Автоматика и телемеханика, № 11, 2016

© 2016 г. **А.А. ЛАЗАРЕВ, д-р физ.-мат. наук (jobmath@mail.ru)**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва,
Московский физико-технический институт (государственный университет)),
Е.Г. МУСАТОВА, канд. физ.-мат. наук (nekolyap@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
И.А. ТАРАСОВ (ia.tarasoff@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЛАНИРОВАНИЯ ДВУХСТОРОННЕГО ДВИЖЕНИЯ НА ОДНОПУТНОМ УЧАСТКЕ ЖЕЛЕЗНОЙ ДОРОГИ С РАЗЪЕЗДОМ[1]

Рассматривается задача составления оптимального расписания движения поездов между двумя станциями, соединенными однопутной железной дорогой с разъездом. На основе метода динамического программирования предлагаются алгоритмы решения задач минимизации максимального временно́го смещения и минимизации суммы взвешенных моментов окончания перевозок. Трудоемкость алгоритмов составляет $O(n^2)$ операций, где n — количество поездов.

1. Введение

Рассматривается задача построения оптимального расписания движения поездов по однопутному участку железной дороги. Имеется два множества поездов: N_1 и N_2. Поезда множества N_1 следуют со станции 1 на станцию 2, поезда множества N_2 следуют в обратном направлении со станции 2 на станцию 1. Между станциями находится разъезд для пропуска встречных поездов. В разъезде есть главный путь для безостановочного движения поездов и один дополнительный путь для пропуска встречных поездов. Необходимо построить расписание движения поездов, т.е. установить момент отправления и время стоянки в разъезде каждого поезда.

На практике рассматриваемая задача возникает на обособленных участках железнодорожной сети, например на узкоколейных железных дорогах, использующихся для межцеховых перевозок на промышленных предприятиях. Другие области приложения — формирование расписания поездов в случае закрытия одного из путей на двухпутной железной дороге и так называемая задача об «узких местах» (или «bottleneck») на большой железнодорожной сети.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-07-03141, № 15-07-07489) и Министерства образования и науки РФ (уникальный идентификатор прикладных научных исследований и экспериментальных разработок – RFMEFI58214X0003).

Обзор моделей и методов железнодорожного планирования представлен в [1–3]. В [4, 5] показана связь задач построения расписания на однопутной железной дороге с классическими задачами теории расписаний для нескольких приборов. Данный подход, в котором участки пути выступают в роли приборов, а поезда — в роли работ, неоднократно применялся и в других публикациях, например в [6–10]. Заметим, что уже в случае трех приборов (участков дороги) данная задача в общем случае оказывается NP-трудной [6].

Целочисленные модели линейного программирования для задач с однопутными железными дорогами представлены, например, в [11, 12]. Для решения практических NP-трудных задач большой размерности разрабатываются эвристические алгоритмы, например в [9, 10, 13, 14]. Другое направление исследований, к которому относится и данная статья, — это выделение полиномиально разрешимых случаев задач, имеющих практические приложения. Среди наиболее близких по тематике публикаций здесь можно выделить [7, 8, 15–17].

В [7] рассматривается задача движения поездов между двумя станциями по однопутному участку, разделенному семафорами. Задача сводится к задаче одного прибора с переналадками, для которой на основе метода динамического программирования предлагаются алгоритмы для различных вариантов целевой функции.

В [8] рассматривается случай, когда между двумя станциями есть промежуточные станции, на которых могут останавливаться поезда. Для данной задачи предлагается псевдополиномиальный алгоритм минимизации времени окончания всех перевозок. В случае одной промежуточной станции и ее вместимости, равной одному поезду, эта задача очень близка к рассматриваемой в данной статье, но отличается целевой функцией и условиями на временнóй интервал безопасности между двумя последовательными поездами. В [15] рассматривается задача с несколькими станциями без ограничений на их вместимость. Исследован сложностнóй статус задачи и выделены некоторые полиномиальные случаи. В [16] рассматривается задача построения расписания движения поездов на двухпутном участке в случае закрытия одного из путей на ремонт. У поездов заданы моменты доступности, директивные сроки и различные скорости движения. Поскольку данная задача является NP-трудной, то для ее решения предлагается метод локального поиска на основе полиномиального алгоритма решения задачи с известным порядком отправления поездов. Существенным отличием рассмотренной в данной статье задачи является условие, что на участке одновременно может находиться только один поезд, т.е. невозможно одновременное движение группы поездов с одной станции. В [17] содержатся результаты исследования задачи двух станций с разъездом для минимизации времени окончания всех перевозок. Для этого случая было построено аналитическое решение.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 представлена математическая постановка задачи. В разделе 3 приведены некоторые свойства расписаний данной модели. В разделе 4 вводится понятие состояния и определяются правила перехода между состояниями, на основе которых в разделе 5 предлагаются алгоритмы решения задачи.

2. Постановка задачи

Рассматривается модель с разъездом, вмещающим один поезд. Схема пути приведена на рис. 1. Путь разделен разъездом на два сегмента, назовем сегмент между станцией 1 и разъездом сегментом A (слева от разъезда на рис. 1), а между разъездом и станцией 2 — сегментом B (справа от разъезда на рис. 1).

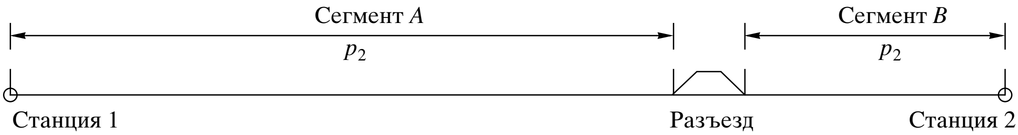

Рис. 1. Схема пути.

Перечислим исходные данные задачи:

- скорость движения поездов одинакова и постоянна;
- время прохождения поездом участков пути A и B равно p_1 и p_2 соответственно. Без потери общности будем полагать, что $p_1 \geqslant p_2$;
- количество поездов множества N_1 равно n_1, а множества N_2 — n_2;
- для каждого поезда $i \in N_s$ со станции s, $s \in \{1, 2\}$, известны директивный срок поезда d_s^i или весовой коэффициент w_s^i (зависит от целевой функции задачи);
- все поезда доступны для отправления одновременно;
- задано минимальное время между отправлением двух поездов с одной станции и прибытием двух поездов к разъезду;
- есть минимальный временной интервал между прибытием поезда на станцию и отправлением поезда с той же станции.

Для упрощения представления результатов будем считать при двух последних ограничениях интервалы безопасности одинаковыми и обозначим их через β, $\beta < p_2 \leqslant p_1$. При различных значениях интервалов безопасности подход к решению задачи будет аналогичным. Расписание, которое удовлетворяет перечисленным ограничениям, будем называть допустимым.

Необходимо составить расписание движения поездов σ, т.е. указать:

- время отправления $S_s^i(\sigma)$ каждого поезда $i \in N_s$, $s \in \{1, 2\}$;
- время стоянки $\tau_s^i(\sigma)$ каждого поезда в разъезде $i \in N_s$, $s \in \{1, 2\}$.

Обозначим время прибытия поезда $i \in N_s$ на станцию назначения при расписании σ как $C_s^i(\sigma)$, тогда:

$$C_s^i(\sigma) = S_s^i(\sigma) + p_1 + p_2 + \tau_s^i(\sigma). \tag{1}$$

Будем рассматривать задачи минимизации следующих целевых функций: максимальное временно́е смещение

$$L_{\max}(\sigma) = \max_{i \in N_s,\, s \in \{1,\, 2\}} \left\{ C_s^i(\sigma) - d_s^i \right\}; \tag{2}$$

взвешенная сумма моментов прибытия поездов на станции назначения

$$\sum w_i C_i(\sigma) = \sum_{i \in N_s,\ s \in \{1,\,2\}} w_s^i C_s^i(\sigma). \tag{3}$$

Данные целевые функции имеют практическое значение, поскольку в (2) учитываются сроки на доставку грузов, а в (3) — различная важность грузов. В соответствии с общепринятой трехпозиционной системой обозначений [18] для данных задач можно ввести краткие обозначения:

$$S2S1|siding_i = 1, t_j = t|L_{\max},$$

$$S2S1|siding_i = 1, t_j = t|\sum w_i C_i,$$

где $S2$ обозначает две станции, $S1$ — один разъезд, $siding_i = 1$ характеризует вместимость разъезда, $t_j = t$ указывает на одинаковую скорость всех поездов.

3. Свойства расписаний модели

Определение 1. *Поезд $i \in N_s$, $s \in \{1, 2\}$, при расписании σ назовем экспрессом, если он не останавливаетя в разъезде при движении по пути, т.е. $\tau_s^i(\sigma) = 0$.*

В дальнейшем будем рассматривать только расписания, при которых поезда не останавливаются в разъезде, если не пропускают другие поезда, поскольку остановка в разъезде без пропуска встречных поездов не имеет смысла и может только увеличить значение целевой функции. Поезда, останавливающиеся в разъезде для пропуска встречных поездов, будем называть неэкспрессами.

Определение 2. *Будем называть регулярным допустимое расписание, в котором нельзя уменьшить время прибытия ни одного из поездов без увеличения моментов прибытия остальных поездов.*

На рис. 2,*а* представлен пример графика движения поездов при допустимом расписании, а на рис. 2,*б* — пример графика движения поездов при регулярном расписании. На графиках горизонтальными линиями обозначены

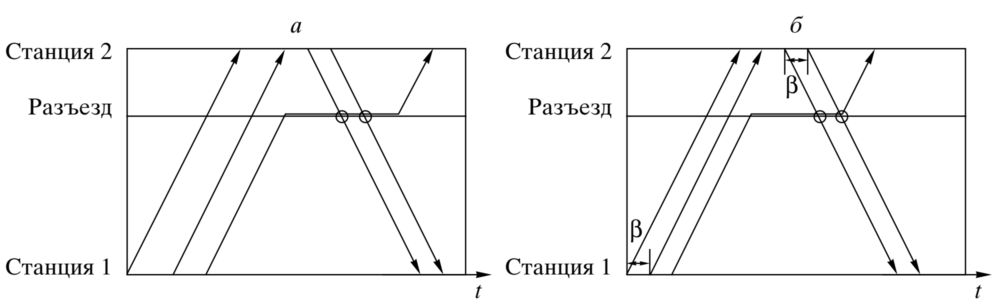

Рис. 2. Графики движения поездов при допустимом (*а*) и регулярном расписании (*б*).

станции и разъезд, а наклонные линии-стрелки — это траектории поездов. На горизонтальной оси отмечается время, на вертикальной устанавливаются координаты. Если поезд делает остановку в разъезде в определенный интервал времени, то в этом интервале на графике ему соответствует горизонтальная линия в разъезде. На рисунках кружками отмечены моменты, когда экспресс проходит разъезд, занятый поездом с другой станции.

Отметим, что в теории расписаний, например в [6], класс расписаний с похожими свойствами обозначается как класс активных расписаний. Активными расписаниями называются расписания, в которых все работы начинаются как можно раньше, т.е. нельзя уменьшить время начала выполнения работы без изменения времени выполнения других работ. В данной работе введено понятие более широкого класса регулярных расписаний, т.к. неэкспрессы не всегда начинают движение в самый ранний момент из доступных, т.е. не всякое регулярное расписание является активным.

Следующая теорема показывает, что поиск оптимального расписания может быть ограничен множеством регулярных расписаний.

Т е о р е м а. *Для любого допустимого расписания σ существует регулярное расписание $\bar{\sigma}$, для которого*

$$\begin{gathered} L_{\max}(\bar{\sigma}) \leqslant L_{\max}(\sigma), \\ \sum w_i C_i(\bar{\sigma}) \leqslant \sum w_i C_i(\sigma). \end{gathered} \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, как с помощью расписания σ построить регулярное расписание $\bar{\sigma}$ с значением целевой функции, не большим чем при расписании σ. Рассмотрим $2(n_1+n_2)$ моментов входа поездов в разъезд и выходов из разъезда в текущем расписании и пронумеруем их в порядке неубывания. Если некоторый момент выхода из разъезда неэкспресса совпадает с моментом выхода из разъезда экспресса, то меньший номер присвоим моменту выхода экспресса. Кроме того, моменту входа экспресса присвоим меньший номер, чем моменту выхода этого же экспресса. Выберем момент с минимальным номером k такой, что его можно уменьшить, изменив время выхода со станции отправления или из разъезда соответствующего поезда, без изменения графиков движения других поездов. Уменьшим данный момент до минимально возможного в текущем расписании. В полученном расписании вновь найдем момент с минимальным номером l, который можно уменьшить. Покажем, что новый момент имеет больший номер, чем предыдущий, т.е. $l > k$. Пусть k — это момент входа или выхода из разъезда некоторого поезда i. Все поезда, соответствующие первым $k-1$ моментам, уже вышли из разъезда до момента k, кроме, быть может, одного поезда, пропускающего поезд i. Следовательно, сдвиг момента k не мог повлиять на их движение. Если же есть поезд, пропускающий i, то момент его входа в разъезд не может быть уменьшен после сдвига момента k, поскольку он шел в разъезд с другой станции, а момент выхода имеет номер, больший чем k в силу правил нумерации моментов. Следовательно, не более чем за $2(n_1+n_2)$ шагов можно получить расписание, в котором нельзя уменьшить ни один из моментов отправления поездов, т.е. расписание, удовлетворяющее свойству регулярности. Поскольку моменты выхода поездов из разъезда не увеличивались, то моменты прибытия поездов на станции назначения также не увеличивались, а следовательно, значение целевой функции при изменении расписания не возрастало. Теорема доказана.

Таким образом, без ограничения общности далее будем рассматривать только регулярные расписания. Следующие две леммы позволяют задать порядок отправления поездов с каждой станции.

Лемма 1. Для задачи $S2S1|siding_i = 1, t_j = t|L_{\max}$ существует оптимальное регулярное расписание σ, при котором поезда каждого из множеств N_1 и N_2 отправляются в порядке неубывания их директивных сроков, т.е. для любых поездов i и j с одной станции s неравенство $d_s^i < d_s^j$ влечет неравенство $S_s^i(\sigma) < S_s^j(\sigma)$.

Лемма 2. Для задачи $S2S1|siding_i = 1, t_j = t|\sum w_i C_i$ существует оптимальное регулярное расписание σ, при котором поезда каждого из множеств N_1 и N_2 отправляются в порядке невозрастания их весовых коэффициентов, т.е. для любых поездов i и j с одной станции s неравенство $w_s^i > w_s^j$ влечет неравенство $S_s^i(\sigma) < S_s^j(\sigma)$.

Данные леммы легко доказываются с помощью распространенного в теории расписаний перестановочного приема (если существуют два поезда, отправленные в другом порядке, то их можно поменять местами без увеличения целевой функции), см., например [6, 19].

Далее будем рассматривать только регулярные расписания с порядками отправления поездов в соответствии с леммами 1 и 2.

Покажем, что число различных регулярных расписаний не полиномиально. Для этого построим нижнюю оценку мощности рассматриваемого множества регулярных расписаний. Пусть при регулярном расписании не используется разъезд (т.е. возможное число вариантов сокращено), значит, количество возможных регулярных расписаний равно числу перестановок порядка $n = n_1 + n_2$. Порядок старта поездов с каждой станции известен, поэтому число регулярных расписаний равно $\frac{(n_1+n_2)!}{n_1! n_2!}$.

Следующие леммы 3 и 4 формулируют изменение оптимального расписания при сдвиге начала движения поездов.

Лемма 3. Пусть σ_0^* — регулярное оптимальное расписание решения задачи $S2S1|siding_i = 1, t_j = t|L_{\max}$. Тогда расписание σ_r^*, где для любого поезда $i \in N_s,\ s \in \{1, 2\}$,

$$S_s^i(\sigma_r^*) = S_s^i(\sigma_0^*) + r,$$
$$\tau_s^i(\sigma_r^*) = \tau_s^i(\sigma_0^*),$$

будет регулярным оптимальным расписанием задачи, начало движения поездов в которой равно r. При этом оптимальное значение целевой функции будет равно $L_{\max}(\sigma_0^*) + r$.

Доказательство. Допустим, что расписание σ_r^* не является оптимальным в задаче со сдвинутым на r началом движения поездов. Тогда существует допустимое расписание σ_r, при котором все поезда начинают движение не раньше момента r, такое что

$$L_{\max}(\sigma_r) < L_{\max}(\sigma_r^*). \tag{5}$$

Построим расписание σ_0, в котором для каждого поезда $i \in N_s,\ s \in \{1, 2\}$,

$$S_s^i(\sigma_0) = S_s^i(\sigma_r) - r,$$
$$\tau_s^i(\sigma_0) = \tau_s^i(\sigma_r).$$

Данное расписание будет допустимым в исходной задаче $S2S1|siding_i = 1, t_j = t|L_{\max}$. При этом в силу (5)

$$L_{\max}(\sigma_0) = \max_{i \in N_s, s \in \{1,\ 2\}} \left\{C_s^i(\sigma_0) - d_s^i\right\} = \max_{i \in N_s, s \in \{1,\ 2\}} \left\{C_s^i(\sigma_r) - r - d_s^i\right\} =$$
$$= L_{\max}(\sigma_r) - r < L_{\max}(\sigma_r^*) - r = \max_{i \in N_s, s \in \{1,\ 2\}} \left\{C_s^i(\sigma_r^*) - d_s^i\right\} - r =$$
$$= \max_{i \in N_s, s \in \{1,\ 2\}} \left\{C_s^i(\sigma_0^*) + r - d_s^i\right\} - r = L_{\max}(\sigma_0^*),$$

что противоречит оптимальности расписания σ_0^*.

Аналогичным образом можно доказать лемму 4 для задачи $S2S1|siding_i = 1, t_j = t|\sum w_i C_i$.

Л е м м а 4. *Пусть σ_0^* — регулярное оптимальное расписание задачи $S2S1|siding_i = 1, t_j = t|\sum w_i C_i$. Тогда расписание σ_r^*, где для любого поезда $i \in N_s,\ s \in \{1, 2\}$,*

$$S_s^i(\sigma_r^*) = S_s^i(\sigma_0^*) + r,$$
$$\tau_s^i(\sigma_r^*) = \tau_s^i(\sigma_0^*),$$

будет регулярным оптимальным расписанием задачи, начало движения поездов в которой равно r. При этом оптимальное значение целевой функции будет равно $\sum w_i C_i(\sigma_0^*) + r \sum\limits_{i \in N_s, s \in \{1,2\}} w_s^i$.

4. Классификация поездов и состояний при регулярном расписании

Каждый экспресс либо проходит пустой разъезд, либо его пропускает некоторый поезд неэкспресс с другой станции. Введем определение, позволяющее классифицировать экспрессы.

О п р е д е л е н и е 3. *При регулярном расписании σ будем называть группу всех экспрессов, последовательно выходящих с одной станции с интервалом β:*

i) *«пакетом с пустым разъездом», если экспрессы проходят пустой разъезд,*
ii) *«пакетом с занятым разъездом», если экспрессы проходят разъезд, занятый поездом с другой станции.*

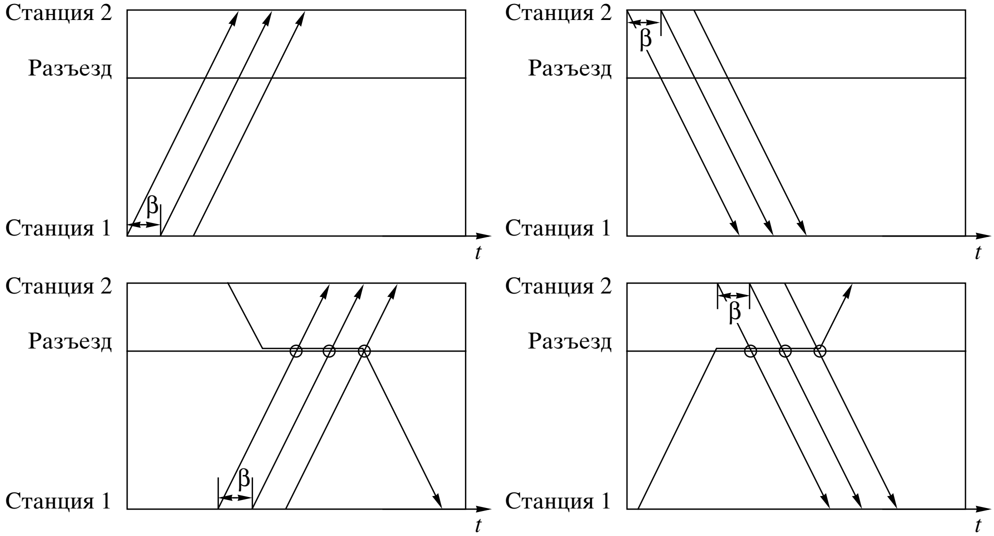

Рис. 3. Графики движения поездов для пакетов с пустым и занятым разъездами.

На рис. 3 приведены графики движения поездов, соответствующие пакетам с пустым и занятым разъездом в зависимости от станций отправления экспрессов.

На основе описанных вариантов введем понятие типа экспресса.

Определение 4. Назовем типом экспресса при регулярном расписании σ набор из двух параметров (s, b). Параметр s задает станцию, с которой идет экспресс, т.е. $s \in \{1, 2\}$. Параметр b принимает значение:

- *«0», если экспресс идет в пакете с пустым разъездом;*
- *«1», «2», если экспресс идет в пакете с занятым разъездом:*
  - *«1», если данный экспресс в пакете идет не последним;*
  - *«2», если данный экспресс в пакете идет последним.*

На рис. 4 представлены графики движения экспрессов различных типов:

- экспресс идет в пакете с пустым разъездом (тип $(s, 0)$);
- в пакете с занятым разъездом первым (тип $(s, 1)$);
- в середине пакета (тип $(s, 1)$);
- и последним (тип $(s, 2)$).

Каждое расписание задает свое множество экспрессов и сквозной порядок отправления этих экспрессов. Таким образом, все экспрессы в расписании можно упорядочить по моментам их отправления или моментам прибытия на станции назначения. На множестве типов экспрессов введем бинарное отношение «$\to$», которое представляет собой допустимые пары типов двух последовательных экспрессов. Если экспресс типа (s', b') может отправиться сразу после экспресса типа (s, b), то будем обозначать это как $(s, b) \to (s', b')$. Обозначим через $\bar{s}$ номер станции, противоположной станции с номером $s \in \{1, 2\}$. Определим возможные пары типов последовательных экспрессов.

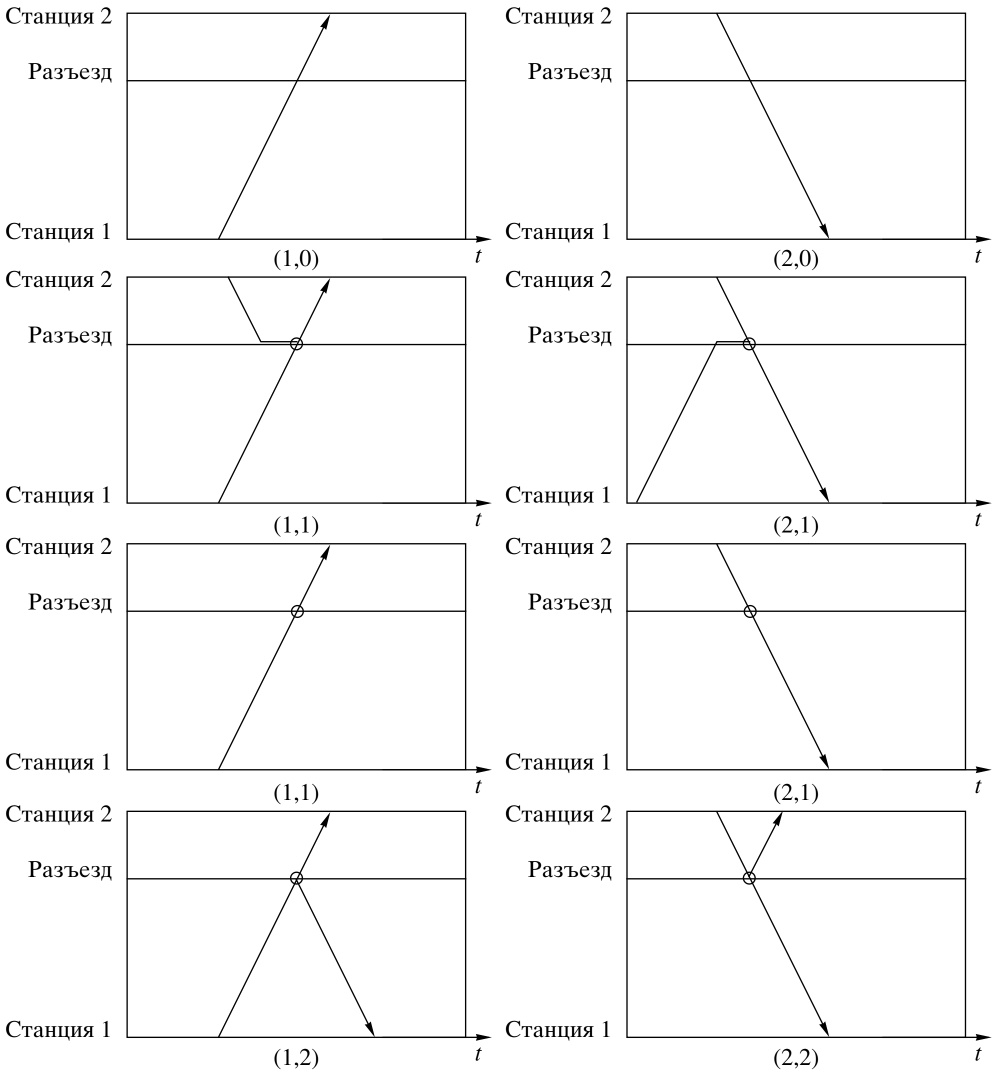

Рис. 4. Графики движения экспрессов различных типов.

Лемма 5. Пусть (s, b) и (s', b') — типы двух последовательных экспрессов в регулярном расписании σ. Тогда возможны следующие сочетания пар (s, b) и (s', b'):

- *если $b \in \{0, 2\}$, тогда $(s', b') \in \{(s, 0), (\bar{s}, 0), (s, 1), (\bar{s}, 1), (s, 2), (\bar{s}, 2)\}$;*
- *если $b = 1$, тогда $(s', b') \in \{(s, 1), (s, 2)\}$.*

Доказательство. Доказательство леммы 5 следует непосредственно из определений пакетов, типа экспресса и регулярного расписания. Если у первого из пары последовательных экспрессов тип $(s, 0)$, т.е. он проходит пустой разъезд, или тип $(s, 2)$, т.е. он завершает пакет, то следующий экспресс может иметь произвольный тип. Если же пакет с занятым разъездом еще не завершен, т.е. экспресс имеет тип $(s, 1)$, то следующий экспресс может

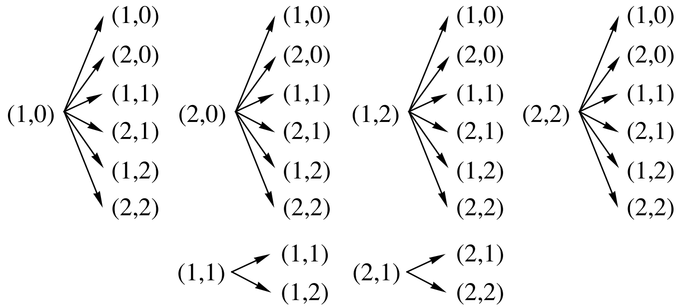

Рис. 5. Возможные пары типов последовательных экспрессов.

быть только типа $(s, 1)$ или $(s, 2)$. Действительно, в этом случае предыдущий экспресс не завершал пакет, а значит, в силу регулярности расписания неэкспресс, пропускающий его, все еще находится в разъезде. Следовательно, следующий экспрес не может идти с противоположной станции. По этой же причине не возможен тип следующего экспресса $(s, 0)$, так как разъезд занят.

На рис. 5 приведены все возможные сочетания типов экспрессов.

В силу лемм 1 и 2 известен порядок отправления поездов на каждой станции. Пронумеруем поезда на каждой станции в порядке, обратном порядку отправления, т.е. для любых поездов i и j с одной станции s в любом расписании σ

$$i < j \text{ влечет неравенство } S_s^i(\sigma) > S_s^j(\sigma). \tag{6}$$

Для каждого $k_1 \in \{0, 1, \ldots, n_1\}$ и каждого $k_2 \in \{0, 1, \ldots, n_2\}$ определим множества поездов $K_1 \subseteq N_1$ и $K_2 \subseteq N_2$: $K_s = \{1, \ldots, k_s\}$ при $k_s > 0$ и $K_s = \emptyset$ при $k_s = 0$, $s \in \{1, 2\}$.

Определение 5. *Пусть* $k_1 \in \{0, 1, \ldots, n_1\}$, $k_2 \in \{0, 1, \ldots, n_2\}$, $s \in \{1, 2\}$, $b \in \{0, 1, 2\}$, $k_s > 0$ *и при* $b > 0$ $k_{\bar{s}} > 0$. *Будем называть подзадачей* $\mathcal{P}(k_1, k_2, s, b)$ *задачу, в которой:*

- *необходимо доставить на станции назначения поезда множеств* K_1 *и* K_2;
- *первый экспресс отправляется в момент времени* $t = 0$ *и имеет тип* (s, b);
- *если* $b > 0$, *то поезд со станции* $\bar{s}$ *с номером* $k_{\bar{s}}$ *уже находится в разъезде к моменту прихода туда первого экспресса.*

Набор параметров (k_1, k_2, s, b) *назовем состоянием, соответстующим данной подзадаче.*

Поскольку в силу лемм 1 и 2 порядок отправления поездов с каждой станции известен, то состояние (k_1, k_2, s, b) однозначно определяет номер экспресса k_s, отправляющегося первым, и его тип, а также номер неэкспресса $k_{\bar{s}}$, который его пропускает (при $b \neq 0$).

Определим, какие состояния системы могут последовательно возникать:

1) в начальном состоянии еще не доставлен ни один поезд;

2) самый последний экспресс либо идет через пустой разъезд, либо является последним в пакете с занятым разъездом;

3) два последовательные состояния должны соответствовать допустимой паре типов последовательных экспрессов, т.е. для них выполняются условия леммы 5;

4) если в предыдущем состоянии экспресс со станции s завершал пакет с занятым разъездом, то в следующем состоянии на каждую станцию требуется доставить на один поезд меньше (доставлены экспресс и неэкспресс с противоположных станций).

В остальных случаях в последующем состоянии на станции, с которой шел экспресс, количество поездов уменьшается на один. Формально это можно определить следующим образом.

Определение 6. Назовем последовательность состояний

$$(k_1^1, k_2^1, s^1, b^1), \ldots, (k_1^e, k_2^e, s^e, b^e),$$

где e — количество экспрессов, допустимой, если:

1) $k_1^1 = n_1,\ k_2^1 = n_2$;

2) $(k_1^e, k_2^e, s^e, b^e) \in \{(1,0,1,0), (0,1,2,0), (1,1,1,2), (1,1,2,2)\}$;

3) *для любого* $i \in \{1, \ldots, e-1\}$ $(s^i, b^i) \to (s^{i+1}, b^{i+1})$;

4) *для любого* $i \in \{1, \ldots, e-1\}$

$$k_{s^i}^{i+1} = k_{s^i}^i - 1, \quad k_{\bar{s}^i}^{i+1} = \begin{cases} k_{\bar{s}^i}^i - 1, & \text{если } b^i = 2, \\ k_{\bar{s}^i}^i & \text{иначе.} \end{cases} \tag{7}$$

Любая допустимая последовательность состояний соответствует некоторому регулярному расписанию.

5. Алгоритм на основе метода динамического программирования

Алгоритм на основе метода динамического программирования последовательно решает подзадачи со всеми допустимыми значениями k_1 и k_2 начиная от минимальных значений ($k_1 = 1$ и $k_2 = 0$, $k_1 = 0$ и $k_2 = 1$, $k_1 = 1$ и $k_2 = 1$) и заканчивая значениями $k_1 = n_1$ и $k_2 = n_2$.

Каждое состояние характеризует ситуацию, когда уходит экспресс со станции отправления. При этом время выхода каждого экспресса при заданном порядке отправления экспрессов в регулярном расписании зависит только от типов экспрессов. Это позволяет рассматривать систему только в моменты отправления экспрессов. Определим функцию $h((s,b),(s',b'))$ как разность между моментами отправления двух последовательных экспрессов с типами (s,b) и (s',b') в регулярном расписании. Возможные значения функции $h((s,b),(s',b'))$ приведены в леммах 6–10.

Лемма 6. Для каждой из следующих пар типов последовательных экспрессов: $((s,0),(s,0))$; $((s,1),(s,1))$; $((s,1),(s,2))$ разность между моментами отправления экспрессов равна

$$h((s,b),(s',b')) = \beta.$$

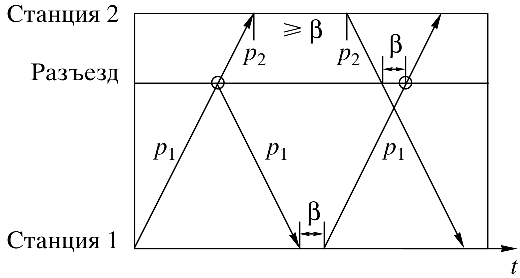

Рис. 6. Иллюстрация разности между моментами старта последовательных экспрессов типов $(1,2)$ и $(1,1)$.

Доказательство. Во всех трех случаях оба экспресса отправляются с одной станции и в одном пакете. В силу регулярности расписания интервал между их моментами отправления равен β.

Лемма 7. Для пары типов последовательных экспрессов $((s,2),(s,0))$, а также при $2(p_1-p_2)\geqslant\beta$ для пар $((1,2),(1,1))$ и $((1,2),(1,2))$ разность между моментами отправления экспрессов равна

$$h((s,b),(s',b')) = 2p_s + \beta.$$

Доказательство. 1. Пусть последовательные экспрессы имеют типы $(s,2)$ и $(s,0)$. Первый экспресс завершает пакет. Следовательно через время p_s после его отпрвления из разъезда выйдет пропускающий его неэкспресс и участок пути между разъездом и станцией s будет занят еще p_s единиц времени. Через β после прибытия на станцию s неэкспресса выйдет следующий экспресс типа $(s,0)$. В итоге получаем интервал между отправлениями экспрессов, равный $p_s+p_s+\beta$.

2. Пусть $2(p_1-p_2)\geqslant\beta$. Рассмотрим пару последовательных экспрессов с типами $(1,2)$ и $(1,1)$. Через время p_1 после отправления первого экспресса из разъезда выйдет пропускающий его неэкспресс и участок пути между разъездом и станцией 1 будет занят еще p_1 единиц времени. Следовательно второй экспресс может выйти с первой станции не раньше, чем через $2p_1+\beta$ единиц времени. Покажем, что если второй экспресс выйдет ровно через $2p_s+\beta$, то неэкспресс, пропускающий его в разъезде, успеет прийти в разъезд за β до прихода туда экспресса. Действительно, в этом случае второй экспресс придет в разъезд через $2p_1+\beta$ после выхода оттуда первого экспресса, т.е. неэкспресс, уступающий ему путь, должен попасть в разъезд через $2p_1$ после выхода оттуда первого экспресса. Учитывая, что для этого неэкспресс должен дождаться прихода на станцию 2 первого экспресса (время p_2), выждать интервал безопасности β и добраться до разъезда (время p_2), то в разъезде он окажется не раньше, чем через время $2p_2+\beta$. Тогда при $2p_1\geqslant 2p_2+\beta$ неэкспресс успеет прийти в разъезд (см. рис. 6). Значит, второй экспресс может выйти с интервалом $2p_1+\beta$ после первого экспресса. Доказательство для пары $(1,2)$ и $(1,2)$ проводится аналогично.

Аналогичным образом доказываются леммы для других значений $h((s,b),(s',b'))$.

Л е м м а 8. *Для каждой из следующих пар типов последовательных экспрессов:* $((s,0),(\bar{s},0))$*;* $((s,0),(\bar{s},1))$*;* $((s,2),(\bar{s},0))$*;* $((s,0),(\bar{s},2))$*, а также при* $2(p_1-p_2) \geqslant \beta$ *для пар* $((2,2),(1,1))$*;* $((2,2),(1,2))$ *разность между моментами отправления экспрессов равна*

$$h((s,b),(s',b')) = p_1 + p_2 + \beta.$$

Л е м м а 9. *Для каждой из следующих пар типов последовательных экспрессов:* $((s,0),(s,1))$*;* $((s,0),(s,2))$*;* $((2,2),(2,1))$*;* $((2,2),(2,2))$*, а также при* $2(p_1-p_2) < \beta$ *для пар* $((1,2),(1,1))$ *и* $((1,2),(1,2))$ *разность между моментами отправления экспрессов равна*

$$h((s,b),(s',b')) = 2(p_{\bar{s}} + \beta).$$

Л е м м а 10. *Для каждой из следующих пар типов последовательных экспрессов:* $((1,2),(2,1))$*;* $((1,2),(2,2))$*, а также при* $2(p_1-p_2) < \beta$ *для пар* $((2,2),(1,1))$ *и* $((2,2),(1,2))$ *разность между моментами отправления экспрессов равна*

$$h((s,b),(s',b')) = 3p_s + 2\beta - p_{\bar{s}}.$$

Далее опишем алгоритм построения решения для целевой функции $L_{\max}$. Обозначим через $F(k_1,k_2,s,b)$ оптимальное значение целевой функции $L_{\max}$ подзадачи $\mathcal{P}(k_1,k_2,s,b)$ на заданном наборе поездов k_1, k_2 и заданном типе первого экспресса (s,b). Напомним, что поезда на каждой станции пронумерованы в порядке, обратном порядку отправления (см. (6)).

Вычисления начинаются с состояний с минимальным количеством недоставленных поездов:

$$F(1,0,1,0) = p_1 + p_2 - d_1^1;$$
$$F(0,1,2,0) = p_1 + p_2 - d_2^1;$$
$$F(1,1,1,2) = \max \begin{cases} 2p_1 - d_2^1; \\ p_2 + p_1 - d_1^1; \end{cases}$$
$$F(1,1,2,2) = \max \begin{cases} 2p_2 - d_1^1; \\ p_2 + p_1 - d_2^1. \end{cases}$$

Исключим недопустимые комбинации, учитывая определение 6. Для этого значения следующих подзадач примем равными ∞:

- $F(0,k_2,1,0) = \infty$;
- $F(k_1,0,2,0) = \infty$;
- $F(k_1,k_2,s,b) = \infty$ при $b \neq 0$, если $k_1 = 0$ или $k_2 = 0$.

Пусть в момент времени $t = 0$ некоторый экспресс $i \in N_s$ выходит со станции отправления и имеет тип (s,b), при этом еще не доставлено k_1 и k_2 поездов с первой и второй станций соответственно, т.е. этот экспресс является первым в состоянии (k_1,k_2,s,b). Тогда максимальное временно́е смещение для поездов, доставленных на станцию назначения при переходе от (k_1, k_2, s, b) к следующему состоянию определяется так:

$$L(k_1, k_2, s, b) = \begin{cases} \max\left\{p_1 + p_2 - d_s^{k_s}; 2p_s - d_{\bar{s}}^{k_{\bar{s}}}\right\}, & \text{если } b = 2, \\ p_1 + p_2 - d_s^{k_s} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Другими словами, при переходе от типа $(s, 2)$ к любому допустимому после него типу экспресса оказываются доставленными один экспресс и один неэкспресс, а в остальных случаях доставляется один экспресс.

Обозначим через $\Omega(k_1, k_2, s, b)$ множество состояний, которые могут возникать после состояния (k_1, k_2, s, b) в соответствии с определением 6. Тогда уравнение Беллмана с учетом леммы 3 записывается следующим образом:

$$F(k_1, k_2, s, b) = \min_{(k_1', k_2', s', b') \in \Omega(k_1, k_2, s, b)} \max\Big\{L(k_1, k_2, s, b); \\ F(k_1', k_2', s', b') + h((s, b), (s', b'))\Big\}$$

за исключением указанных выше начальных состояний и состояний $(n_1, n_2, 2, 1)$ и $(n_1, n_2, 2, 2)$, а также при $p_1 < p_2 + \beta$ состояний $(n_1, n_2, 1, 1)$ и $(n_1, n_2, 1, 2)$. В последних четырех случаях возникает ситуация, когда первый экспресс отправляется в нулевой момент времени, а пропускающий его неэкспресс уже находится в разъезде. Чтобы учесть время, требуемое неэкспрессу для прихода в разъезд, добавим соответствующие слагаемые к значению целевой функции:

$$F(k_1, k_2, s, b) = \min_{(k_1', k_2', s', b') \in \Omega(k_1, k_2, s, b)} \max\Big\{L(k_1, k_2, s, b); \\ F(k_1', k_2', s', b') + h((s, b), (s', b'))\Big\} + p_{\bar{s}} + \beta - p_s,$$

где (k_1, k_2, s, b) принимает значения $(n_1, n_2, 2, 1)$ и $(n_1, n_2, 2, 2)$, а также при $p_1 < p_2 + \beta$ значения $(n_1, n_2, 1, 1)$ и $(n_1, n_2, 1, 2)$.

Оптимальным значением целевой функции исходной задачи $L_{\max}$ будет минимум из значений функций состояния с $k_1 = n_1$ и $k_2 = n_2$:

$$L_{\max} = \min_{s \in \{1,2\}, b \in \{0,1,2\}} F(n_1, n_2, s, b). \tag{8}$$

Максимальное количество вычислений значений подзадачи с различными значениями k_1 и k_2 равно $O(n_1 n_2)$. Таким образом, сложность алгоритма составляет $O(n^2)$ операций, где $n = n_1 + n_2$.

З а м е ч а н и е. Для целевой функции $\sum w_i C_i$ алгоритм строится аналогичным образом. В уравнениях Беллмана операция выбора максимального значения max заменяется на операцию суммирования. Также сдвиг начала отсчета времени при вычислении очередного оптимального значения целевой функции подзадачи домножается на сумму всех весов поездов, которые были на станциях в подзадаче, в соответствии с леммой 4. Вычисления начинаются с состояний с минимальным количеством недоставленных поездов:

$$F(1,0,1,0) = (p_1+p_2)w_1^1;$$
$$F(0,1,2,0) = (p_1+p_2)w_2^1;$$
$$F(1,1,2,2) = 2p_2w_1^1 + (p_2+p_1)w_2^1;$$
$$F(1,1,1,2) = 2p_1w_2^1 + (p_2+p_1)w_1^1.$$

Далее с учетом леммы 4 получаем:

$$F(k_1,k_2,s,b) = \min_{(k_1',k_2',s',b')\in\Omega(k_1,k_2,s,b)} \Big\{\Sigma(k_1,k_2,s,b) + F(k_1',k_2',s',b') + \\ + h^{\Sigma}((k_1,k_2,s,b),(k_1',k_2',s',b'))\Big\},$$

где

$$\Sigma(k_1,k_2,s,b) = \begin{cases} w_s^{k_s}(p_1+p_2) + w_{\bar{s}}^{k_{\bar{s}}}(2p_s), & \text{если } b=2, \\ w_s^{k_s}(p_1+p_2) & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$h^{\Sigma}((k_1,k_2,s,b),(k_1',k_2',s',b')) = h((s,b),(s',b')) \cdot \sum_{i\in K_c',\ c\in\{1,\,2\}} w_c^i,$$

где $K_c' = \{1,\ldots,k_c'\}$ при $k_c'>0$ и $K_c'=\emptyset$ при $k_c'=0$, $c\in\{1,2\}$.

Аналогично случаю с $L_{\max}$ для конечных состояний $(n_1,n_2,2,1)$ и $(n_1,n_2,2,2)$, а также при $p_1 < p_2+\beta$ конечных состояний $(n_1,n_2,1,1)$ и $(n_1,n_2,1,2)$ уравнение Беллмана будет иметь вид

$$F(k_1,k_2,s,b) = \min_{(k_1',k_2',s',b')\in\Omega(k_1,k_2,s,b)} \Big\{\Sigma(k_1,k_2,s,b) + F(k_1',k_2',s',b') + \\ + h^{\Sigma}((k_1,k_2,s,b),(k_1',k_2',s',b'))\Big\} + (p_{\bar{s}}+\beta-p_s)\cdot \sum_{i\in N_c, c\in\{1,2\}} w_c^i.$$

Оптимальное значение целевой функции $\sum w_iC_i$ находится по аналогии с (8):

$$\sum w_iC_i = \min_{s\in\{1,\,2\},b\in\{0,\,1,\,2\}} F(n_1,n_2,s,b). \tag{9}$$

6. Заключение

В статье рассмотрены задачи планирования движения поездов по однопутному участку железной дороги с разъездом. Разработан алгоритм на основе метода динамического программирования для двух целевых функций: максимального временнóго смещения и суммы взвешенных моментов окончания перевозок.

Алгоритм учитывает свойства задачи, такие как правила перехода между состояниями и неизменность порядка отправления поездов при оптимальном расписании для данных целевых функций при сдвиге расписания на произвольный временной интервал. Сложность алгоритма составляет $O(n^2)$ операций, где n — количество поездов на станциях.

В дальнейшем планируется исследование более сложной модели с несколькими разъездами, разъездами большей вместимости и разными скоростями движения поездов.

Во время работы над статьей авторам помогли плодотворные обсуждения с коллегой Я.А. Зиндером (Сиднейский технологический университет), в результате которых было найдено улучшенное обоснование предложенного метода, которое будет опубликовано в одном из следующих номеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Harrod S.* A Tutorial on Fundamental Model Structures for Railway Timetable Optimization // Surv. Oper. Res. Manage. Sci. 2012. V. 17. No. 2. P. 85–96.
2. *De Oliveira E.* Solving Single-Track Railway Scheduling Problem Using Constraint Programming. PhD Thesis. Univer. of Leeds. 2001.
3. *Lusby R., Larsen J., Ehrgott M., et al.* Railway Track Allocation: Models and Methods // OR Spectr. Secaucus, NJ, USA. 2011. V. 33. No. 4. P. 843–883.
4. *Frank O.* Two-Way Traffic on a Single Line of Railway // Oper. Res. 1966. V. 14. No. 5. P. 801–811.
5. *Szpigel B.* Optimal Train Scheduling on a Single Line Railway // Oper. Res. 1973. P. 344–351.
6. *Brucker P.* Scheduling Algorithms. 3rd ed. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag N.Y., Inc. 2001.
7. *Gafarov E., Dolgui A., Lazarev A.* Two-Station Single-Track Railway Scheduling Problem With Trains of Equal Speed // Comput. Indust. Engin. 2015. V. 85. P. 260–267.
8. *Harbering J., Ranade A., Schmidt M.* Single Track Train Scheduling // Proc. 7 Multidisciplinary Int. Conf. on Scheduling : Theory and Applications (MISTA 2015) 25–28 August 2015, Prague, Czech Republic. 2015. P. 102–117.
9. *Sotskov Y., Gholami O.* Shifting bottleneck algorithm for train scheduling in a singletrack railway // Proc. 14 IFAC Sympos. on Inform. Control Problems. Part 1. Bucharest, Romania. 2012. P. 87–92.
10. *Sotskov Y., Gholami O.* Mixed graph model and algorithms for parallel-machine job-shop scheduling problems // Int. J. Product. Res., published online. 2015. P. 16. http://dx.doi.org/10.1080/00207543.2015.1075666
11. *Brannlund U., Lindberg P., Nou A., et al.* Railway Timetabling Using Lagrangian Relaxation // Transport. Sci. Inst. Oper. Res. Manage. Sci. (INFORMS), Linthicum, Maryland, USA. 1998. V. 32. No. 4. P. 358–369.
12. *Лазарев А.А., Мусатова Е.Г.* Целочисленные постановки задачи формирования железнодорожных составов и расписания их движения // Управление большими системами. 2012. № 38. С. 161–169.
13. *Mu S., Dessouky M.* Scheduling Freight Trains Traveling on Complex Networks // Transport. Res. Part B. Methodolog. 2011. V. 45. No. 7. P. 1103–1123.
14. *Carey M., Lockwood D.* A Model, Algorithms and Strategy for Train Pathing // J. Oper. Res. Soc. 1995. V. 8. No. 46. P. 988–1005.

15. *Disser Y., Klimm M., Lubbecke E.* Scheduling Bidirectional Traffic on a Path // Proc. 42 Int. Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP). 2015. P. 406–418.
16. *Brucker P., Heitmann S., Knust S.* Scheduling Railway Traffic at a Construction Site // OR Spectrum. 2002. No. 24. P. 19–30.
17. *Лазарев А.А., Тарасов И.А.* Составление оптимального расписания движения поездов между двумя станциями, соединенными однопутной железной дорогой с разъездом // Управление большими системами. 2015. № 58. С. 244–284.
18. *Graham R., Lawler E., Lenstra J., et al.* Optimization and Approximation in Deterministic Sequencing and Scheduling: a Survey // Ann. Discret. Math. 1979. V. 5. P. 287–326.
19. *Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А.* Теория расписаний. Многостадийные системы. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 04.02.2016