Государственный Университет
Высшая школа экономики

Э.Б. Ершов

ТЕОРИЯ КЛЮВОВ И МЕЖОТРАСЛЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Препринт WP2/2002/03

Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Москва 2002

УДК 330.4
ББК 65.050.9(2)
Е 80

Ершов Э.Б. Теория клювов и межотраслевое моделирование: Препринт WP2/2002/03. – М.: ГУ ВШЭ, 2002. – 64 с.

Работа посвящена специальному классу экономико-математических моделей, допустимые множества решений которых имеют характерные элементы – точки или подмножества – оптимальные при любых минимизируемых или максимизируемых критериях, являющихся неубывающими или невозрастающими функциями своих аргументов. Найдены достаточные условия того, чтобы непустое множество в конечномерном вещественном пространстве имело такие элементы – точки, называемые клювами, или подмножества, называемые обобщенными, или S-клювами, и было замкнутым относительно операции покоординатной минимизации или максимизации, определяемой для пары точек. Показано, что для балансовых и оптимизационных межотраслевых моделей или их естественных модификаций предложенные условия выполняются в силу предположений о неубывании затрат как функций от переменных, характеризующих результаты соответствующих деятельностей.

Классификация JEL: C61, C63, C67, D57, D58.

Ершов Эмиль Борисович
Государственный университет – Высшая школа экономики
101990, Москва, Мясницкая, д. 20

Ershov, Emil
State University – Higher School of Economics
20, Myasnitskaya, Moscow 101990, Russia

© Э.Б. Ершов, 2002
© Оформление. ГУ ВШЭ, 2002

Введение

В конечномерном вещественном пространстве рассматриваются множества, имеющие точку с одновременно минимальными или максимальными на таком множестве координатами, называемую соответственно его мини- или макси-клювом. Формулируются и доказываются условия, достаточные для существования у множеств клювов. В системах неравенств, задающих такие множества, используются невозрастающие или неубывающие по всем аргументам, кроме, быть может, одного, функции. Оптимизация неубывающих или невозрастающих, т.е. слабо монотонных, и монотонных критериев на имеющем соответствующий клюв множестве приводит к задаче его нахождения как характерного или единственного оптимального решения.

Вводится понятие обобщенного клюва множества, использующее задаваемую структуру квазипорядка, рассматривается достаточное условие его существования. Анализируется зависимость координат клювов от параметров, задающих семейства множеств, и связь клювов с решениями систем уравнений. Предложена весьма общая схема конструирования множеств, замкнутых относительно введенных бинарных операций покоординатной минимизации и максимизации и используемых для задания множеств, имеющих клювы. Показано, что для балансовых и оптимизационных межотраслевых моделей предложенные достаточные условия существования клювов, как правило, выполняются в силу качественных соображений.

Пример экономической модели, для которой множество допустимых решений имеет клюв, насколько нам известно, впервые был в явном виде рассмотрен в [1]. Но для весьма частной оптимизационной межотраслевой модели, называемой моделью Самуэльсона, значительно раньше было обнаружено ее основное свойство, формулируемое как “теорема о замещении” ([2]–[5]). Оно следует из существования макси-клюва у задачи линейного программирования, двойственной к исходной модели.

В [6] теоремы о клювах были сформулированы в наиболее простом виде, базирующемся на свойствах межотраслевых моделей. Детально и в более общем виде эти теоремы предполагалось изложить в третьей главе коллективной монографии [67]. По решению руководителей авторского коллектива этот материал не был включен, поскольку был оценен ими как математизированный и сложный. Однако упоминание о соответствующих свойствах межотраслевых моделей в тексте главы сохранилось [7, с. 30-32]. В [8] теоремы о клювах доказаны и использовались в вариантах, приспособленных к потребностям межотраслевого моделирования. В курсах лекций по методам моделирования и математической экономике для студентов экономического факультета МГУ в 70-80-е гг. прошлого, XX-го в. и в последние годы для студентов факультета экономики Государственного университета – Высшей

школы экономики основные результаты, связанные с клювами, автором данной работы излагались и использовались также для межотраслевых моделей.

Поиск более общих достаточных условий существования клювов позволил определить класс имеющих клювы моделей, допустимые множества решений которых не только не должны быть выпуклыми, но и допускают использование альтернативных вариантов развития и функционирования подсистем, образующих моделируемую систему. Такие модели задаются с использованием операций объединения и пересечения отдельно описываемых множеств из предложенного класса. Есть основания предполагать, что возможности использования таких моделей шире, чем сфера межотраслевого моделирования. Выявление таких возможностей предполагает проведение исследований, выходящих за рамки данной публикации.

1. Клювы множеств как их характерные точки и подмножества

Будем рассматривать множества в конечномерном вещественном пространстве, предполагая, что они задаются с помощью систем неравенств, систем уравнений или не являющихся областями множеств специального вида.

1.1. Основные определения и иллюстрирующие примеры

Пусть Ω – множество в R_n, $X \equiv (x_i)$ – точка из R_n с координатами x_i, i=1,2,…,n. Воспользуемся тем, что в R_n определено естественное отношение порядка. Будем предполагать, что Ω ограничено снизу (или сверху), т.е. существует точка $\underline{A}\,(\underline{a}_i) \in R_n$ (или $\overline{A}\,(\overline{a_i})$), такая, что для любой $X \in \Omega$ выполняется неравенство $\underline{A} \le X$ (или $X \le \overline{A}$), т.е. $-\infty < \underline{a}_i \le x_i$ (или $x_i \le \overline{a_i} < +\infty$), i=1,2,…,n. В дальнейшем условие i=1,2,…,n, если оно очевидно, будем опускать.

Множество точек A, таких, что для всех $X \in \Omega$ выполняется $A \le X$, назовем минорантным множеством $\underline{M}\Omega$ для Ω. Мажорантным множеством $\overline{M}\Omega$ для Ω назовем множество точек A, удовлетворяющих неравенству $X \le A$ при всех $X \in \Omega$. В теории частично упорядоченных множеств (ч. у. м.) объекты $\underline{M}\Omega$ и $\overline{M}\Omega$ называют нижним (Ω^{∇}) и верхним (Ω^{Δ}) конусом для Ω [83, с. 833–836].

Если $\Omega \cap \underline{M}\Omega \ne \varnothing$, то существует точка $\overset{\vee}{X} \equiv (\overset{\vee}{x_i}) \equiv (\Omega \cap \underline{M}\Omega) \in \Omega$, такая, что $\overset{\vee}{x_i} = \min\limits_{x \in \Omega} x_i$, называемая мини-клювом множества Ω, наименьшей точкой $inf\,(\Omega)$ или нулем Ω как ч. у. м. Будем ее обозначать $\overset{\vee}{X}\,(\Omega)$. Аналогично, если $\Omega \cap \overline{M}\Omega \ne \varnothing$, то $\Omega \cap \overline{M}\Omega \equiv \overset{\vee}{X}\,(\Omega)$ –

– точка, называемая макси-клювом, наибольшей точкой *sup*(Ω) или единицей для Ω как ч. у. м., такая, что $\overset{\vee}{X}(\Omega) \equiv (\hat{x}_i) \in \Omega$ и $\hat{x}_i = \max\limits_{x \in \Omega} x_i$.

Термин “клюв” предложен потому, что он объединяет понятия наименьшей и наибольшей точек для ч. у. м., в частности для решеток и полурешеток в ч. у. м. и в векторных пространствах, порядок в которых вводится не только с помощью положительного конуса, но и посредством положительного клина [82, с. 880], а также потому, что клюв предлагается определять не только как точку, но и как подмножество $B(\Omega) \subset \Omega$. Такое обобщение предлагается в пункте 2.3.

Очевидно, что $\overset{\vee}{X}(\Omega) = \hat{X}\left(\underline{M}\Omega\right)$ и $\hat{X}(\Omega) = \overset{\vee}{X}\left(\overline{M}\Omega\right)$.

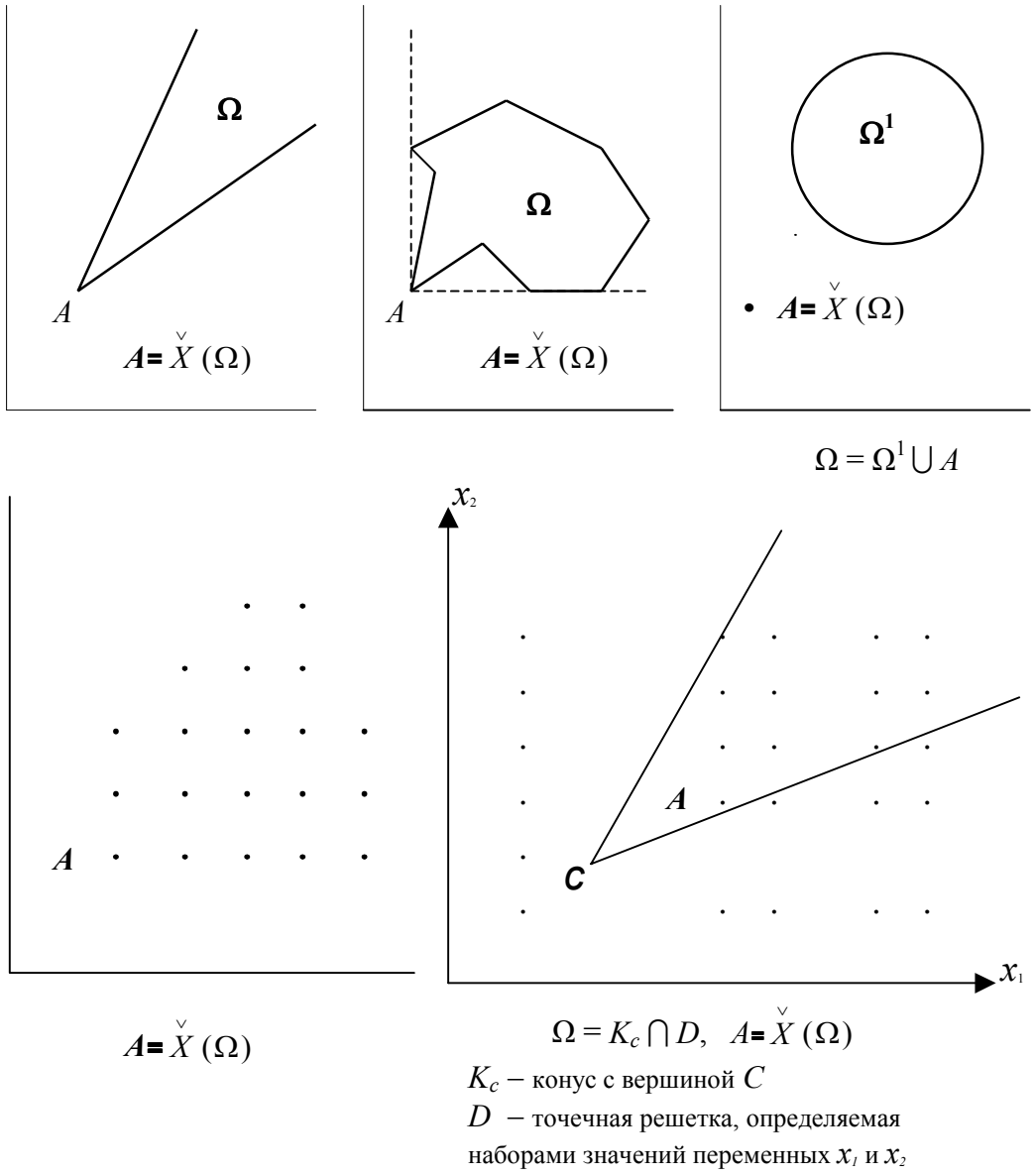

Рис.1. Примеры множеств $\Omega \subset R_2$, имеющих мини-клювы $\overset{\vee}{X}(\Omega)$.

На рис.1 приведены примеры множеств $\Omega \subset R_2$, имеющих клювы.

Пусть на Ω рассматриваются оптимизационные задачи

$$\min_{x\in\Omega} f(X) \text{ или } \max_{x\in\Omega} f(X),$$

имеющие, по предположению, непустые множества решений

$$Arg\min_{x\in\Omega} f(X) \equiv \underline{K} f(X) = \underline{K}_{\Omega} f(X) \text{ или } Arg\max_{x\in\Omega} f(X) \equiv \overline{K} f(X) \equiv \overline{K}_{\Omega} f(X).$$

Если Ω имеет мини-клюв $\overset{\vee}{X}(\Omega)$ или макси-клюв $\hat{X}(\Omega)$, то эти задачи обладают полезными свойствами:

$$\overset{\vee}{X}(\Omega) \in \underline{K} f(X) \text{ и } \overset{\vee}{X}(\Omega) \in \overline{K} g(X),$$

$$\hat{X}(\Omega) \in \underline{K} g(X) \text{ и } \hat{X}(\Omega) \in \overline{K} f(X)$$

для всех неубывающих на Ω функций $f(X)$ и всех невозрастающих на Ω функций $g(X)$.

Нет смысла искать необходимые и достаточные условия того, что Ω имеет клюв, поскольку добавление к ограниченному, но не имеющему клюва множеству Ω одной точки из $\underline{M}\Omega$ или из $\overline{M}\Omega$ превращает его в множество, имеющее клюв. Поэтому целесообразность введения понятия “клюв” может быть подтверждена тем, что существуют проверяемые и в то же время относительно общие и реалистичные в контексте экономико-математического моделирования достаточные условия существования клювов у множеств.

1.2. Простые достаточные условия существования клювов

Развиваемую теорию связывает с теорией решеток и полурешеток следующее утверждение.

Т е о р е м а I о к л ю в а х

Множество $\Omega \subset R_n$ имеет мини-клюв (макси-клюв), если оно:

I.1 – непусто [условие неослабляемо];

I.2) – ограничено снизу (сверху) [условие неослабляемо и вместе с условием I.1) дает необходимое условие существования клюва];

I.3) – замкнуто, т.е. содержит предельные точки последовательностей $\{X^k\}$, $X^k \in \Omega$, $k = 1,2,\ldots,\infty$ [условие ослабляемо, т.к. достаточно требовать, чтобы Ω содержало предельные точки невозрастающих (неубывающих) последовательностей];

I.4) – замкнуто относительно бинарной операции покоординарной минимизации (максимизации), определенной для пары точек X^I, X^{II} следующим образом:

$$X^{I,II} \equiv \min(X^I; X^{II}) \equiv (x_i^{I,II}) = \min(x_i^I; x_i^{II}) \tag{1.1}$$

(или $X^{I,II} \equiv \max(X^I; X^{II}) \equiv (x_i^{I,II}) = \max(x_i^I; x_i^{II})$),

где $X^I \equiv (x_i^I), X^{II} \equiv (x_i^{II})$. Таким образом, требуется, чтобы для любых $X^I \in \Omega$, $X^{II} \in \Omega$ результат операции (1.1) $X^{I,II}$ принадлежал Ω, если точки X^I и X^{II} принадлежат этому множеству.

Условия I.1 – I.3 можно заменить на условие I. 3′ :

$$\underline{K}_\Omega x_i \neq \varnothing \text{ (или } \overline{K}_\Omega x_i \neq \varnothing), \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{1.2}$$

Условие I.4 можно задать в ослабленном виде:

I.4′ – существует непустое, замкнутое относительно рассматриваемой операции (1.1) или (1.2) множество $\omega \subset \Omega$, такое, что $\omega \bigcap \underline{K}_\Omega x_i \neq \varnothing$ (или $\omega \bigcap \overline{K}_\Omega x_i \neq \varnothing$), $i=1,2,\ldots,n$.

Для *m (m ≥ 2)* точек $X^k \equiv (x_i^k) \in R_n$, *k=1,2,...,m,* определим операции

$$\begin{aligned} \min(X^I; \ldots; X^m) &\equiv (x_i^{1,2,\ldots,m}) = \min(x_i^1; \ldots; x_i^m), \\ \max(X^I; \ldots; X^m) &\equiv (x_i^{1,2,\ldots,m}) = \max(x_i^1; \ldots; x_i^m). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Условие I.4 эквивалентно замкнутости Ω относительно одной из операций (1.3) при любых *(m ≥ 2)*.

Доказательство. Из I.1 – I.3 следует выполнение условия I. 3′. Пусть $X^i \in \underline{K}_\Omega x_i$ (или $X^i \in \overline{K}_\Omega x_i$). Применяя операции (1.3), получаем $\min(X^I; \ldots; X^n) \equiv \overset{\vee}{X}(\Omega)$ (или $\max(X^I; \ldots; X^n) \equiv \hat{X}(\Omega)$).

Удовлетворяющее условиям Теоремы I множество Ω является частным случаем нижних (верхних) полурешеток, т.е. частично упорядоченных множеств, для любых двух элементов которых существуют нижняя (верхняя) грань и наименьший (наибольший) элемент. Операции (1.1) предлагается обозначить $\min(X^I; X^{II})$ и $\max(X^I; X^{II})$, а не $\inf(X^I; X^{II})$ или $\sup(X^I; X^{II})$, как это принято в теории решеток, потому что используемые в настоящей работе операции задаются с помощью конуса $\overline{MO}$ для точки *O* – начала координат, в то время как операции $\inf(X^I; X^{II})$ и $\sup(X^I; X^{II})$ могут задаваться с помощью любого конуса, называемого положительным.

Введение условия I.4 оправдано тем, что еще в [6] было найдено следующее достаточное условие его выполнения.

Т е о р е м а II о к л ю в а х (о классе односторонних решеток)

Непустое множество $\Omega \subset R_n$ замкнуто относительно операции покоординатной минимизации $\min(X^I; X^{II})$ (или покоординатной максимизации $\max(X^I; X^{II})$), т.е. является нижней (верхней) полурешеткой, если оно может быть задано системой неравенств

$$f_\alpha(x_{i(\alpha)}; X^{I(\alpha)}) \geq> 0, \quad \alpha = 1,2,\ldots,N, \tag{1.4}$$

где символ "≥>" означает, что в α-м неравенстве используется один из символов: "≥" или ">", $i(\alpha)$ – номер выделенной для α-го неравенства переменной (допускается случай, когда $i(\alpha)$ не определен, выделенный аргумент отсутствует и принимается $i(\alpha) \in \varnothing$), $X^{I(\alpha)}$ – набор переменных x_k, $k \neq i(\alpha)$ и для $\alpha = 1,2,\ldots,N$ выполняются условия:

II.1 – область определения ω_α функции $f_\alpha(X)$ замкнута относительно операции $\min(X^I; X^{II})$ (или операции $\max(X^I; X^{II})$);

II.2 – функция невозрастающая (или неубывающая) по x_k, $k \neq i(\alpha)$.

Условие II.1 в ослабленном виде превращается в условие:

II.1′ – относительно рассматриваемой покоординатной операции замкнуто множество $H = \bigcap_\alpha \omega_\alpha$ – область определения системы функций $\{f_\alpha(X)\}$.

Условие II.2 должно быть выполнено при каждом α хотя бы на одном из множеств Ω, H или ω_α, причем $\Omega \subset H \subset \omega_\alpha$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X^I \in \Omega$, $X^{II} \in \Omega$ и $X^I \neq X^{II}$ (если $X^I = X^{II}$, то $\min(X^I; X^{II}) = \max(X^I; X^{II}) = X^I = X^{II} \in \Omega$). Покажем, что $\min(X^I; X^{II}) \in \Omega$, если Ω определено системой неравенств (1.4).

Очевидно, что $\Omega = \bigcap_\alpha \Omega_\alpha$, где множество Ω_α задано α-м неравенством, и непустое пересечение множеств, замкнутых относительно операции $\min(X^I; X^{II})$ или $\max(X^I; X^{II})$), замкнуто относительно этой операции. Поэтому достаточно доказать, что $X^{I,II} \in \Omega_\alpha$, т.е. выполняется неравенство $f_\alpha(X^I; X^{II}) \geq> 0$ при любом α.

Поскольку $X^I \in \Omega$, $X^{II} \in \Omega$, то $f_\alpha(X^I) \equiv f_\alpha(x^I_{i(\alpha)}; X^{I;i(\alpha)}) \geq> 0$, $f_\alpha(x^{II}_{i(\alpha)}; X^{II;i(\alpha)}) \geq> 0$.

Пусть выделенный аргумент $x_{i(\alpha)}$ определен, т.е. $i(\alpha) \notin \varnothing$, и $x^{I,II}_{i(\alpha)} = x^I_{i(\alpha)} \leq x^{II}_{i(\alpha)}$, что всегда можно обеспечить выбором нумерации точек X^I и X^{II}. В силу условия II.1′ имеем $X^{I,II} \in H \subset \omega_\alpha$, в точке $X^{I,II}$ функция $f_\alpha(X)$ определена и $f_\alpha(X^{I,II}) \equiv f_\alpha(x^I_{i(\alpha)}; \{x^I_k\}; \{x^{II}_l\})$,

где $X^{I,II;i(\alpha)} \equiv (\{x_k^I\};\{x_l^{II}\})$, $x_k^I \le x_k^{II}$, $x_l^{II} < x_l^I$, $k,l \neq i(\alpha)$.

Из невозрастания f_α по x_s, $s \neq i(\alpha)$, получаем

$$f_\alpha(X^{I,II}) \ge f_\alpha(x_{i(\alpha)}^I;\{x_k^I\};\{x_l^{II}\}) \ge f_\alpha(X^I) \ge > 0$$

и любое (α-е) неравенство, определяющее Ω, выполняется.

Если номер $i(\alpha)$ не определен, то $f_\alpha(X^{I,II}) \equiv f_\alpha(\{x_k^I\};\{x_l^{II}\}) \ge f_\alpha(X^I) \ge > 0$, $f_\alpha(X^{I,II}) \ge f_\alpha(X^{II}) \ge > 0$ и даже $f_\alpha(X^{I,II}) \ge \max(f_\alpha(X^I); f_\alpha(X^{II})) \ge > 0$.

Случай $X^{I,II} = \max(X^I; X^{II})$ рассматривается аналогичным образом. Теорема II доказана.

Вторая теорема о клювах имеет "рекурсивный" характер, поскольку от множеств ω_α и H требуется замкнутость относительно той же операции, для которой теорема формулируется. Множества ω_α и H могут задаваться с помощью системы неравенств вида (1.4), но использующих, возможно, другие функции. В приложениях достаточно для каждого α подобрать замкнутое относительно рассматриваемой операции множество $\tilde{\omega}_\alpha$, такое, что $\Omega \subset \tilde{\omega}_\alpha \subset \omega_\alpha$. Тогда непустое в силу $\Omega \neq \varnothing$ множество $\bigcap_\alpha \tilde{\omega}_\alpha$ будет замкнутым относительно этой операции, и тем же свойством будет обладать множество Ω. Во многих случаях множество $\tilde{\omega}_\alpha$ удается выбрать среди "стандартных" множеств, для которых замкнутость относительно рассматриваемой покоординатной операции очевидна.

Замечание 1. Непустое пересечение множеств, удовлетворяющих условиям теорем I и II и потому имеющих клюв, имеет такой же клюв.

Замечание 2. Неравенства $a_i \le x_i$, $a_i < x_i$, $x_i < b_i$, $x_i \le b_i$ являются частным случаем неравенств (1.4), т.к. представляются в виде:

$f_\alpha \equiv x_{i(\alpha)} - a_i \ge > 0$ и $f_\alpha \equiv b_i - x_i \ge > 0$, где f_α – невозрастающая функция невыделенных переменных,

$f_\beta \equiv -a_i + x_i \ge > 0$ и $f_\beta \equiv -x_{i(\beta)} + b_i \ge > 0$, где f_β – неубывающая функция от x_i, $i \neq i(\beta)$.

Замечание 3. Непустое множество $\Omega \subset R_n$, задаваемое системой неравенств

$$f_\alpha(x_{i(\alpha)}; x_{j(\alpha)}) \ge > 0, \quad \alpha = 1,2,\ldots,N, \tag{1.5}$$

где $i(\alpha)$, $j(\alpha)$ – номера используемых в α-м неравенстве аргументов (от x_s, $s \neq i(\alpha)$, $s \neq j(\alpha)$, функция f_α не зависит), замкнуто относительно операций $\min(X^I; X^{II})$ и $\max(X^I; X^{II})$, ес-

ли: множество $H=\bigcap_{\alpha}\omega_{\alpha}$ замкнуто относительно этих операций, функция f_{α} – невозрастающая по $x_{j(\alpha)}$ и неубывающая по $x_{i(\alpha)}$ на одном из множеств ω_{α}, H или Ω.

Это утверждение следует из того, что система (1.5) – частный случай системы (1.4), рассматриваемой для операций $\min(X^{I};X^{II})$ и $\max(X^{I};X^{II})$. С помощью системы неравенств (1.5) удобно задавать примеры множеств, имеющих клювы, в том числе множеств из R_2.

Замечание 4. Существуют множества, имеющие одновременно клювы $\overset{\vee}{X}(\Omega)$ и $\hat{X}(\Omega)$, но не обязательно определяемые с помощью неравенств вида (1.5). Полезный способ задания таких множеств состоит в следующем.

Пусть $\overset{\vee}{\Omega}$ – множество, имеющее мини-клюв $\overset{\vee}{X}(\overset{\vee}{\Omega})$, $\overset{\wedge}{\Omega}$ – множество, имеющее маси-клюв $\hat{X}(\overset{\wedge}{\Omega})$ и $\Omega = \overset{\vee}{\Omega} \cap \overset{\wedge}{\Omega} \neq\varnothing$.Тогда, если $\overset{\vee}{X}(\overset{\vee}{\Omega})\in\overset{\vee}{\Omega}$, то $\overset{\vee}{X}(\overset{\vee}{\Omega})=\overset{\vee}{X}(\Omega)$; если $\hat{X}(\overset{\wedge}{\Omega})\in\overset{\vee}{\Omega}$, то $\hat{X}(\overset{\wedge}{\Omega})=\hat{X}(\Omega)$. Очевидно, что из $\overset{\vee}{X}(\overset{\vee}{\Omega})\notin \underline{M}\ \hat{X}(\overset{\wedge}{\Omega})$ или из $\hat{X}(\overset{\wedge}{\Omega})\notin \overline{M}\ \overset{\vee}{X}(\overset{\vee}{\Omega})$ следует $\Omega=\varnothing$.

Замечание 5. Имеющие клювы множества из R_n могут не иметь в качестве подмножеств области, могут иметь нулевой n-мерный объем или быть дискретными. Достаточно общий способ получения таких множеств состоит в рассмотрении пересечения множества Ω, удовлетворяющего условиям теорем I и II о клювах, и множества-решетки D, задаваемого следующим способом.

Пусть D_i – дискретное множество допустимых значений переменной x_i и $i\in\{i_1,\ldots,i_m\}$, где $\{i_1,\ldots,i_m\}$ – подмножество индексов переменных $x_1,\ldots,x_n$, $1\le m\le n$, $i_k\neq i_l$ при $k\neq l$. Тогда множество $D = D(D_{i_1};\ldots;D_{i_m})$ определим как множество точек $X=(x_i)$, для которых $x_i\in D_i$ при $i\in\{i_1,\ldots,i_m\}$. Очевидно, что D замкнуто относительно операций (1.1). Поэтому непустое пересечение $(\Omega\cap D)$ имеет клюв того же типа, что и клюв для Ω. Легко вводятся и более общие по сравнению с точечными множествами D множества, замкнутые относительно операций (1.1), не являющиеся областями в R_n и конструируемые из пересекающихся или непересекающихся прямых и плоскостей разных размерностей.

1.3. Обобщенные клювы

Учитывая возможность перехода к переменным $x'_i=-x_i$ при некоторых i, а также возможность рассмотрения части переменных в качестве экзогенно задаваемых параметров,

не включаемых в критерий выбора решения из образующих множество Ω допустимых решений, откажемся от предположения о невозрастании или неубывании критериальной функции на Ω по всем ее аргументам и введем понятие обобщенного клюва для множества Ω.

Будем предполагать, что множество индексов {1,…, *n*} переменных x_i представлено в виде объединения трех непересекающихся множеств S^-, S^0, S^+, определяющих разбиение $S\{S^-; S^0; S^+\}$. И пусть $S^- \bigcup S^+ \neq \varnothing$.

Множество $B(\Omega;S)$ точек $X \in \Omega$ назовем обобщенным клювом множества Ω, соответствующим разбиению *S*, или *S*-клювом, если для любой точки *S*-клюва $\tilde{X} \equiv (\tilde{x}_i) \in B(\Omega; S)$

$$\tilde{x}_i = \min_{X \in \Omega} x_i \text{ при } i \in S^-, \quad \tilde{x}_i = \max_{X \in \Omega} x_i \text{ при } i \in S^+$$

и на $\tilde{x}_i$, $i \in S^0$, ограничения не накладываются (кроме $\tilde{X} \in \Omega$). Если *S*-клюв $B(\Omega; S)$ – точка, то ее будем обозначать $\tilde{X}(\Omega; S)$.

S-клюв предлагается обозначать $B(\Omega; S)$, используя первую букву английского слова “beak”, переводимого как “клюв“, и подчеркивая то, что в общем случае $B(\Omega; S)$ – не точка, а подмножество множества Ω.

Мини-клюв $\check{X}(\Omega)$ получаем при $S = (S^-)$, $S^0 = \varnothing$, $S^+ = \varnothing$; макси-клюв $\hat{X}(\Omega)$ – при $S = (S^+)$. Частичные мини- и макси-клювы получаем при $S = \{S^-; S^0\}$ и $S = \{S^0; S^+\}$, если $S^0 \neq \varnothing$.

Понятие *S*-клюва базируется на том, что R_n можно рассматривать как упорядоченное векторное пространство, в котором структура квазипорядка задается с помощью клина.

Введем понятие *Q(S)*-операции, соответствующей разбиению *S*, частными случаями которой будут операции $\min(X^I; X^{II})$ и $\max(X^I; X^{II})$. Результатом бинарной операции *Q(S)*, применяемой к паре точек X^I, X^{II}, назовем множество $Q(S; X^I; X^{II})$ точек $X \equiv (x_i)$, удовлетворяющих условиям $x_i = \min(x^I; x^{II})$ при $x_i \in S^-$, $x_i = \max(x^I; x^{II})$ при $x_i \in S^+$; при этом на x^I, $i \in S^0$, ограничения не накладываются.

Непустое множество $\Omega \subset R_n$ назовем замкнутым относительно операции *Q(S)*, если для любых $X^I \in \Omega$, $X^{II} \in \Omega$ имеем $Q(S; X^I; X^{II}) \bigcap \Omega \neq \varnothing$.

Предложенные определения позволяют очевидным образом сформулировать и доказать теоремы, обобщающие, хотя и незначительно, Теоремы I и II о клювах.

Теорема I о *S*-клювах. Непустое множество $\Omega \subset R_n$ имеет *S*-клюв $B(\Omega; S)$, если оно:

— ограничено снизу по x_i, $i \in S^-$, и сверху по x_i, $i \in S^+$;

— замкнуто (или $\underline{K}_\Omega x_i \neq \varnothing$ при $i \in S^-$, $\overline{K}_\Omega x_i \neq \varnothing$ при $i \in S^+$);

— существует непустое, замкнутое относительно операции $Q(S)$ множество $\omega \subset \Omega$, такое, что $\underline{K}_\Omega x_i \cap \omega \neq \varnothing$ при $i \in S^-$ и $\overline{K}_\Omega x_i \cap \omega \neq \varnothing$ при $i \in S^+$.

Теорема II о S-клювах. Непустое множество $\Omega \subset R_n$ замкнуто относительно операции $Q(S)$, если оно может быть задано системой неравенств

$$f_\alpha (x_{i(\alpha)}; X^{i(\alpha)}) \geq 0, \ \alpha = 1,2,\ldots,N, \qquad (1.6)$$

такой, что:

— множество $H = \bigcap_\alpha \omega_\alpha$, где ω_α – область определения функции f_α, замкнуто относительно операции $Q(\widetilde{S})$ с разбиением $\widetilde{S} = \{\widetilde{S}^-; \widetilde{S}^0; \widetilde{S}^+\}$, для которого $\widetilde{S}^0 = \varnothing$, $\widetilde{S}^- = S^- \cup \widetilde{S}^{0,-}$, $\widetilde{S}^+ = S^+ \cup \widetilde{S}^{0,+}$, $S^0 = \widetilde{S}^{0,-} \cup \widetilde{S}^{0,+}$ и $\widetilde{S}^{0,-} \cap \widetilde{S}^{0,+} = \varnothing$ (т.е. используется разбиение множества S^0 на $\widetilde{S}^{0,-}$ и $\widetilde{S}^{0,+}$);

— f_α – невозрастающая функция от x_i при $i \in \widetilde{S}^-$, $i \neq i(\alpha)$, и неубывающая – от x_i при $i \in \widetilde{S}^+$, $i \neq i(\alpha)$ (это условие должно выполняться на $H = \bigcap_\alpha \omega_\alpha$ или на Ω).

Очевидно, что множество $\Omega \equiv R_n$ замкнуто относительно любой операции $Q(S)$, и можно считать, что оно "задается" вырожденной системой неравенств (1.6), для которой $N=0$.

Доказательства теорем I и II о S-клювах не приводятся, поскольку их логика принципиально не отличается от доказательств теорем о клювах. Вместе теоремы I и II о S-клювах определяют семейство множеств, имеющих обобщенные клювы $B(\Omega; S)$. Конечно, существуют имеющие S-клювы множества, не удовлетворяющие условиям этих теорем.

1.4. Зависимость клювов от параметров, задающих множества

Множество Ω может быть задано как элемент семейства множеств, определяемых значениями вещественных параметров. Как правило, для параметров определено множество их допустимых значений. Различие между переменными и параметрами или экзогенно задаваемыми переменными относительно, зависит от контекста, в котором рассматривается модель. Поэтому имеет смысл исследовать ситуацию, когда переменные и параметры принадлежат вещественному пространству.

Пусть для параметров задано множество $P \subset R_m$ их допустимых значений и $\{\Omega(\pi)\}$ – семейство множеств, определяемых набором параметров $\pi = (\pi_1,\ldots,\pi_m)$, элемент которого – множество $\Omega(\pi) \subset R_n$ – определяется системой неравенств

$$f_\alpha(x_{i(\alpha)}; X^{i(\alpha)}; \pi) \geq> 0,\ \alpha = 1,2,\ldots,N, \qquad (1.7)$$

Будем предполагать, что $\Omega(\pi)$ удовлетворяет условиям Теорем I и II о клювах при $\pi \in P$ и имеет мини-клюв $\overset{\vee}{X}(\Omega(\pi))$. Его координаты $\overset{\vee}{x}_i(\pi)$ являются функциями параметров. Проанализируем характер этих зависимостей, предполагая, что f_α – невозрастающая функция параметров на $H = \bigcap_\alpha \omega_\alpha$ или на $\Omega(\pi)$ при $\pi \in P$.

Очевидно, что если множества Ω^I и Ω^{II}, имеющие мини-клювы, связаны соотношением $\Omega^{II} \subset \Omega^I$, то $\overset{\vee}{X}(\Omega^{II}) \in \Omega^{II} \subset \Omega^I$ и, следовательно, $\overset{\vee}{X}(\Omega^I) \leq \overset{\vee}{X}(\Omega^{II})$. Поэтому, если $\pi^I \leq \pi^{II}$, то $\Omega(\pi^{II}) \subset \Omega(\pi^I)$, и координаты $\overset{\vee}{x}_i(\pi)$ мини-клювов $\overset{\vee}{X}(\Omega(\pi))$ являются неубывающими функциями параметров. Если f_α – неубывающая функция параметров, то координаты $\overset{\vee}{x}_i(\pi)$ – невозрастающие функции.

Аналогичным образом доказывается, что для множеств $\Omega(\pi)$, задаваемых системой неравенств (1.7) при фиксированных значениях параметров $\pi_1,\ldots,\pi_m$, и имеющих макси-клювы $\hat{X}(\Omega(\pi))$, их координаты $\hat{x}_i(\pi)$ являются невозрастающими функциями, если функции $f_\alpha(x_{i(\alpha)}; X^{i(\alpha)}; \pi)$ – неубывающие по переменным x_k, $k \neq i(\alpha)$, и невозрастающие по параметрам, и неубывающими функциями, если f_α – неубывающие функции всех аргументов, кроме, быть может, переменной $x_{i(\alpha)}$. Это утверждение следует из того, что для $\Omega^{II} \subset \Omega^I$ имеем $\hat{X}(\Omega^{iI}) \leq \hat{X}(\Omega^I)$.

Замечание 6. Пусть множество $P \subset R_m$ замкнуто относительно операции $\min(X^I; X^{II})$ и $\widetilde{\Omega} \subset R_{n+m}$ – множество, задаваемое системой неравенств (1.7) и условием $\pi \in P$. Если $\{f_\alpha\}$ – система невозрастающих (или неубывающих) функций ($\alpha = 1,2,\ldots,N$) параметров $\pi = (\pi_1,\ldots,\pi_m)$, то для $\widetilde{\Omega}$ выполнены условия теорем I и II о клювах, и существует клюв $\overset{\vee}{X}(\widetilde{\Omega})$ (или $\hat{X}(\widetilde{\Omega})$) с координатами $\overset{\vee}{x}_1,\ldots,\overset{\vee}{x}_n$; $\overset{\vee}{\pi}_1,\ldots,\overset{\vee}{\pi}_m$ (или $\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n$; $\overset{\wedge}{\pi}_1,\ldots,\overset{\wedge}{\pi}_m$). Очевидно, что $(\overset{\vee}{x}_1,\ldots,\overset{\vee}{x}_n) = \overset{\vee}{X}(\Omega(\overset{\vee}{\pi}_1,\ldots,\overset{\vee}{\pi}_m))$ и $(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n) = \hat{X}(\Omega(\overset{\wedge}{\pi}_1,\ldots,\overset{\wedge}{\pi}_m))$.

Исследование зависимости клювов от задающих множество параметров завершим рассмотрением семейства множеств $\{\Omega(\pi)\}$, $\pi \in P$, такого, что $\Omega(\pi) = \Omega^{I}(\pi) \cap \Omega^{II}(\pi)$, $\Omega(\pi) \neq \varnothing$ при $\pi \in P$ и множества $\Omega^{I}(\pi)$ и $\Omega^{II}(\pi)$ определяются системами неравенств:

$$\begin{aligned} &\Omega^{I}(\pi): \quad f_{\alpha}(x_{i(\alpha)};\ X^{i(\alpha)};\ \pi) \geq\!> 0, \quad \alpha = 1,2,\ldots,N_1, \\ &\Omega^{II}(\pi): \quad f_{\beta}(x_{i(\beta)};\ X^{i(\beta)};\ \pi) \geq\!> 0, \quad \beta = N_1+1,\ldots,N=N_1+N_2, \end{aligned} \tag{1.8}$$

В (1.8) функции f_{α} – невозрастающие по параметрам и по x_k, $k \neq i(\alpha)$, функции f_{β} – неубывающие по параметрам и по x_k, $k \neq i(\beta)$. Предполагается, что множества $\Omega^{I}(\pi)$ и $\Omega^{II}(\pi)$ удовлетворяют и другим условиям теорем I и II о клювах и, следовательно, существуют клювы $\overset{\vee}{X}(\Omega^{I}(\pi)) \equiv (\overset{\vee}{x}{}_i^{I}(\pi))$ и $\hat{X}(\Omega^{II}(\pi)) \equiv (\hat{x}_i^{II}(\pi))$. Тогда, как уже было доказано, координаты клювов $\overset{\vee}{X}\left(\Omega(\pi)\right)$ и $\hat{X}\left(\Omega(\pi)\right)$ будут неубывающими функциями параметров.

Слабую монотонность координат клювов как функций параметров можно использовать при анализе свойств решения задач, формулируемых для семейства множеств $\{\Omega(\pi)\}$. Рассмотрим две такие задачи.

Задача I. Требуется задать множество $\widetilde{P} \subset P$ значений параметров π, такое, что при $\pi \in \widetilde{P}$ клюв $\overset{\vee}{X}(\Omega^{I}(\pi))$ принадлежит множеству $\Omega^{II}(\pi)$, а клюв $\hat{X}(\Omega^{II}(\pi))$ – множеству $\Omega^{I}(\pi)$. Тогда при $\pi \in \widetilde{P}$ непустое множество $\Omega(\pi) = \Omega^{I}(\pi) \cap \Omega^{II}(\pi)$ будет иметь клювы $\overset{\vee}{X}\left(\Omega(\pi)\right) = \overset{\vee}{X}(\Omega^{I}(\pi))$ и $\hat{X}\left(\Omega(\pi)\right) = \hat{X}(\Omega^{II}(\pi))$. Требуется предложить достаточное условие непустоты множества $\widetilde{P}$.

Представим требование $\hat{X}(\Omega^{II}(\pi)) \in \Omega^{I}(\pi)$ в виде

$$\pi \in \widetilde{P},\ g_{\alpha} \equiv f_{\alpha}(\overset{\vee}{X}{}^{II}(\pi);\ \pi) \geq\!> 0,\ \alpha = 1,2,\ldots,N_1, \tag{1.9}$$

и требование $\overset{\vee}{X}(\Omega^{I}(\pi)) \in \Omega^{II}(\pi)$ в виде

$$\pi \in \widetilde{P},\ g_{\beta} \equiv f_{\beta}(\overset{\vee}{X}{}^{I}(\pi);\ \pi) \geq\!> 0,\ \beta = N_1+1,\ldots,N_1+N_2. \tag{1.10}$$

Пусть множество допустимых значений параметров P будет непусто, ограничено сверху и замкнуто относительно операций $\min(X^{I};\ X^{II})$ и $\max(X^{I};\ X^{II})$. Тогда множества T^{I} и T^{II} точек $Z \equiv (X;\ \pi) \in R_{n+m}$, определяемые системами неравенств (1.9) и (1.10), будут иметь клювы $\overset{\vee}{Z}(T^{I})$ и $\hat{Z}(T^{II})$, а искомое множество $\widetilde{P}$ – это проекция пересечения $(T^{I} \cap T^{II}) \equiv T$ на пространство параметров π, т.е. на R_m.

Как уже отмечалось, для непустоты множеств T и $\widetilde{P}$ достаточно выполнения хотя бы одного из требований: $\overset{\vee}{Z}(T^I) \in T^{II}$ или $\hat{Z}(T^{II}) \in T^I$. Проверка их выполнения сводится при найденных клювах $\overset{\vee}{Z}(T^I) \equiv (\overset{\vee}{X};\ \overset{\vee}{\pi})$ и $\hat{Z}(T^{II}) \equiv (\hat{X};\overset{\wedge}{\pi})$ к проверке выполнения систем неравенств

$$f_\beta(\overset{\vee}{Z}^I) \equiv f_\beta(\overset{\vee}{X};\ \overset{\vee}{\pi}) \geq> 0, \quad \beta = N_1+1,\ldots,N_1+N_2,$$

$$f_\alpha(\overset{\vee}{Z}^I) \equiv f_\alpha(\hat{X};\overset{\wedge}{\pi}) \geq> 0, \quad \alpha = 1,2,\ldots,N_1,$$

каждое из которых представляет собой достаточное условие непустоты множества $\widetilde{P}$.

Задача II. Требуется задать множество $\widetilde{\widetilde{P}} \subset P$ значений параметров π, такое, что при $\pi \in \widetilde{\widetilde{P}}$ клювы $\overset{\vee}{X}(\Omega^{\mathrm{I}}(\pi))$ и $\hat{X}(\Omega^{\mathrm{II}}(\pi))$ совпадают и множество $\Omega(\pi) = \Omega^{\mathrm{I}}(\pi) \cap \Omega^{\mathrm{II}}(\pi)$ превращается в точку. Требуется предложить достаточное условие непустоты множества $\widetilde{\widetilde{P}}$.

Рассмотрим две системы неравенств

$$\psi_i^I(\pi) \equiv \overset{\vee}{x}_i^I(\pi) - \hat{x}_i^I(\pi) \geq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n, \tag{1.11}$$

$$\psi_i^{II}(\pi) \equiv \hat{x}_i^{II}(\pi) - \overset{\vee}{x}_i^{II}(\pi) \geq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n, \tag{1.12}$$

каждая из которых дополнена требованием $\pi \in P$. Вместе эти системы определяют искомое множество $\widetilde{\widetilde{P}}$.

Будем предполагать, что множество P удовлетворяет требованиям, сформулированным в задаче I, и f_α – невозрастающая, а f_β – неубывающая функции параметров. Тогда система неравенств (1.11) определяет множество $P^I \subset P$, замкнутое относительно операции покоординатной минимизации, а система неравенств (1.12) – множество $P^{II} \subset P$, замкнутое относительно операции покоординатной максимизации. Потребуем от P^I и P^{II} непустоты и замкнутости; их ограниченность следует из ограниченности множества P снизу и сверху. Следовательно, для P^I и P^{II} выполнены условия Теоремы I о клювах и существуют клювы $\overset{\vee}{\pi}(P^I)$ и $\overset{\wedge}{\pi}(P^{II})$. Поэтому для непустоты множества $P^I \bigcap P^{II}$ достаточно выполнения хотя бы одного из условий:

$$\overset{\vee}{\pi}(P^I) \in P^{II}, \qquad \overset{\wedge}{\pi}(P^{II}) \in P^I.$$

Последние представляются в виде систем неравенств

$$\psi_i^I(\overset{\vee}{\pi}(P^I)) \geq 0 \quad \text{и} \quad \psi_i^{II}(\overset{\wedge}{\pi}(P^{II})) \geq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n,$$

значения левых частей которых определены, если известны координаты клювов $\overset{\vee}{X}(\Omega^{I}(\pi))$ и $\hat{X}(\Omega^{II}(\pi))$ как функции параметров и координаты клювов $\overset{\vee}{\pi}(P^{I})$ и $\overset{\wedge}{\pi}(P^{II})$.

Множество $\tilde{\tilde{P}}$ значений параметров π, для которых множество допустимых значений переменных $x_1, \ldots, x_n$ рассматриваемой модели, обозначаемое Ω(π), превращается в точку, являющуюся мини-клювом для $\Omega^{I}(\pi)$ и макси-клювом для $\Omega^{II}(\pi)$ (напомним, что $\Omega(\pi) = \Omega^{I}(\pi) \cap \Omega^{II}(\pi)$), можно называть множеством компромиссных значений параметров. Компромиссных потому, что такие значения параметров определяют модели, допустимые решения которых являются одновременно оптимальными относительно неубывающих критериев, минимизируемых на $\Omega^{I}(\pi)$ и максимизируемых на $\Omega^{II}(\pi)$. Конечно, рассмотренные задачи решаются конструктивно, если координаты клювов соответствующих множеств удается представить в виде явно или алгоритмически заданных функций параметров.

1.5. Клювы и решения систем уравнений

Важный для экономической теории и прикладных исследований класс множеств, имеющих клювы, порождается системами уравнений

$$f_\alpha(X)=0, \qquad \alpha=1,2,\ldots,n, \qquad X\in R_n \tag{1.13}$$

в предположении, что вектор-функция $F(X)=(f_\alpha(X))$ удовлетворяет какому-либо из вариантов Теорем I и II о клювах. Для того, чтобы множество рассматриваемых решений системы (1.13) было ограничено снизу и сверху, будем предполагать, что на решения X накладываются ограничения $X\in \overline{M}\,A$ и $X\in \underline{M}\,B$, где A и B – точки из R_n и $A < B$.

Если ΩF – множество всех решений системы (1.13) и $M(A;B) \equiv \overline{M}\,A \cap \underline{M}\,B$, то множества $\Omega F \cap M(A;B)$, $\Omega F(\geq) \cap M(A;B)$ и $\Omega F(\leq) \cap M(A;B)$, где множества $\Omega F(\geq)$ и $\Omega F(\leq)$ определены системами неравенств $F(X) \geq 0$ и $F(X) \leq 0$ соответственно, будем предполагать непустыми. Заметим, что для этого достаточно, чтобы $\Omega F \cap M(A;B) \neq \varnothing$, поскольку $\Omega F \subset \Omega F(\geq)$, $\Omega F \subset \Omega F(\leq)$ и $\Omega F = \Omega F(\geq) \cap \Omega F(\leq)$.

Пусть $f_\alpha(X) = f_\alpha(x_{i(\alpha)}; X^{i(\alpha)})$ и множество $\Omega F(\geq) \cap M(A;B)$ удовлетворяет условиям Теорем I и II о мини-клюве. Тогда существует мини-клюв $\overset{\vee}{X}(\Omega F(\geq);\ A,B) \equiv \overset{\vee}{X}(\Omega F(\geq) \cap M(A;B))$. Предположим, что он является внутренней точкой множества $H \cap M(A;B)$, где $H=\bigcap_\alpha \omega_\alpha$. В этом случае, как легко показать, координаты этого клюва удовлетворяют системе уравнений (1.13) и, следовательно, мини-клюв $\overset{\vee}{X}(\Omega F(\geq);\ A,B)$ является мини-клювом для множества $\Omega F \cap M(A;B)$ решений системы (1.13), удовлетворяющих ограничению $X\in M(A;B)$. При этом множество решений ΩF не обязано быть замкнутым относительно операции покоординатной минимизации.

Аналогичное утверждение справедливо в случае, когда для множества $\Omega F(\geq) \bigcap M(A;B)$ или для множества $\Omega F(\leq) \bigcap M(A;B)$ выполняются условия Теорем I и II о макси-клюве и соответствующий макси-клюв является внутренней точкой множества $H \bigcap M(A;B)$. Тогда макси-клюв $\hat{X}(\Omega F(\geq);\ A,B)$ или $\hat{X}(\Omega F(\leq);\ A,B)$ является макси-клювом для рассматриваемого подмножества $\Omega F \bigcap M(A;B)$ множества решений ΩF системы уравнений (1.13).

Таким образом показано, что в случае неединственности решений системы (1.13), порождаемой вектор-функцией $F(X)$ из класса, рассматриваемого в связи с теорией клювов, при достаточно простых предположениях об областях определения ω_α функций $f_\alpha(X)$ и точках A, B, среди ограниченных с помощью множества $M(A;B)$ решений этой системы уравнений есть особое решение – мини- или макси-клюв.

Проиллюстрируем выполненный анализ наглядным примером системы уравнений, состоящей из двух уравнений

$$f_1(x_1\ ;\ x_2) = 0, \qquad f_2(x_2\ ;\ x_1) = 0. \tag{1.14}$$

Будем предполагать, что функции $f_i(x_i\ ;\ x_j)$ определены, непрерывны и ограничены сверху и снизу на множестве $M(A;B)$, для f_i выделенным аргументом является x_i и эта функция – невозрастающая по невыделенному аргументу x_j $(j \neq i)$.

Рассмотрим произвольную пару точек $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$, удовлетворяющих требованию $A < \widetilde{A} < \widetilde{B} < B$. Тогда непустое по предположению множество $\Omega F(\geq) \bigcap M(\widetilde{A}\ ;\ \widetilde{B})$ имеет мини-клюв, который может быть решением системы (1.14) и/или находится на границе множества $M(\widetilde{A}\ ;\ \widetilde{B})$. Если же пусто пересечение множества $M(A;B)$ и границы множества $H = \omega_1 \bigcap \omega_2$, где ω_i – область определения функции f_i, то сформулированное утверждение справедливо для точек $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, удовлетворяющих требованию $A \leq \widetilde{A} < \widetilde{B} \leq B$.

В общем случае, пример которого изображен на рисунке 2, имеет смысл анализировать и графически изображать все множества

$$\Omega F(-;+)\colon f_1(X) \leq 0,\ \ f_2(X) \geq 0; \qquad \Omega F(+;-)\colon f_1(X) \geq 0,\ \ f_2(X) \leq 0;$$
$$\Omega F(+;+) \equiv \Omega F(\geq) \ \text{ и } \ \Omega F(-;-) \equiv \Omega F(\leq). \tag{1.15}$$

При естественных предположениях границы этих множеств, определяемые уравнением $f_1 = 0$ или уравнением $f_2 = 0$, можно представить соответственно в виде уравнений $x_2 = g_1(x_1)$ и $x_1 = g_2(x_2)$, т.е. $x_j = g_i(x_i)$, $i = 1,2$, $(j \neq i)$. Из невозрастания функции f_i по x_j следует, что функция $g_i(x_i)$, получаемая "разрешением" уравнения $f_i(x_i\ ;\ x_j) = 0$ относительно x_j, при некоторых значениях x_i определена неоднозначно и может быть задана в следующем виде: существуют функции $\underline{h}_i(x_i)$ и $\overline{h}_i(x_i)$, такие, что

$$g_i(x_i)=\begin{cases} \underline{h}_i(x_i), \text{ если } \underline{h}_i(x_i)=\overline{h}_i(x_i); \\ g\in[\underline{h}_i(x_i);\overline{h}_i(x_i)], \text{ если } \underline{h}_i(x_i)<\overline{h}_i(x_i). \end{cases}$$

Если $f_i(x_i\,;\,x_j)$ – убывающая функция аргумента x_j, то функция $g_i(x_i)$ определена при каждом x_i однозначно. Заметим, что допускаются значения $\underline{h}_i(x_i) = -\infty$ и $\overline{h}_i(x_i) = +\infty$.

Из невозрастания по невыделенному аргументу следует, что неравенства $f_i(x_i\,;\,x_j) \ge 0$ и $f_i(x_i\,;\,x_j) > 0$ эквивалентны "разрешенным" неравенствам $x_j \le g_i(x_i)$ и $x_j < g_i(x_i)$.

На рисунке 2 границы множеств (1.15), т.е. уравнения (1.14), изображены в виде графиков функций $x_2=g_1(x_1)$ и $x_1=g_2(x_2)$, таких, что при некоторых значениях аргументов значение функции определено неоднозначно, а именно заполняет отрезок некоторой прямой. Такие отрезки на графиках выделены – изображены утолщенными линиями. Связные компоненты множеств (1.15) перенумерованы с помощью верхнего индекса.

Из теорем о клювах следует, что ограниченные снизу, связные компоненты $\Omega^t F(+;+)$ множества $\Omega F(+;+)$ имеют мини-клювы. Поскольку рассматриваются множества $\Omega F \cap M(\widetilde{A}\,;\,\widetilde{B})$ и $\Omega F(+;+) \cap M(\widetilde{A}\,;\,\widetilde{B})$,то в случае $\widetilde{A} \in \Omega F(+;+)$ клюв $\overset{\vee}{X}(\Omega F(+;+) \cap M(\widetilde{A}\,;\,\widetilde{B}))$ совпадает с точкой $\widetilde{A}$. Следовательно, мини-клювами множеств $\Omega F(+;+) \cap M(\widetilde{A}\,;\,\widetilde{B})$ являются точки пересечения по крайней мере двух из четырех кривых, заданных уравнениями $x_2=g_1(x_1)$, $x_1=g_2(x_2)$, $x_1=\widetilde{a}_1$, $x_2=\widetilde{a}_2$, в которых $\widetilde{A}=(\widetilde{a}_1\,;\,\widetilde{a}_2)$. Это утверждение иллюстрируется на рис. 2 с помощью задания вариантов точки $\widetilde{A}$. Аналогичные рассуждения справедливы и в отношении макси-клювов множеств $\Omega^t F(-;-) \cap M(\widetilde{A}\,;\,\widetilde{B})$.

На рисунке выделен ряд характерных точек, а именно: точки A, B и варианты точек $\widetilde{A}, \widetilde{B}$, задающих возможные множества $M(A;B)$ и $M(\widetilde{A}\,;\,\widetilde{B})$, на которых рассматриваются системы уравнений (1.14) и неравенств (1.15); точки C_1 ,…, C_6 – решения системы уравнений (1.14); точки D_1,…, D_7 – локальные экстремумы и границы горизонтальных и вертикальных отрезков графика функции $x_2=g_1(x_1)$, точки E_1,…, E_7 – аналогичные точки для функции $x_1=g_2(x_2)$. Заметим, что точки на границах множества $M(A;B)$ не выделяются.

Очевидно, что S-клювы, не являющиеся точками и обозначаемые $B(\Omega;S)$, где S – разбиение $S=(S^-\,;\,S^0\,;\,S^+)$, в силу $X \in M(A;B) \subset R_2$ являются, если они существуют, отрезками вертикальных или горизонтальных прямых.

Выделенные на рисунке точки "C", "D" и "E" характеризуются следующим образом:

$C_1=\hat{X}(\Omega^1 F(-;-))=\overset{\vee}{X}(\Omega^1 F(+;+))$; $C_2=\widetilde{X}(\Omega^1 F(+;+);\, S^1)=\widetilde{X}(\Omega^1 F(-;-);\, S^2)$ при $S^1=(1;\,2)$ и $S^2=(2;\,1)$; $C_3=\hat{X}(\Omega^2 F(-;-))=\hat{X}(\Omega^2 F(+;+))$;

$C_4=\widetilde{X}(\Omega^2 F(+;+);\, S^1)=\widetilde{X}(\Omega^1 F(-;+);\, S^3)=\widetilde{X}(\Omega^2 F(+;-);\, S^4)$

при S^3=(0; 2; 1) и S^4=(1; 2; 0); C_5= $\tilde{X}$ (Ω^2 F(+;–); S^5)= $\tilde{X}$ (Ω^2 F(–;+); S^6)

при S^5=(2; 0 1) и S^6=(1; 0; 2); C_6= $\tilde{X}$ (Ω^2 F(–;+); S^2);

D_1 – точка локального максимума функции $x_2=g_1(x_1)$; D_2 и D_3 – границы вертикального отрезка [D_2; D_3] графика функции $x_2=g_1(x_1)$; отрезок [D_2; C_3]=$B(\Omega^2F(–;–); S^3)$; отрезок [C_3; D_3] = $B(\Omega^2F(+;+); S^4)$; D_4= $\tilde{X}$ ($\Omega^2F(+;–); S^1$); D_5 и D_6 – границы горизонтального отрезка [D_5; D_6] графика функции $x_2=g_1(x_1)$; отрезок [D_5;D_6]=$B(\Omega^3F(–;–); S^2)$; D_7 – точка локального максимума функции $x_2=g_1(x_1)$; E_1 и E_2– границы горизонтального отрезка [E_1; E_2] графика функции $x_1 = g_2(x_2)$; E_3= $\tilde{X}$ ($\Omega^1F(+;+); S^3$); E_4= $\tilde{X}$ ($\Omega^2F(–;–); S^4$); E_5 = $\tilde{X}$ ($\Omega^2F(–;+); S^3$); E_6 и E_7 – границы вертикального (параллельного оси OX_2) отрезка графика функции $x_1=g_2(x_2)$;

В общем случае, т.е. при $X\in R_n$ и $F=\{f_\alpha(X)\}$, $\alpha = 1,\ldots,N$, система множеств, определяемая на $M(A;B)$ всевозможными наборами неравенств $f_\alpha(X) \lessgtr 0$, $\alpha = 1,\ldots, N$, (таких наборов 2^N), имеет более сложную, разнообразную структуру, чем в рассмотренном примере с $n = 2$ и $N = 2$. Но пример полезен тем, что иллюстрирует введенные определения и обозначения, а также связь клювов для непустых, связных компонент множеств ΩF^1, $F^1\equiv\{f_\alpha(X)\}$, и ΩF^2, $F^2\equiv\{-f_\alpha(X)\}$. Тот факт, что $\check{X}(\Omega^t F(+;+)) = \hat{X}(\Omega^\tau F(–;–))$, где t и τ – номера некоторых, имеющих общую точку, связных компонент соответствующих множеств, может использоваться при нахождении мини- и макси-клювов.

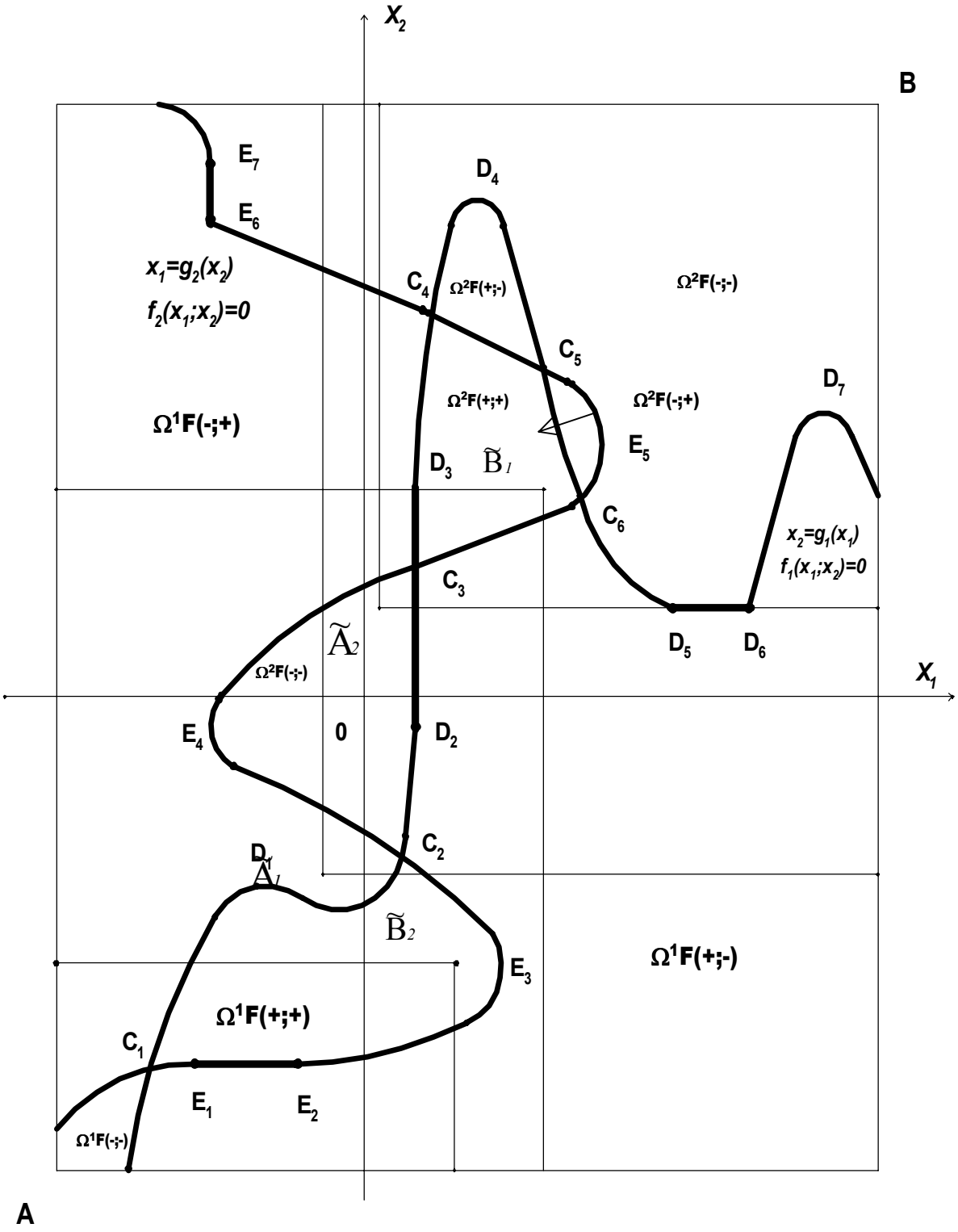

Рис. 2. Клювы множеств в R_2 (пример)
$F(x)=\{f_1(x_1;x_2);\ f_2(x_2;x_1)\}$

2. Конструирование множеств, замкнутых относительно покоординатных операций минимизации и максимизации

В развиваемой теории клювов центральным элементом является возможность проверки замкнутости множества относительно покоординатных операций минимизации и максимизации, которые будем кратко называть *ко-операциями*, и задания имеющих клювы множеств с помощью систем неравенств и уравнений. Ясно, что будет полезно найти варианты достаточных условий замкнутости множеств относительно ко-операций или, коротко, ко-замкнутости, не сводящиеся к условиям Теоремы II о клювах, а затем предложить систему операций над множествами, позволяющую конструировать новые, более сложно задаваемые ко-замкнутые множества из ко-замкнутых множеств. Первая из таких операций очевидна: это пересечение множеств, конечно, в предположении, что пересечение множеств непусто. Вторая операция, также используемая в Теореме II о клювах, – это операция перехода от множества Ω к его дополнению – множеству $D\Omega$. Очевидно, что если множество Ω задается неравенством $f(x_i ; X^i) \geq 0$, где функция $f(X)$ не возрастает по переменным x_j, $j \neq i$, то оно замкнуто относительно операции покоординатной минимизации, а дополнение к Ω – множество $D\Omega$, задаваемое неравенством $f(x_i ; X^i) < 0$ или неравенством $g(x_i ; X^i) \equiv - f(x_i ; X^i) > 0$, замкнуто относительно операции покоординатной максимизации.

Третьей операцией над множествами, позволяющей, но при выполнении определенных условий, конструировать ко-замкнутые множества, является операция объединения ко-замкнутых, по предположению, множеств. Она не используется в формулировке Теоремы II о клювах и относительно редко применяется в экономико-математическом моделировании хотя бы потому, что не сохраняет свойство выпуклости рассматриваемых множеств. Можно привести полученные в результате проведенного исследования достаточные условия, при выполнении которых объединение ко-замкнутых множеств, задаваемых некоторым специальным способом, остается ко-замкнутым. Но на таком пути осталась бы нераскрытой логика поиска способов задания ко-замкнутых множеств, сохраняющих это свойство при переходе к их объединению. Поэтому изберем иной путь.

Начнем с систематизации понятий, определений и обозначений, в терминах которых осуществляется поиск новых достаточных условий ко-замкнутости множеств. Затем рассмотрим возможные комбинации исходных предположений о функциях, используемых для задания ко-замкнутых множеств, и об операциях над такими множествами. Такой подход позволяет, как это будет видно из дальнейшего, выявить, наряду с ситуацией, угаданной в фор-

мулировке Теоремы II о клювах, другие достаточные условия ко-замкнутости множеств и предложить способы их комбинирования.

2.1. Используемые понятия и обозначения

Будем рассматривать множества в R_n, операции пересечения ($\bigcap$) и объединения ($\bigcup$) над ними, а также операцию перехода от множества Ω к дополнительному для него множеству $D\Omega$.

Элементарным назовем множество, задаваемое с помощью одного из неравенств:

$\Omega f(\geq): f(X) \geq 0;\ \Omega f(>): f(X) > 0;\ \Omega f(<): f(X) < 0;\ \Omega f(\leq): f(X) \leq 0,$

каждое из которых использует функцию $f(X)$, $X \in R_n$, со значениями в R_1. Эти множества связаны, как уже упоминалось выше, очевидными соотношениями дополнительности, например, $D\Omega f(<)=\Omega f(\geq)$, и возможностью перехода от функции $f(X)$ к функции $(-f(X))$.

К-слотовой будем называть функцию $f(X)$, у которой выделены k аргументов $(0 \leq k \leq n)$, обозначаемые $x_{i(1)},\ldots, x_{i(k)}$.

Тогда $f(X) \equiv f(x_{i(1)},\ldots, x_{i(k)}; X^{i(1),\ldots,i(k)})$, где $X^{i(1),\ldots,i(k)}$ – ($n-k$)-мерный набор переменных $x_j,\ j \neq i(l),\ l = 1,\ldots, k$.

Любой выделенный аргумент – переменную $x_{i(k)}$ – будем называть “слотом” или слотовой переменной (английский термин “slot”, используемый в вычислительной технике, переводится как “паз”, “щель” или “вырез”). Анализ свойств слотовых функций, приведший к формулировке Теоремы II о клювах, заставляет ограничиться использованием нульслотовых ($k = 0$) и однослотовых ($k = 1$) функций. Разделение аргументов на выделенные (слотовые) и невыделенные оправдывается тем, что функция может иметь различные свойства по слотовым и неслотовым аргументам. В дальнейшем будем придерживаться соглашения, по которому функция должна иметь определенные свойства только по невыделенным аргументам.

Будем использовать следующие свойства функции по отношению к ее аргументу x_j: неубывание, обозначаемое $f(\ldots, \overline{x}_j, \ldots)$; невозрастание, обозначаемое $f(\ldots, \underline{x}_i, \ldots)$. Будем предполагать, что таким свойством функция $f(X)$ обладает на некотором множестве $H \subset \omega_f$, где ω_f – множество, на котором она определена. Таким образом, функция $f(\underline{x}_1, \overline{x}_2, x_3, x_4)$ на H не возрастает по x_1, не убывает по x_2 и может не иметь этих свойств по x_3 и x_4, а однослотовая функция $f(x_1, \underline{X}^1)$ не возрастает на H по переменным $x_j,\ j \neq 1$.

Совокупности (классы) множеств, замкнутых относительно операций покоординатных минимизации и максимизации, обозначим соответственно Mmin и Mmax, не конкретизируя, если это не потребуется, размерность пространства R_n , в котором рассматриваются

множества $\Omega \in M\min$ и $\Omega \in M\max$. Как уже отмечалось, если $\Omega_1 \subset R_n$ и $\Omega_1 \in M\min$, $\Omega_2 \subset R_n$ и $\Omega_2 \in M\min$, то $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 \in M\min$, если множество $\Omega_1 \bigcap \Omega_2$ непусто ($\Omega_1 \bigcap \Omega_2 \neq \varnothing$).

Для обозначения элементарных множеств, определяемых с помощью функции $f(X)$, будем использовать также символы "≥>" и "<≤ ", введенные в формулировках Теоремы II о клювах. Таким образом, множество $\Omega f(\geq>)$ задается неравенством $f(X) \geq 0$ или неравенством $f(X) > 0$. Очевидные соображения позволяют ограничиться рассмотрением элементарных множеств $\Omega f(\geq)$, $\Omega f(>)$ и $\Omega f(\geq>)$, поскольку свойства множеств $\Omega f(\leq)$, $\Omega f(<)$ и $\Omega f(<\leq)$ получаются с помощью анализа свойств функции $(-f(X))$.

В дальнейшем будем исходить из соглашения, по которому используемые функции являются нульслотовыми или однослотовыми и по всем невыделенным аргументам являются невозрастающими или неубывающими. При этом функция, называемая однослотовой, может рассматриваться и как нульслотовая, если она не убывает или не возрастает по всем переменным $x_1, \ldots, x_n$. Очевидно также, что любая переменная x_j, не включаемая в число аргументов функции $f(X)$, может рассматриваться как ее "невыделенный аргумент".

Исследование показало, что в случае, когда функция по невыделенным аргументам не является слабо монотонной, не удается доказать принадлежность множества $\Omega f(\geq)$ ни к классу $M\min$, ни к классу $M\max$.

Пусть функции $f(x_i, \underline{X}^i)$ и $g(x_j, \underline{X}^j)$, выделенные аргументы которых x_i и x_j не обязаны совпадать, определяют элементарные множества $\Omega f(\geq>)$ и $\Omega g(\geq>)$. Тогда из Теоремы II о клювах следует, что эти множества и их непустое пересечение ко-замкнуты относительно операции покоординатной минимизации. Аналогичным образом получаем, что для $f(x_i, \underline{X}^i)$, $g(x_j, \underline{X}^j)$ множества $\Omega f(\geq>)$, $\Omega g(\geq>)$ и $\Omega f(\geq>) \bigcap \Omega g(\geq>)$ принадлежат классу $M\max$.

Легко убедиться, что в других случаях множества $\Omega f(\geq>)$, $\Omega g(\geq>)$ и их пересечение могут не быть ко-замкнутыми относительно общей для них покоординатной операции. Таким образом, Теорема II о клювах дает исчерпывающее, в терминах используемых понятий и допущений, описание вариантов ко-замкнутых множеств, получаемых с помощью пересечения элементарных ко-замкнутых множеств. Представимое в виде пересечения элементарных ко-замкнутых относительно общей для них операции множеств будем называть $\Pi\min$-множеством или $\Pi\max$-множеством, иногда сокращая эти обозначения до Π-множества, если указание покоординатной операции можно опустить без ущерба для понимания ситуации. Символ "Π" здесь заменяет символ "$\bigcap$" операции пересечения множеств. Элементарные ко-замкнутые множества естественно считать частными случаями

П-множеств. Теорема II о мини-клювах представляет собой условие, достаточное для того, чтобы множество Ω было *П*min-множеством или *П*max-множеством.

Для системы функций $F=\{f_\alpha(X)\}$ введем следующие обозначения для множеств:

$$\Pi F\min = \bigcap_\alpha \Omega f\,(\geq>),\ \text{если}\ f_\alpha(X) = f_\alpha(x_{i(\alpha)};\ \underline{X}^{i(\alpha)}),$$
$$\Pi F\max = \bigcap_\alpha \Omega f\,(\geq>),\ \text{если}\ f_\alpha(X) = f_\alpha(x_{i(\alpha)};\ \overline{X}^{i(\alpha)}), \qquad (2.1)$$

и отметим, что $\Pi F\min \subset M\min$, $\Pi F\max \subset M\max$.

2.2. Ко-замкнутые множества, получаемые с помощью объединения элементарных ко-замкнутых множеств

Перейдем к анализу объединений элементарных нульслотовых и однослотовых ко-замкнутых относительно хотя бы одной из покоординатных операций множеств.

В случае двух функций $f(X)$ и $g(X)$ рассмотрение всевозможных вариантов комбинаций разделения их аргументов на выделенные и невыделенные, гипотез о слабой монотонности функций по неслотовым аргументам позволило сформулировать и доказать следующее простое утверждение – лемму, допускающую, как будет показано, обобщение на случай многих функций.

Лемма I о ко-замкнутости объединения двух элементарных множеств

Пусть $f(X)$ и $g(X)$, $X \in R_n$ – функции с областями ω_f и ω_g, на которых они определены, $H \subseteq \omega_f \cap \omega_g$ – непустое множество и $H \in M\min$ (допускается случай $H = \omega_f \cap \omega_g$).

Тогда множество $\Omega = (\Omega Hf) \cap (\Omega Hg)$, где $\Omega Hf \equiv \Omega f\,(\geq>) \cap H$, $\Omega Hg \equiv \Omega g\,(\geq>) \cap H$, замкнуто относительно операции покоординатной минимизации, если выполнено хотя бы одно из следующих достаточных условий ко-замкнутости:

для операции покоординатной минимизации

1min: $f(X) \equiv f(\underline{X})$, $g(X) \equiv g(x_i;\ \underline{X}^i)$;

(в силу симметрии условий относительно функций f и g возможен случай $f(X) = f(x_i;\ \underline{X}^i)$, $g(X) = g(\underline{X})$);

2min: $f(X) \equiv f(x_i;\ \underline{X}^i)$, $g(X) = g(x_i;\ \underline{X}^i)$

(частным случаем условий 1min и 2min можно считать пару нульслотовых функций $f(\underline{X})$ и $g(\underline{X})$);

для операции покоординатной максимизации

1max: $f(X) \equiv f(\overline{X}),\ g(X) \equiv g(x_i;\ \overline{X}^i)$;

2max: $f(X) \equiv f(x_i;\ \overline{X}^i),\ g(X) = g(x_i;\ \overline{X}^i)$

(частным случаем условий 1max и 2max можно считать пару нульслотовых функций $f(\overline{X})$ и $g(\overline{X})$).

Доказательство. Из Теоремы II о клювах следует, что множества ΩHf и ΩHg, для которых выполняется хотя бы одно из сформулированных условий, замкнуто относительно рассматриваемой покоординатной операции. Поэтому если точки X^I и X^{II} принадлежат хотя бы одному из множеств ΩHf или ΩHg, то $\min(X^I; X^{II}) \in (\Omega Hf) \cup (\Omega Hg)$ или $\max(X^I; X^{II}) \in (\Omega Hf) \cup (\Omega Hg)$. Следовательно, для доказательства леммы достаточно доказать ее в случае $X^I \in \Omega Hf,\ X^I \notin \Omega Hg$ и $X^{II} \in \Omega Hg,\ X^I \notin \Omega Hf$, т.е., используя неравенства $f(X^I) \geq 0,\ g(X^{II}) \geq 0$, показать, что при выполнении условий, включенных в формулировку леммы, для точки $X^{I,II} = \min(X^I; X^{II})$ или для точки $X^{I,II} = \max(X^I; X^{II})$ выполнено хотя бы одно из неравенств $f(X^{I,II}) \geq 0,\ g(X^{I,II}) \geq 0$. При этом $X^{I,II} \in H$ и функции f и g в точке $X^{I,II}$ определены.

Пусть рассматривается операция $\min(X^I; X^{II})$. Тогда, в соответствии с соглашением, $x_k^{I,II} = x_k^I \leq x_k^{II}$ при $k \in h(I)$, $x_l^{I,II} = x_l^{II} < x_l^I$ при $l \in h(II)$, где множества $h(I)$ и $h(II)$, зависящие от задания точек X^I и X^{II}, не пересекаются и $h(I) \cup h(II) = \{1,2,\ldots, n\}$.

Пусть выполнено условие 1min. Тогда определен индекс (i) – номер слотовой переменной x_i для функции $g(x_i; \underline{X}^i)$. Для $x_i^{I,II}$ имеются две возможности: $x_i^{I,II} = x_i^I$ или $x_i^{I,II} = x_i^{II}$.

Если $x_i^{I,II} = x_i^I$, то $f(X^{I,II}) \equiv f(\{\underline{x}_k^I\};\ \{\underline{x}_l^{II}\}) \geq f(X^I) \geq 0$ и, следовательно, $X^{I,II} \in \Omega Hf \subset [(\Omega Hf) \cup (\Omega Hg)]$.

Если $x_i^{I,II} = x_i^{II}$, то $g(X^{I,II}) \equiv g(x_i^{II};\ \{\underline{x}_k^I\},\ \{\underline{x}_l^{II}\}) \geq g(X^{II}) \geq 0$ и, следовательно, $X^{I,II} \in \Omega Hg \subset [(\Omega Hf) \cup (\Omega Hg)]$. Здесь через $\{x_l^{II}\}$ обозначен набор переменных (x_j^{II}) – координат точки X^{II}, для которых $j \in h(II)$, но $j \neq i$.

Пусть выполнено условие 2min и $x_i^{I,II} = x_i^I$ или $x_i^{I,II} = x_i^{II}$.

Если $x_i^{I,II} = x_i^I$, то $f(X^{I,II}) \equiv f(x_i^I; \{\underline{x}_k^I\}; \{\underline{x}_l^{II}\}) \geq f(X^I) \geq> 0$ и $X^{I,II} \in \Omega Hf$.

Если $x_i^{I,II} = x_i^{II}$, то $g(X^{I,II}) \equiv g(x_i^{II}; \{\underline{x}_k^I\}, \{\underline{x}_l^{II}\}) \geq g(X^{II}) \geq> 0$ и $X^{I,II} \in \Omega Hg$.

Для случая операции $\max(X^I; X^{II})$ лемма доказывается аналогичным образом.

Анализ других сочетаний исходных предположений о выделении слотовых аргументов и свойствах функций по невыделенным аргументам показал, что без дополнительных допущений, используя только охарактеризованные понятия и соглашения, не удается сформулировать и доказать другие достаточные условия замкнутости множества $(\Omega Hf) \cup (\Omega Hg)$ относительно покоординатных операций, если $\Omega Hf = \Omega f(\geq>) \cap H$, $\Omega Hg = \Omega g(\geq>) \cap H$.

В частности, отметим, что для функций $f(X) \equiv f(x_i; \underline{X}^i)$ и $g(X) \equiv g(x_j; \underline{X}^j)$ при $i \neq j$ точка $X^{I,II} = \min(X^I; X^{II})$ может не принадлежать множеству $(\Omega Hf) \cup (\Omega Hg)$, когда $X^I \in \Omega Hf$, $X^I \notin \Omega Hg$ и $X^{II} \in \Omega Hg$, $X^{II} \notin \Omega Hf$, если $x_i^{I,II} = x_i^I$ и $x_j^{I,II} = x_j^{II}$. В этом случае $f(X^{I,II}) \equiv f(x_i^I; \{\underline{x}_k^I\}, \{\underline{x}_l^{II}\}, \underline{x}_j^{II}) \geq f(x_i^I; \{\underline{x}_k^I\}, \{\underline{x}_l^I\}, \underline{x}_j^{II})$, но поскольку $x_j^{II} < x_j^I$, то в общем случае из невозрастания функции f по переменной x_j имеем $f(x_i^I; \{\underline{x}_k^I\}, \{\underline{x}_l^I\}, \underline{x}_j^{II}) \leq$ $\leq f(X^I)$ и неравенство $f(X^{I,II}) \geq> 0$ не обязано выполняться, хотя $f(X^I) \geq> 0$ (здесь $l \in h(II)$, $l \neq j$). Таким же образом находим, что не обязано выполняться и неравенство $g(X^{I,II}) \geq g(X^{II})$. Следовательно, условие совпадения выделенных аргументов функций f и g в условиях 2min и 2max Леммы I является существенным.

Однако, приведенные рассуждения позволяют выделить специальный случай функций $f(x_i; \underline{X}^i)$ и $g(x_j; \underline{X}^j)$, $i \neq j$, для которого множество $(\Omega Hf) \cup (\Omega Hg)$ замкнуто относительно операции $\min(X^I; X^{II})$. Поскольку с такой ситуацией придется сталкиваться в дальнейшем, приведеи ее определение, применяемое для нескольких, не обязательно двух функций.

Для функции n аргументов $f(x_1, \ldots, x_n)$, рассматриваемой на некотором множестве $H \subset R_n$, назовем n-вектор (строку) $Tf = (t_i)$ вектором-индикатором включения переменных для $f(X)$, если $t_i = 0$ для аргумента x_i, от которого $f(X)$ не зависит на множестве H (не изменяет значение при изменении x_i при любых допустимых значениях других аргументов), и $t_i = 1$ – для других аргументов. Для системы N функций $f_\alpha(X)$, $\alpha = 1, \ldots, N$, матрицей-индикатором включения переменных $T\{f_\alpha\}$ назовем $(N \times n)$-матрицу, строками которой являются векторы Tf_α.

Пусть каждая из функций системы $F = \{ f_\alpha \}$ является нульслотовой или однослотовой. Тогда для нульслотовых функций определены номера $i(\alpha)$ выделенных аргументов, а для однослотовой функции номер $i(\alpha)$ не определен и можно считать, что $i(\alpha) \in \varnothing$. В строках матрицы $T\{ f_\alpha \}$ элементы $t_{\alpha,i(\alpha)}$ пометим знаком "*". Для двух однослотовых функций $f_1 = f_1 (x_i; \underline{X}^i), f_2 = f_2 (x_j; \underline{X}^j)$ с $i \neq j$ матрица $T\{ f_\alpha \}$ примет вид:

$$T\{f_\alpha\} = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t^*_{1i} & \cdots & t_{1j} & \cdots & t_{1n} \\ & & & & & & \\ t_{21} & \cdots & t_{2i} & \cdots & t^*_{2j} & \cdots & t_{2n} \end{pmatrix}$$

Естественно считать, что от своих выделенных аргументов x_i и x_j функции f_1 и f_2 на H зависят и $t^*_{1i} = 1$, $t^*_{2j} = 1$, иначе их можно было бы отнести к множествам их невыделенных аргументов, по которым эти функции являются слабо монотонными. При этом нет необходимости предполагать, что $i \neq j$.

Функции $f_1 (X)$ и $f_2 (X)$ назовем согласованными на множестве H в следующих случаях:

если $f_1 (X) = f_1 (\underline{X})$, $f_2 (X) = f_2 (\underline{X})$ или $f_1 (X) = f_1 (\overline{X})$, $f_2 (X) = f_2 (\overline{X})$;

если $f_1 (X) = f_1 (\underline{X}), f_2 (X) = f_2 (x_i; \underline{X}^i)$ или $f_1 (X) = f_1 (\overline{X}), f_2 (X) = f_2 (x_i; \overline{X}^i)$;

если $f_1 (X) = f_1 (x_i; \underline{X}^i), f_2 (X) = f_2 (x_i; \underline{X}^i)$ или $f_1 (X) = f_1 (x_i; \overline{X}^i), f_2 (X) = f_2 (x_i; \overline{X}^i)$;

если $f_1 (X) = f_1 (x_i; \underline{X}^i), f_2 (X) = f_2 (x_j; \underline{X}^j)$ или $f_1 (X) = f_1 (x_i; \overline{X}^i), f_2 (X) = f_2 (x_j; \overline{X}^j)$

и $i \neq j$, $t_{1j} \bullet t_{2i} = 0$. (все требования предполагаются выполненными при $X \in H$).

Тогда систему функций $F = \{ f_\alpha \}$ назовем согласованной на множестве H, если любая пара из ее функций, т.е. f_β и f_γ, $\beta \neq \gamma$, является согласованной на множестве H.

Введение определения согласованной пары функций оправдано тем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема о ко-замкнутости объединения элементарных множеств, определяемых согласованной системой функций.

Пусть $F = \{ f_\alpha \}$, $X \in R_n$ – согласованная на множестве $H \in M\min$ (или на $H \in M\max$) система невозрастающих (или неубывающих) по невыделенным аргументам функций. Тогда непустое по предположению множество $\bigcup_\alpha \Omega H f_\alpha (\geq >) \equiv \bigcup_\alpha (\Omega f_\alpha (\geq >) \cap H) \equiv \cup FH \{ f_\alpha (\geq >) \}$

замкнуто относительно покоординатной операции, относительно которой замкнуто множество H, и $\bigcup FH\{f_\alpha(\geq>)\} \in M\min$ (или $\bigcup FH\{f_\alpha(\geq>)\} \in M\max$).

Доказательство. Пусть $H \in M\min$ и функции, образующие согласованную на H систему функций $F = \{f_\alpha\}$, не возрастают по невыделенным аргументам.

Если $X^I \in \bigcup FH\{f_\alpha(\geq>)\}$ и $X^{II} \in \bigcup FH\{f_\alpha(\geq>)\}$, то $X^I \in H$, $X^{II} \in H$ и $X^{I,II} \equiv \min(X^I; X^{II}) \in H$, т.е. в точке $X^{I,II}$ определены все функции системы.

Любое элементарное множество $\Omega H\ f_\alpha\ (\geq>)$ замкнуто относительно операции $\min(X^I; X^{II})$. Следовательно, утверждение теоремы необходимо доказать для случая, когда точки X^I и X^{II} принадлежат разным элементарным множествам и не принадлежат одному такому множеству.

Пусть $X^I \in \Omega H f_\mu\ (\geq>)$ и $X^{II} \in \Omega H f_\nu\ (\geq>)$, $\mu \neq \nu$, но $X^I \notin \Omega H f_\nu\ (\geq>), X^{II} \notin \Omega H f_\mu\ (\geq>)$. Поскольку система $F = \{f_\alpha\}$ согласована на H, то пара функций f_μ и f_ν согласована на H. Три первых достаточных условия согласованности двух функций подпадают под действие Леммы I и, следовательно, в этих случаях $X^{I,II} \equiv \min(X^I; X^{II}) \in [\Omega H f_\mu\ (\geq>) \bigcup \Omega H f_\nu\ (\geq>)]$.

Остается рассмотреть случай $f_1(X) = f_1(x_i; \underline{X}^i)$, $f_2(X) = f_2(x_j; \underline{X}^j)$ при условии $i \neq j$, и $t_{1j} \bullet t_{2i} = 0$. Пусть $t_{1j} = 0$,что можно обеспечить выбором нумерации рассматриваемых функций.

Если $x_i^{I,II} = x_i^I \leq x_i^{II}$, то

$f_1(X^{I,II}) \equiv f_1(x_i^I; \{\underline{x}_k^I\}, \{\underline{x}_l^{II}\}, \underline{x}_j^{I,II}) = f_1(x_i^I; \{\underline{x}_k^I\}, \{\underline{x}_l^{II}\}, \underline{x}_j^I)$, т.к. функция f_1 не зависит от x_j на H ($t_{1j} = 0$) и $f_1(X^{I,II}) = f_1(x_i^I; \{\underline{x}_k^I\}, \{\underline{x}_l^{II}\}, \underline{x}_j^I) \geq f_1(X^I) \geq> 0$.

Если же $x_i^{I,II} = x_i^{II} < x_i^I$, то

$f_1(X^{I,II}) = f_1(x_i^{II}; \{\underline{x}_k^I\}, \{\underline{x}_l^{II}\}, \underline{x}_j^{II}) = f_1(x_i^{II}; \{\underline{x}_k^I\}, \{\underline{x}_l^{II}\}, \underline{x}_j^{I,II}) =$

$= f_1(x_i^{II}; \{\underline{x}_k^I\}, \{\underline{x}_l^{II}\}, \underline{x}_j^{II}) \geq f_1(X^{II}) \geq> 0$.

Таким образом, доказано, что $X^{I,II} \in [\Omega H f_1\ (\geq>) \bigcup \Omega H f_2\ (\geq>)] \in M\min$.

Доказательство в случае $H \in M\max$ совершенно аналогично.

2.3. Системы ко-замкнутых множеств

Целью исследования в этом пункте является определение систем множеств, замкнутых относительно операции покоординатной минимизации или максимизации и таких, что включаемые в эти системы множества конструируются с помощью операций пересечения и

объединения, применяемых к элементарным множествам. Предполагается, что элементарное множество задается с помощью функций $f(\underline{X})$ и $g(x_i; \underline{X}^i)$ или $f(\overline{X})$ и $g(x_i; \overline{X}^i)$.

Такие системы можно называть системами (алгебрами) ко-замкнутых множеств и обозначать $A\min$ и $A\max$. Очевидно, что $A\min \subset M\min$ и $A\max \subset M\max$. Примеры дискретных множеств, замкнутых относительно покоординатных операций, позволяют предположить, что $A\min \neq M\min$ и $A\max \neq M\max$.

Очевидно, что из $\Omega^1 \in A\min$ и $\Omega^2 \in A\min$ следует, что $\Omega^1 \bigcap \Omega^2 \in A\min$, если, конечно, $\Omega^1 \bigcap \Omega^2 \neq \varnothing$. Поэтому необходимо проанализировать условия, достаточные для того, чтобы операция объединения множеств не выводила за пределы систем $A\min$ и $A\max$.

Из предшествующего рассмотрения следует, что в системах $A\min$ и $A\max$ имеет смысл выделить множества по меньшей мере трех усложняющихся уровней. *Множества первого уровня* – это элементарные множества $\Omega f(\geq>) \in A\min$, если $f(X) = f(\underline{X})$ и $f(X) = f(x_i; \underline{X}^i)$, или $\Omega f(\geq>) \in A\max$, если $f(X) = f(\overline{X})$ и $f(X) = f(x_i; \overline{X}^i)$. При их определении операции пересечения и объединения множеств (при заданной функции $f(X)$) не используются.

Подсистемы системы $A\min$, состоящие из множеств первого, второго и третьего уровней, будем обозначать $A\min^{(1)}$, $A\min^{(2)}$ и $A\min^{(3)}$. Аналогичным образом определим подсистемы $A\max^{(1)}$, $A\max^{(2)}$ и $A\max^{(3)}$.

Множества второго уровня образуются из множеств первого уровня при помощи одной из операций пересечения или объединения. Пусть множество $\Omega \in A\min^{(2)}$ и оно определяется системой функций $F = \{f_\alpha(X)\}$, таких, что $\Omega f_\alpha(\geq>) \in A\min^{(1)}$. Тогда из проведенного анализа получаем, что $\Omega = \Pi F\min$ или $\Omega = \bigcup FH\min$, если система F согласована на множестве H.

Подсистемы $A\min^{(3)}$ и $A\max^{(3)}$ образуют множества, получаемые из множеств второго уровня (множеств из $A\min^{(2)}$ или $A\max^{(2)}$ соответственно) с помощью одной из операций объединения или пересечения. Если $\Omega^1 \in A\min^{(2)}$, $\Omega^2 \in A\min^{(2)}$, $\Omega^1 \bigcap \Omega^2 \neq \varnothing$, то $\Omega^1 \bigcap \Omega^2 \in A\min^{(3)} \subset$ $\subset A\min$. Поэтому детально проанализируем случай, когда используется операция объединения непустых множеств Ω^1 и Ω^2.

Возможны только следующие три варианта задания множеств Ω^1 и Ω^2 второго уровня, из которых конструируется множество $\Omega^1 \bigcup \Omega^2$.

В а р и а н т 1. Пусть $\Omega^1 = \Pi F^1\min \in A\min^{(2)}$ и $\Omega^2 = \Pi F^2\min \in A\min^{(2)}$, где F^1 и F^2 – системы функций $F^1 = \{f_\alpha(\geq>)\}$ и $F^2 = \{g_\beta(\geq>)\}$.

Если $X^I \in \Omega^1$, $X^{II} \in \Omega^1$, то $\min(X^I; X^{II}) \in \Omega^1 \subset \Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2$. Поэтому анализировать необходимо только случай $X^I \in \Omega^1$, $X^{II} \in \Omega^2$ и $X^I \notin \Omega^2$, $X^{II} \notin \Omega^1$. Очевидно, что для того, чтобы $X^{I,II} \equiv \min(X^I; X^{II}) \in \Omega$, необходимо и достаточно выполнение хотя бы одной из систем неравенств

$$f_\alpha(X^{I,II}) \geq> 0,\ \alpha \in \varphi^1, \text{ или } g_\beta(X^{I,II}) \geq> 0,\ \beta \in \varphi^2, \qquad (2.2)$$

в которых множества индексов φ^1 и φ^2 определены системами функций F^1 и F^2.

Покажем, что ни одна из систем неравенств (2.2) не следует из того, что $X^I \in \Omega^1$ и $X^{II} \in \Omega^2$, если на используемые системы функций F^1 и F^2 не наложены дополнительные ограничения.

Пусть для точки $X^{I,II} \equiv \min(X^I; X^{II})$ имеем $x_k^{I,II} = x_k^I \leq x_k^{II}$, $k \in h(I)$, и $x_l^{I,II} = x_l^{II} < x_l^I$, $l \in h(II)$. Тогда для $f_\alpha(X^{I,II})$ получаем:

если $f_\alpha(X) = f_\alpha(x_i;\ \underline{X}^i)$ и $i(\alpha) \in h(I)$, то

$$f_\alpha(X^{I,II}) = f_\alpha(x^I_{i(\alpha)}; \{\underline{x}_k^I\}, \{\underline{x}_l^{II}\}) \geq f_\alpha(X^I) \geq> 0;$$

если же $i(\alpha) \in h(II)$, то

$$f_\alpha(X^{I,II}) = f_\alpha(x^{II}_{i(\alpha)}; \{\underline{x}_k^I\}, \{\underline{x}_l^{II}\}) \geq f_\alpha(X^{II}),$$

но точка X^{II} не принадлежит множеству $\Omega^1 = \Pi F^1 \min$ и, следовательно, система неравенств $f_\alpha(X^{II}) \geq> 0,\ \alpha \in \varphi^1$ не обязана выполняться. Аналогичным образом или с использованием симметричности ситуации относительно систем функций F^1 и F^2 показывается, что система неравенств $g_\beta(X^{I,II}) \geq> 0,\ \beta \in \varphi^2$, также не обязана выполняться.

Однако возможен случай, при котором хотя бы одна из систем функций $F^1 = \{f_\alpha\}$ или $F^2 = \{g_\beta\}$ состоит из нульслотовых и невозрастающих по всем переменным функций. Пусть $f_\alpha(X) = f_\alpha(\underline{X})$, $\alpha \in \varphi^1$. Тогда множество $\Omega^1 = \bigcap_\alpha \Omega f_\alpha(\geq>)$ с невозрастающими функциями $f_\alpha(\underline{X})$ "притягивают" точку $\min(X^I; X^{II})$, т.е. при $X^I \in \Omega^1$ и $X^{II} \in \Omega^2$ всегда $X^{I,II} \in \Omega^1$. Действительно, для системы функций $\{f_\alpha(X)\}$ получаем:

$$f_\alpha(X^{I,II}) = f_\alpha(\{\underline{x}_k^I\}, \{\underline{x}_l^{II}\}) \geq f_\alpha(X^I) \geq> 0,\ \alpha \in \varphi^1,$$

и $\min(X^I; X^{II}) \in \Omega^1 \subset \Omega^1 \cup \Omega^2$.

Вариант 2. Пусть $\Omega^1 = \Pi F^1 \min = \bigcap_\alpha \Omega f_\alpha(\geq>)$, где $f_\alpha(X) = f_\alpha(x_i;\ \underline{X}^i)$,

$\Omega^2 = \bigcup \Omega H g_\beta(\geq>)$, где $g_\beta(X) = g_\beta(x_i;\ \underline{X}^i)$, и $\Omega \equiv \Omega^1 \cup \Omega^2$.

Очевидно, что необходимо проанализировать только случай $X^I \in \Omega^1$, $X^I \notin \Omega^2$ и $X^{II} \in \Omega^2$, $X^{II} \notin \Omega^1$ и найти условия, при которых для $X^{I,II} \equiv \min(X^I; X^{II})$ выполняется система неравенств

$f_\alpha\,(X^{I,II}) \geq> 0$, $\alpha \in \varphi^1$ (тогда $X^{I,II} \in \Omega^1 \subset \Omega$) или хотя бы одно из неравенств $g_\beta(X^{I,II}) \geq> 0$, $\beta \in \varphi^2$. При этом предполагается, что все функции систем $\{ f_\alpha\}$ и $\{ g_\beta \}$ определены или рассматриваются на общем для них непустом множестве $H \in M\min$, т.е. $\Omega^1 = \Pi F^1 H\min \equiv \bigcap\limits_{\alpha} (\Omega f_\alpha (\geq>) \cap H)$.

Из анализа первого варианта следует, что множество Ω^1, одинаково задаваемое в вариантах 1 и 2, является притягивающим, если $f_\alpha(X) = f_\alpha(\underline{X})$ для всех $\alpha \in \varphi^1$, поскольку это доказано для любого из множеств $\Omega H\, g_\beta (\geq>)$, $\beta \in \varphi^2$, объединение которых рассматривается.

Покажем, что притягивающим будет и множество Ω^2, если $g_\beta(X) = g_\beta(\underline{X})$ при всех $\beta \in \varphi^2$. Поскольку $\Omega^1 \in M\min$, $\Omega^2 \in M\min$, достаточно проанализировать случай $X^I \in \Omega^1$, $X^I \notin \Omega^2$ и $X^{II} \in \Omega^2$, $X^{II} \notin \Omega^1$.

Пусть точка $X^{II} \in \Omega^2$ и, следовательно, удовлетворяет неравенству $g_\beta(X^{I,II}) \geq> 0$ при некотором β. Тогда для $X^{I,II} \equiv \min(X^I; X^{II})$ получаем $g_\beta(X^{I,II}) = g_\beta(\{\underline{x}_k^I\}, \{\underline{x}_l^{II}\}) \geq g_\beta(\underline{x}_k^{II}, \underline{x}_l^{II}) = g_\beta(X^{II}) \geq> 0$ и $X^{I,II} \in \Omega^2 \subset \Omega = \Omega^1 \bigcup \Omega^2$.

Таким образом, во втором варианте $\Omega \in M\min$, если хотя бы одно из множеств $\Omega^1 = \Pi F^1 H\min$ и $\Omega^2 = \Pi F^2 H\min$ определяется системой невозрастающих функций, т.е. $f_\alpha(X) = f_\alpha(\underline{X})$, $\alpha \in \varphi^1$ или $g_\beta(X) = g_\beta(\underline{X})$, $\beta \in \varphi^2$. Аналогичным образом доказывается, что для того, чтобы $\Omega^1 \bigcup \Omega^2 \in M\max$, достаточно неубывания хотя бы одной из систем функций $F^1 = \{ f_\alpha\}$ или $F^2 = \{ g_\beta\}$ по всем переменным.

В а р и а н т 3. Пусть оба множества Ω^1 и Ω^2 образуются при помощи операции объединения элементарных множеств и $\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2$. Тогда $\Omega^1 = \bigcup \Omega H f_\alpha (\geq>)$, где $f_\alpha(X) = f_\alpha(x_{i(\alpha)}; \underline{X}^{i(\alpha)})$, и $\Omega^2 = \bigcup \Omega H g_\beta (\geq>)$, где $g_\beta(X) = g_\beta(x_{i(\beta)}; \underline{X}^{i(\beta)})$, и каждая система функций $F^1 = \{ f_\alpha\}$ и $F^2 = \{ g_\beta \}$ согласована на множестве $H \in M\min$, что обеспечивает $\Omega^1 \in M\min$ и $\Omega^2 \in M\min$.

Из определения множеств вида $\bigcup \Omega H f (\geq>)$ и определения согласованности системы функций ясно, что множество Ω замкнуто относительно операции $\min(X^I; X^{II})$ (или $\max(X^I; X^{II})$, если функции $\{ f_\alpha\}$ и $\{ g_\beta\}$ не убывают по невыделенным аргументам) и система функций $F \equiv \{ f_\alpha, g_\beta \}$, объединяющая системы $\{f_\alpha\}$ и $\{g_\beta\}$, согласована на H. В этом случае $\Omega = \bigcup\limits_{\gamma} \Omega H f_\gamma (\geq>)$, $f_\gamma(X)$ – функции системы F.

Заметим, что частным случаем согласованной на H системы функций $F \equiv \{f_\alpha, g_\beta\}$ является случай, в котором хотя бы одна из систем функций $F^1 = \{f_\alpha\}$ или $F^2 = \{g_\beta\}$ образуется невозрастающими по всем переменным функциями. Как было показано, если $f_\alpha(X) = f_\alpha(\underline{X})$, $\alpha \in \varphi^1$, то множество Ω^1 будет притягивающим и, следовательно, при $X^I \in \Omega^1$ и $X^{II} \in \Omega^2$ получаем $\min(X^I; X^{II}) \in \Omega^1 \subset \Omega$. Если же обе системы фуцкций F^1 и F^2 не возрастают по всем аргументам, то $\min(X^I; X^{II}) \in \Omega^1$ и $\min(X^I; X^{II}) \in \Omega^2$, т.е. $\min(X^I; X^{II}) \in \Omega^1 \bigcap \Omega^2 \subset \subset \Omega^1 \bigcup \Omega^2$. Аналогичным образом доказывается, что в случае неубывающих по невыделенным аргументам систем функций $F^1 = \{f_\alpha\}$ и $F^2 = \{g_\beta\}$ достаточным условием для $\Omega \equiv \Omega^1 \bigcup \Omega^2 \in A\max$ является согласованность объединенной системы функций $F = \{f_\alpha, g_\beta\}$ на множестве H.

Этим завершается описание множеств третьего уровня систем $A\min$ и $A\max$, получаемых объединением двух множеств второго уровня. Последующие уровни множеств, образующих системы $A\min$ и $A\max$, включают множества, конструируемые из множеств, отнесенных к предшествующим (нижним) уровням, с помощью операций объединения и пересечения множеств. Перечислительное описание таких множеств не представляется ни реалистичным, ни полезным из-за разнообразия возможных вариантов. Поэтому ограничимся следующими утверждениями.

Лемма II о ко-замкнутости объединения двух множеств

Пусть $\Omega^{1,\mu} = \Pi F^{1,\mu} H\min$, $\mu=1,\ldots,N_1$, $\Omega^{2,\nu} = \bigcup F^{2,\nu} H\min$, $\nu=1,\ldots,N_2$, и $\Omega = (\bigcup_{\mu} \Omega^{1,\mu}) \bigcup (\bigcup_{\nu} \Omega^{2,\nu}) \equiv \Omega^1 \bigcup \Omega^2$.

Тогда для того, чтобы $\Omega \in A\min \subset M\min$, достаточно согласованности (на множестве H) системы функций $F^2 = \{F^{2,1},\ldots, F^{2,N_2}\}$, объединяющей системы функций $F^{2,\nu}$, или невозрастания (на множестве H) по всем аргументам функций одной из систем $F^1 = \{F^{1,1},\ldots, F^{1,N_1}\}$ или F^2.

Доказательство Леммы II основывается на рассмотрении пар точек X^I и X^{II}, принадлежащих двум разным множествам из числа множеств ($\Omega^{1,1},\ldots, \Omega^{1,N_1}, \Omega^{2,1},\ldots, \Omega^{1,N_2}$), и применения к таким “парам” результатов анализа множеств из $A\min^{(3)}$. Варианты, подлежащие рассмотрению, очевидны: $X^I \in \Omega^{1,\mu_1}$, $X^{II} \in \Omega^{1,\mu_2}$; $X^I \in \Omega^{1,\mu}$, $X^{II} \in \Omega^{2,\nu}$; $X^I \in \Omega^{1,\nu_1}$, $X^{II} \in \Omega^{1,\nu_2}$. Поскольку множества $\Omega^{1,\mu}$ и $\Omega^{2,\nu}$ замкнуты относительно операции покоординатной минимизации, то нет необходимости рассматривать варианты $X^I \in \Omega^{1,\mu}$, $X^{II} \in \Omega^{1,\mu}$ и $X^I \in \Omega^{2,\nu}$, $X^{II} \in \Omega^{2,\nu}$.

Очевидно также, что в формулировке Леммы II множества $\Omega^{1,\mu}$ и $\Omega^{2,\nu}$ можно определить, используя операцию покоординатной максимизации ($\Omega^{1,\mu}=\Pi F^{1,\mu}H\max$; $\Omega^{2,\nu} = \bigcup F^{2,\nu}H\max$). Тогда для $\Omega \in A\max \subset M\max$ достаточно выполнение одного из двух условий: система функций F^2, состоящая из неубывающих по невыделенным аргументам фунукций, согласована на множестве $H \in M\max$; одна из систем функций F^1 или F^2 не возрастает по всем аргументам на множестве H.

Рассмотрение систем ко-замкнутых множеств $A\min$ и $A\max$, конструируемых из элементарных множеств с помощью конечного числа операций пересечения и объединения множеств, завершим замечанием, не имеющим, по-видимому, практического значения в контексте моделирования экономических систем.

Из теории множеств следует, что любое множество $\Omega \subset R_n$, являющееся множеством из систем $A\min$ или $A\max$, представимо в виде объединения множеств Ω^μ , $\mu =1,\ldots, N$, каждое из которых представляет собой пересечение конечного числа элементарных множеств ($\Omega^\mu = \bigcap\limits_\alpha \Omega f_\alpha(X)$, $\alpha \in \varphi^\mu$), и $\Omega = \bigcup\limits_\mu \Omega^\mu$. Предположение $\Omega \in A\min$ приводит к тому, что $\Omega^\mu \in A\min$ и системы функций $F^\mu = \{ f_\alpha(X)\}$, $\alpha \in \varphi^\mu$, состоят из нульслотовых или однослотовых, невозрастающих по невыделенным аргументам функций. Если же $\Omega \in A\max$, то нульслотовые и однослотовые функции $f_\alpha(X)$ являются неубывающими по невыделенным аргументам.

Важно иметь в виду то, что дополнительное требование, состоящее в том, что множество $\Omega \in A\min$ (или $\Omega \in A\max$) может использоваться при конструировании с помощью операций “$\bigcap$” и “$\bigcup$” более “сложных” множеств, также замкнутых относительно рассматриваемой покоординатной операции, не может быть сформулировано только для множества Ω. Такое требование может формулироваться для всех множеств (в том числе и для множества Ω), из которых образуется множество более высокого уровня.

Проиллюстрируем это замечание на следующем примере.

Пусть $\Omega^1=\bigcup\limits_\mu \Omega^{1,\mu} \in A\min$ и $\Omega^2=\bigcup\limits_\nu \Omega^{2,\nu} \in A\min$. Тогда для того, чтобы $\Omega \equiv \Omega^1 \bigcup \Omega^2$, необходимо и достаточно, чтобы для любой пары непустых, по предположению, множеств ($\Omega^{1,\mu}$, $\Omega^{2,\nu}$) их объединение ($\Omega^{1,\mu} \bigcup \Omega^{2,\nu}$) было замкнуто относительно операции $\min(X^I; X^{II})$. Это требование выполняется, если все функции, определяющие множества $\Omega^{1,\mu}$, $\mu=1,\ldots, N_1$, и $\Omega^{2,\nu}$, $\nu=1,\ldots, N_2$, рассматриваются на общем для них множестве $H \in M\min$, а хотя бы одно из множеств любой такой пары ($\Omega^{1,\mu}$; $\Omega^{2,\nu}$) порождалось невозрастающими по всем аргументам функциями. Это возможно, только если это свойство имеется у всех множеств $\Omega^{1,\mu}$, $\mu=1,\ldots,N_1$, или $\Omega^{2,\nu}$, $\nu=1,\ldots, N_2$, т.к. иначе найдется пара ($\Omega^{1,\mu}$; $\Omega^{2,\nu}$), для которой функции хотя бы одного из множеств не являются невозрастающими по всем аргументам.

Подведем итоги выполненного анализа. Предложен метод конструирования козамкнутых множеств, основанный на использовании нульслотовых и однослотовых, невозрастающих или неубывающих по выделенным аргументам функций, с помощью которых определяются элементарные множества, и операций пересечения и объединения множеств. При выполнении для получаемых множеств обычных требований непустоты, ограниченности снизу или сверху и замкнутости оказывается определенным класс моделей, для которых множества допустимых значений переменных имеют клювы. Покажем, что в теоретическом и прикладном экономико-математическом моделировании модели из этого класса изучаются и применяются.

3. Имеющие клювы межотраслевые модели

Взаимодействия в межотраслевой экономике отображаются с помощью межотраслевых и более общих, включающих их как блоки, интегрированных моделей. Такие модели представляют собой достаточно сложный и в то же время изученный объект, для которого характерным свойством является неубывание объемов текущих затрат, объемов первичных факторов (труда и капитала) и невоспроизводимых природных ресурсов, необходимых для получения отраслевых выпусков, в зависимости от их объемов. Это свойство проявляется, если производственные факторы и затраты, а также результаты, т.е. выпуски, измеряются в так называемых физических единицах или в некоторых фиксированных ценах. Именно свойство неубывания затрат вместе с простыми свойствами неравенств, обобщающих балансовые соотношения, позволяют в статических межотраслевых моделях использовать слабомонотонные по невыделенным аргументам нульслотовые и однослотовые функции. Другие свойства допустимых множеств решений, а именно непустота, ограниченность и замкнутость, обеспечивающие существование у таких множеств клювов, представляют собой обычные свойства балансово-эконометрических моделей, в том числе межотраслевых, и их оптимизационных обобщений.

Покажем, что межотраслевые модели представляют собой объект, для изучения свойств и нахождения решений которых естественно использовать развиваемый в данной работе подход, связанный с клювами.

3.1. Статические межотраслевые модели

Проиллюстрируем существование клювов на примерах наиболее известных по публикациям, типовых статических межотраслевых моделей.

История таких моделей началась со статической модели межотраслевого баланса В.В. Леонтьева ([9], [10]), представленной системой линейных уравнений распределения продукции n отраслей

$$X = aX + Y, \tag{3.1}$$

с n неизвестными $X = (x_i)$, в которой (a) – неотрицательная матрица коэффициентов прямых (текущих) затрат со спектральным радиусом $\rho(a) < 1$. Элементарное обобщение этой модели – модель, задаваемая системой неравенств

$$X \geq aX + Y, \qquad X \geq 0, \tag{3.2}$$

определяющих допустимое множество Ω ее решений, при условии, что $(a) \geq 0$ и $\Omega \neq \varnothing$, имеет мини-клюв $\overset{\vee}{X}(\Omega)$, т.к. множество Ω очевидным образом удовлетворяет условиям Теорем I и II о клювах.

Естественным обобщением моделей (3.1) и (3.2) является модель, в которой каждый межотраслевой поток затрат x_{ij} (i , j =1,…, n) – это неубывающая функция выпуска X_j в j-й отрасли или, в более общем случае, сумма потоков $\sum_j x_{ij}$ продукции i-й отрасли является неубывающей, но не обязательно сепарабельной функцией ψ_i (X) переменных $x_1,\ldots, x_n$ ([6], [11]–[14]). Отметим, что предположение о возрастании по всем аргументам суммы $\sum_j x_{ij}$, предполагаемой, как правило, сепарабельной ($\sum_j x_{ij} \equiv \sum_j x_{ij}\ (x_j)$), является стандартным для линейных и нелинейных, статических и динамических межотраслевых моделей.

Множество Ω допустимых решений такой обобщенной модели, для которой конкретизируется вид функций ψ_i (X), задается системой неравенств

$$f_i(X) \equiv x_i - \psi_i(X) - Y_i \geq 0, \quad x_i \geq 0, \tag{3.3}$$

в которых x_i – выделенная переменная для однослотовых и не возрастающих по невыделенным аргументам функций $f_i(X) \equiv f_i(x_i\ ;\underline{X}^i)$ и $g_i(\overline{x_i}) \equiv x_i \geq 0$. Очевидно, что если Ω непусто, то существует мини-клюв $\overset{\vee}{X}(\Omega)$. Если $Y > 0$ и $\psi_i(0) \geq 0$, то мини-клюв $\overset{\vee}{X}(\Omega)$ является одним из неотрицательных решений в общем случае нелинейной системы уравнений $F(X) \equiv X - \psi\ (X) - Y = 0$ и даже мини-клювом для множества Ω $F(X) \cup \overline{MO}$, где $O = (0,\ldots,0) \in R_n$.

Частными случаями моделей этого класса, помимо модели (3.2), являются:

модель межотраслевых взаимодействий ([15] – [17]) и ее оптимизационный вариант, для которых потоки x_{ij} задаются линейными уравнениями

$$x_{ij} = a_{ij}^0 + a_{ij}^i\ x_i + a_{ij}^j\ x_j$$

с неотрицательными коэффициентами a_{ij}^{i} при переменной x_i, моделирующей влияние фактора предложения, и a_{ij}^{j} при x_j как переменной, отражающей фактор спроса, или функциями

$$x_{ij} = \max(0;\ a_{ij}^{0} + a_{ij}^{i}\ x_i + a_{ij}^{j}\ x_j),$$

а сами такие потоки включаются в уравнения (3.1) или в неравенства

$$x_i \geq \sum_j x_{ij} + Y_i, \qquad i = 1,\ldots, n; \tag{3.4}$$

модель взаимодействия межотраслевых потоков ([18]), в которой

$$x_{ij} = \max(0;\ a_{ij}^{0} + \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{k}\ x_{jk} + \sum_{l=1}^{m} \tilde{a}_{ij}^{l}\ Y_{jl}),$$

Y_{jl} – задаваемые отраслевые компоненты ($j = 1,\ldots, n$) l-го функционального элемента конечного продукта, коэффициенты a_{ij}^{k} и $\tilde{a}_{ij}^{l}$ неотрицательны, а множество допустимых решений Ω задается системой неравенств (3.4) и $x_i \geq 0$ ($i = 1,\ldots, n$). При $a_{ij}^{0} = 0$ и $a_{ij}^{k} = \tilde{a}_{ij}^{l} \equiv a_{ij} \geq 0$ модель взаимодействия межотраслевых потоков превращается в обычную оптимизационную модель Леонтьева (3.2) или, если используются равенства, в модель (3.1), поскольку в таком случае $x_{ij} = a_{ij} (\sum_k x_{jk} + \sum_l Y_{jl}) \equiv a_{ij}\, x_j$.

Гипотеза использования в каждой отрасли одной, средней линейной производственной технологии, на которой основывается модель Леонтьева, была заменена в модели, предложенной П.Самуэльсоном [2] и исследуемой в ([3] – [5]), на гипотезу существования в j-й отрасли нескольких линейных технологий с номерами $\lambda \in r(j)$. Допустимое множество Ω решений этой модели задается системой неравенств:

$$\Omega: \quad \begin{gathered} \sum_{\lambda \in r(i)} x_i^{\lambda} \geq \sum_j \Big(\sum_{\lambda \in r(j)} a_{ij}^{\lambda} x_j^{\lambda} \Big) + Y_i, \qquad i = 1,\ldots, n, \\ x_j^{\lambda} \geq 0,\ j = 1,\ldots, n, \quad \lambda \in r(j). \end{gathered} \tag{3.5}$$

В ней x_j^{λ} – интенсивность использования в j-ой отрасли технологии с номером-шифром λ, $r(j)$ – множество шифров таких технологий, коэффициенты затрат a_{ij}^{λ} и элементы Y_i вектора $Y = (Y_i)$ конечного продукта неотрицательны, и минимизирутся критериальная функция $\sum_j \sum_{\lambda \in r(j)} c_j^{\lambda} x_j^{\lambda}$ с положительными коэффициентами c_j^{λ}, экономическая интерпретация которых не влияет на свойства модели.

Целый ряд исследователей, развивающих математическую экономику как направление экономической науки, в том числе П. Самуэльсон, К. Эрроу, Н. Джоржеску-Роэген, Т. Купманс [63], а затем С. Карлин [19, §8.5, с. 307–311] и К. Ланкастер [20, §6.7, с.105–109] показали, что двойственная к этой модели задача линейного программирования имеет оптимальное решение $p^{opt} = (p_j^{opt})$, которое не зависит от вектора Y. Это приводит к разделению технологий каждой отрасли навсегда отсутствующие в оптимальном решении (при любом Y) или неоптимальные, неэффективные технологии, и оптимальные технологии, могущие использоваться в оптимальном решении. Даже использование только одной из оптимальных технологий в каждой отрасли обеспечивает нахождение одного из оптимальных решений модели. В какой-то мере это свойство оправдывало в рамках принятых допущений гипотезу использования единственной, средней технологии в каждой отрасли.

Основное свойство модели (3.5) – независимость разделения технологий на оптимальные и неоптимальные от вектора конечного продукта – оказывается простым следствием того факта, что двойственная задача линейного программирования с допустимым множеством решений

$$\widetilde{\Omega}: \quad p_j \ge 0,\ \sum_i p_i a_{ij}^{\lambda} - p_j + c_j^{\lambda} \ge 0,\ j = 1,\ldots, n,\ \ \lambda \in r(j).\ , \tag{3.6}$$

на котором максимизируется критерий $\sum_j p_j Y_j$, имеет макси-клюв $\hat{p}(\widetilde{\Omega})$, координаты которого очевидным образом не зависят от координат вектора $Y = (Y_j)$, используемых в качестве параметров критериальной функции.

Идеи и методы линейного программирования многократно использовались при формулировании, анализе свойств и нахождении решений оптимизационных межотраслевых моделей. Возможно, наиболее характерным примером из множества таких моделей, описывающих состояние межотраслевой системы в одном году, одном периоде является модель экономного планирования, предложенная Д.Б. Юдиным и Е.Г. Гольштейном [21]. Она задается системой уравнений для межотраслевых потоков x_{ij} и объемов капитальных затрат K_{ij} продукции i-й отрасли, расходуемой в j-й отрасли,

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \max_{\alpha} (a_{ij}^{0,\alpha} + a_{ij}^{\alpha} x_j), \quad \alpha = 1,\ldots, n_j, \\ K_{ij} &= \max_{\beta} (b_{ij}^{0,\beta} + b_{ij}^{\beta} x_j), \quad \beta = 1,\ldots, m_j, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $x_{ij}(0) = 0$, $K_{ij}(x_j) = 0$ при $0 \le x_j \le x_j^0$ и коэффициенты a_{ij}^{α}, b_{ij}^{β} предполагаются неотрицательными, а также неравенствами

$$x_i \geq \sum_j x_{ij} + \sum_j K_{ij} + Y_i, \qquad i = 1,\ldots, n,$$

$$U_r \geq \sum_j u_{rj}(x_j), \qquad r = 1,\ldots, R, \tag{3.8}$$

в которых U_r – объем r-го невоспроизводимого ресурса, $u_{rj}(x_j)$ – кусочно-линейная функция выпуска x_j, задаваемая в том же виде, что и функции $x_{ij}(x_j)$ и $K_{ij}(x_j)$, т.е.

$$u_{rj} = \max_{\gamma} (d_{rj}^{0,\gamma} + d_{rj}^{\gamma} x_j), \quad \gamma = 1,\ldots, l_j. \tag{3.9}$$

В [21] все функции x_{ij}, K_{ij} и u_{rj} предполагались при $x_j \geq 0$ неотрицательными и выпуклыми функциями переменной x_j, так же как и функции $c_j(x_j) \equiv \max_{\delta} (c_j^{0,\delta} + c_j^{\delta} x_j)$, образующие минимизируемый критерий $\sum_j c_j(x_j)$. Это предположение позволило Д.Б. Юдину и Е.Г. Гольштейну представить модель экономного планирования в ее оригинальном виде как задачу линейного программирования с неотрицательными переменными x_j, x_{ij}, K_{ij}, u_{rj}, Z_j и Z ($i, j = 1,\ldots, n$; $r = 1,\ldots, R$):

$$\min Z$$

$$x_i \geq \sum_j x_{ij} + \sum_j K_{ij} + Y_i; \quad x_{ij} \leq a_{ij}^{0,\alpha} + a_{ij}^{\alpha} x_j, \quad \alpha = 1,\ldots, n_j;$$

$$K_{ij} \leq b_{ij}^{0,\beta} + b_{ij}^{\beta} x_j, \quad \beta = 1,\ldots, m_j; \quad u_{rj} \leq d_{rj}^{0,\gamma} + d_{rj}^{\gamma} x_j, \quad \gamma = 1,\ldots, l_j; \tag{3.10}$$

$$Z_j \leq c_j^{0,\delta} + c_j^{\delta} x_j, \; \delta = 1,\ldots, q_j; \; \sum_j Z_j \leq Z, \; (i, j = 1,\ldots, n).$$

Для задачи (3.10) авторы статьи [21] предложили специальный метод нахождения оптимального решения, учитывающий ее структуру.

Специфическое свойство модели экономного планирования становится очевидным, если рассматривать общую модель, частным случаем которой является модель (3.10), допустимое множество решений Ω для которой задается системой неравенств

$$\Omega: \qquad x_i \geq \sum_j x_{ij}(x_j) + \sum_j K_{ij}(x_j) + Y_i, \; x_i \geq 0, \; i = 1,\ldots, n;$$

$$U_r \geq \sum_j u_{rj}(x_j), \qquad r = 1,\ldots, R, \tag{3.11}$$

в которых x_{ij}, K_{ij} и u_{rj} – непрерывные, неубывающие и неотрицательные при $x_j \geq 0$ функции переменной x_j, не предполагаемые выпуклыми, или даже системой неравенств

$$\Omega: \quad x_i \geq F_i(X) + Y_i, \quad U_r \geq U_r(X), \quad x_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots, n, \quad r = 1,\ldots, R, \tag{3.12}$$

где $F_i(X)$, $U_r(X)$ – непрерывные, неубывающие и неотрицательные функции переменных $x_1,\ldots, x_n$, определенные при $X \geq 0$.

Непустые по предположению множества Ω допустимых решений (3.11) или (3.12) удовлетворяют, как легко убедиться, условиям Теорем I и II о мини-клювах. Следовательно, мини-клювы $\overset{\vee}{X}(\Omega)$ существуют и при $Y > 0$, $F(0) = 0$ они являются мини-клювами для балансовых вариантов этих моделей

$$X = F(X) + Y,$$

поскольку допустимые, т.е. неотрицательные, решения таких моделей оказываются положительными, т.к. $X \geq Y$.

3.2. Динамические межотраслевые модели

От статических динамические межотраслевые модели отличаются тем, что в их уравнениях, образующих блоки для последовательных лет, обычно используются переменные (как правило, это отраслевые объемы годовых капитальных вложений (инвестиций), вводов основных фондов на конец года) для лет, предшествующих году (t), для которого моделируется распределение продукции, или некоторые из таких переменных для лет, следующих за этим годом. Динамические модели не удается, как это будет видно из дальнейшего, представить в виде систем неравенств, в которых используются только нульслотовые и однослотовые, невозрастающие или неубывающие по невыделенным аргументам функции. Следовательно, в их исходных, не использующих дополнительные предположения вариантах такие модели не должны иметь и не имеют клювов.

Но у динамических моделей имеется важная особенность. При подготовке исходных данных, предназначенных для целей прогнозирования, необходимо задать согласованные траектории параметров или изменения используемых функциональных, не обязательно линейных зависимостей. Согласованные в широком смысле траектории, т.е. не только между собой, но и по отношению к сценарным гипотезам, принимаемым при задании значений экзогенных переменных для лет прогнозируемого периода. В то же время для уже прошедших лет, если в них происходили существенные изменения, предполагаемые постоянными параметры динамических моделей, оцениваемые статистическими методами, порождают модельные траектории, достаточно сильно отличающиеся от фактических траекторий основных переменных модели. Отказ же от гипотезы постоянства параметров приводит к необходимости выбрать класс функций, содержащих свои оцениваемые параметры, с помощью которых можно определять исходные или первичные и уже непостоянные параметры. При этом принимаемые гипотезы должны допускать содержательную экономическую интерпретацию, а в идеале даже обоснованный выбор между конкурирующими вариантами наборов таких гипотез.

В этих условиях используются достаточно простые гипотезы об используемых зависимостях и их параметрах. Фактически это приводит к тому, что динамические межотраслевые модели не предназначаются для предсказания или постпрогнозирования с высокой точностью взаимосвязанных годовых итогов функционирования экономики для последовательности лет прогнозируемого или анализируемого периода. С помощью таких моделей, если разрабатываются количественно-определенные, а не символические их варианты, выявляются лишь общие тенденции, отображаемые в динамиках и в соотношениях переменных. Понимание реальных возможностей и назначения динамических межотраслевых моделей с заведомо большим числом экзогенно задаваемых параметров позволяет существенно ограничивать классы рассматриваемых траекторий значений хотя бы части их переменных. Целесообразность параметрического задания достаточно простых классов траекторий, т.е. перехода к их определению с помощью меньшего числа параметров по сравнению с числом элементов траекторий переменных, исследовалась и обосновывалась многими авторами, из которых следует отметить К.А. Багриновского, неоднократно обращавшегося к этой проблеме (см., например: [22], [23], [41]).

В целом ряде динамических межотраслевых моделей траектории всех или части переменных определяются с помощью относительно простых функций времени, главным образом, линейных, параболических или экспоненциальных, характеризующихся постоянством первых или вторых разностей или темпов роста ([13], [24] – [27]).

Траектории переменных, моделируемые с помощью функций от времени с небольшим числом параметров, значения которых можно включать в число переменных или параметров динамических моделей без необоснованного усложнения таких моделей и методов нахождения их решения, будем называть регулярными траекториями. Если для таких функций известны их значения для базового и, быть может, предшествующего ему года (в случае параболической функции, т.е. квадратичного многочлена от времени), то порождаемые ими траектории определяются значением всего одного параметра, рассматриваемого в качестве одной из переменных модели. А это обеспечивает возникновение нужных свойств у используемых в модели функций, на которых основываются достаточные условия существования клювов.

Перейдем к типичным примерам динамических межотраслевых моделей и их вариантов, имеющих клювы.

Простейшие динамические модели межотраслевого баланса связывают инвестиционные затраты отраслей непосредственно с годовыми приростами объемов продукции и задаются одной из систем уравнений ([10], [28] – [38], [71])

$$X^t = a^t X^t + b^t (X^t - X^{t-1}) + Y^t, \qquad (3.13.1)$$

$$X^t = a^t X^t + c^t (X^{t+1} - X^t) + Y^t, \qquad (3.13.2)$$

или даже $$X^t = a^t X^t + b^t (X^t - X^{t-1}) + c^t (X^{t+1} - X^t) + Y^t, \qquad (3.13.3)$$

в которых $t = 1,\ldots, T$, вектор X^0 известен, матрицы a^t, b^t и c^t неотрицательны и для моделей (3.13.2) и (3.13.3) на вектор выпусков X^{T+1} в $(T+1)$-м году накладывается дополнительное, терминальное условие, ограничивающее его элементы снизу. Такое условие задается, например, с помощью соотношений $X^{T+1} = X^{T+1,0}$, где $X^{T+1,0}$ – задаваемый вектор, или $X^{T+1} - X^T = X^T - X^{T-1}$.

Очевидно, что эти модели интерпретируются только в предположении о неубывании во времени выпусков x_i^t каждой отрасли, т.е. при неотрицательности инвестиционных затрат, зависящих от векторов приростов $\Delta X^t = X^t - X^{t-1}$ и $\Delta X^{t+1} = X^{t+1} - X^t$. Для оптимизационных вариантов этих моделей, получаемых заменой равенств в уравнениях распределения продукции на неравенства "≥" и добавлением требований неотрицательности векторов ΔX^t $(t = 1,\ldots,T)$ и терминального ограничения $\Delta X^t \geq 0$ или $\Delta X^{t+1} \geq \Delta X^t$, как легко видеть, множества допустимых решений не обязаны быть замкнутыми относительно операции покоординатной минимизации. Действительно, в задающих модели неравенствах, например, в неравенствах

$$f_i^t(X) \equiv x_i^t - \sum_j a_{ij}^t x_j^t - \sum_j b_{ij}^t (x_j^t - x_j^{t-1}) - \sum_j c_{ij}^t (x_j^t - x_j^{t-1}) - Y_i^t \geq 0,$$

имеется несколько переменных, по которым функция $f_i^t(X)$ не является невозрастающей.

Однако, если принять подходящую упрощающую гипотезу о траекториях переменных x_j, например:

линейную гипотезу, согласно которой

$$x_i^t = x_i^0 + t\,\Delta x_i, \quad t = 1,\ldots, T+1, \text{ и } \Delta x_i \geq 0; \qquad (3.14.1)$$

параболическую гипотезу, при которой

$$x_i^t = x_i^0 + (x_i^1 - x_i^{-1})\,0{,}5\,t + [(x_i^1 + x_i^{-1})\,0{,}5 - x_i^0]\,t^2, \qquad (3.14.2)$$

где x_i^0, x_i^{-1} известны, x_i^1 – переменная, задающая траекторию $\{x_i^t\}$, и выполняются неравенства $x_i^0 \geq x_i^{-1} > 0$ и $x_i^1 \geq 2x_i^0 - x_i^{-1}$, обеспечивающие неубывание положительной траектории $\{x_i^t\}$ при $t \geq 0$;

экспоненциальную гипотезу, базирующуюся на постоянстве темпа роста z_i для объема продукции x_i i-ой отрасли, т.е.

$$x_i^t = x_i^0 \cdot (z_i)^t, \quad t = 1,2,\ldots,T+1, \text{ при ограничении } z_i \geq 1, \qquad (3.14.3)$$

то модели (3.13.1) – (3.13.3) трансформируются в модели, содержащие соответственно переменные Δx_i, x_i^1 или z_i (i=1,…,n), для которых выполняются условия Теоремы II о миниклюве. Покажем это на примере наиболее общей модели (3.13.3).

Получаемые с использованием гипотез (3.14.1), (3.14.2) и (3.14.3) модели представляются следующими системами неравенств:

при линейной гипотезе

$$f_i^t(\Delta X) \equiv x_i^0 + t\,\Delta x_i - \sum_j a_{ij}^t\,(x_j^0 + t\,\Delta x_j) - \sum_j (b_{ij}^t + c_{ij}^t)\,\Delta x_j - Y_i^t \ge 0,$$
$$\Delta x_i \ge 0 \quad (i=1,\ldots,n,\ t=1,\ldots,T); \tag{3.15.1}$$

при параболической гипотезе

$$f_i^t(X^1) \equiv \sum_j (\delta_{ij} - c_{ij}^t)\{x_j^0 + (x_j^1 - x_j^{-1})\,0{,}5\,t + [(x_j^1 - x_j^{-1})\,0{,}5 - x_j^0]\,t^2\} -$$
$$- 0{,}5\sum_j (b_{ij}^t + c_{ij}^t)(x_j^1 - x_j^{-1}) - \sum_j [b_{ij}^t\,(2t-1) + c_{ij}^t\,(2t+1)]\times \tag{3.15.2}$$
$$\times[(x_j^1 - x_j^{-1})\,0{,}5 - x_j^0] - Y_i^t \ge 0, \qquad x_i^1 \ge 2x_i^0 - x_i^{-1} \quad (i=1,\ldots,n,\ t=1,\ldots,T);$$

при экспоненциальной гипотезе

$$f_i^t(z) \equiv \sum_j (\delta_{ij} - a_{ij}^t)\,x_j^0\,z_j^t - \sum_j b_{ij}^t\,x_j^0\,z_j^{t-1}(z_j - 1) -$$
$$- \sum_j c_{ij}^t\,x_j^0\,z_j^t(z_j - 1) - Y_i \ge 0, \tag{3.15.3}$$
$$z_i \ge 1 \quad (i=1,\ldots,n,\ t=1,\ldots,T).$$

В системах (3.15.1), (3.15.2) и (3.15.3) функции $f_i^t(\Delta X)$, $f_i^t(X^1)$ и $f_i^t(z)$ переменных $\Delta X = (\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n)$, $X^1 = (x_1^1,\ldots,x_n^1)$ и $z = (z_1,\ldots,z_n)$ соответственно не возрастают по аргументам с номерами j, отличными от номера выделенного аргумента (i) однослотовой функции. Конечно, невозрастание здесь является следствием ограничений

$$\Delta x_i \ge 0, \quad x_i^1 \ge 2x_i^0 - x_i^{-1} \quad \text{и} \quad z_i \ge 1,$$

накладываемых на переменные моделей.

Более сложные динамические модели базируются на взаимозависимости между траекториями отраслевых инвестиций (капиталовложений), вводов и выбытий основных фондов и объемов основных фондов (капитала) в отраслях в среднегодовом выражении, на конец и на начало года. Принято выделять модели следующих двух типов.

Если капитальные вложения в основные фонды отрасли в году определяются будущей траекторией вводов основных фондов, т.е. брутто-приростов капитала в этой отрасли, прогнозируемой с помощью динамической межотраслевой модели, то независимо от выбора конкретной формы такой связи линейные, по предположению, модели этого типа представ-

ляются в балансовых вариантах системами уравнений с опережающими значениями вводов основных фондов. Иногда в записи таких моделей используется оператор правого сдвига "*R*", определяемый тождеством $R\xi_t \equiv \xi_{t+1}$ для любой последовательности $\{\xi_t\}$. Модели этого типа естественно называть моделями типа *R* или *F*-моделями, используя термин "FUTURE".

При естественном предположении о конечности продолжительности (Q) периода такого опережения типовая линейная *R* или *F*-модель задается:

уравнениями распределения продукции отраслей в каждом году *t* периода $t \in [1;T]$

$$X^t = a^t X^t + \sum_{\tau=0}^{Q} b^{t,\tau} B^{t+\tau} + Y^t, \ t=1,\ldots, T; \tag{3.16.1}$$

уравнениями баланса потребностей в капитале (основных фондах) и наличия капитала (обычно в среднегодовом выражении) в году *t*

$$\varphi^t X^t = h^t F^0 + \sum_{\tau=1}^{t} g^{t,\tau} B^{\tau}, \ t=1,\ldots, T, \tag{3.16.2}$$

в которых h^t и $g^{t,\tau}$ – неотрицательные диагональные матрицы, с помощью которых отображаются процессы выбытия элементов капитала и его использования в году *t*, $F^0 = (F_j^0)$ – вектор объемов основных фондов в отраслях на момент начала прогнозируемого периода;

терминальными требованиями к вводам основных фондов $B^{T+\tau}$ ($\tau = 1,\ldots, Q$) в годы за пределами прогнозного периода, которые могут представляться, например, уравнениями

$$B_j^{T+\tau} = B_j^T, \ B_j^{T+\tau} = B_j^T + \frac{\tau}{T}\sum_{t=0}^{T-1} B_j^t, \ B_j^{T+\tau} = B_j^T + \frac{\tau}{t}\sum_{t=1}^{T} B_j^t$$

или (3.16.3)

$$B_j^{T+\tau} - B_j^{T+\tau-1} = (B_j^{T+\tau-1} - B_j^{T+\tau-2}) + \Delta^2 B_j,$$

где вторая разность $\Delta^2 B_j$ для вводов в *j*-ой отрасли после года *T*, т.е.при $\tau \geq 1$ или $\tau \geq 2$, предполагается постоянной и неотрицательной. Она задается, считается независимой переменной модели или определяется в виде линейной функции от $B_j^0, \ldots, B_j^T$.

Отметим принципиальную возможность выбора для отраслей различных вариантов терминальных условий.

К моделям типа *R* относятся преимущественно динамические модели межотраслевого баланса, предлагавшиеся в работах советских экономистов для использования при выполнении предплановых расчетов ([39] – [44]).

Динамические модели второго типа исходят из предположения о зависимости бруттоприростов капитала (основных фондов) в отрасли в году *t* от инвестиций в нее в предшест-

вующие годы. Для моделирования таких зависимостей применяются уравнения с распределенными лагами, в которых используется лаговый оператор L, такой, что $L\xi_t \equiv \xi_{t-1}$. Такие модели естественно называть моделями типа L или P-моделями, используя термин “PAST”.

В достаточно общем виде линейные по переменным, балансовые модели типа L представляются:

уравнениями распределения продукции

$$X^t = a^t X^t + b^t K^t + Y^t, \quad t = 1,\ldots, T; \tag{3.17.1}$$

уравнениями баланса потребностей в капитале и его наличия в отраслях в годах периода (3.16.2);

уравнениями инвестиционного процесса с конечными ($Q < +\infty$) или бесконечными ($Q = +\infty$) запаздываниями

$$B^t = a^t X^t + \sum_{\tau=0}^{Q} \mu^\tau K^{t-\tau}, \tag{3.17.2}$$

в которых объемы капиталовложений K_j^t считаются известными при $t \le 0$ и переменными модели при $t \ge 1$, а матрицы (μ^τ) предполагаются диагональными и неотрицательными.

Важным частным случаем уравнений (3.17.2) являются уравнения распределенного геометрического лага

$$B_j^t = \mu_j^0 (E - q_j L)^{-1} K_j^t$$

с параметрами $\mu_j^0 > 0$ и $0 \le q_j < 1$. Эти уравнения включаются в модель в конечной форме

$$B_j^t = q_j B_j^{t-1} + \mu_j^0 K_j^t$$

и, возможно, при предположении о полном превращении инвестиций во вводы основных фондов, формализуемом в виде равенства

$$\mu_j^0 \sum_{t=0}^{\infty} q_j^t \equiv \mu_j^0 / (1 - q_j) = 1.$$

Разрешенность уравнений (3.17.2) относительно переменных B_j^t позволяет подставить их в (3.16.2) и представить типовую линейную P-модель системами уравнений (3.17.1) и

$$\varphi^t X^t = h^t F^0 + \sum_{\tau=0}^{T+Q} \nu^{t,\tau} K^{t-\tau} \tag{3.18}$$

с очевидным образом определяемыми диагональными и неотрицательными матрицами коэффициентов (h^t) и ($\nu^{t,\tau}$).

Модели типа *L* рассматривались преимущественно в работах, посвященных процессам, происходящим в экономиках капиталистических стран.

Общим для имеющих теоретическую ориентацию моделей типа *R* и *L* было то, что выбор вида зависимости между рядами инвестиций и брутто-приращений капитала делался из априорных соображений и единообразно для всех отраслей. Эта традиция была подвергнута проверке в [45], но только применительно к условиям функционирования плановой экономики СССР. Исследование показало, что вполне допустимо дифференцировать выбор инвестиционных уравнений для отраслей, опираясь на методы эконометрического оценивания их параметров, т.е. применять динамические модели смешанного типа, или *LR*-модели.

Необходимо также иметь в виду, что к решениям балансовых межотраслевых моделей предъявлялось явно не формулируемое требование неотрицательности переменных, т.е. элементов векторов X^t, B^t и K^t. Это требование накладывало также не формулируемые ограничения на экзогенные переменные и параметры моделей, в том числе на динамику векторов конечного нетто-продукта Y^t, не включающего отраслевые инвестиции, на коэффициенты отраслевых среднегодовых фондоемкостей φ_j^t и коэффициенты h_j^t, отражающие процесс уменьшения со временем возможностей использования начального капитала F_j^0 в *j*-й отрасли. Учет ограниченности факторов труда и природных ресурсов, объемов, временной и отраслевой структуры незавершенного строительства, а также ряда других ограничений, в том числе характеризующих внешние экономические связи и обязательства страны, приводит к необходимости добиваться согласованности исходных данных модели, обеспечивающей хотя бы неотрицательность балансового решения.

Как уже отмечалось, такая ситуация могла разрешаться двумя способами: неформализуемым, использующим постепенную, многоэтапно реализуемую корректировку исходных данных модели в процессе практических расчетов, что может приводить к осознанной или неосознанной подгонке модели под получение заранее выбранных качественных и даже количественных результатов; конструктивно-реализуемым, использующим переход к оптимизационной формулировке модели, к неравенствам вместо равенств, включению в модель требований неотрицательности значений ее основных переменных, к использованию минимальных корректировок исходных данных, к принятию упрощающих предположений о траекториях хотя бы части переменных с тем, чтобы компенсировать несогласованность значений ее параметров, приводящую к трудно интерпретируемым, сильно или необъяснимо колеблющимся и даже недопустимым по содержательным соображениям балансовых вариантов моделей.

Оптимизационные версии моделей (3.16.1) – (3.16.2) и (3.17.1), (3.18), включающие требования неотрицательности их переменных и, если это необходимо, терминальные ограничения, содержат неравенства

$$f_i^t(X;B) \equiv x_j^t - \sum_j (a_{ij}^t\ x_j^t + \sum_{\tau=0}^{Q} b_{ij}^{t,\tau}\ B_j^{t+\tau}) - Y_i^t \geq 0, \qquad (3.18.1)$$

$$g_i^t(X;B) \equiv h_i^t\ F_i^0 + \sum_{\tau=1}^{t} g_i^{t,\tau}\ B_i^\tau - \varphi_i^t\ x_i^t \geq 0,\ (i=1,\ldots,n,\ t=1,\ldots,T). \qquad (3.18.2)$$

Отметим, что функции g_i^t не убывают по нескольким переменным B_i^τ с разными τ. Поэтому множества допустимых вариантов этих моделей не подпадают под действие Теоремы II о мини-клюве. В свою очередь это приводит к необходимости обоснованного выбора критерия оптимизации и значений его параметров. Для многосекторных моделей теория, по-видимому, не дает возможности осуществить такой выбор на стадии подготовки модели ни в случае минимизируемого (затратного), ни в случае максимизируемого (полезностного) критерия. Имеющиеся в публикациях предварительные подходы к определению значений параметров, используемых в линейных по переменным критериальных функциях для линейных динамических или статических моделей, по-видимому, мало известны и не нашли применения в приложениях ([46], [47]).

Проблема выбора минимизируемого критерия оптимальности решается кардинально, если модель допускает модификацию, предположения которой не противоречат ее назначению и в то же время обеспечивают существование у нее безусловно-оптимального решения – мини-клюва.Принятие охарактеризованных упрощающих гипотез о траекториях переменных B_i^t и K_i^t, которые выражались с помощью формул (3.14.1) – (3.14.3), оказываются для моделей (3.13.1) – (3.13.3) именно такими допущениями. Но при применении этих допущений к моделям типов *R* и *L* возникает возможность и даже необходимость уточнить требования, накладываемые на параметры, значения которых определяют соответствующие траектории. От траекторий переменных B_i^t и K_i^t, используемых в неравенствах (3.18.2) *R*-моделей, и в неравенствах

$$\sum_{\tau=0}^{Q} \mu_i^\tau\ K_i^{t-\tau} - B_i^t \geq 0 \qquad (3.19)$$

L-моделей требуется неотрицательность и возможность представления сумм ($\sum_{\tau=1}^{t} g_i^{t,\tau}\ B_i^\tau$) или ($\sum_{\tau=0}^{Q} \mu_i^\tau\ K_i^{t-\tau}$) в виде функций нескольких переменных, разделяемых на одну выделенную, слотовую переменную и остальные, невыделенные переменные. Функция должна быть

невозрастающей по всем невыделенным аргументам и может возрастать только по одной переменной. Указанные суммы как функции своих переменных этим требованиям не удовлетворяют.

Однако принятие по отношению к переменным B_i^t или $K_i^{t-\tau}$ линейной, параболической или экспоненциальной гипотезы (общей или различных для разных отраслей) изменяет свойства функций, используемых в неравенствах (3.18.2) и (3.19). Во-первых, траектории переменных, моделируемых с помощью этих гипотез, определяются значением всего одной переменной: ΔB_i или ΔK_i для линейной гипотезы, B_i^1 или K_i^1 для параболической гипотезы, темпа роста z_i^B или z_i^K для экспоненциальной гипотезы. От такой одной переменной зависят суммы ($\sum_{\tau=1}^{t} g_i^{t,\tau} B_i^\tau$) и ($\sum_{\tau=0}^{Q} \mu_i^\tau K_i^{t-\tau}$).

Во-вторых, неотрицательность коэффициентов в этих суммах позволяет считать функции, используемые в (3.18.2) и (3.19), неубывающими по переменным, определяющим в *R*-моделях траектории $\{B_i^t\}$ и в *L*-моделях – траектории $\{K_i^t\}$, т.е. рассматривать эти переменные как слотовые. Но свойство неубывания по выделенной переменной не является необходимым для того, чтобы получаемые модели имели мини-клювы. Важнее тот факт, что условия неотрицательности параметризованных траекторий переменных представляются в виде неравенств на переменные, представляющих собой частные случаи неравенств, используемых в формулировке Теоремы II о мини-клювах. Очевидно, что ограничения $\Delta B_i \geq -\frac{1}{T} B_i^0$ и $z_i^B \geq 0$ (если $B_i^t \equiv B_i^0 (z_i^B)^t$), обеспечивающие неотрицательность траектории $\{B_i^t\}$ при использовании линейной и экспоненциальной гипотез, подпадают под действие этой теоремы.

Гипотезу о параболическом характере траектории какой-либо переменной целесообразно рассмотреть более детально. Важно то, что именно она позволяет моделировать немонотонную динамику некоторой переменной (q), при которой значения q (t) при $t \geq 0$ сначала убывают, оставаясь неотрицательными, а затем начинают расти.

Параболическая траектория, определяемая неотрицательными значениями переменной (q) при $t = -1$, 0 и +1, задается в виде квадратической функции времени

$$q(t) \equiv at^2+bt+c=\{0{,}5\,[q(1)+q(-1)]-q(0)\}t^2+0{,}5\,[q(1)+q(-1)]\,t+q(0), \qquad (3.20)$$

использовавшейся в (3.14.2). Здесь q (–1) и q (0) будем считать параметрами, значения которых определяются статистическими методами или задаются экзогенно; значение q (1) включим в число переменных модели. Требование неотрицательности величин q (t) при $t \geq 1$

представляется с помощью ограничений $q\ (1) \geq 0$ и $b^2\text{-}4ac \leq 0$. Добавление предположения о немонотонности неотрицательной траектории $\{q\ (t)\}$ при $t \geq 0$, как показал элементарный анализ, приводит к двустороннему ограничению

$$\left(\sqrt{\frac{q(1)}{q(0)}} - 2\right)^2 \leq \frac{q(1)}{q(0)} \leq 1. \qquad (3.21)$$

Оно задает диапазон допустимых значений переменной $q\ (1)$, если $0 < q\ (0) < q\ (-1) \leq 9q\ (0)$. Последнее требование к значениям $q\ (0)$ и $q\ (-1)$ представляется вполне реалистичным по отношению к наблюдаемым динамикам убывающих до периода с $t = 0$ переменных. Очевидно, что ограничение (3.21) удовлетворяет условиям Теоремы II о мини-клювах.

Рассмотренные упрощающие гипотезы, вводящие в рассмотрение регулярные траектории переменных, не исчерпывают варианты трансформации динамических межотраслевых моделей в модели, имеющие мини-клювы. Заслуживает изучения возможность задания траекторий с помощью двухпараметрических или многопараметрических неотрицательных функций от времени, невозрастающих по всем параметрам, кроме, быть может, одного. Для приложений было бы полезно определить задаваемые в таком виде семейства траекторий, допускающие не только переход от режима убывания к режиму роста, но и чередование таких режимов на заранее не задаваемых частях прогнозируемого периода.

В балансовых и оптимизационных моделях часто принимается гипотеза экспоненциального изменения части переменных. Для межотраслевых моделей эта гипотеза применяется к вводам B_i^t, капиталовложениям K_i^t и выпускам x_i^t, что сводится к введению их предполагаемых постоянными темпов z_i^B, z_i^K и z_i^X. На переменные группы "z" накладываются ограничения вида $z \geq 0$ или $z \geq 1$. Одной из наиболее разработанных и детально проанализированных межотраслевых моделей, использовавших экспоненциальную гипотезу для части ее переменных, является модель оптимального планирования, предложенная и реализованная В.А. Волконским и В.З. Беленьким ([48] – [51], [77]). Для этой модели существование мини-клюва было ее авторами обнаружено, доказано и использовалось при конструировании метода нахождения решения.

Покажем, что использование семейств регулярных траекторий для части переменных является полезным применительно к динамическим межотраслевым моделям, полностью ориентированным на практическое использование при проведении предплановых и прогнозных расчетов. Такие модели были разработаны и применялись в Научно-исследовательском экономическом институте (НИЭИ) при Госплане СССР под руководством Ф.Н. Клоцвога ([52], [53], [55]) и в Институте экономики и организации промышленного производства

(ИЭиОПП) Сибирского отделения АН СССР под руководством Н.Ф.Шатилова ([54], [55]). В этих моделях использовались близкие допущения, в том числе постулировалась линейная однородная зависимость, связывающая объемы капитальных вложений K_i^t и вводы основных фондов B_i^t в году *t* для *i*-й отрасли, представляемая уравнением $K_j^t = \psi_j^t B_j^t$. Коэффициент ψ_j^t получается из балансового равенства $N_i^{t-1} + K_i^t = N_i^t + B_i^t$, в котором N_i^t – объем незавершенного строительства в *i*-й отрасли на конец года *t*, в предположении, что $\Delta N_i^t \equiv N_i^t - N_i^{t-1} = (\lambda_i^B) B_i^t$ или $\Delta N_i^t = (\lambda_i^K) K_i^t$.

Оптимизационный вариант модели НИЭИ задается системой неравенств

$$x_i^t - \sum_j a_{ij}^t x_j^t - \sum_j b_{ij}^t \psi_j B_j^t - Y_i^t \geq 0, \qquad (3.22.1)$$

$$(1-\eta_i \tilde{h}_i^t) F_i^{t-1} + \xi_i B_i^t - \varphi_i^t x_i \geq 0, \qquad (3.22.2)$$

$$x_i^t \geq 0, \qquad B_i^t \geq 0 \qquad (3.22.3)$$

и уравнений

$$F_i^t = (1-\tilde{h}_i^t) F_i^{t-1} + B_i^t \quad (i = 1,\ldots, n,\ t = 1,\ldots, T), \qquad (3.22.4)$$

в которых коэффициенты $\tilde{h}_i^t$ задают доли выбывающих в году *t* фондов *i*-й отрасли, коэффициенты ξ_i и η_i используются для перевода годовых объемов вводов B_i^t и выбытий основных фондов ($\tilde{h}_i^t F_i^{t-1}$) в среднегодовое выражение и вектор начальных объемов основных фондов $F^0 = (F_i^0)$ известен.

Неотрицательные в силу $F_i^0 > 0$, $0 < \tilde{h}_i^t < 1$, $B_i^t \geq 0$ переменные F_i^t исключаются из (3.22.2), и получается модель, состоящая из неравенств (3.22.1), (3.22.3) и (3.18.2), в которых коэффициенты h_i^t и $g_i^{t,\tau}$ в (3.18.2) выражаются через коэффициенты неравенств (3.22.2) и уравнений (3.22.4).

Если для каждой из переменных $B_i = \{B_i^t\}$, $i = 1,\ldots, n$, принимается какая-либо из охарактеризованных выше упрощающих гипотез, параметризующих их траектории, то существование у полученной модели мини-клюва ($\{\overset{\vee}{X}_i^t\}$; $\{\overset{\vee}{\pi}_i^B\}$) становится очевидным. Здесь π_i^B – параметр, включенный в число переменных модели, значение которого определяет траекторию $\{B_i^t\}$. Если прием регуляризации применяется и к отраслевым выпускам x_j^t отраслей с номерами $j \in \omega \subset \{1,\ldots, n\}$, то у такой модели также имеется мини-клюв ($\{\overset{\vee}{X}_l^t\}$;

$\{\overset{\vee}{\pi}_j^X\};\{\overset{\vee}{\pi}_i^B\}$), координатами которого являются отраслевые выпуски $\overset{\vee}{X}_l^t$ отраслей с нерегулярной динамикой ($l \notin \omega$) и переменные $\overset{\vee}{\pi}_j^X$ ($j \in \omega$), $\overset{\vee}{\pi}_i^B$ ($i = 1,\ldots, n$), определяющие (как параметры) регулярные траектории $\{x_j^t\}$ и $\{B_j^t\}$.

Общие приемы анализа зависимости координат клювов от значений параметров, задающих допустимое множество решений модели, рассмотренные в разд. 1, естественно применять к конкретным межотраслевым моделям. В качестве важнейших параметров динамических оптимизационных моделей имеет смысл выделять отраслевые объемы конечного продукта Y_i^t и основных фондов $h_i^t\ F_i^0$ (в среднегодовом выражении), зависящие от начальных значений фондов. Введем обозначения для этих параметров: $Y_i^t \equiv \pi_i^t$, $\pi = \{\pi_i^t\}$ и $h_i^t\ F_i^0 \equiv \widetilde{\pi}_i^t$, $\widetilde{\pi} = \{\pi_i^t\}$. Пусть $\Omega(\pi;\ \widetilde{\pi}\ )$ – множество допустимых решений модели с параметрами π и $\widetilde{\pi}$. Сравним две модели с параметрами π^I, $\widetilde{\pi}^I$ и π^{II}, $\widetilde{\pi}^{II}$, предполагая, что выполняются (поэлементно) неравенства $\pi^I \le \pi^{II}$ и $\widetilde{\pi}^I \ge \widetilde{\pi}^{II}$. Тогда, сравнивая неравенства, задающие модели, и, в первую очередь, те из них, в которых используются векторы $Y^t = (Y_i^t)$ и $F^{0,t} \equiv (h_i^t\ F_i^0)$, получаем $\Omega(\pi^{II};\widetilde{\pi}^{II}) \subset \Omega(\pi^I;\widetilde{\pi}^I)$ и, следовательно, координаты миниклюва множества $\Omega(\pi;\widetilde{\pi})$ при любом способе перехода к регулярным траекториям переменных являются неубывающими функциями параметров Y_i^t и невозрастающими функциями параметров $F_i^{0,t}$.

Это утверждение полностью согласуется с экономическим содержанием параметров, характеризующих имеющиеся начальные ресурсы ($\widetilde{\pi}$) и задаваемые результаты (π), и не просто доказывается без использования понятийного аппарата теории клювов.

3.3. Целесообразность конструирования и использования имеющих клювы межотраслевых моделей

Допустимые множества решений оптимизационных и балансовых межотраслевых моделей не всегда имеют клювы, в том числе и обобщенные. Но при конструировании таких моделей полезно учитывать те специфические возможности, которые получает модельер-исследователь, если создаваемая модель или какая-либо подсистема ее уравнений или неравенств удовлетворяет условиям, достаточным для существования у нее клюва, а также то, что не менее важно, как расширяются возможности самого моделирования, если оно ставит

перед собой цель получить модель или подмодель с такими свойствами. Кратко охарактеризуем такие возможности.

Для межотраслевых моделей с неединственным допустимым решением и особенно для таких динамических оптимизационных моделей сложности возникают при выборе и обосновании выбора критерия оптимальности. Экономическая теория не дает четких, позволяющих конструировать количественно-определенные варианты критерия оптимальности рекомендаций, которые были бы применимы к широкому классу межотраслевых моделей. Сам выбор такого критерия должен учитывать структуру и целевую ориентацию модели, т.е. быть эндогенным элементом процесса ее построения. По нашему мнению, накопленный опыт разработки комплексных моделей народного хозяйства разных стран привел к тому, что в случае статической модели кардинальный путь решения проблемы критерия оптимальности сводится к ее встраиванию в модель общего экономического равновесия. Однако исходные принципы этого класса моделей могут не соответствовать или даже противоречить состоянию моделируемой экономической системы и характеру происходящих в ней процессов. Если же предполагается, что состояние равновесия будет достигнуто в периоде, достаточно удаленном от известного, начального и неравновесного состояния системы, то получаемое при использовании статической модели равновесное состояние, являющееся, конечно, модельно допустимым, должно быть проанализировано с точки зрения его достижимости. Ведь желательное равновесное состояние может оказаться недостижимым принципиально или в течение выбранного временного горизонта. Примеры описания таких недостижимых состояний, получаемых как вербально, так и с использованием математических моделей, известны.

Анализ достижимости полученного желательного состояния, казалось бы, можно выполнить, включив равновесную статическую модель в динамическую модель, представляющую собой последовательность взаимосвязанных статических моделей. В идеале такое включение могло бы привести и к корректировке финального, равновесного состояния. Надежда на такой способ проверки достижимости финального состояния возникает, так как известен способ решения задач оптимального управления для технических систем с терминальными условиями. К сожалению, этот опыт представляется мало что дающим для моделирования и прогнозирования экономических процессов в случае систем, трансформирующих свою структуру. Неравновесный характер начального состояния и следующих за ним состояний моделируемой системы приводит к необходимости решать при разработке динамических моделей проблему соизмерения стратегической цели достижения равновесного состояния и текущих, тактических выгод, получаемых действующими в системе экономиче-

скими агентами в годы прогнозируемого периода. К этому добавляется незаданность продолжительности периода, в конце которого предполагается достичь равновесного состояния.

Приходится признать, что динамические модели процесса перехода межотраслевой динамики в состояние экономического равновесия к настоящему времени в должной мере не разработаны, и надеяться на то, что будущие теоретические и прикладные исследования устранят этот пробел.

В охарактеризованной ситуации может оказаться возможным решать проблему выбора критерия оптимальности более простым, но тем не менее конструктивным способом. Предлагается выделять среди показателей-переменных модели группу переменных, безусловно характеризующих затраты, которые естественно минимизировать, и другую группу, переменные которой определяют максимизируемые результаты, а затем конструировать модель, имеющую мини-клюв или даже смешанный клюв, а, может быть, включающую в себя подмодели или частные модели с такими свойствами при фиксированных значениях экзогенных для них переменных. Такой подход к выбору решения из числа допустимых не означает, как легко видеть, полного отказа от идеи содержательной оптимизации. В частном случае достаточно простых динамических межотраслевых моделей он применялся именно с целью преодоления трудности выбора критерия оптимальности и состоял в том, что последовательность векторов конечного продукта-нетто, не включающего производственные капитальные вложения в отрасли межотраслевого баланса, задавалась с помощью функций одной, в данном случае максимизируемой переменной ([41], [48], [54] – [58], [77], [78]). При фиксированном значении этой переменной получалась модель, множество допустимых решений для оптимизационного варианта которой имело мини-клюв.

Заметим, что заслуживает внимания возможность использования монотонности зависимостей координат клювов для подмоделей от экзогенных для них переменных-параметров и определения компромиссных значений параметров модели. Возможно, на этом пути удастся реализовать идею получения в моделях “максимальных результатов при минимальных затратах”, отличную от результатов теории двойственности для экстремальных задач и выпуклого анализа.

Другая проблема, с которой приходится сталкиваться при конструировании межотраслевых моделей, связана с ограниченностью класса функций, с использованием которых формулируются эти модели. Прикладные модели, для которых должна быть решена задача численного нахождения решения, в своем большинстве базируются на использовании линейных по переменным или приводимых к ним функций. Конечно, известен потенциально более широкий класс зависимостей, при использовании которых для получаемых моделей нахождение их оптимальных решений не представляет собой практически нерешаемую зада-

чу. Имеются в виду модели, сводящиеся к нахождению решения задачи выпуклого программирования. Проблемы, связанные с нахождением решений нелинейных систем уравнений, задающих балансовые межотраслевые модели, являются весьма специфическими, заслуживают специального анализа и в этой работе не рассматриваются. Поэтому вернемся к ограничениям возможностей моделирования, возникающих при сведении моделей к задачам выпуклого программирования.

Теоретические аспекты выпуклого программирования и выпуклого анализа изучены досконально, о чем можно судить хотя бы по работам ([59] – [62]). Но несмотря на то, что разработаны многие программы для нахождения общих и частных экстремальных выпуклых задач, практически отсутствуют примеры их применения к нелинейным межотраслевым моделям, не предназначенные для использования в учебных или иллюстративных целях. По-видимому, это объясняется двумя обстоятельствами.

Для многоразмерных, использующих достаточно разнообразные функциональные зависимости межотраслевых моделей практическая реализация методов выпуклого программирования до настоящего времени оказывается слишком сложной, трудоемкой и не позволяет получать ясно интерпретируемые и устойчивые по отношению к вариациям исходных гипотез и значений параметров результаты. Требование выпуклости рассматриваемой задачи, столь естественное и удобное с математической точки зрения и казавшееся таким на начальных этапах межотраслевого моделирования, ограничивает, сужает возможности моделирования. Возможно, это требование даже входит в противоречие с результатами и идеями прикладных исследований, пограничных с межотраслевым балансом. Такие исследования связаны с конструированием и анализом отраслевых производственных функций, в том числе функций, определяющих границы производственных возможностей для отраслей, функций спроса на ресурсы и функций издержек; моделированием процессов формирования доходов и расходов экономических агентов, распределения ресурсов в системах, где действуют многие факторы, в том числе факторы спроса и предложения; моделированием процессов ценообразования и их влияния на структуры, являющиеся объектами анализа и прогнозирования в межотраслевых исследованиях. Известно значительное число конкретных исследований, имеющих собственные объекты и цели и в то же время создающих элементы базы межотраслевого моделирования, но результаты которых не укладываются в схему, удовлетворяющую требованию выпуклости. Подробный анализ таких результатов, могущих учитываться или даже использоваться при разработке межотраслевых моделей, представляет собой многоаспектную, масштабную задачу, выходящую за рамки и возможности данной работы. Но, безусловно, такой анализ должен быть выполнен.

Поэтому ограничимся тем, что сформулируем гипотезу о целесообразности преодоления требования выпуклости как обязательного при конструировании межотраслевых моделей. Обосновывать эту гипотезу можно, анализируя специфику трансформационных процессов, происходящих в многоотраслевой экономике. Она состоит, по нашему мнению, в том, что важнейшие соотношения соответствующих моделей, не являющихся чисто балансовыми, например, отраслевые производственные функции, должны изменяться не только и не столько за счет изменения значений их аргументов – переменных, но и функционально, в результате внутримодельного, а не экзогенного выбора вида зависимости из числа потенциально, но условно возможных. Условия трансформации одного вида зависимости, т.е. задающей ее функции, в другую аналитическую форму и определение периодов, в которые такие изменения произойдут, должны моделироваться. Трансформационные процессы не только порождаются существующими в системе противоречиями и неравновесиями, но и сами порождают их. Неизбежно сопутствующие трансформациям адаптационные процессы, растянутые во времени, не способны быстро обеспечить приспособление к создающимся новым условиям, полную динамическую согласованность с другими происходящими процессами, которую хотелось бы называть динамической равновесностью.

Представляется правдоподобным, что экономические процессы, приводящие к “овыпуклению” технологических множеств, ограничений и других функциональных взаимосвязей между показателями, образующими ядро межотраслевых моделей, заполнению своеобразных пустот, не успевают реализоваться достаточно полно, если они происходят одновременно с сильными трансформационными процессами. Адаптационные процессы, имеющие, по-видимому, микроэкономический характер, происходят постоянно. Но для систем, функционирующих относительно инерционно, без прохождения через состояния бифуркаций, без системных кризисов, вызывающих необходимость глубоких изменений системы, эти процессы порождают множества возможных состояний системы, для которых выполняется математическое требование выпуклости, т.е. реализуемости выпуклых линейных комбинаций допустимых состояний. Но если объектом моделирования и основанного на нем прогнозирования являются именно неравновесные в каком-то смысле, трансформационные процессы, то требование выпуклости, предъявляемое к разрабатываемым моделям, выглядит чрезмерно упрощающим представления о таком объекте, не оправдываемым относительной простотой, свойствами его конструируемого математического образа.

В связи с проблемой выпуклости упомянем то, что в условиях неравновесия между спросом на продукцию отраслей и имеющимися доступными для них производственными факторами и ресурсами, социальных ограничений на процессы их перераспределения и использования, может быть полезным рассматривать производственные функции и функции,

определяющие границы производственных возможностей (frontier production functions) отраслей, не ограничивая значения их показателей эффективности от масштаба и однородности. При этом целесообразно допускать возможность возникновения узких мест (bottle-nec effects) и новых, маргинальных технологий, дополняющих действующие технологии. Одним из математических инструментов, позволяющих моделировать такие ситуации и их возникновение, являются не обязательно выпуклые сплайн-функции, представляемые в виде поточечных верхних или нижних граней семейств функций. Очевидно, что такая конструкция может быть описана в терминах пересечений и объединений элементарных множеств, определяемых функциями таких семейств.

Невыпуклые в общем случае множества допустимых решений межотраслевых моделей, рассмотрение которых с экономических позиций представляется вполне оправданным, если не ограничить класс используемых в них функций, порождают задачи, для которых нахождение оптимального решения нетривиально. Вряд ли удастся предложить для них достаточно общие алгоритмы нахождения таких решений. Поэтому заслуживает внимания любая возможность выбора класса используемых в таких моделях функций, для которого возникающая задача, с одной стороны, оказывается эффективно решаемой, а с другой стороны, позволяет без существенных потерь отображать основные процессы и взаимодействия, происходящие в трансформирующейся многоотраслевой экономике. Модели, для которых допустимые множества решений имеют клювы, предлагается использовать для охарактеризованных целей. Класс однослотовых, слабо монотонных или монотонных по невыделенным аргументам функций оказывается удобным, хотя бы в основном, для целей межотраслевого моделирования, позволяет предложить приемлемый подход к проблеме выбора решения из множества допустимых решений и находить его.

Для нахождения характерных решений-клювов разработаны и могут использоваться различные методы, в том числе не предполагающие выпуклости или линейности множеств допустимых решений. Некоторые такие методы ориентированы на применение к весьма конкретным моделям, но в модифицированном виде они могут быть приспособлены для нахождения клювов моделей общего вида ([11] – [14], [50], [51], [63], [64]). Специальным методом нахождения клювов, схема которого не зависит от конкретного вида функций, определяющих множество допустимых решений модели, является метод покоординатной релаксации, использующий последовательность спусков или подъемов по лучам, параллельным осям координат. Этот метод может на каждой итерации находить граничную точку допустимого множества на луче или определять внутреннюю точку на нем, используемую в качестве начальной точки для очередной итерации.

Этот метод предполагает, что известно или найдено исходное приближение – допустимое решение. Такое приближение в некоторых случаях может быть определено уже на стадии разработки модели. Но для сложных, особенно динамических моделей, в которых используются нелинейные соотношения, предполагать известным допустимое начальное приближение вряд ли оправдано, а задача его нахождения на начальном этапе метода может оказаться слишком трудно решаемой, даже не имеющей общего алгоритма решения хотя бы из-за специфики операции проектирования недопустимого начального приближения на невыпуклое множество допустимых решений.

В ситуации, когда допустимое начальное приближение неизвестно или не найдено, полезным может оказаться следующий прием. Пусть для определенности допустимое множество Ω^1 решений модели задается системой неравенств $f_\alpha(X) \geq 0$, $\alpha = 1,\ldots,N$, $X \in M(A; B) \subset R_n$. Определим связанное с ним множество Ω^2 с помощью системы неравенств $f_\alpha(X) \leq 0$, $\alpha = 1,\ldots,N$, $X \in M(A; B) \subset R_n$. Если удается доказать, что мини-клюв $\check{X}(\Omega^1)$ множества Ω^1 совпадает с макси-клювом $\hat{X}(\Omega^2)$ множества Ω^2, то можно находить клюв $\hat{X}(\Omega^2)$. При этом задача нахождения допустимого начального приближения $\tilde{X}^0 \in \Omega^2$ может быть существенно проще по сравнению с нахождением начального приближения $X^0 \in \Omega^1$. Так, в прикладных моделях в качестве кандидата на роль точки $\tilde{X}^0$ можно рассматривать точку (A), которая часто является началом координат (O) или совпадает с задаваемым вектором Y конечного продукта или конечного продукта-нетто. Как правило, стандартные ограничения неотрицательности переменных вводятся так, что точка (O) или точка $X = Y$ является недопустимой для множества Ω^1, но удовлетворяет неравенствам, определяющим множество Ω^2.

Напомним, что методы нахождения клювов можно применять в случае систем нелинейных уравнений, если оптимизационная версия балансовой модели имеет клюв. Такая возможность рассматривалась в пункте 2.5. Для приложений также важно, что существуют методы нахождения клювов дискретных множеств, задаваемых в виде пересечения дискретного множества-решетки D и множества, удовлетворяющего условиям Теорем I и II о клювах. В частности, для этой цели можно применять модифицированный метод покоординатной релаксации, если известно начальное допустимое приближение, принадлежащее рассматриваемой решетке. Возможно, в подобной постановке межотраслевые модели окажутся имеющими более устойчивые к изменениям их параметров и проще экономически интерпретируемые решения.

Заключение

Открытым остается вопрос о том, насколько широка область применения однослотовых, слабо монотонных по невыделенным аргументам функций и конструируемых с их использованием экономико-математических моделей. То, что такие функции, повидимому, могут успешно применяться в моделировании столь сложной системы, которой является многоотраслевая экономика, позволяет надеяться на распространение охарактеризованного в данной работе подхода на другие предметные области экономической теории, прикладного моделирования и прогнозирования.

Литература

Статьи, монографии, авторефераты диссертаций

1. *Ершов Э.Б.* Решение обобщенной задачи статического межотраслевого баланса. Тезисы в [67, с.15].
2. *Samuelson P.A.* Abstract of a theorem concerning substitability in open Leontief models. Ст. в [65, P. 142–146].
3. *Koopmans T.C.* Alternative proof of the substitution theorem for Leontief model in the case of three industries. Ст. в [65, P.147–154].
4. *Arrow K.J.* Alternative proof of the substitution theorem for Leontief models in the general case. Ст. в [65, P.155–164].
5. *Georgescu-Roegan N.* Some properties of a generalized Leontief model. Ст. в [65, P.165–173].
6. *Ершов Э.Б.* Математические методы в статической модели межотраслевого баланса. Материалы научного совещания по проблемам межотраслевого баланса (ротапринт). М.: Научно-исследовательский экономический институт (НИЭИ) при Госплане СССР, 1963, 32 с.
7. *Ершов Э.Б.* Математические методы в статической модели межотраслевого баланса. Гл. 3 в [69, с. 32–53].
8. *Ершов Э.Б.* Экономико-математические методы анализа модели межотраслевого баланса. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата экономических наук. М.: НИЭИ при Госплане СССР, 1967, 29 с.
9. *Leontief W.* Quantitative input-output relations in the economic system of the United States Review of Economics and Statistics. 1936. vol. 18. No. 3. P.105–125.
10. *Leontief W.* The Structure of American Economy 1919-1929. N.Y.: Oxford University Press, 1941.

11. *Sandberg I.W.* A nonlinear input-output model of a multisectored economy Econometrica. 1973. vol. 41. No. 6. P. 1167–1182.
12. *Lahiri S.* Input-output analysis whith scale-dependent coefficients Econometrica. 1976. vol. 44. No. 5. P. 947–961.
13. *Lahiri S.* Effitient investment and growth consistency in the input-output frame: An analytical contribution Econometrica. 1977. vol. 45. No. 8. P. 1823–1835.
14. *Багриновский К.А., Бусыгин В.П.* Математика плановых решений. М.: Наука, 1980, 224 с.
15. *Яременко Ю.В., Ершов Э.Б., Смышляев А.С.* Моделирование и прогноз основных структурообразующих взаимодействий в народном хозяйстве СССР. Тезисы доклада в [78].
16. *Яременко Ю.В., Ершов Э.Б., Смышляев А.С.* Модель межотраслевых взаимодействий. - Экономика и математические методы. 1975. Т. XI. Вып. 3. с. 421–438.
17. *Яременко Ю.В.* Структурные изменения в социалистической экономике. М.: Мысль, 1981. 300 с.
18. *Ершов Э.Б.* Оптимальное масштабирование в межотраслевом моделировании. Ст. в [83, с. 3–37].
19. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964. 838 с., § 8.5.
20. *Ланкастер К.* Математическая экономика. М.: Советское радио, 1972, 464 с., § 6.7.
21. *Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г.* Об одном методе количественного анализа упрощенных экономических моделей. Ст. в [66, с.136–199].
22. *Багриновский К.А.* Проблемы построения системы моделей оптимального перспективного планирования. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора экономических наук. СО АН СССР, Объединенный Ученый совет по экономическим наукам. Новосибирск, 1968. 37 с.
23. *Багриновский К.А.* О гладких решениях некоторых задач планирования. Ст. в [72, с. 236–262].
24. *Боярский А.Я.* Математико-экономические очерки. М.: Госстатиздат, 1962. 400, очерк X. с. 255–273.
25. *Конюс А.А.* Перспективное планирование при предположении равномерного роста капиталовложений. Ст. в [68, с. 346–361].
26. *Конюс А.А.* Методы построения динамической модели межотраслевого баланса. Глава 4 в [69, с. 54-75].
27. *Беленький В.З., Волконский В.А., Павлов Н.В.* Динамические межотраслевые модели, их использование для расчетов плана и цен и экономического анализа. Экономика и математические методы. 1972. Т. VIII. Вып. 4. с. 493–511.

28. *Коссов В.В.* Межотраслевые модели (теория и практика использования). М.: Экономика, 1973.
29. *Смехов Б.М., Уринсон Я.М.* Методы оптимизации народнохозяйственного плана. М.: Экономика, 1976. 198 с.
30. *Leontief W.W.* Dynamic inverse. In [74].
31. *Ланге О.* Производственно-техническая основа эффективности капитальных вложений. Ст. в [66, с. 79–120].
32. *Смирнов А.Д.* Динамическая межотраслевая модель и плановые расчеты. Экономика и математические методы. 1965. Т. I. Вып. 3. с. 345–362.
33. *Tsukui J.* Application of a turnpike theorem to planning for efficient accumulation: An example for Japan Econometrica. 1968. vol.36. No.1. P. 172–186.
34. *Берри Л.Я., Лотош Я.М.* Использование межотраслевого баланса в долгосрочном планировании. Ст. в [75, с. 115–130].
35. *Коош Е.* Опыт динамизации статического межотраслевого баланса. Ст. в [77, с. 161–222].
36. *Ершов Э.Б., Кузнецова Е.В., Рутковская Е.А., Роговский Е.А.* Способы отражения инвестиционных процессов в укрупненных межотраслевых моделях. Тезисы доклада в [78].
37. *Роговский Е.А.* Проблемы построения межотраслевых моделей и их использование в народнохозяйственном планировании. Автореферат на соискание ученой степени кандидата экономических наук. М.: МГУ, Экономический факультет, 1975. 26 с.
38. *Конюс А.А.* Расширение системы уравнений межотраслевых связей для целей перспективного планирования. Ст. в [66, с. 56–78].
39. *Коссов В.В.* Межотраслевой баланс. М.: Экономика, 1966. 223 с.
40. *Баранов Э.Ф.* Проблемы разработки схемы динамической модели межотраслевого баланса. Экономика и математические методы. 1968. Т. IV. Вып. 1. с. 26–40.
41. *Аганбегян А.Г., Багриновский К.А., Гранберг А.Г.* Система моделей народнохозяйственного планирования. М.: Мысль, 1972. Гл. V.
42. *Матлин И.С., Шулепникова Т.Ю.* Алгоритм решения динамической межотраслевой модели с распределенными лагами. Экономика и математические методы. 1978. Т. XIV. Вып. 5. с. 975–980.
43. *Гранберг А.Г.* Динамические модели народного хозяйства. М.: Экономика, 1985. Гл. 4, 5.
44. *Озеров В.К., Павлов В.Н., Баранов А.О.* Модели межотраслевого баланса народного хозяйства: Методология и методика разработки и использования. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1988.

45. *Ершов Э.Б., Рутковская Е.А.* Взаимосвязи капитальных вложений и вводов основных фондов в динамической модели межотраслевого баланса. Экономика и математические методы. 1978. Т, XI. Вып. 1. с. 53–64.
46. *Ершов Э.Б.* О простейших замкнутых моделях оптимадьного народнохозяйственного планирования. Тезисы доклада в [67].
47. *Ершов Э.Б., Левитин Е.С.* Проблемы замыкания моделей оптимального планирования по экзогенным параметрам. Ст. в [82, с. 68–83].
48. *Волконский В.А.* Модель оптимального планирования и взаимосвязи экономических показателей. М.: Наука, 1967. 151 с.
49. *Беленький В.З., Павлов Н.В.* Решение линейной модели перспективного планирования. Тезисы доклада на Всесоюзном симпозиуме по моделированию общественного производства (ротапринт). Новосибирск: 1967. Институт математики и Институт экономики и организации промышленного производства СО АН СССР, 15 с.
50. *Беленький В.З.* Некоторые модели оптимального планирования, основанные на схеме межотраслевого баланса. Экономика и математические методы. 1967. Т. III. Вып. 4. с. 534–549.
51. *Беленький В.З.* Об экстремальных задачах, обладающих минимальной точкой. Автореферат на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М.: Центральный экономико-математический институт АН СССР, 1968. 30 с.
52. *Клоцвог Ф.Н., Новичков В.А.* Применение динамической модели межотраслевого баланса для народнохозяйственных расчетов на длительную перспективу. Ст. в [75, с. 102–114].
53. *Ершов Э.Б.* Итерационные методы нахождения решений межотраслевых моделей. Ст. в [83, с. 38–69].
54. *Шатилов Н.Ф.* Моделирование расширенного воспроизводства. М.: Экономика, 1967. 175 с.
55. *Гершензон М.А.* О числовых динамических моделях межотраслевого баланса, сформулированных на основе общих и приростных коэффициентов фондоемкости. Ст. в [76, с. 181–212].
56. *Дудкин Л.М., Ершов Э.Б.* Блочное построение оптимального материального баланса социалистического народного хозяйства. Ст. в [70, с. 75–90].
57. *Дудкин Л.М.* Сравнительный анализ критериев в статических моделях оптимального материального баланса народного хозяйства. Ст. в [71, с.41–64].
58. *Уринсон Я.М.* Совершенствование технологии народнохозяйственного планирования. М.: Экономика, 1986. 223 с., Гл. 13.
59. *Rockafellar R.T.* Convex analysis. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1970.

60. *Гольштейн Е.Г.* Выпуклое программирование. Элементы теории. М.: Наука, 1970. 67 с.
61. *Гольштейн Е.Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 352 с.
62. *Нестеров Ю.Е.* Эффективные методы в нелинейном программировании. М.: Радио и связь, 1989. 301 с.
63. *Lahiri S. and G. Pyatt.* On the solution of scale-dependent input-output models. Econometrica. 1980. vol.48. P. 1827–1930.
64. *Lahiri S.* Capacity constraint, alternative technologies and input-output analysis. European Economic Review. 1983. vol. 22. P. 219–226.

Сборники статей, коллективные монографии, труды и тезисы конференций и совещаний, энциклопедии

65. Activity Analysis of Production and Allocation. Cowles Commission Monograph No.13. N.Y.: Wiley, 1951.
66. Применение математики в экономических исследованиях. Т. 2. М.: Издательство социально-экономической литературы, 1961.
67. Материалы к Конференции по опыту и перспективам применения математических методов и электронных вычислительных машин в планировании (ротапринт). Новосибирск: СО АН СССР, Институт математики и Институт экономики, 1962.
68. Планирование и экономико-математические методы. К 70-летию со дня рождения академика В.С.Немчинова. М.: Наука, 1964.
69. Методы планирования межотраслевых пропорций. М.: Экономика, 1965.
70. Экономико-математические методы. Вып. II. Методы оптимального планирования. Транспортные задачи. М.: Наука, 1965.
71. Экономико-математические методы. Вып. III. Экономико-математические модели народного хозяйства. М.: Наука, 1966.
72. Проблемы народнохозяйственного оптимума. М.: Экономика, 1969.
73. Экономико-математические модели. М.: Мысль, 1969. Гл. 1.
74. Contributions to Input-Output Analysis eds. A.Carter, A.Brody. Amsterdam: Holland, 1970.
75. Методология прогнозирования экономического развития СССР. М.: Экономика, 1971.
76. Проблемы оптимизации экономических решений. Новосибирск: Институт экономики и организации промышленного производства СО АН СССР, 1971.
77. Межотраслевые исследования в Венгрии. М.: Статистика, 1973.
78. Вопросы применения межотраслевых балансов в практике планирования. Тезисы докладов научной конференции. Ереван: НИИЭП при Госплане Армянской ССР, 1974.

79. Система моделей оптимального планирования. М.: Наука, 1975. Гл. 10.
80. Система моделей народнохозяйственного планирования. М.: Наука, 1982. Гл. 7, 10.
81. Математический аппарат экономического моделирования. М.: Наука, 1983. Гл. 1-2, 4.
82. Экономико-математические модели и методы. Сборник научных трудов. Памяти академика Л.В. Канторовича. Воронеж: Издательство Воронежского Государственного университета, 1989.
83. Инструментальные средства обработки и реализации моделей прогнозирования. М.: Институт экономики и прогнозирования научно-технического прогресса (Институт народнохозяйственного прогнозирования) АН СССР, 1991.
84. Математическая энциклопедия. Т. 2. М.: Советская энциклопедия, 1979.
85. Математическая энциклопедия. Т. 5. М.: Советская энциклопедия, 1984.

Оглавление

	Введение	3
1.	Клювы множеств как их характерные точки и подмножества	4
	1.1. Основные определения и иллюстрирующие примеры	4
	1.2. Простые достаточные условия существования клювов	6
	1.3. Обобщенные клювы	10
	1.4. Зависимость клювов от параметров, задающих множества	12
	1.5. Клювы и решения систем уравнений	16
2.	Конструирование множеств, замкнутых относительно покоординатных операций минимизации и максимизации	21
	2.1. Используемые понятия и обозначения	22
	2.2. Ко-замкнутые множества, получаемые с помощью объединения элементарных ко-замкнутых множеств	24
	2.3. Системы ко-замкнутых множеств	28
3.	Имеющие клювы межотраслевые модели	34
	3.1. Статические межотраслевые модели	34
	3.2. Динамические межотраслевые модели	39
	3.3. Целесообразность конструирования и использования имеющих клювы межотраслевых моделей	50
	Заключение	57
	Литература	57

Препринт WP2/2002/03
Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Ершов Эмиль Борисович
Теория клювов и межотраслевое моделирование

Публикуется в авторской редакции
Оформление серии *А.М. Павлов*
Корректор *Е.Е. Андреева*

ЛР № 020832 от 15 октября 1993 г.
Отпечатано в типографии ГУ ВШЭ с представленного оригинал-макета.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Тираж 150 экз. Уч.-изд.л. 3,42. Усл.печ.л. 3,72.
Заказ № 198. Изд. № 224.
ГУ ВШЭ. 117312, Москва, ул.Вавилова, 7а
Типография ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3

Препринты ГУ ВШЭ

Серия WP2 "Количественный анализ в экономике"

http://stat.hse.ru

2002

Ершов Э.Б. Теория клювов и межотраслевое моделирование: Препринт WP2/2002/03. М.: ГУ ВШЭ, 2002. – 64 с.

Писляков В.В. Анализ контента ведущих электронных ресурсов актуальной зарубежной периодики: Препринт WP2/2002/02. М.: ГУ ВШЭ, 2002. – 33 с.

Губанов В.А. Непараметрическое выделение динамических сезонных циклов: Препринт WP2/2002/01. М.: ГУ ВШЭ, 2002. – 33 с.

2001

Поспелов И.Г. Экономические агенты и системы балансов: Препринт WP2/2001/03. М.: ГУ ВШЭ, 2001. – 68 с.

Бессонов В.А. Об измерении динамики российского промышленного производства переходного периода: Препринт WP2/2001/02. М.: ГУ ВШЭ, 2001. – 34 с.

Алексеенкова М.В. Факторы отраслевого анализа для российской переходной экономики: Препринт WP2/2001/01. М.: ГУ ВШЭ, 2001. – 34 с.