УДК 519.714

О СЛОЖНОСТИ ФУНКЦИЙ ИЗ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Д. А. Дагаев[1]

Рассматривается задача о сложности реализации функций трехзначной логики, принимающих значения из множества $\{0, 1\}$, формулами в неполных базисах. Получены верхние и нижние асимптотические оценки для соответствующих функций Шеннона.

Ключевые слова: функции трехзначной логики, формулы, сложность формул.

The problem of the complexity of implementation of functions of the three-valued logic taking values from the set $\{0, 1\}$ by formulas over incomplete generating systems is considered. Upper and lower asymptotical estimates for corresponding Shannon functions are derived.

Key words: functions of three-valued logic, formulas, complexity of formulas.

В данной работе рассматривается задача о сложности реализации функций трехзначной логики, принимающих значения из множества $\{0, 1\}$, формулами над конечными системами. Некоторые результаты в этом направлении получены в [1]. Все определения можно найти в [2–6].

Пусть $k \geqslant 2$, $n \geqslant 1$. Положим $E_k = \{0, 1, ..., k-1\}$. Обозначим через E_k^n множество всех наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, таких, что $\alpha_1, ..., \alpha_n \in E_k$. Множество всех функций k-значной логики будем обозначать через P_k, а множество всех функций трехзначной логики, принимающих значения только из множества E_2, — через через $P_{3,2}$. Пусть $G \subseteq P_k$. Обозначим через $[G]$ замкнутый класс, порожденный системой G, а через $G(n)$ — множество всех функций из G, зависящих от переменных $x_1, ..., x_n$, $n \geqslant 1$. Пусть $f(x_1, ..., x_n) \in [G]$, Φ — формула над G, реализующая функцию f, а $F \subseteq [G]$. Обозначим через $L(\Phi)$ число символов переменных и констант, входящих в формулу Φ (сложность формулы Φ), через $L_G(f)$ — сложность функции f, а через $L_G(F(n))$ — функцию Шеннона для множества F. Пусть x — переменная, входящая в формулу Φ. Обозначим через $N(\Phi; x)$ число вхождений переменной x в формулу Φ.

О.Б. Лупанов [4] показал, что для любой полной системы булевых функций G выполянется соотношение

$$L_G(P_2(n)) \sim \frac{2^n}{\log_2 n}$$

(см. также [2, 3]). Известно [7], что для любой конечной системы $G \subseteq P_2$ найдется константа $c = c(G)$, такая, что для любой функции $f(x_1, ..., x_n)$ из $[G]$ имеет место неравенство $L_G(f) \leqslant c^n$. В работах [8, 9] для некоторых конечных полных базисов $G \subseteq P_k$, $k \geqslant 3$, получено соотношение

$$L_G(P_k(n)) \sim \frac{k^n}{\log_k n}$$

(см. также [10]). Пример последовательности функций 4-значной логики, сложность реализации которых в классе формул над некоторой конечной неполной системой имеет сверхэкспоненциальный порядок роста от числа переменных, приведен в [11].

Будем придерживаться обозначений для замкнутых классов булевых функций из работы [12], а именно: S — множество всех самодвойственных функций; T_i — множество всех функций, сохраняющих константу i, $i = 0, 1$; M — множество всех монотонных функций; L — множество всех линейных функций; O^∞ — множество всех функций, удовлетворяющих условию

[1] *Дагаев Дмитрий Александрович* – доцент НИУ ВШЭ, e-mail: ddagaev@gmail.com.

$< 0^\infty >$; I^∞ — множество всех функций, удовлетворяющих условию $< 1^\infty >$; K — множество всех конъюнкций; D — множество всех дизъюнкций; U — множество всех функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной; C — множество всех функций, не имеющих существенных переменных.

Положим

$$L_i = L \cap T_i,\ M_i = M \cap T_i,\ K_i = K \cap T_i,\ D_i = D \cap T_i,\ U_i = U \cap T_i,\ C_i = C \cap T_i, \quad i = 0, 1;$$

$$M_{01} = M_0 \cap M_1,\ L_{01} = L_0 \cap L_1,\ K_{01} = K_0 \cap K_1,\ D_{01} = D_0 \cap D_1,\ U_{01} = U_0 \cap U_1;$$

$$SU = S \cap U,\ MU = M \cap U,\ O_0^\infty = T_0 \cap O^\infty,\ I_1^\infty = T_1 \cap I^\infty;$$

$$MO^\infty = M \cap O^\infty,\ MI^\infty = M \cap I^\infty,\ MO_0^\infty = M \cap O_0^\infty,\ MI_1^\infty = M \cap I_1^\infty.$$

Пусть $f(x_1, ..., x_n) \in P_{3,2}$. Проекцией функции f называется булева функция $\mathrm{pr} f(x_1, ..., x_n)$, значение которой на произвольном наборе $\widetilde{\alpha} \in E_2^n$ определяется равенством $\mathrm{pr} f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha})$. Проекцией $\mathrm{pr} F$ множества функций $F \subseteq P_{3,2}$ называется множество $\bigcup\{\mathrm{pr} f\}$, где объединение берется по всем функциям $f \in F$. Нетрудно показать, что для любого замкнутого класса $F \subseteq\ P_{3,2}$ множество $\mathrm{pr} F$ является замкнутым классом булевых функций.

Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций. Положим

$$\mathrm{pr}^{-1} B = \{f \in P_{3,2} |\ \mathrm{pr} f \in B\}.$$

Легко видеть, что множество $\mathrm{pr}^{-1} B$ является замкнутым классом и для любого замкнутого класса $F \subseteq P_{3,2}$, такого, что $\mathrm{pr} F = B$, выполняется соотношение $F \subseteq \mathrm{pr}^{-1} B$. Класс $\mathrm{pr}^{-1} B$ будем называть максимальным замкнутым классом. Таким образом, каждому замкнутому классу булевых функций соответствует максимальный класс функций из $P_{3,2}$. Известно [6], что замкнутый класс $\mathrm{pr}^{-1} B$ является конечно-порожденным тогда и только тогда, когда $B \notin\ \{C, C_0, C_1\}$.

Обозначим через $j_i(x)$ функцию из $P_{3,2}$, равную 1 при $x = i$ и 0 в остальных случаях, $i \in E_3$, а через $k(x)$ — функцию из $P_{3,2}$, равную 1 при $x \in E_2$ и 0 при $x = 2$. Обозначим через $x+y$ и $x \cdot y$ функции из $P_{3,2}$, такие, что для любых $\alpha, \beta \in E_3$ выполняются равенства $\alpha + \beta = j_1(\alpha) \oplus j_1(\beta)$ и $\alpha \cdot \beta = j_1(\alpha) \& j_1(\beta)$ соответственно, где $\oplus$ и $\&$ — сложение и умножение по модулю 2. Пусть $p \in E_3$. Положим

$$\delta(x_1, x_2) = j_1(x_1) \cdot k(x_2), \quad \theta(x_1, x_2) = j_1(x_1) + j_2(x_2), \quad \rho_p(x_1, x_2, x_3) = j_1(x_1) + j_p(x_2) \cdot j_2(x_3);$$

$$\psi_p(x_1, x_2, x_3) = j_1(x_3) + j_1(x_1) \cdot j_p(x_2) \cdot j_2(x_3), \quad \zeta_p(x_1, x_2, x_3, x_4) = j_1(x_4) + j_1(x_1) \cdot j_p(x_2) \cdot j_2(x_3).$$

Отметим, что проекции функций δ, θ и ρ_p, ψ_p, ζ_p, $p \in E_3$, принадлежат множеству U_{01}. Положим $\mathfrak{U} = \{j_1, \delta, \theta, \rho_0, \rho_1, \rho_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2\}$. Очевидно, что $\mathrm{pr}\mathfrak{U} \subseteq U_{01}$. Известно [6], что $[\mathfrak{U}] =\ \mathrm{pr}^{-1} U_{01}$, а также для любого замкнутого класса булевых функций B, отличного от классов C, C_0, C_1, и для любого множества $A \subseteq P_{3,2}$, такого, что $\mathrm{pr} A = B$, множество $A \cup \mathfrak{U}$ является порождающей системой класса $\mathrm{pr}^{-1} B$.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. *Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций, такой, что $B\ \notin \{C, C_0, C_1\}$, $\mathfrak{E}(B)$ — произвольное конечное подмножество множества $P_{3,2}$, такое, что $[pr\mathfrak{E}(B)] = B$, а $G = \mathfrak{E}(B) \cup \mathfrak{U}$. Тогда*

$$\frac{3^n}{\log_2 n} \lesssim L_G(\mathrm{pr}^{-1} B(n)) \lesssim \frac{3^n}{\log_2 n} + L_{\mathrm{pr} G}(B(n)).$$

Приведем схему доказательства теоремы 1. Сначала на основе метода из работы [13] строится разбиение множества E_3^r, $r \geqslant 3$, на непересекающиеся подмножества $U_0, U_1, ..., U_{T(r)}$, такое, что мощность множества U_0 удовлетворяет неравенству

$$|U_0| \leqslant 2^r + r \cdot 2^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2} \cdot 2^{r-2},$$

а каждое множество U_i, $i = 1, ..., T(r)$, обладает следующими свойствами:

1) U_i является подмножеством некоторого шара радиуса 1;

2) найдется $l = l(i)$, $1 \leqslant l \leqslant r$, такое, что l-я компонента каждого набора из U_i равна 2.

Затем оценивается мощность $T(r)$ данного разбиения: доказывается неравенство

$$T(r) \leqslant 2 \cdot \frac{3^{r+1}}{r} \cdot \ln r.$$

Далее для каждой функции $f(x_1, ..., x_n)$, $n \geqslant 3$, из максимального класса $\mathrm{pr}^{-1}B$ строится некоторое разложение. Обозначим через $g_f(x_1, ..., x_n)$ функцию из $P_{3,2}$, значения которой совпадают со значениями функции f на множестве E_2^n и равны нулю на всех наборах из $E_3^n \setminus E_2^n$, а через $\widehat{h}_f(x_1, ..., x_n)$ – функцию из $P_{3,2}$, значения которой совпадают со значениями функции f на множестве $E_3^n \setminus E_2^n$ и равны нулю на всех наборах из E_2^n. Положим $h_f(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = j_1(x_{n+1}) + \widehat{h}_f(x_1, ..., x_n)$. Очевидно, что функция h_f принадлежит классу $\mathrm{pr}^{-1}U_{01}$. Легко видеть, что имеет место равенство

$$f(x_1, ..., x_n) = h_f(x_1, ..., x_n, g_f(x_1, ..., x_n)). \tag{1}$$

Кроме того, для функции h_f на основе описанного выше разбиения множества E_3^r строится представление, аналогичное третьему представлению булевых функций из [3].

После этого строится формула Φ_h над системой G, реализующая функцию h_f, такая, что

$$L_G(\Phi_h) \lesssim \frac{3^n}{\log_2 n}, \tag{2}$$

$$N(\Phi_h; x_{n+1}) = 1. \tag{3}$$

Строится также формула Φ_g над G, реализующая функцию g_f, такая, что

$$L(\Phi_g) \leqslant L_{\mathrm{pr}G}(B(n)) + c_1 n, \tag{4}$$

где c_1 — некоторая константа, зависящая от G. Из равенства (1) и соотношений (2)–(4) получаем верхнюю оценку для функции $L_G(\mathrm{pr}^{-1}B(n))$. Справедливость нижней оценки вытекает из мощностных соображений (см., например, [2, 3]).

Из теоремы 1 следует, что задача о поведении функции $L_G(\mathrm{pr}^{-1}B(n))$ сводится в некоторых случаях к задаче о сложности реализации булевых функций в неполных базисах (т.е. к задаче о поведении функции $L_{\mathrm{pr}G}(B(n))$). В частности, из теоремы 1 и известных ранее верхних оценок сложности реализации булевых функций (см., например, [2, 4, 14]) вытекают асимптотически точные оценки для функций Шеннона, соответствующих некоторым максимальным классам. Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Пусть B — замкнутый класс булевых функций, такой, что выполняется по крайней мере одно из следующих условий:*

1) $L_{01} \subseteq B$;

2) $M_{01} \subseteq B$;

3) $B \in \{O^\infty, O_0^\infty, I^\infty, I_1^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty\}$;

4) $B \in \{D_{01}, D_0, D_1, D, K_{01}, K_0, K_1, K, U, SU, U_{01}, MU, U_0, U_1\}$.

Тогда найдется конечная система $G \subseteq P_{3,2}$, *такая, что* $[G] = pr^{-1}B$ *и*

$$L_G(\mathrm{pr}^{-1}B(n)) \sim \frac{3^n}{\log_2 n}.$$

Автор выражает благодарность проф. А.Б. Угольникову за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №11-01-00508, и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН “Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения”, проект “Задачи оптимального синтеза управляющих систем”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дагаев Д. А.* О сложности псевдолинейных функций // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2010. № 2. 53–56.
2. *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
3. *Лупанов О. Б.* О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. Вып. 10. М.: Наука, 1963. 63–97.
4. *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. 61–80.
5. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2008.
6. *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
7. *Угольников А. Б.* О глубине и сложности формул, реализующих функции из замкнутых классов // Доклады АН СССР. 1988. **298**, № 6. 1341–1344.
8. *Гашков С. Б.* О параллельном вычислении некоторых классов многочленов с растущим числом переменных // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1990. № 2. 88–92.
9. *Захарова Е. Ю.* Реализация функций из P_k формулами // Матем. заметки. 1972. **11**, № 1. 99–108.
10. *Ложкин С. А.* О сложности реализации функций k-значной логики формулами и квазиформулами // Мат-лы XI Междунар. конф. “Проблемы теоретической кибернетики” (Ульяновск, 10–14 июня 1996 г.). М.: Изд-во РГГУ, 1996. 125–127.
11. *Угольников А. Б.* О сложности реализации формулами одной последовательности функций 4-значной логики // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2004. № 3. 52–55.
12. *Угольников А. Б.* О замкнутых классах Поста // Изв. вузов. Сер. матем. 1988. № 7. 79–88.
13. *Васильев Ю. Л., Глаголев В. В.* Метрические свойства дизъюнктивных нормальных форм // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1. / Под ред. С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова. М.: Наука, 1974. 99–148.
14. *Угольников А. Б.* Синтез схем и формул в неполных базисах // Доклады АН СССР. 1979. **249**, № 1. 60–62.

Поступила в редакцию
18.02.2011