УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43
М34

Математика. Механика : сб. науч. тр. – Саратов : Изд-во Сарат.
М34 ун-та, 2011. – Вып. 13. – 192 с. : ил.

Сборник содержит статьи сотрудников механико-математического факультета Саратовского государственного университета. Представлены исследования по алгебре, геометрии, дискретной математике, информатике, математическому анализу, спектральной теории операторов, теории приближений, математической экономике, биомеханике, механике деформируемого твёрдого тела, оптимальному управлению движением космического аппарата, механике жидкости и газа и их приложениям.

Для научных работников, аспирантов и специалистов в области математики и механики.

УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43

Работа издана в авторской редакции

ISSN 1609-4751

то имеют место соотношения

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\nu} v_0(x,\lambda;f)\,d\lambda = f_0(x) + o(1) \text{ при } \nu\to\infty,$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\nu} v_1(x,\lambda;f)\,d\lambda = f_1(x) + o(1) \text{ при } \nu\to\infty.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 528 с.

2. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Исследования по теории операторов. : сб. науч. тр. Уфа, 1988. С. 182–193.

УДК 519.83

Т. Ф. Савина

О ПОЛНЫХ СЕМЕЙСТВАХ ГОМОМОРФИЗМОВ ИГР С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Для игр с отношениями предпочтения вида $G = \langle (X_i)_{i\in N}, A, (\rho_i)_{i\in N}, F\rangle$ как для алгебраических систем [1] естественным образом введено понятие гомоморфизма [2]. Вопрос о сохранении оптимальных решений при переходе от одной игры с отношениями предпочтения к другой с помощью гомоморфизма был рассмотрен в работе [3] на базе условий ковариантности и контравариантности гомоморфизмов. В настоящей статье дано точное описание множества оптимальных решений [4] игры на основе полноты семейства гомоморфизмов.

Оптимальными решениями в игре являются ситуации равновесия и допустимые (вполне допустимые) исходы. Введем соответствующие определения.

Определение 1. Ситуация $x^0 = \left(x_i^0\right)_{i\in N} \in X$ в игре G называется

- *ситуацией общего равновесия*, если для каждого $i \in N$ и любых $x_i \in X_i$ выполнено условие $F(x^0 \parallel x_i) \overset{\rho_i}{\not>} F(x^0)$;
- *ситуацией равновесия по Нэшу*, если выполняется $F(x^0 \parallel x_i) \overset{\rho_i}{\lesssim} F(x^0)$.

Определение 2. Исход a называется

- *допустимым в игре* G, если для каждого игрока $i \in N$ выполнено $\neg\left(\exists x_i \in X_i\right)\left(\forall x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}\right) F\left(x_i, x_{N\setminus i}\right) \overset{\rho_i}{>} a$,
- *вполне допустимым в игре* G, если для каждого игрока $i \in N$ выполнено $\left(\exists x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}\right)\left(\forall x_i \in X_i\right) F\left(x_i, x_{N\setminus i}\right) \overset{\rho_i}{\ngtr} a$.

Пусть K и $\mathscr{K}$ – два класса игр с отношениями предпочтения множества игроков $N = \{1, \ldots, n\}$. Зафиксируем в этих классах некоторые принципы оптимальности; будем обозначать через $Opt\, G$ множество оптимальных решений игры $G = \langle (X_i)_{i\in N}\,, A, (\rho_i)_{i\in N}\,, F\rangle \in \mathrm{K}$, через $Opt\,\Gamma$ – множество оптимальных решений игры $\Gamma = \langle (Y_i)_{i\in N}\,, B, (\sigma_i)_{i\in N}\,, \Phi\rangle \in \mathscr{K}$.

Определение 3. Набор отображений $\boldsymbol{f} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi)$, где $\varphi_i\colon X_i \to Y_i$ $(i \in N)$ и $\psi\colon A \to B$ называется *гомоморфизмом* игры G в игру Γ, если для любого индекса $i \in N$, любых элементов $a_1, a_2 \in A$ и любой ситуации $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ выполняются следующие два условия:

$$Hom1: \quad \psi(F(x_1, \ldots, x_n)) = \Phi(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)),$$
$$Hom2: \quad a_1 \overset{\rho_i}{\lesssim} a_2 \;\Rightarrow\; \psi(a_1) \overset{\sigma_i}{\lesssim} \psi(a_2).$$

Гомоморфизм $\boldsymbol{f}$ игры G в игру Γ называется *строгим*, если для каждого $i \in N$ дополнительно выполняется условие

$$Str: \quad a_1 \overset{\rho_i}{<} a_2 \;\Rightarrow\; \psi(a_1) \overset{\sigma_i}{<} \psi(a_2).$$

Определение 4. Зафиксируем некоторый класс H гомоморфизмов из игр класса K в игры класса $\mathscr{K}$. Гомоморфизмы класса H называются *ковариантными относительно классов* $(\mathrm{K}, \mathscr{K})$, если для любых двух игр $G \in \mathrm{K}$ и $\Gamma \in \mathscr{K}$ и любого гомоморфизма $\boldsymbol{f} \in H$ $\boldsymbol{f}$ – образ оптимального решения игры G есть оптимальное решение в игре Γ, и *контравариантными относительно классов* $(\mathrm{K}, \mathscr{K})$, если для любых двух игр $G \in \mathrm{K}$ и $\Gamma \in \mathscr{K}$ и любого гомоморфизма $\boldsymbol{f} \in H$ $\boldsymbol{f}$ – прообраз оптимального решения игры Γ есть оптимальное решение в игре G.

Определение 5. Семейство гомоморфизмов $(\boldsymbol{f}_j)_{j\in J}$ называется *ковариантно полным*, если для каждого оптимального решения $p \in Opt\, G$ существует такой индекс $j \in J$, что $\boldsymbol{f}_j(p) \in Opt\,\Gamma_j$.

Семейство гомоморфизмов $(\boldsymbol{f}_j)_{j\in J}$ называется *контравариантно полным*, если условие «$\boldsymbol{f}_j(p) \in Opt\,\Gamma_j$ для всех $j \in J$» влечет $p \in Opt\, G$.

Лемма

1. Семейство гомоморфизмов $(\boldsymbol{f}_j)_{j\in J}$ *является ковариантно полным семейством контравариантных гомоморфизмов тогда и только тогда, когда выполнено равенство:* $Opt\, G = \bigcup\limits_{j\in J} \boldsymbol{f}_j^{-1}(Opt\, \Gamma_j)$.

2. Семейство гомоморфизмов $(\boldsymbol{f}_j)_{j\in J}$ *является контравариантно полным семейством ковариантных гомоморфизмов тогда и только тогда, когда выполнено равенство:* $Opt\, G = \bigcap\limits_{j\in J} \boldsymbol{f}_j^{-1}(Opt\, \Gamma_j)$.

Пусть K – класс игр с упорядоченными исходами, $\mathscr{K}$ – класс игр с линейно упорядоченными исходами. В качестве оптимальных решений игры $G \in$ K возьмем множество ее ситуаций равновесия, в качестве оптимальных решений игры $\Gamma \in \mathscr{K}$ – множество ее ситуаций равновесия по Нэшу. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1

1. Относительно указанных классов игр и их оптимальных решений все строгие гомоморфизмы являются контравариантными.

2. Для каждой игры $G \in$ K *семейство всех ее строгих гомоморфизмов в игры класса* $\mathscr{K}$ *является ковариантно полным.*

Схема доказательства. Зафиксируем две игры $G \in$ K, $\Gamma \in \mathscr{K}$ и некоторый гомоморфизм $\boldsymbol{f}$ из игры G в игру Γ.

Доказательство утверждения 1 проводится методом от противного. Предполагая, что ситуация $x^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ не будет ситуацией общего равновесия в игре G, получаем противоречие с тем, что ситуация $\varphi(x^0) = \left(\varphi_1(x_1^0), \ldots, \varphi_n(x_n^0)\right)$ является ситуацией равновесия по Нэшу в игре Γ.

Доказательство утверждения 2 сводится к нахождению строгого гомоморфизма $\boldsymbol{f}$ из игры G в некоторую игру Γ с линейно упорядоченными исходами такого, что для каждой ситуации общего равновесия x^0 игры G ситуация $\varphi(x^0)$ будет ситуацией равновесия по Нэшу в игре Γ. Существование искомого строгого гомоморфизма основано на лемме 2 [5]. Ситуация x^0 будет ситуацией равновесия по Нэшу в игре $\Gamma = \langle (X_i)_{i\in N}\,, A,\, (\overline{\rho}_i)_{i\in N}\,, F\rangle$ с линейно упорядоченными исходами. При этом набор тождественных отображений $(\Delta_{X_1}, \ldots, \Delta_{X_n}, \Delta_A)$ будет строгим гомоморфизмом из игры G в игру Γ.

Теорема 1 доказана.

Далее, для тех же классов игр рассмотрим следующие типы оптимальных решений. В качестве оптимальных решений игры $G \in$ K возьмем множество ее ситуаций равновесия по Нэшу, в качестве оптимальных решений игры $\Gamma \in \mathscr{K}$ – множество ее ситуаций равновесия по Нэшу. Тогда справедлива

Теорема 2

1. Относительно указанных классов игр и их оптимальных решений все строгие гомоморфизмы являются ковариантными.

2. Для каждой игры $G \in \mathrm{K}$ семейство всех ее строгих гомоморфизмов в игры класса $\mathscr{K}$ является контравариантно полным.

Схема доказательства. Зафиксируем две игры $G \in \mathrm{K}$, $\Gamma \in \mathscr{K}$ и некоторый гомоморфизм $\boldsymbol{f}$ из игры G в игру Γ.

1. Применяя последовательно свойства гомоморфизма $Hom2$, $Hom1$ к ситуации равновесия по Нэшу x^0 в игре G, получаем, что ситуация $\varphi(x^0)$ является ситуацией равновесия по Нэшу в игре Γ.

2. Доказательство проводится методом от противного с применением леммы 2 [5]. Рассмотрим игру $\langle (X_i)_{i \in N}, A, (\overline{\rho}_i)_{i \in N}, F \rangle = \overline{\Gamma}$, в которой для игрока i_0 отношение порядка есть $\overline{\rho}_{i_0}$, а для всех остальных игроков $j \neq i_0$ отношение $\overline{\rho}_j$ есть любое линейное доупорядочение порядка ρ_j. В игре $\overline{\Gamma}$ с линейно упорядоченными исходами ситуация x^0 не будет ситуацией равновесия по Нэшу, а система тождественных отображений $\varphi_i = \Delta_{X_i}$ $(i \in N)$; $\psi = \Delta_A$ является строгим гомоморфизмом из игры G в игру $\overline{\Gamma}$ с линейно упорядоченными исходами, что противоречит предположению о том, что ситуация $\varphi(x^0)$ является ситуацией равновесия по Нэшу в игре с линейно упорядоченными исходами.

Теорема 2 доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М. : Наука. Физматлит, 1997. 368 с.

2. *Савина Т. Ф.* Гомоморфизмы игр с отношениями предпочтения // Дискретная математика и ее приложения: материалы X Международного семинара: Москва, 1–6 февраля 2010 г.. М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 2010. С. 426–428.

3. *Савина Т. Ф.* Ковариантные и контравариантные гомоморфизмы игр с отношениями предпочтения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 66–70.

4. *Савина Т. Ф.* Оптимальные решения в играх с отношениями предпочтения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика. вып. 2. С. 32—36.

5. *Розен В. В.* Редуцируемость оптимальных решений игр с упорядоченными исходами // Теория полугрупп и ее приложения. Вопросы аксиоматизации. 1988. С. 50–60.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

БЕЛЯЕВ Д. Д., ДУДОВ С. И. Внешняя оценка сегментной функции полиномиальной полосой с варьируемой шириной и наименьшей площадью . . . 3

БУКУШЕВА А.В. Финслеровао пространство с метрикой Беравальда – Мора как обобщение метрического пространства невырожденных поличисел . . . 6

БУКУШЕВА А. В., ГАЛАЕВ С. В., ИВАНЧЕНКО И. П. О почти контактных метрических структурах, определяемых связностью над распределением с финслеровой метрикой . . . 10

БУРЛУЦКАЯ М. Ш., ХРОМОВ А. П. Асимптотика фундаментальной системы решений для уравнения Дирака . . . 14

ВОДОЛАЗОВ А. М. Алгебры целозначных функций для разложимых алгебраических торов . . . 20

ВЫГОДЧИКОВА И. Ю. О задаче равномерного распределения риска финансового портфеля . . . 23

ГАЛАЕВ С. В. О продолжении внутренней связности неголономного многообразия с финслеровой метрикой . . . 26

ГАЛАЕВ С. В., ГОХМАН А. В. О внутренней геометрии метрических почти контактных многообразий . . . 29

ИВАНОВ Р. А., ФИРСТОВ В. Е. Принцип минимума информации при оптимизация группового сотрудничества в учебном процессе. . . . 33

ИОФИНА Т. В. Приближение функций средними Эйлера рядов Фурье по системам Виленкина . . . 37

КОРОБЧЕНКО Е. В. Изоморфность гомотопических групп толерантных пространств, определенных через толерантные сфероиды разного размера . . . 41

КОЧЕРГИН А. П. Уточнение асимптотики решения Йоста для дифференциального пучка второго порядка . . . 44

КУЗНЕЦОВА И. А. Об одной иерархической игре трёх лиц . . . 48

КУРДЮМОВ В. П., ХРОМОВ А. П. Базисность Рисса собственных функций интегральных операторов с разрывными ядрами . . . 51

ЛУКОМСКИЙ Д. С., ЛУКОМСКИЙ С. Ф. Всплесковые базисы и криптография . . . 55

МАЗУР Т. В. Алгоритм решения обратной задачи Штурма — Лиувилля на звездообразном графе . . . 58

МАЛИНСКИЙ А. И. Реализация алгоритма построения дерева сценариев с заданными статистическими свойствами 62
МАТВЕЕВА Ю. В. О кубическом многочлене на четырехграннике 64
МОЛЧАНОВ В. А. Конкретная характеризация универсальных планарных автоматов 68
НЕБАЛУЕВ ,С. И. Спектральная последовательность Картана — Лере для толерантных пространств 70
НОВИКОВ В. Е. Некоторые алгебраические операции над формальными контекстами 73
ОРЕЛ А. А. О некоторых видах фантомных типов данных 76
ПАСЕКОВ П. Ю. Применение теории Марковица к портфелю механических торговых систем 79
ПОЛЯКОВ В. Н. О некоторых диофантовых уравнениях 82
РОЗЕН В. В. Нахождение крайних сбалансированных подматриц заданной матрицы 85
РЫХЛОВ В С. Разложение по собственным функциям одного пучка дифференциальных операторов второго порядка 89
САВИНА Т. Ф. О полных семействах гомоморфизмов игр с отношениями предпочтения 92
ТРЫНИН А. Ю. О необходимых и достаточных условиях равномерной и поточечной сходимости интерполяционных процессов по «взвешенным» многочленам Якоби 96
ФАДЕЕВ Р. Н. Оценки наилучших приближений по мультипликативным системам в некоторых пространствах 100
ФАЙЗЛИЕВ А. Р. Статистические методы определения числа локальных центров на территории города 103
ФЕДОСЕЕВ А. Е. Единственность решения обратной задачи для дифференциального уравнения с особенностью 106
ФОКИН П .В. Внутреннее представление булевых многочленов в виде ZDD-диаграмм 109
ХВОРОСТУХИНА Е. В. Об элементарных свойствах универсальных гиперграфических автоматов 112
ХРОМОВ А. А. О выборе параметра при восстановлении функций с интегральным условием 114
ХРОМОВА Г. В. О сходимости приближений функции с «размазанным» граничным условием 116
ЧИКИНА Т. С. Приближение средними Зигмунда — Рисса в p-вариационной метрике 118
ШАТАЛИНА О. И. Решение задачи типа Колмогорова — Никольского для регуляризующих операторов Тихонова 121
ШЕБАЛДИН В. Р. Необходимые условия экстремума в задаче экономического роста с ограничениями на фондовооруженность 123
ШИШКОВА Е. В. Об оценке скорости сходимости приближения функций некоторым семейством интегральных операторов на классах Липшица 126
ЮРКО В. А. Обратная задача для сингулярных дифференциальных операторов на некомпактных графах 128

СЕКЦИЯ МЕХАНИКИ

АНТИПОВА А. С., БИРЮКОВ В. Г. Аналитическое и численное исследование кинематической задачи оптимальной переориентации твердого тела . . . 133
БАРЫШЕВ А. А., ФЕДУКИНА М. А. О реализации алгоритма решения краевой задачи вибрационного изгиба вязкоупругой пластины – полосы с использованием технологий параллельного программирования . . 136
БИРЮКОВ В. Г., ВАХЛЮЕВ В. Ю. Оптимальная остановка вращательного движения твердого тела . . . 140
ДОЛЬ А. В., ГУЛЯЕВ Ю. П. Интегрирование основной системы уравнений динамики кровотока методом разделения переменных . . . 143
ИВАНОВ М. К., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Алгоритмы определения ориентации движущегося объекта в инерциальной системе координат . . . 147
ЛЯГАЕВА Т. В., ЧЕРНОВ И. А. К учету противодавления в задаче о сильном взрыве . . . 150
КИТАРОВА А. К., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата за фиксированное время . . . 154
КОЖАНОВ В. С., ЧЕРНОВ И. А. Роль гипергеометрической функции в нахождении автомодельных решений одномерной газовой динамики . . . 157
ЛИВЕРОВСКИЙ Д. И., ШЕВЫРЕВ С. П. Метод Давыдова для случая несжимаемой невязкой тяжелой жидкости на регулярной сетке . . . 161
ЛИВЕРОВСКИЙ Р. И., ШЕВЫРЕВ С. П. Метод Давыдова на треугольной сетке для случая сжимаемого газа . . . 164
ОЛЬШАНСКИЙ В. Ю., СЕРЕБРЯКОВ А. В., АБИТОВА И. Ф. Анализ влияния граничных условий на характеристики пьезогироскопа . . . 167
ПАНКРАТОВ И. А., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Аналитическое решение уравнений задачи переориентации орбиты космического аппарата в отклонениях . 169
РАСТЕГАЕВ Ю. О. Влияние геометрических параметров на величину выходного сигнала пьезогироскопа . . . 173
САПУНКОВ Я. Г. Оптимальное управление движением космического аппарата с солнечным парусом . . . 176
СЕВОСТЬЯНОВ Г. Д. Метод расчета параметров при регулярном пересечении косых скачков . . . 180
ШИНДЯПИН Г. П., МАТУТИН А. А. Аналитическое и численное исследование полей давлений при рефракции ударных волн на поверхности океана . . . 184

Научное издание

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 13

Ответственный за выпуск С. А. Бутерин
Технический редактор В. В. Володина
Корректор Е. Б. Крылова
Оригинал-макет подготовлен Д. Ю. Калькаевым

Подписано в печать 25.11.2011.
Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 10,57 (12). Тираж 150. Заказ 104.

Издательство Саратовского университета. 410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Издательства Саратовского университета. 410012, Саратов, Астраханская, 83.