ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"

Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета
"Высшая школа экономики"

Кафедра высшей математики

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

методические указания к курсовой работе

Москва 2013

Составители: канд. физ.-мат. наук В.Н. Деменко,
д-р физ.-мат. наук Р. С. Исмагилов, канд. физ.-мат. наук А. Г. Федотов

Методические указания к курсовой работе "Элементарные асимптотические методы"/ Московский институт электроники и математики.
Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики"; Сост. В.Н. Деменко, Р. С. Исмагилов, А. Г. Федотов, М., 2013.- 15 с.

Методические указания к курсовой работе являются составной частью учебно-методического комплекса по математическому анализу. Рассмотрены теоретические основы элементарных асимптотических методов и приведены некоторые примеры их применения.
Предназначено для студентов I курса факультета прикладной математики и кибернетики, 3 модуль.

ISBN 978–5–94506–311–2

§1. Обозначения

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены на множестве $\dot{O}_h(a) = \{x : 0 < |x-a| < h\}$ (то есть в проколотой h-окрестности точки a). Мы хотим сравнить поведение этих функций при $x \to a$. Для этого введем следующие обозначения. Будем писать

а) $f(x) \sim g(x)$ (при $x \to a$), если $f(x) = g(x)\gamma(x)$, где $\gamma(x) \to 1$ при $x \to a$ (читается: $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \to a$);

б) $f(x) = o(g(x))$ (при $x \to a$), если $f(x) = g(x)\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$ (читается: $f(x)$ есть "о-малое" относительно $g(x)$ при $x \to a$);

в) $f(x) = O(g(x))$ (при $x \to a$), если $f(x) = g(x)p(x)$, где $p(x)$ ограничена в некоторой проколотой δ-окрестности точки a; здесь $0 < \delta \leq h$ (читается: $f(x)$ есть "О-большое" относительно $g(x)$ при $x \to a$).

Аналогично вводятся обозначения $\sim$, o, O для сравнения поведения функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Наконец, если $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — две числовые последовательности, то пишут:

$a_n \sim b_n$ (при $n \to \infty$), если $a_n = b_n\gamma_n$, где $\gamma_n \to 1$ при $n \to \infty$;

$a_n = o(b_n)$ (при $n \to \infty$), если $a_n = b_n\alpha_n$, где α_n – бесконечно малая при $n \to \infty$;

$a_n = O(b_n)$ (при $n \to \infty$) если существует такое M, что $|a_n| \leq M\,|b_n|$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Легко понять интуитивный смысл соотношений $\sim$, o, O. Соотношение $f(x) \sim g(x)$ (при $x \to a$) означает, что значения этих функций становятся весьма близкими между собой, если точка x достаточно близка к точке a; соотношение $f(x) = o(g(x))$ (при $x \to a$) означает, что $f(x)$ становится существенно меньше, чем $g(x)$, если точка x достаточно близка к точке a; наконец, соотношение $f(x) = O(g(x))$ (при $x \to a$) означает, что $f(x)$ не может существенно превзойти $g(x)$ при всех значениях аргумента, достаточно близких к a.

Удобство введенной символики читатель сможет оценить, познакомившись с дальнейшим текстом этой разработки, однако сразу следует иметь в виду, что наличие знака равенства в обозначениях соотношений пунктов б) и в) надо воспринимать с осторожностью. Действительно, данные соотношения не подчинены тем формальным свойствам, которыми обладают соотношения равенства для чисел или для функций. К примеру, из соотношений $f_1(x) = o(g(x))$, $f_2(x) = o(g(x))$ при $x \to a$ не следует с необходимостью равенство функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

§2. Примеры

1. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, так как $(\sin x)/x \to 1$ при $x \to 0$ (это замечательный предел, известный из курса анализа).

2. $\sin x = O(1)$ (при $x \to \pm\infty$), ибо $|(\sin x)/1| = |\sin x| \leq 1$ для всех $x \in \mathbf{R}$.

3. $\ln x = o(x^\alpha)$ (при $x \to +\infty$) для любого числа $\alpha > 0$, так как $(\ln x)/x^\alpha \to 0$ при $x \to +\infty$ (последнее равенство легко устанавливается при помощи правила Лопиталя).

4. $x^\alpha = o(a^x)$ (при $x \to +\infty$) при произвольном α и $a > 1$ (что также легко проверить, воспользовавшись правилом Лопиталя).

Соотношения 3 и 4 очень важны; они означают, что логарифмическая функция растет «существенно медленнее» степенной функции с положительным показателем, а последняя «существенно медленнее» показательной с основанием, большим единицы.

§3. Некоторые свойства соотношений $f(x) \sim g(x)$, $f(x) = o(g(x))$, $f(x) = O(g(x))$ (при $x \to a$)

Элементарные свойства соотношений $\sim$, o, O, которые приведены в этом параграфе, постоянно будут использоваться нами в дальнейшем для упрощения асимптотических формул. Предлагаем читателю самостоятельно доказать эти свойства, исходя из определений §1.

1. Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$, то $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$.

2. Если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$, то $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$.

3. Если $f(x) = o(g(x))$ и $f_1(x) = O(g_1(x))$ при $x \to a$, то $f(x)f_1(x) = o(g(x)g_1(x))$ при $x \to a$.

4. Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$ при $x \to a$, то $f(x) = O(h(x))$ при $x \to a$.

5. Если $f(x) = O(g(x))$ и $\varphi(x) = O(g(x))$ при $x \to a$, то $\varphi(x) + f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$.

6. Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = o(h(x))$ при $x \to a$, то $f(x) = o(h(x))$ при $x \to a$.

Иногда приведенные только что свойства записываются символически. Например, свойство 3 можно условно записать так:

$$o(g(x))O(g_1(x)) = o(g(x)g_1(x)),$$

свойство 4 —

$$O(O(h(x))) = O(h(x)),$$

свойство 6 —

$$O(o(h(x))) = o(h(x)).$$

Эта символика достаточно выразительна и смысл соответствующего свойства может быть с ее помощью однозначно восстановлен.

Например, мы часто будем использовать «правило поглощения» — частный случай свойства 5, которое условно может быть записано так: если $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$, то $f(x) + O(g(x)) = O(g(x))$ $(x \to a)$ (слагаемое $f(x)$ «поглощается» слагаемым $O(g)$). (Дайте точную формулировку правила поглощения в рамках определений §1.)

Данное правило позволяет сократить асимптотические формулы. Например, $x^{-1} + (x+1)^{-3/2} + 2x^{-2} + O(x^{-3/2}) = x^{-1} + O(x^{-3/2})$ при $x \to +\infty$; здесь слагаемые $2x^{-2}$, $(x+1)^{-3/2}$ «поглощаются» слагаемым $O(x^{-3/2})$.

§4. Асимптотическое представление функций

Пусть дана функция $f(x)$, $x \in \dot{O}_h(a)$. Как правило, нас будет интересовать случай, когда она имеет достаточно сложный вид (например, она задается громоздкой формулой, либо определяется как неявная функция $F(x,y) = 0$ и т.д.). Нас интересует ее поведение при $x \to a$.

Предположим, мы нашли такие функции $\varphi(x)$, $g(x)$ (достаточно простого вида), что

$$f(x) = g(x) + O(\varphi(x)), \qquad x \to a, \tag{1}$$

$$\varphi(x) = o(g(x)), \qquad x \to a. \tag{2}$$

Формула (1) представляет собой пример асимптотического равенства. Говорят также, что она дает асимптотическое представление функции $f(x)$ при $x \to a$.

Обратим внимание на то, что в правой части формулы (1) второе слагаемое, которое записано в виде $O(\varphi(x))$, является бесконечно малым по отношению к первому слагаемому $g(x)$ при $x \to a$, ибо $O(\varphi(x)) = O(o(g(x))) = o(g(x))$ (см. свойство 6 из §3). Поэтому резонно считать, что функция $g(x)$ является «главной частью» функции $f(x)$ при $x \to a$, а второе слагаемое дает оценку погрешности, возникающей при замене функции $f(x)$ функцией $g(x)$; формула (1) утверждает, что эта погрешность не превосходит величины $M|\varphi(x)|$, где $M = const$.

Нижеследующая теорема формализует утверждение «$g(x)$ есть главная часть функции $f(x)$ при $x \to a$».

`Теорема 1.` *Если выполнены условия (1) и (2), то $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$.*

`Доказательство.` Соотношения (1) и (2) означают, что в некоторой проколотой окрестности точки a будет справедлива цепочка равенств

$$f(x) = g(x) + p(x)\varphi(x) = g(x) + p(x)\alpha(x)g(x) = g(x)(1 + \beta(x)) = g(x)\gamma(x),$$

где $\lim\limits_{x\to a} \gamma(x) = 1$, поскольку $p(x)$ – ограничена в некоторой окрестности точки a, $\alpha(x)$ –бесконечно малая при $x \to a$ и следовательно, $\beta(x)$ тоже бесконечно малая при $x \to a$, т.е. $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$.

Теорема доказана.

Может случиться, что функция $f(x)$ допускает несколько асимптотических представлений вида (1). Пусть кроме равенства (1) функция $f(x)$ удовлетворяет соотношению

$$f(x) = g_1(x) + O(\varphi_1(x)), \quad x \to a, \qquad \varphi_1(x) = o(g_1(x)), \quad x \to a. \tag{3}$$

Если $\varphi_1(x) = o(\varphi(x))$, $x \to a$, то естественно считать, что асимптотическая формула (3) точнее, чем формула (1).

Как мы увидим в следующем параграфе, для одной и той же функции $f(x)$ можно написать цепочку асимптотических представлений, каждое из которых точнее предыдущего.

§5.Построение асимптотических формул с помощью формулы Тейлора

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$, $x \in O_h(a)$, имеет непрерывные производные до порядка $n+1$ включительно.*

Тогда

$$f(x) = T_n(x) + O((x-a)^{n+1}), \qquad x \to a, \tag{4}$$

где $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ — многочлен Тейлора для $f(x)$.

Доказательство. Запишем формулу Тейлора для $f(x)$ в окрестности точки a с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = T_n(x) + r_n(x), \qquad r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где точка c_x лежит между точками x и a, $x \in O_h(a)$. Так как производная $f^{(n+1)}(x)$ ограничена в некоторой окрестности $O_\delta(a)$, $0 < \delta \le h$, то $|r_n(x)| \le M|x-a|^{n+1}$, $x \in O_\delta(a)$. Последнее означает, что $r_n(x) = O((x-a)^{n+1})$, $x \to a$. Теорема доказана.

Если функция $f(x)$ имеет производные любого порядка в $O_h(a)$, то для каждого натурального n можно написать асимптотическую формулу (4). Тем самым мы получаем бесконечную последовательность асимптотических представлений для функции $f(x)$, каждое из которых точнее предыдущего, поскольку $(x-a)^{n+1} = o((x-a)^n)$, $x \to a$.

Приведем асимптотические представления для основных элементарных функций при $x \to 0$, $n = 1, 2, \ldots$:

а) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + O(x^{2n+1}),$

б) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}),$

в) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}),$

г) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + O(x^{n+1}),$

д) $(1+x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{1!}x + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + O(x^{n+1}),$

и вариант формулы д) для $\alpha = -1$:

д′) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + ... + x^n + O(x^{n+1})$

(формула геометрической прогрессии).

Выведем формулы для еще нескольких представлений, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Рассмотрим "интегральный вариант"формулы (4):

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x T_n(t)dt + O((x-a)^{n+2}).$$

Применим его к разложениям функций

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} + O(x^{2n+2})$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+(-x^2))^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot (2n-1)x^{2n}}{2^n n!} + O(x^{2n+2}).$$

Получим

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

и

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + ... + \frac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)} + O(x^{2n+3}).$$

Полезным следствием формулы (4) является следующее утверждение, позволяющее находить асимптотические представления для сложных функций.

`Теорема 3.` *Пусть $f(x)$, $x \in O_h(a)$, — функция, обладающая непрерывной производной. Пусть далее $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $t \in O_\delta(t_0)$, таковы, что $\alpha(t) \to 0$, $\beta(t) \to 0$ $(t \to t_0)$ и $\alpha(t) = O(\beta(t))$ при $t \to t_0$. Тогда $f(a+\alpha(t)) = f(a) + O(\beta(t))$ при $t \to t_0$.*

`Доказательство.` Из формулы (4) при $n = 0$ имеем $f(a+\xi) = f(a) + O(\xi)$ при $\xi \to 0$. Следовательно, $f(a+\alpha(t)) = f(a) + O(\alpha(t))$ при $t \to t_0$. Применяя свойство 4 из §3, получаем доказательство теоремы.

`Замечание.` Утверждение теоремы остается в силе при замене символа O символом o.

Из сказанного с очевидностью следует справедливость формул $e^{O(\alpha(t))} = 1 + O(\alpha(t))$, $(1+o(\alpha(t)))^{-1} = 1 + o(\alpha(t))$ при $t \to t_0$ (здесь $\alpha(t)$ — бесконечно малая при $t \to t_0$).

В заключение этого параграфа разберем четыре примера.

`Пример 1.` Напишем асимптотическое представление для функции $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + x^3 + 1}$ при $x \to \infty$.

Имеем $f(x) = x^{4/3}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}\right)^{1/3} = x^{4/3}(1+\alpha(x))^{1/3}$, где $\alpha(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}$ — бесконечно малая функция при $x \to \infty$. Согласно формуле д) этого параграфа, взяв $n = 1$, получаем: $f(x) = x^{4/3}(1 + \frac{1}{3}\alpha(x) + O(\alpha^2(x)))$, $x \to \infty$. Обозначим второй сомножитель этой формулы через $u(x)$. Так как $\alpha(x) \sim \frac{1}{x}$

$(x \to \infty)$, то $O(\alpha^2(x)) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x \to \infty$. Итак, $u(x) = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}\right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^4} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Ясно, что $\frac{1}{3x^4} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $x \to \infty$; поэтому, применяя «правило поглощения» (см. §3), получаем: $\frac{1}{3x^4} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $x \to \infty$, откуда $f(x) = x^{4/3} + \frac{1}{3}x^{1/3} + O(x^{-2/3})$, $x \to \infty$.

Заметим, что можно получить более точные асимптотики, беря большее число членов в асимптотическом представлении функции $(1 + \alpha(x))^{1/3}$.

Пример 2. Найдем асимптотику функции $f(x) = e^{\sqrt{x^2+x}-x}$ при $x \to +\infty$.

Имеем:

$$\sqrt{x^2+x} - x = x\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/2} - x = x\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) - x =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad x \to +\infty.$$

Следовательно,

$$f(x) = \sqrt{e} \cdot e^{-1/8x} e^{O(1/x^2)} = \sqrt{e}\left(1 - \frac{1}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad x \to +\infty.$$

Пример 3. Найдем асимптотику функции $f(x) = (\frac{x}{x+1})^{x^2/(x+2)}$при$x \to \infty$.

Имеем для показателя степени

$$\frac{x^2}{x+2} = x\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-1} = x\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = x - 2 + \frac{4}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to \infty,$$

и для основания

$$\frac{x}{x+1} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-1} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) = 1 + \alpha(x), \qquad x \to \infty,$$

где $\alpha(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Заметим, что $\alpha(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ и $\alpha^2(x) = \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$ при $x \to \infty$. Следовательно,

$$\ln\frac{x}{x+1} = \ln(1 + \alpha(x)) = \alpha(x) - \frac{\alpha^2(x)}{2} + O\left(\alpha^3(x)\right) =$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{2x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \to \infty.$$

Отсюда заключаем, что

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{x+2}\ln\frac{x}{x+1}} = e^{(x-2+4x^{-1}+O(x^{-2}))(-x^{-1}+(2x^2)^{-1}+O(x^{-3}))} =$$

$$= e^{-1+\frac{5}{2x}+O(x^{-2})} = e^{-1}\left(1+\frac{5}{2x}+O(x^{-2})\right), \qquad x\to\infty.$$

`Пример 4.` Выпишем три слагаемых асимптотического представления для функции $\operatorname{tg} x$ при $x\to 0$. Так как (см. разложение б)), $\cos x = 1-\alpha(x)$, где

$$\alpha(x)=\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+O\left(x^6\right), \quad \alpha^2(x)=\frac{x^4}{4}+O(x^6), \quad O(\alpha^3(x))=O(x^6), \quad x\to 0,$$

то (см. разложение д$'$))

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1-\alpha(x)}=1+\alpha(x)+\alpha^2(x)+O(\alpha^3(x))=1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+O\left(x^6\right)+\frac{x^4}{4}=$$

$$=1+\frac{x^2}{2}-\frac{5x^4}{24}+O\left(x^6\right), \qquad x\to 0.$$

Окончательно получаем:

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+O(x^7)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{5x^4}{24}+O\left(x^6\right)\right)=$$

$$=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+O(x^7), \qquad x\to 0.$$

§6.Асимптотические формулы для функций, заданных в виде интегралов

Пусть функция $f(t)$ непрерывна на полуоси $[a,+\infty)$. Что можно сказать об асимптотике функции

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ при $x\to+\infty$? При решении этого вопроса оказывается полезной следующая «теорема сравнения».

`Теорема 4.` *Пусть функции $f(t)$, $g(t)$ непрерывны на полуоси $[a,+\infty)$, $g(t)\neq 0$ при $t\in[a,+\infty)$. Положим*

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt, \qquad G(x)=\int_a^x g(t)\,dt.$$

Тогда

1) если $f(t)\sim g(t)$, $t\to+\infty$, и $G(x)\to\infty$, $x\to+\infty$, то $F(x)\to\infty$ и $F(x)\sim G(x)$ при $x\to+\infty$;

2) если $f(t)=O(g(t))$, $t\to+\infty$, то $F(x)=O(G(x))$, $x\to+\infty$; 3) если $f(t)=o(g(t))$, $t\to+\infty$, и $G(x)\to\infty$, $x\to+\infty$, то $F(x)=o(G(x))$, $x\to+\infty$.

`Доказательство.` 1) Пусть $f(t)\sim g(t)$ $(t\to+\infty)$. Согласно условию несобственный интеграл

$\int_a^\infty g(t)\,dt=\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)$ расходится. Но тогда согласно теореме сравнения для несобственных интегралов, которая известна из курса математического анализа, расходится также несобственный интеграл $\int_a^\infty f(t)\,dt$, иначе говоря,

$F(x) \to \infty$, $x \to +\infty$. Итак, при нахождении предела отношения функций $F(x)$ и $G(x)$ при $x \to +\infty$ может быть применено правило Лопиталя. По теореме Ньютона–Лейбница $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. Итак, получаем $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{G(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, т.е. $F(x) \sim G(x)$ $(x \to +\infty)$. Утверждение 1) доказано.

2) По условию теоремы имеем $|f(x)| \le M|g(x)| \quad (x \ge a)$. Поэтому

$$|F(x)| = |\int_a^x f(t)dt| \le \int_a^x |f(t)|dt \le M\int_a^x |g(t)|dt = M|\int_a^x g(t)dt| = M|G(x)|,$$

то есть $F(x) = O(G(x))$. Утверждение 2) доказано.

3)Если $f(x) = o(g(x))$, то и $|f(x)| = o(g(x)) \quad (x \to +\infty)$. Возможны два случая:

а) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x |f(t)|dt$, тогда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_a^x |f(t)|dt}{G(x)} = 0;$$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x |f(t)|dt = \infty$, тогда по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_a^x |f(t)|dt}{G(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0.$$

В любом случае $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt = o(G(x))$. А так как $|F(x)| \le \int_a^x |f(t)|dt$, то и $F(x) = o(G(x)) \quad (x \to +\infty)$.

Теорема доказана.

`Пример.` Пусть $F(x) = \int_1^x \sqrt{t^2+1}\,dt$. Здесь $f(t) = \sqrt{t^2+1} \sim t = g(t)$ $(t \to +\infty)$; положим $G(x) = \int_1^x t\,dt = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}$. Из теоремы 4 следует, что $F(x) \sim G(x)$, т.е. $F(x) \sim \dfrac{1}{2}x^2$ при $x \to +\infty$.

Одним из основных приемов при исследовании асимптотики функций, заданных интегралом, является интегрирование по частям. Проиллюстрируем этот способ примером.

`Пример.` $F(x) = \int_1^x t^a e^t dt$. Согласно формуле интегрирования по частям получаем:

$$F(x) = x^a e^x - e - a\int_1^x t^{a-1}e^t\,dt.$$

Так как $t^{a-1}e^t = o(t^a e^t)$ $(t \to +\infty)$, то (см. п. 3 теоремы 4) $\int_1^x t^{a-1}e^t\,dt = o\Big(\int_1^x t^a e^t\,dt\Big)$, $x \to +\infty$. Итак, $F(x) = x^a e^x + o(F(x))$, $x \to +\infty$, т.е. $F(x) \sim x^a e^x$. Отсюда следует также, что $\int_1^x t^{a-1}e^t\,dt \sim x^{a-1}e^x$, $x \to +\infty$. Поэтому получаем такую асимптотическую формулу:

$$F(x) = x^a e^x + O(x^{a-1} e^x) = x^a e^x (1 + O(1/x)), \qquad x \to +\infty.$$

Можно получить более точные асимптотики, применяя многократное интегрирование по частям.

В связи со сходящимся несобственным интегралом $\int_a^\infty f(t)\,dt$ естественно возникает вопрос об установлении асимптотики выражения $\int_x^\infty f(t)\,dt$ при $x \to +\infty$. Основой для исследования здесь является теорема $4'$, которая аналогична рассмотренной выше теореме 4; она также может быть отнесена к разряду теорем сравнения.

Теорема $4'$. *Пусть функции $f(t)$, $g(t)$ непрерывны на полуоси $[a, +\infty)$ и $g(t) \neq 0$ при $t \in [a, +\infty)$. Тогда*

1) *если $f(t) \sim g(t)$, $t \to +\infty$, и несобственный интеграл $\int_a^\infty g(t)\,dt$ сходится, то сходится несобственный интеграл $\int_a^\infty f(t)\,dt$, причем*

$$\int_x^\infty f(t)\,dt \sim \int_x^\infty g(t)\,dt, \qquad x \to +\infty;$$

2) *если $f(t) = O(g(t))$, $t \to +\infty$, и несобственный интеграл $\int_a^\infty g(t)\,dt$ сходится, то сходится также $\int_a^\infty f(t)\,dt$ и*

$$\int_x^\infty f(t)\,dt = O\left(\int_x^\infty g(t)\,dt\right), \qquad x \to +\infty;$$

3) *утверждение пункта 2) теоремы остается в силе, если в нем символ O заменить символом o.*

Доказательство теоремы предоставляется читателю.

Вернемся к примеру функции $F(x) = \int_1^x \sqrt{t^2+1}\,dt$, рассмотренному выше, и выведем асимптотическую формулу с остатком вида $O(1/x^2)$ при $x \to +\infty$. Имеем:

$$\sqrt{t^2+1} = t\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^{1/2} = t\left(1 + \frac{1}{2t^2} + O\left(\frac{1}{t^4}\right)\right) = t + \frac{1}{2t} + O\left(\frac{1}{t^3}\right), \qquad t \to +\infty.$$

Итак,

$$F(x) = \int_1^x \sqrt{t^2+1}dt = \int_1^x \left(\sqrt{t^2+1} - t - \frac{1}{2t}\right) dt + \int_1^x \left(t + \frac{1}{2t}\right) dt =$$

$$= \int_1^x \left(\sqrt{t^2+1} - t - \frac{1}{2t}\right) dt + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln x.$$

Осталось исследовать асимптотику функции

$$F_1(x) = \int_1^x (\sqrt{t^2+1} - t - \frac{1}{2t})\,dt.$$

Так как в последнем выражении подынтегральная функция имеет асимптотику $O(1/t^3)$, $t \to +\infty$, несобственный интеграл $\int_1^x (\sqrt{t^2+1} - t - \frac{1}{2t})\, dt$ сходится. Обозначим его значение через A. Тогда

$$F_1(x) = A - \int_x^\infty \left(\sqrt{t^2+1} - t - \frac{1}{2t}\right) dt = A - \int_x^\infty O\left(\frac{1}{t^3}\right) dt = A + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Итак,

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln x + \left(A - \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad x \to +\infty.$$

§7. Асимптотика корней уравнения

В этом параграфе мы рассмотрим два примера. Они являются модельными

для некоторых глав асимптотической теории и их разбор поможет заинтересованному читателю при дальнейшем изучении данного круга вопросов.

`Пример 1`. Пусть дана функция $f(x)$, $x \in [a, +\infty)$, причем уравнение $f(x) = 0$ имеет корни $x_1 < x_2 < \ldots$. Требуется исследовать асимптотику последовательности $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. При решении подобного вопроса часто можно использовать формулу Тейлора. Рассмотрим уравнение $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{x+1}$, $x > 0$. Корни уравнения — абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \dfrac{1}{x+1}$.

Очевидно, что $x_n = \pi n + \alpha_n$, $\alpha_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Чему эквивалентна бесконечно малая величина α_n? Чтобы это установить, подставим x_n в обе части уравнения.

Получим: $\operatorname{tg}(\pi n + \alpha_n) = \dfrac{1}{(\pi n + \alpha_n) + 1}$ или $\operatorname{tg}\alpha_n = \dfrac{1}{(\pi n + \alpha_n) + 1}$ (мы воспользовались периодичностью функции $\operatorname{tg} x$). Далее, $\operatorname{tg}\alpha_n \sim \alpha_n$ $(n \to \infty)$ (так как $\operatorname{tg} x \sim x$, $x \to 0$). а $\dfrac{1}{(\pi n + \alpha_n) + 1} \sim \dfrac{1}{\pi n}$, $n \to \infty$. Итак, $\alpha_n \sim \dfrac{1}{\pi n}$, $n \to \infty$, что равносильно тому, что $\alpha_n = \dfrac{1}{\pi n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Следовательно, $x_n = \pi n + \dfrac{1}{\pi n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$.

Данное асимптотическое представление может быть уточнено. Найдем, к примеру, асимптотическую формулу для x_n с погрешностью вида $o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Для этого воспользуемся формулой Тейлора: $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, $x \to 0$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha_n = \alpha_n + \dfrac{\alpha_n^3}{3} + o(\alpha_n^3)$, $n \to \infty$. Итак, $\alpha_n + \dfrac{\alpha_n^3}{3} + o(\alpha_n^3) = \dfrac{1}{(\pi n + \alpha_n) + 1}$ или $\alpha_n = \dfrac{1}{\pi n}\left(1 + \dfrac{\alpha_n + 1}{\pi n}\right)^{-1} - \dfrac{\alpha_n^3}{3} + o(\alpha_n^3)$, $n \to \infty$. Уже установлено, что $\alpha_n = \dfrac{1}{\pi n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$. Поэтому $o(\alpha_n^3) = o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, $n \to \infty$, и $\dfrac{\alpha_n^3}{3} = \dfrac{1}{3\pi^3 n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$,

$$\beta_n = \frac{\alpha_n + 1}{\pi n} = \frac{1}{\pi n} + \frac{1}{\pi^2 n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \ \beta_n^2 = \frac{1}{\pi^2 n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \ o(\beta_n^2) = o\left(\frac{1}{n^2}\right), n \to \infty.$$

Далее,

$$(1+\beta_n)^{-1} = 1 - \beta_n + \beta_n^2 + o(\beta_n^2) = 1 - \frac{1}{\pi n} - \frac{1}{\pi^2 n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{\pi^2 n^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad x \to \infty.$$

В результате получаем: $\alpha_n = \dfrac{1}{\pi n} - \dfrac{1}{\pi^2 n^2} - \dfrac{1}{3\pi^3 n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ при $n \to \infty$.

Ответ: $x_n = \pi n + \dfrac{1}{\pi n} - \dfrac{1}{\pi^2 n^2} - \dfrac{1}{3\pi^3 n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right), \quad n \to \infty.$

Приложение

Здесь мы рассмотрим ряд дополнительных примеров, которые иллюстрируют основное содержание пособия.

`Пример 1.` Написать асимптотическое представление функции

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^4}{x+1}} + x^2 \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right), \qquad x \to +\infty,$$

с погрешностью вида $o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Рассмотрим функции $f_1(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^4}{x+1}}$, $f_2(x) = x^2 \ln\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$. Имеем

$$f_1(x) = x^{4/3}(x+1)^{-1/3} = x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1/3} = x\left(1 - \frac{1}{3x} + \frac{2}{9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= x - \frac{1}{3} + \frac{2}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \to +\infty,$$

$$f_2(x) = x^2 \ln\left(1 - \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = x^2\left(-\frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = -\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \to +\infty,$$

следовательно,

$$f(x) = x - \frac{5}{6} + \frac{2}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \to +\infty.$$

`Пример 2.` Написать асимптотическое представление функции $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x}$, $x \to 0$, с погрешностью $o(x)$.

Представим функцию в виде $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}}$ и рассмотрим показатель этой функции:

$$\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\ln\frac{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x} = \frac{1}{x}\ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = -\frac{x}{6} + o(x), e^{-\frac{1}{6}x + o(x)} = 1 - \frac{x}{6} + o(x), \qquad x \to 0.$$

Итак, $f(x) = 1 - \dfrac{x}{6} + o(x)$, $x \to 0$.

`Пример 3.` Для функции $F(x) = \int_1^x te^{-1/t}\,dt$ написать асимптотическое представление с погрешностью вида $O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, $x \to +\infty$.

$F(x) = \int_1^x t - 1 + \dfrac{1}{2t} - \dfrac{1}{6t^2} + O\left(\dfrac{1}{t^3}\right) dt = \int_1^x (t - 1 + \dfrac{1}{2t})dt + \int_1^x (te^{-1/t} - t + 1 - \dfrac{1}{2t})dt = \dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ln x + \int_1^x \left(te^{-1/t} - t + 1 - \dfrac{1}{2t}\right) dt$. Так как в последнем слагаемом подынтегральная функция имеет асимптотику $O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, $t \to +\infty$, интеграл $\int_1^\infty \left(te^{-1/t} - t + 1 - \dfrac{1}{2t}\right) dt$ сходится; пусть его значение равно B.

Тогда $\int_1^x \left(te^{-1/t} - t + 1 - \frac{1}{2t}\right) dt = B - \int_x^\infty \left(-\frac{1}{6t^2} + O\left(\frac{1}{t^3}\right)\right) dt = B + \frac{1}{6x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $\qquad x \to +\infty$. Итак,

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} + B + \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{6x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad x \to +\infty.$$

`Пример 4.` Для функции $F(x) = \int_x^1 \dfrac{\sin t}{t^2}\,dt$ написать асимптотическую формулу с погрешностью вида $O(x^4)$, $x \to +0$.

Ясно, что замена переменного $t = 1/\tau$ приводит к рассмотрению асимптотики функции, заданной интегралом, подобным рассмотренному в п. 3. Однако короче решить задачу иначе. Заметим, что поскольку $\dfrac{\sin t}{t^2} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{6} + O(t^3)$ $(t \to 0)$, расходимость интеграла $\int_0^1 \dfrac{\sin t}{t^2}\,dt$ обусловлена первым слагаемым $1/t$ асимптотического представления подынтегральной функции. Поэтому

$$F(x) = \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\,dt = \int_x^1 \left(\frac{\sin t}{t^2} - \frac{1}{t}\right) dt + \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = \int_x^1 \left(\frac{\sin t}{t^2} - \frac{1}{t}\right) dt + \ln\frac{1}{x}.$$

Введем обозначение $C = \int_0^1 \left(\dfrac{\sin t}{t^2} - \dfrac{1}{t}\right) dt$; тогда $\int_x^1 \left(\dfrac{\sin t}{t^2} - \dfrac{1}{t}\right) dt = C - \int_0^x \left(\dfrac{\sin t}{t^2} - \dfrac{1}{t}\right) dt = C - \int_0^x \left(-\dfrac{t}{6} + O(t^3)\right) dt = C + \dfrac{x^2}{12} + O(x^4), \qquad x \to +0.$

Ответ: $F(x) = \ln\dfrac{1}{x} + C + \dfrac{x^2}{12} + O(x^4)$, $x \to +0$.

Учебное издание
Элементарные асимптотические методы

Составители:
ДЕМЕНКО Виктория Николаевна
ИСМАГИЛОВ Раис Сальманович
ФЕДОТОВ Андрей Георгиевич

Редактор С.П. Клышинская
Технический редактор О.Г. Завьялова

Подписано в печать 03.09.13. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Печать - ризография. Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л.0,8 Тираж 250 экз. Заказ Бесплатно. Изд. №47.

Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики".

109028 Москва, Б. Трехсвятительский пер., 3.

Редакционно-издательский отдел Московского института электроники и математики Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики". Участок МИЭМ типографии НИУ ВШЭ.

113054 Москва, ул. М.Пионерская, 12.