mu}{W}+\ln\left(1+\frac{8\pi hV\nu^3_{\max}}{c^3S^e_{\max}}\right). \tag{10}$$

Выражения (9), (10) представляют систему двух уравнений для определения двух безразмерных величин χ и μ/W. По ним уже легко находятся значения μ, W и восстанавливается вид спектра (8). Привязка к точке максимума – только один из возможных способов сравнения теоретического и экспериментального спектров. Можно, к примеру, сшивать спектр (8) с колмогоровским законом. Процедура выбора свободных констант при этом, очевидно, остается неоднозначной. Поэтому в каждом из проведенных расчетов можно будет говорить только о качественном объяснении экспериментального и теоретического спектров. Причина тому – пренебрежение эффектами диссипации. Однако совпадение с экспериментальными данными будет всегда тем точнее, чем в меньшей степени проявляются они. Это свойственно большим пространственным масштабам возмущений (малым частотам). В пределе малых частот $h\nu \ll \mu$ (длинноволновый предел) имеем:

$$S(\nu)=\frac{8\pi hV}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp(-\mu/W)-1}$$

или с учетом дисперсионного соотношения для турбулонов $S(k) \sim k^3$.

Необычность полученного выражения для спектра турбулентности заключается в том, что в него входит постоянная Планка. В связи с этим обратим внимание на то, что идеи квантовой механики имеют свои глубокие корни еще и в статистической физике и наряду с двумя направлениями открытия квантомеханических идей (оптико-механическая аналогия де Бройля – Шредингера и матричная модель Гейзенберга – Борна, основанная на принципе соответствия) существовала возможность третьего. Постоянная h, численное значение которой Планк нашел при изучении законов излучения, а Эйнштейн, - сравнивая с опытом свою формулу для фотоэффекта, могла бы быть найдена, например, при изучении теплоемкости газа бозонов или фермионов [8]. Вполне вероятно, что в число этих примеров со временем войдет и спектр турбулентности.

Идеальная турбулентность лишена, может быть, самого важного свойства реальных турбулентных течений - переноса энергии по спектру от больших вихрей к малым. Но ее анализ позволяет говорить о наличии у развитой турбулентности волновых свойств и открывает возможности для применения к ее исследованию волновых методов.

Библиографический список

1. **Фрост, У.** Спектральная теория турбулентности // Турбулентность: принципы и применения /под ред. У. Фроста и Т. Моулдена. – М.: Мир, 1980. С. 99–141.
2. **Монин, А.С.** Статистическая гидромеханика. Т. 1 / А.С. Монин, А.М. Яглом. – СПб.: Гидрометеоиздат, 1992.
3. **Tomson, W.** On the propagation of laminar motion through a turbulently moving inviscid liquid // Philos. Mag. 1887. V. 4(47). P. 342. (Подробное изложение статьи: Уиттекер Э. История теории эфира и электричества. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001).

4. **Трошкин, О.В.** О распространении малых возмущений в идеальной турбулентной среде // ДАН СССР. 1989. Т. 307. № 5. С. 1072–1076.
5. **Трошкин, О.В.** О малых возмущениях турбулентных сред // Этюды о турбулентности. – М.: Наука, 1994. С. 59–74.
6. **Абрашкин, А.А.** Концепция квазичастиц в турбулентности // Нелинейный мир, 2009. Т. 7. №1. С. 3–13.
7. **Ландау, Л.Д.** Статистическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1964.
8. **Румер, Ю.Б.** Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. – М.: Наука, 1977.

Дата поступления
в редакцию 02.04.2010

A.A. Abrashkin, E.M. Gromov, V.V. Tyutin

SPECTRUM OF IDEAL TURBULENCE

The system of equations for average velocity and Reynolds stresses are examined supposing the smallness of diffusive, relaxation and viscous processes. Such turbulent state is named ideal. It is shown that the spectrum of turbulence has the form of spectrum of absolutely black body.

Key words: turbulence, quasi-particles