Применение стохастических монотонных мер в задачах выделения информативных признаков контурных изображений*

Лепский А. Е.
alex.lepskiy@gmail.com
Москва, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

В задаче выделения информативных точек зашумленного контурного изображения имеет место двухуровневая неопределенность: первый уровень связан с неопределенностью выбора из множества точек небольшого числа наиболее информативных из них, второй – с неопределенностью локализации самих точек на зашумленном изображении. В работе рассматривается стохастическая мера информативности по длине для описания такой иерархической неопределенности. Приведены основные результаты о вероятностных характеристиках таких мер. Поставлены оптимизационные задачи выделения информативных точек с помощью таких мер.

Using of stochastic monotone measures in problems of selection of informative features contour images*

Lepskiy A. E.
National Research University — Higher School of Economics, Moscow, Russia

In the problem of selection of informative points of noisy contour images have the two-level uncertainty. The first level of uncertainty associated with selection a small number of informative points from set of all points. The second level of uncertainty associated with the uncertainty of the localization of the points on the noisy image. In this paper we use the stochastic informative measure by length to describe a such hierarchical uncertainty. The main results about probability characteristics of such measures are presented. The optimization problems of the selection of informative points with the help of such measures are formulated.

Пусть $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^n$ — множество признаков изображения X. Важной задачей при разработке системы распознавания (например, изображений) является выбор небольшого подмножества наиболее информативных признаков или комбинаций этих признаков из множества Ω. Для решения этой задачи существуют популярные подходы, такие как линейный и нелинейный компонентный анализ, дискриминантный анализ и др. [1, 2]. Однако эти методы, основанные на статистических и алгебраических принципах, как правило, в явной форме не учитывают структурные характеристики распознаваемых объектов, в частности, геометрических свойств при распознавании изображений объектов.

Как правило, признаки, с помощью которых описывается образ, определяются с той или иной степенью неточности. Природа этой неточности может быть различна. В классической постановке множества признаков являются элементами некоторого вероятностного пространства. Так, если образ — это плоская кривая, выделенная на изображении, а признаки — это некоторые характеристики плоской кривой (например, признак — это оценка кривизны в данной точке дискретной кривой [3]), то случайный характер признаков (например, кривизны) обусловлен наличием шума на изображении. В этой работе рассмотрим монотонные меры информативности, которые определяются на всех подмножествах множества случайных признаков. Тогда сама монотонная мера будет случайной величиной $\mathrm{M}(A)$ для любого фиксированного множества случайных признаков A. В этом случае математическое ожидание $\mathbf{E}[\mathrm{M}(A)]$ будет характеризовать уровень информативности представления A, а дисперсия $\sigma^2[\mathrm{M}(A)]$ будет определять степень устойчивости представления к зашумлению образа. Используя эти понятия можно поставить и решить различные оптимизационные задачи выбора такого представления контура, которое обладает определенными свойствами (например, устойчивости к зашумлению или, наоборот, наибольшей изменчивостью при зашумлении).

Монотонная мера информативности. Положим X начальный замкнутый контур, заданный упорядоченным множеством точек, т. е. $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, где $x_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, n$. Поставим в соответствие каждому непустому подмножеству $B = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}$ замкнутую ломаную, с начальным звеном (x_{i_1}, x_{i_2}) и конечным звеном (x_{i_m}, x_{i_1}).

Геометрическая мера информативности μ: $2^X \to [0, 1]$ это функция множеств, которая удовлетворяет следующим условиям [4]:

В данной научной работе использованы результаты проекта «Математическое моделирование и конструирование механизмов в социальной, экономической и политической сферах с использованием методов теории принятия решений, теории игр и интеллектуального анализа данных», выполненного в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2012 г. Кроме того, работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ, проекты № 11-07-00591 и № 10-07-00135.

1) $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu(X) = 1$;
2) если $A, B \in 2^X$ и $A \subseteq B$, то $\mu(A) \leqslant \mu(B)$;
3) если $B = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}, x_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_m}\} \in X$ и три последовательные точки $x_{i_{k-1}}$, x_{i_k}, $x_{i_{k+1}}$ лежат на одной прямой, то $\mu(B) = \mu(B \backslash \{x_{i_n}\})$;
4) μ инвариантна относительно аффинных преобразований в плоскости, таких как параллельный перенос, поворот и растяжение.

Аксиомы 1, 2 являются аксиомами нечеткой меры (см. [5]), введенной Сугено. Различные способы задания геометрических мер информативности были рассмотрены в [4]. Ниже будем использовать одну из наиболее популярных мер информативности контурных изображений — меру информативности по длине, которая определяется на исходном контуре X ненулевой длины, и численно равна $\mu_L(A) = L(A)/L(X)$, где $L(A)$ — длина ломаной, построенной на множестве $A \in 2^X$, $|A| \geqslant 2$. Полагаем по определению, что $\mu(\varnothing) = \mu(A) = 0$, если $|A| = 1$. Заметим, что меру информативности по длине можно представить в виде:

$$\mu(A) = \frac{\sum_{x \in A} w(x, A)}{\sum_{x \in X} w(x, X)}, \tag{1}$$

где $w(x, A) = |x - y|$, а y следующая за x ближайшая точка в упорядоченном множестве A. Многие меры информативности имеют вид (1), где неотрицательные величины $w(x, A)$ (признаки) характеризуют степень важности элемента $x \in A$ для представления множества $A \in 2^X$. Такие меры будем называть усредненными мерами информативности.

Стохастическая усредненная мера информативности. В реальной ситуации исходный контур, как правило, оказывается подвергнут (вероятностному) зашумлению. Поэтому признаки $w(x, A)$ будут случайными величинами. Будем такие случайные признаки обозначать большими буквами $W(x, A)$. В этом случае мы имеем меру информативности $\mathrm{M}(A) = \frac{\sum_{x \in A} W(x,A)}{\sum_{x \in X} W(x,A)}$. Если $W(x, A) = W(x)$ и случайные величины $W(x)$, $x \in X$, независимы, то мера информативности $\mathrm{M}(A)$ будет аддитивной. Заметим, что стохастические аддитивные меры подробно исследованы в научной литературе (см., например, [6]). В этом случае задача нахождения наиболее устойчивого и информативного представления рассматривалась в [7].

В этой работе будем рассматривать частный, но важный случай, когда признак $w(x, A)$ зависит только от двух соседних точек. Примером такого признака является признак геометрической меры информативности по длине μ_L.

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — исходный контур, вершины которого x_i упорядочены их индексами. Если мы рассматриваем произвольный подконтур $A \in 2^X$, то предполагаем, что порядок на нем наследуется порядком на X и задается индексами в представлении $A = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}$, где $i_1 < \cdots < i_m$. Для любого подконтура $A \in 2^X$ будем обозначать его элементы как $x_k(A) = x_{i_k}$, если $k \in \{1, \ldots, m\}$ и $A = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}$, где $i_1 < \cdots < i_m$. Будем также считать, что $x_k(A) = x_l(A)$, если $l \equiv k (\operatorname{mod} m)$. Предположим, что $W(x_k(A), A) = W(x_k(A), x_{k+1}(A))$, $k = 1, \ldots, |A|$, т. е. значения $W(x_k(A), A)$ зависят только от двух соседних точек $x_k(A), x_{k+1}(A)$. Далее, для простоты обозначим $W(x_k(A), x_{k+1}(A)) = W_{k,k+1}(A)$. Тогда усредненная монотонная мера примет вид:

$$\mu(A) = \frac{\sum_{k=1}^{|A|} w_{k,k+1}(A)}{\sum_{j=1}^{|X|} w_{j,j+1}(X)}. \tag{2}$$

Аналогичный вид будет иметь и стохастическая усредненная монотонная мера $\mathrm{M}(A)$ в случае, когда $W_{k,k+1}(A)$, $A \in 2^X$ являются случайными величинами. Приведем результат (см. [7]) об оценках числовых характеристик меры M в предположении, что случайные величины $W_{k,k+1}(A)$, $W_{l,l+1}(A)$ независимы при $|l - k| > 1$. Это условие будет выполняться, если предположить, что x_k, $k = 1, \ldots, n$, также являются независимыми случайными величинами. Будем использовать следующие обозначения: $S(A) = \sum_{i=1}^{|A|} \mathbf{E}[W_{i,i+1}(A)]$, $K(A, X) = \sum_{i=1}^{|A|} k_i^X(A)$, где

$$k_i^X(A) = \sum_{j=1}^{|X|} \mathbf{Cov}\big[W_{i,i+1}(A), W_{j,j+1}(X)\big], \quad A \in 2^X.$$

Лемма 1. *Пусть* $\xi = \sum_{k=1}^{|A|} W_{k,k+1}(A)$ *и* $\eta = \sum_{j=1}^{|X|} W_{k,k+1}(X)$ — *случайные величины, принимающие значения из интервалов* l_ξ, l_η *соответственно, расположенных на положительной полуоси и*

$$zl_\eta \subseteq \big((1-\delta)\mathbf{E}[\eta], (1+\delta)\mathbf{E}[\eta]\big),$$
$$l_\xi \subseteq \big(\mathbf{E}[\xi] - \delta\mathbf{E}[\eta], \mathbf{E}[\xi] + \delta\mathbf{E}[\eta]\big).$$

Тогда справедливы следующие формулы:

$$\mathbf{E}[\mathrm{M}(A)] = \frac{S(A)}{S(X)} + \frac{S(A)}{S^3(X)} K(X, X) - \frac{K(A, X)}{S^2(X)} + r_1; \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^2[\mathrm{M}(\mathbf{A})] = \frac{K(A, A)}{S^2(X)} + \frac{S^2(A) K(X, X)}{S^4(X)} - \frac{2S(A)K(A, X)}{S^3(X)} + r_2. \tag{4}$$

где $|r_i| \leqslant C_i \delta^3$, $i = 1, 2$.

Будем использовать формулы (3) и (4) без их остатков. Соответствующие значения $\tilde{\mathbf{E}}[\mathrm{M}(A)] = \mathbf{E}[\mathrm{M}(\mathbf{A})] - \mathbf{r_1}$, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^2[\mathrm{M}(A) = \boldsymbol{\sigma}^2[\mathrm{M}(A)] - r_2$ назовем оценками числовых характеристик.

Стохастическая мера информативности по длине. Предположим, что исходный контур подвергнут вероятностному зашумлению. В этом случае $X = \{x_k + \mathbf{n}_k\}_{k=1}^m$, $x_k \in \mathbb{R}^2$ а $\mathbf{n}_k = (\xi_k, \eta_k)$ являются случайными величинами. Предположим также, что ξ_k, η_k, $k = 1, \ldots, m$, независимые нормально распределенные случайные величины, для которых $\mathbf{E}[\xi_k] = \mathbf{E}[\eta_k] = 0$, $\boldsymbol{\sigma}^2[\xi_k] = \boldsymbol{\sigma}^2[\eta_k] = \sigma^2$, $k = 1, \ldots, m$. Далее будем рассматривать только монотонную стохастическую меру M по длине контура. Эта мера имеет вид (2), где $W_{k,k+1}(A) = |x_{k+1}(A) + \mathbf{n}_{k+1}(A) - x_k(A) - \mathbf{n}_k(A)|$. Вообще говоря, случайная величина $\sum_{k=1}^{|A|} W_{k,k+1}(A)$ не удовлетворяет условиям леммы 1. Однако вероятность больших уклонений случайной длины зашумленного многоугольника от длины незашумленного будет мала при небольшой интенсивности шума. Поэтому будем предполагать, что приблизительно случайная длина удовлетворяет условиям Леммы 1. Найдем сначала числовые характеристики случайной величины $W_{k,k+1}(A)$.

Числовые характеристики случайной величины $W_{k,k+1}(A)$**.** Следующее утверждение можно доказать путем разложения случайной величины $W_{k,k+1}(A)$ по формуле Тейлора.

Утверждение 1. *Справедливы следующие асимптотические равенства*

$$\mathbf{E}\big[\mathbf{W_{k,k+1}(A)}\big] = l_k\left(1 + \frac{\sigma^2}{l_k^2} + \frac{\sigma^4}{2l_k^4} + O\left(\frac{\sigma^6}{l_k^6}\right)\right);$$

$$\boldsymbol{\sigma}^2\big[W_{k,k+1}(A)\big] = 2\sigma^2\left(1 - \frac{\sigma^2}{l_k^2} + O\left(\frac{\sigma^4}{l_k^4}\right)\right),$$

где $l_k = l_k(A) = |x_{k+1}(A) - x_k(A)|$.

Следствие 1. *Верно равенство*

$$S(A) = L(A) + \sigma^2\sum_{k=1}^{|A|} l_k^{-1} + \sigma O\big(\sigma^3/l^3\big),$$

где $L(A) = \sum_{k=1}^{|A|} l_k$ *длина незашумленного контура* A *и* $l = \min\limits_k |x_{k+1}(A) - x_k(A)|$.

Далее найдем ковариацию между случайными величинами $W_{k-1,k}(A)$ и $W_{k,k+1}(A)$. Пусть $\mathbf{l}_i = \mathbf{l}_i(A) = x_{i+1}(A) - x_i(A)$ — i-й вектор-сегмент многоугольника A и $\alpha_i = \alpha(x_i) = (\widehat{\mathbf{l}_{i-1}, \mathbf{l}_i})$.

Утверждение 2. *Имеем*

$$\mathbf{Cov}\big[W_{k-1,k}(A), W_{k,k+1}(A)\big] = \\ = -\sigma^2\cos\alpha_k\left(1 - \left(\frac{1}{l_{k-1}^2} + \frac{\cos\alpha_k}{2l_{k-1}l_k} + \frac{1}{l_k^2}\right)\sigma^2 + o\left(\frac{\sigma^2}{l^2}\right)\right),$$

где $l = \min\{l_{k-1}, l_k\}$.

С помощью последнего утверждения теперь найдем ковариацию $K(A, X) = \sum_i k_i^X(A)$ между всеми сегментами многоугольника A и всеми сегментами базового многоугольника X. Пусть $\alpha(x)$ $(\beta(x))$ — внутренний угол многоугольника A (многоугольника X) в вершине x, $\gamma(x)$ — угол между векторами $x_{+1}(A) - x$, $x_{+1}(X) - x$, где $x_{+1}(A)$ $(x_{+1}(X))$ следующая точка после точки x в контуре A (контуре X), $\Delta_k(A) = \min\big\{l_k(A), d_k^{(1)}, d_k^{(2)}, d_k^{(3)}, d_k^{(4)}\big\}$, где $d_k^{(i)}$ — длины смежных со звеном $\mathbf{l}_k(A)$ звеньев в ломаной X.

Следствие 2. *Имеем*

$$K(A, X) = \sigma^2\sum_{x\in A}\cos\gamma(x) + \cos\big(\gamma(x) + \alpha(x)\big) + \\ + \cos\big(\gamma(x) - \beta(x)\big) + \cos\big(\gamma(x) + \alpha(x) - \beta(x)\big) + \\ + \sigma^2 o\Big(\frac{\sigma}{\Delta(A)}\Big)$$

для $A \in 2^X$, *где* $\Delta(A) = \min\limits_i\{\Delta_i(A)\}$.

Числовые характеристики оценки стохастической меры информативности по длине. Используя результаты предыдущего раздела, теперь можно найти числовые характеристики стохастической меры информативности по длине. Следующая теорема вытекает из формул (3) и (4), Следствий 1, 2.

Теорема 2. *Справедливы асимптотические равенства при* $A \in 2^X$:

$$\tilde{\mathbf{E}}\big[\mathrm{M}(A)\big] = \frac{L(A)}{L(X)} + \frac{C_1(A)}{L^2(X)}\sigma^2 + o\Big(\frac{\sigma^2}{\Delta^2(A)}\Big);$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^2\big[\mathrm{M}(A)\big] = 4\frac{C_2(A)}{L^2(X)}\sigma^2 + o\Big(\frac{\sigma^2}{\Delta^2(A)}\Big),$$

где

$$C_1(A) = -\sum_{x\in X}\frac{L(A)}{|\mathbf{l}_x|} + \sum_{x\in A}\frac{L(X)}{|\mathbf{l}_x|} + 4\frac{L(A)}{L(X)}\sum_{x\in X}\cos^2\frac{\beta(x)}{2} - \\ - 4\sum_{x\in A}\cos\frac{\alpha(x)}{2}\cos\frac{\beta(x)}{2}\cos\left(\gamma(x) + \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{2}\right);$$

$$C_2(A) = \sum_{x\in A}\cos^2\frac{\alpha(x)}{2} + \frac{L^2(A)}{L^2(X)}\sum_{x\in X}\cos^2\frac{\beta(x)}{2} - \\ - 2\frac{L(A)}{L(X)}\sum_{x\in A}\cos\frac{\alpha(x)}{2}\cos\frac{\beta(x)}{2}\cos\left(\gamma(x) + \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{2}\right).$$

Нахождение наилучших представлений контура. С помощью понятия стохастической меры информативности можно поставить различные задачи нахождения наилучших относительно того или иного критерия представлений контура. А используя асимптотические формулы основных числовых характеристик таких мер можно достаточно эффективно решать поставленные задачи. Ниже рассмотрим постановки и примеры решений двух таких задач.

Дисперсия стохастической меры информативности характеризует степень устойчивости меры к зашумлению контура. Поэтому может быть поставлена следующая задача нахождения такого полигональное представление $A \in 2^X$ фиксированной мощности $|A| = k$, которое минимизирует дисперсию стохастической меры информативности по длине. Как следует из теоремы 2, полигональное представление $A = \underset{A \in 2^X, |A|=k}{\arg\min} C_2(A)$ является решением этой задачи при небольшом уровне зашумления σ.

Пример 1. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_6\}$ упорядоченное множество вершин правильного шестиугольника со стороной единичной длины. Вычислим значения $C_2(A)$ для различных полигональных представлений A мощности $|A| = 3$: $A_1 = \{x_1, x_3, x_5\}$, $A_2 = \{x_1, x_2, x_4\}$, $A_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$ Имеем $C_2(A_1) = 1{,}125$, $C_2(A_2) = 1{,}25$, $C_2(A_3) = \left(56 + 22\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - 3\sqrt{6}\right)/48 \approx 1{,}66$. Таким образом, представление A_1 является наиболее устойчивым к зашумлению относительно меры информативности по длине среди всех представлений мощности три.

Рассмотрим задачу о нахождении информативного минимального полигонального представления контура. Оценка $\tilde{\mathbf{E}}[\mathrm{M}(A)]$ характеризует величину общей «информативности» полигонального представления. Но $\max \tilde{\mathbf{E}}[\mathrm{M}(\mathbf{A})] = \tilde{\mathbf{E}}[\mathrm{M}(X)] = 1$ представление должно быть не только информативным, но и по возможности минимальным. Из геометрических построений следует, что если в контуре X мы выбираем представление A с угловой точкой x и углом $\alpha(x)$, то чем острее угол $\alpha(x)$, тем больше будет изменяться длина $L(A)$ ломаной при небольшом изменении положения точки X. Поэтому дисперсия стохастической меры информативности по длине характеризует среднее значение углов вершин полигонального представления контура — чем больше в среднем в представлении A точек высокой информативности (точек с «острыми углами»), тем больше будет значение $\mathrm{M}(A)$. Этот же вывод подтверждает и анализ величины $C_2(A)$ в оценке $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^2[\mathrm{M}(A)]$. Кроме того, $C_2(X) = 0$. Причем дисперсию можно рассматривать как характеристику средней информативности представления и в случае, когда изображение не является зашумленным. Поэтому может быть поставлена двукритериальная задача нахождения такого представления A, которое максимизирует величины $\tilde{\mathbf{E}}[\mathrm{M}(A)]$ и $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^2[\mathrm{M}(A)]$. Поведение дисперсии и математического ожидания стохастической меры при изменении числа точек в представлении контура иллюстрирует следующий пример.

Пример 2. Пусть X правильный 2^n-угольник с длиной стороны b, вписанный в окружность радиуса R; $A = A_m$ — правильный 2^m-угольник ($m \leqslant n$) с длиной стороны a. Тогда $\alpha(x) = \pi(1 - 2^{1-m})$, $\beta(x) = \pi(1 - 2^{1-n})$, $a = b \sin(\pi 2^{-m}) \sin^{-1}(\pi 2^{-n})$, $\gamma(x) = (\beta(x) - \alpha(x))/2$. Поэтому для $A = A_m$ получаем:

$$\tilde{\mathbf{E}}[\mathrm{M}(A)] \approx \frac{L(A)}{L(X)} + \frac{C_1(A)}{L^2(X)}\sigma^2 = \mu(A)\left(1 + \left(\frac{\sigma}{a}\right)^2 - \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2\right) = 2^{m-n}\frac{\sin(\pi 2^{-m})}{\sin(\pi 2^{-n})}\left(1 + \left(\frac{\sigma}{b}\right)^2\left(\frac{\sin^2(\pi 2^{-n})}{\sin^2(\pi 2^{-m})} - 1\right)\right);$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^2[\mathrm{M}(A)] \approx \frac{4C_2(A)}{L^2(X)}\sigma^2 = \mu^2(A)\left(\frac{|X|}{|A|} - 1\right)\left(\frac{\sigma}{R}\right)^2 = 2^{m-n+2}\left(1 - 2^{m-n}\right)\sin^2(\pi 2^{-m})\left(\frac{\sigma}{b}\right)^2.$$

Например, если рассматривать критерий $k(m) = (1 - \alpha)\tilde{\mathbf{E}}[\mathrm{M}(A_m)] + \alpha\tilde{\boldsymbol{\sigma}}[\mathrm{M}(A_m)]$ и $n = 6$, то $\arg\max k(m) = 6$ при $\alpha = 0{,}5$ и $\arg\max k(m) = 3$ при $\alpha = 0{,}75$.

Выводы

С помощью введенных геометрических мер информативности могут быть поставлены различные задачи нахождения оптимальных полигональных представлений кривой. Стохастические меры информативности могут быть эффективно использованы при описании тех образов (не только зашумленных дискретных кривых), неопределенность представления которых носит двухуровневый характер: первый уровень связан с выбором из данного множества признаков некоторого подмножества, а второй — со случайным характером самих признаков.

Литература

[1] *Duda R. O., Hart P. E., Stork D. G.* Pattern Classification and Scene Analysis: Part I Pattern Classification. — John Wiley & Sons, 1998.

[2] *Jolliffe I. T.* Principal Component Analysis. Series: Springer Series in Statistics. — 2nd ed. — NY: Springer, 2002.

[3] *Lepskii A. E.* On stability of the center of masses of the vector representation in one probabilistic model of noiseness of an image contour // Automation and Remote Control. — 2007. — Vol. 68. — Pp. 75–84.

[4] *Bronevich A., Lepskiy A.* Geometrical fuzzy measures in image processing and pattern recognition // Proc. of the 10th IFSA World Congress, Istanbul, Turkey, 2003. — Pp. 151–154.

[5] *Wang Z., Klir G. J.* Generalized Measure Theory. IFSR International Series on Systems Science and Engineering. 25. —Springer, 2009.

[6] *Shiryaev A. N.* Probability. Graduate Texts in Mathematics. — Springer, 1995.

[7] *Lepskiy A. E.* Stable feature extraction with the help of stochastic information measure // Lecture Notes in Computer Science(LNCS), Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 2011. — Vol. 6744. — Pp. 54–59.