ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

М.В. Бацын, В.А. Калягин

ОБ АКСИОМАТИЧЕСКОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОБЩИХ ИНДЕКСОВ ВЛИЯНИЯ В ЗАДАЧЕ ГОЛОСОВАНИЯ С КВОТОЙ

Препринт WP7/2009/04
Серия WP7

Математические методы
анализа решений в экономике,
бизнесе и политике

Москва
Государственный университет – Высшая школа экономики
2009

УДК 519.2
ББК 22.17
Б31

Б31 **Бацын М.В., Калягин В.А. Об аксиоматическом определении общих индексов влияния в задаче голосования с квотой**: Препринт WP7/2009/04. – М.: Изд. дом Государственного университета – Высшей школы экономики, 2009. – 44 с.

В работе предложена аксиоматика индексов влияния в задаче голосований с квотой. Ее основу составляют две аксиомы: аксиома аддитивности и аксиома диктатора. Установлено важное свойство индекса влияния: индекс влияния игрока может быть представлен в виде суммы вкладов коалиций, в которых он является ключевым. Вклады коалиций не зависят ни от весов участников, ни от квоты. Сформулированы и доказаны общая теорема о представлении индекса влияния, теорема о представлении индекса влияния анонимных участников, теорема о представлении индекса влияния, имеющего вероятностное описание.

УДК 519.2
ББК 22.17

Бацын М.В. — Государственный университет – Высшая школа экономики. Нижегородский филиал (batsyn@yandex.ru)

Калягин В.А. — Государственный университет – Высшая школа экономики. Нижегородский филиал (vkalyagin@hse.nnov.ru)

Препринты Государственного университета – Высшей школы экономики размещаются по адресу: http://new.hse.ru/C3/C18/preprintsID/default.aspx

1. Введение

Измерение влияния является эффективным инструментом анализа принятия решений. Широко используются классические способы измерения влияния с помощью индексов Банцафа и Шепли – Шубика (Shapley & Shubik, 1954, Banzhaf, 1965). Особый интерес представляет аксиоматическое описание индексов влияния. Существующие аксиоматики построены в рамках теоретико-игровой модели простой игры (Dubey & Shapley, 1979, Laruelle & Valenciano, 2000), которая задается списком выигрывающих коалиций. Индекс влияния рассматривается как вектор-функция, определенная на множестве всех простых игр. Основной задачей является аксиоматическое описание классических индексов влияния.

В настоящей работе предложена общая аксиоматика индекса влияния в задаче голосования с квотой. Задача голосования с квотой описывается заданием множества игроков N, их голосов ν_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ и квотой q для принятия решения. Набор $(N; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n; q)$ называется **ситуацией голосования** (Алескеров, 2007). Различным ситуациям соответствуют различные списки выигрывающих коалиций в модели простой игры. Аксиоматика формулируется на языке ситуаций голосования, что делает ее достаточно простой и прозрачной.

В основе предложенной аксиоматики лежит следующее положение: игрок имеет влияние в голосовании только в тех случаях, когда он является ключевым игроком в некоторой выигрывающей коалиции (выход игрока из коалиции делает ее проигрывающей). Это положение отражается в двух аксиомах: аксиоме аддитивности и аксиоме диктатора. На основе этих аксиом устанавливаются следующие фундаментальные особенности индексов влияния в задаче голосования:

1) каждая выигрывающая коалиция, в которой игрок является ключевым, вносит в его индекс влияния вполне определенный вклад, не зависящий от ситуации голосования;

2) при дополнительном условии анонимности вклад каждой выигрывающей коалиции в индекс влияния любого игрока не зависит от этого игрока и от коалиции, а определяется только размером коалиции.

Эти особенности позволяют сформулировать и доказать общую теорему о представлении индекса влияния, теорему о представлении индекса влияния анонимных игроков, теорему о представлении индекса влияния, имеющего описание в рамках вероятностной модели Laruelle — Valenciano. Таким образом, предложенная в работе аксиоматика охватывает широкий класс индексов влияния, включающий индекс Банцафа, индекс Шепли – Шубика, индексы влияния, учитывающие предпочтения игроков (Алескеров, 2007), вероятностные индексы влияния (Laruelle & Valenciano, 2005).

2. Основные определения

Основной характеристикой участника голосования выступает его вес ν в голосовании, под которым обычно понимается принадлежащее ему число голосов (например, число голосов фракции в парламенте или число акций у акционера). В работе рассматриваются только голосования за принятие того или иного решения, в которых каждый участник может проголосовать только «да» – за принятие решения или «нет» – против принятия решения. Решение считается принятым, если общий вес проголосовавших «за» превышает определенную квоту q ($\sum \nu_i > q$). Два наиболее распространенных значения q: 50% – простое большинство и 66% (иногда – 75%) – квалифицированное большинство (Алескеров, Хабина, Шварц, 2006).

В определении индекса влияния используются следующие понятия:

- **коалиция** – это множество игроков, которые голосуют одинаково, то есть все «за» или все – «против»;
- **выигрывающая коалиция** – это коалиция, общий вес которой превышает квоту q;
- **проигрывающая коалиция** – это коалиция, общий вес которой не превышает квоты q;
- **ключевой игрок в коалиции** – это член коалиции, вместе с которым коалиция является выигрывающей, а без него становится проигрывающей;
- **значимая коалиция для игрока** – это коалиция, в которой данный игрок является ключевым;
- **болван** (термин взят из бриджа) – игрок, не являющийся ключевым ни в одной коалиции. (Термин использовался впервые в Shapley & Shubik, 1954).

Будем обозначать через $\nu(S)$ общий вес коалиции S:

$$\nu(S) = \sum_{i \in S} \nu_i .$$

Два наиболее известных и распространенных индекса влияния – это индекс Банцафа и индекс Шепли — Шубика. Для любого игрока можно определить набор коалиций, в которых он является ключевым. Индекс Банцафа для игрока i определяется формулой:

$$\beta_i = \frac{b_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j},$$

где b_i – это число различных коалиций, в которых игрок i является ключевым, а n – общее число игроков.

Индекс Шепли – Шубика для игрока i определяется формулой:

$$\phi_i = \sum_{S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!},$$

где суммирование производится по всем коалициям S, в которых игрок i является ключевым, а $s = |S|$ – число игроков, входящих в коалицию S.

3. Общие аксиомы

Существующие подходы к описанию общих свойств индексов влияния основаны на теоретико-игровой модели простой игры (Оуэн, 1968). Простая игра задается парой (N, υ), где N – это множество игроков, а υ – это функция выигрыша: $\upsilon : 2^N \to \{0,1\}$, которая определяет для любой коалиции игроков S , является ли коалиция выигрывающей ($\upsilon(S)=1$) или нет ($\upsilon(S)=0$). Эта функция должна обладать свойством монотонности:

$\forall S,T \subset N \quad S \subset T \;\Rightarrow\; \upsilon(S) \le \upsilon(T).$

Множество всех выигрывающих коалиций в игре (N,υ) обозначается $W(\upsilon)$. Множество всех минимальных выигрывающих коалиций (удаление любого игрока делает такую коалицию проигрывающей) обозначается $M(\upsilon)$. Индекс влияния определяется как вектор-функция $\vec{\Phi}(\upsilon)$.

Основные аксиомы индексов влияния были сформулированы в работе Dubey & Shapley, 1979, новый взгляд на аксиоматику индексов влияния изложен в Laruelle & Valenciano, 2000. Основные аксиомы классических индексов влияния следующие:

аксиома болвана: индекс влияния болвана в простой игре равен 0;

аксиома анонимности: для любой перестановки π множества N в простой игре (N,υ) выполняется равенство:

$$\Phi_{\pi(i)}(\upsilon)=\Phi_i(\pi\upsilon), \quad \text{где } \pi\upsilon(S)=\upsilon(\pi(S));$$

аксиома трансфера: для любых простых игр υ и ω выполняется равенство:

$$\Phi(\upsilon)+\Phi(\omega)=\Phi(\upsilon\vee\omega)+\Phi(\upsilon\wedge\omega),$$

$$\text{где } (\upsilon\vee\omega)(S)=\max(\upsilon(S),\omega(S)), \quad (\upsilon\wedge\omega)(S)=\min(\upsilon(S),\omega(S)).$$

Аксиома трансфера отражает передачу влияния при объединении списков выигрывающих коалиций. Различные варианты аксиомы трансфера подробно рассмотрены в Laruelle & Valenciano, 2000.

Задача голосования с квотой имеет свои особенности в рамках теоретико-игровой модели простой игры. Как показывает следующий пример, объединение двух списков выигрывающих коалиций, соответствующих двум различным ситуациям голосования, может оказаться списком выигрывающих коалиций, не соответствующим никакой ситуации голосования.

Пример. Пусть в игре 1 игроков A, B и C выигрывающими коалициями являются: AB, BC, ABC. Такая игра является голосованием с квотой: например, если взять веса A, B, C соответственно 2, 6, 2 и квоту 7. Пусть в игре 2 выигрывающими коалициями будут: A, AB, AC, ABC. Эта игра тоже является голосованием с квотой: например,

если взять веса A, B, C соответственно 6, 2, 2 и квоту 5. Объединением этих игр будет игра с выигрывающими коалициями: A, AB, AC, BC, ABC. Но такого голосования не существует, потому что для этого вес A должен быть больше квоты. Но тогда BC не может быть выигрывающей коалицией. Иначе итог голосования будет неоднозначен, если A проголосует «за», а B и C – «против».

Таким образом, естественной является задача описания общих свойств индексов влияния для задачи голосования с квотой на языке ситуаций голосования. В настоящей работе для описания индексов влияния в задаче голосования с квотой предлагается использовать две аксиомы: аксиому диктатора и аксиому аддитивности. Аксиома аддитивности сформулирована в терминах выигрывающих коалиций, в которых данный участник голосования является ключевым (значимые коалиции) и является аналогом общей аксиомы трансфера в модели простой игры. Для вывода общих свойств индексов влияния из двух основных аксиом мы исследуем структуру множества значимых коалиций для игрока в задаче голосования с квотой (теоремы 1 и 2). В результате получается общая теорема о представлении индекса влияния (теорема 6). Добавление к двум основным аксиомам аксиомы анонимности существенно упрощает представление индекса влияния (теорема 10). Для этого случая найдено необходимое и достаточное условие возможности представления индекса влияния участника голосования как вероятности того, что его голос оказался решающим (теорема 12).

3.1. Относительность индексов влияния

Здесь и далее при рассмотрении двух и более ситуаций ($N; \nu_1, \nu_2,\ldots, \nu_n; q$) мы будем считать, что множество N фиксировано, то есть две ситуации будут отличаться друг от друга только весами игроков и квотой, но не набором игроков.

Индекс влияния – это относительная величина, то есть смысл имеют не сами абсолютные значения индекса влияния, а отношения между ними. Иначе говоря, влияния игроков в следующих двух ситуациях одинаковы: 1) три игрока A, B и C имеют влияния Φ_A, Φ_B, Φ_c; 2) эти три игрока A, B и C имеют влияния $k\cdot\Phi_A$, $k\cdot\Phi_B$, $k\cdot\Phi_c$.

Определение. Два индекса влияния Φ^1 и Φ^2 **эквивалентны** тогда и только тогда, когда для любой ситуации в голосовании $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n; q)$ оба индекса дают игрокам одинаковые доли влияния (при этом абсолютные значения индексов могут отличаться):

$$\forall i = \overline{1,n} \quad \frac{\Phi^1(i)}{\sum_{j=1}^{n}\Phi^1(j)} = \frac{\Phi^2(i)}{\sum_{j=1}^{n}\Phi^2(j)}.$$

3.2. Однозначность исхода голосования

В итоге голосования должен быть получен однозначный результат: либо решение принимается, либо отклоняется. Квота в голосовании должна быть выбрана таким образом, что если группа игроков, голосующих «за», набрала необходимую квоту, то игроки, голосующие «против», уже не могут набрать эту квоту, и наоборот.

Пример. Пусть три игрока *A*, *B* и *C* имеют веса 10, 10 и 10. Тогда квота $q = 10$ не обеспечивает однозначности голосования, так как *A* и *B* могут проголосовать «да», набрав квоту, а *C* – «нет», также набрав эту квоту, и возникнет неоднозначная ситуация. В этом случае коалиция $T = ABC$ – выигрывающая коалиция, ее подкоалиция $S = AB$ – тоже выигрывающая, но и коалиция $T \setminus S = C$ – снова выигрывающая.

Квота $q = 11$ уже будет обеспечивать однозначность голосования.

Свойство однозначности исхода голосования. Если коалиция T – выигрывающая, и ее подкоалиция $S \subset T$ – тоже выигрывающая, тогда коалиция $T \setminus S$ должна быть проигрывающей:

$$\forall S,T \quad S \subset T, \nu(S) > q, \nu(T) > q \quad \Rightarrow \quad \nu(T \setminus S) \le q.$$

Это свойство представляет собой формулировку свойства супераддитивности простых игр на языке задачи голосования.

Если квота составляет больше 50% от суммы весов всех n игроков:

$$q > \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\nu_i,$$

то свойство однозначности исхода голосования выполняется. Приведенный пример показывает ($q = 11$), что это условие не является необходимым для однозначности голосования, хотя и является достаточным (Friedman & McGrath & Parker 2006).

Во всех дальнейших рассуждениях и доказательствах будем считать, что свойство однозначности исхода голосования выполняется.

3.3. Структура множества значимых коалиций в задаче голосования

Теорема 1. Для любой коалиции, в которую входит данный игрок и хотя бы еще один другой игрок, всегда можно найти ситуацию, в которой эта коалиция будет единственной значимой коалицией для данного игрока:

$$\forall S, i \in S, S \ne \{i\} \quad \exists(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n; q):$$

$$\begin{cases} \nu(S) > q \\ \nu(S) - \nu_i \le q \end{cases} \quad и \ \nexists T \ne S, i \in T \begin{cases} \nu(T) > q \\ \nu(T) - \nu_i \le q \end{cases}$$

Доказательство. Приведем конструктивное доказательство этого утверждения. Обозначим коалицию, которая должна быть единственной значимой для игрока i за S. И пусть в нее входит $k \ge 2$ игроков, а всего есть n игроков.

Выберем веса игроков и квоту следующим образом:

$$\forall j \notin S \quad \nu_j = 1,$$

$$\nu_i = 1,$$

$$\forall j \in S, j \ne i \quad \nu_j = n - k + 1,$$

$$q = (k-1)(n-k+1) + \frac{1}{2}.$$

Такая ситуация возможна, потому что она обладает свойством однозначности исхода голосования (квота превышает половину суммарного веса игроков):

$$q=(k-1)(n-k+1)+\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\nu_j=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(n-k+1+(k-1)(n-k+1)\Big)=\frac{k}{2}(n-k+1),$$

$$q=k(n-k+1)-(n-k+\frac{1}{2})=$$

$$=\frac{k}{2}(n-k+1)+\frac{k}{2}(n-k+1)-(n-k+\frac{1}{2}),$$

$$q=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\nu_j+\left(\frac{k}{2}-1\right)(n-k)+\frac{k-1}{2}>\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\nu_j,\ \textit{так как}\ k\ge 2.$$

Докажем, что в этой ситуации коалиция S действительно будет единственной значимой для игрока i. Коалиция S будет значимой для i, потому что

$$\begin{cases}\nu(S)=(k-1)(n-k+1)+1>q\\ \nu(S)-\nu_i=(k-1)(n-k+1)<q\end{cases}.$$

Рассмотрим все остальные выигрывающие коалиции, включающие игрока i, и докажем, что ни одна из них не является значимой для него. Покажем, что любая выигрывающая коалиция T, включающая игрока i, должна содержать и всех остальных игроков, из S. Допустим обратное: пусть один из этих игроков не входит в T. Максимально возможной такой коалицией будет коалиция из всех игроков, кроме одного из S. А ее вес будет равен:

$$\nu(T)=\sum_{j=1}^{n}\nu_j-(n-k+1)=(k-1)(n-k+1)<q.$$

Но этот вес меньше квоты, и такая коалиция не может быть выигрывающей. Значит, любая выигрывающая коалиция T включает всех игроков из S. Кроме игроков из S коалиция T содержит хотя бы одного игрока $j\notin S$. Веса всех таких игроков равны 1 и вес игрока i тоже равен 1. Следовательно,

$$\nu(T)\ge\nu(S)+1\ \Rightarrow\ \nu(T)-\nu_i\ge\nu(S)+1-1>q.$$

Таким образом, игрок i не является ключевым в коалиции T, и S – единственная его значимая коалиция.

Пример. Построим ситуацию для голосования восьми игроков A, B, C, D, E, F, G, H, в которой игрок A будет ключевым только в коалиции ABCDE (из пяти игроков). Для этого надо положить веса A, F, G, H равными 1, веса B, C, D, E равными 8 – 5 + 1 = 4, а квоту равной 4 × 4 + 0,5 = 16,5.

Теорема 2. Для любой ситуации, в которой игрок является ключевым в некотором непустом множестве коалиций W, всегда существует такая коалиция $\omega\in W$, что можно найти другую ситуацию, в которой этот игрок будет ключевым в тех же коалициях, кроме ω.

Доказательство. Пусть игрок i входит в коалиции $\omega_1,\ \ldots,\omega_k,\omega_{k+1},\ \ldots,$ $\omega_{k+m},\omega_{k+m+1},\ \ldots,\omega_l$, упорядоченные по весу:

$$\nu(\omega_1)\le\ldots\le\nu(\omega_k)\le q<\nu(\omega_{k+1})\le\ldots$$

$$\le\nu(\omega_{k+m})\le q+\nu_i<\nu(\omega_{k+m+1})\le\ldots\le\nu(\omega_l),$$

$$\Updownarrow$$

$$\nu(\omega_1\setminus\{i\})\le\ldots\le\nu(\omega_k\setminus\{i\})\le q-\nu_i<\nu(\omega_{k+1}\setminus\{i\})\le\ldots$$

$$\le\nu(\omega_{k+m}\setminus\{i\})\le q<\nu(\omega_{k+m+1}\setminus\{i\})\le$$

$$\ldots\le\nu(\omega_l\setminus\{i\}).$$

Здесь коалиции $\omega_1,\ \ldots,\omega_k$ являются проигрывающими, коалиции $\omega_{k+1},\ \ldots,\omega_{k+m}$ – значимыми для игрока i, и коалиции $\omega_{k+m+1},\ \ldots,\omega_l$ – выигрывающими, но не значимыми для i.

Докажем, что можно так изменить квоту и веса игроков, чтобы игрок i остался ключевым во всех коалициях, кроме ω_{k+1}. Для этого положим квоту равной: $q'=q+\Delta$, а веса всех игроков, кроме входящих в коалицию ω_{k+1}, увеличим на некоторую маленькую величину Δ_0:

$$\forall j\in\omega_{k+1}\quad \nu_j'=\nu_j,$$

$$\forall j\notin\omega_{k+1}\quad \nu_j'=\nu_j+\Delta_0.$$

Необходимо получить следующие веса коалиций:

$$\max\left(\nu'(\omega_1 \setminus \{i\}),\ ...,\nu'(\omega_k \setminus \{i\})\right) \ \le \ \nu(\omega_{k+1} \setminus \{i\}) = q' - v_i' \ <$$

$$< \ \min\left(\nu'(\omega_{k+2} \setminus \{i\}),...,\nu'(\omega_{k+m} \setminus \{i\})\right) \ \le$$

$$\le \ \max\left(\nu'(\omega_{k+2} \setminus \{i\}),...,\nu'(\omega_{k+m} \setminus \{i\})\right) \ \le$$

$$\le \ q' = q + \Delta \ < \ \min\left(\nu'(\omega_{k+m+1} \setminus \{i\}),...,\nu'(\omega_l \setminus \{i\})\right)$$

Поскольку мы увеличили вес каждого игрока, кроме входящих в коалицию ω_{k+1}, на Δ_0, то вес каждой коалиции увеличится на величину $t \cdot \Delta_0$, где t — это число игроков, входящих в эту коалицию, у которых вес был увеличен, и $1 \le t < n$ (n – число всех игроков). Поэтому:

$$\forall j, \omega_j \subset \omega_{k+1} \ \Rightarrow \ \nu'(\omega_j) = \nu(\omega_j),$$

$$\forall j, \omega_j \not\subset \omega_{k+1} \ \Rightarrow \ \nu(\omega_j) + \Delta_0 \ \le \ \nu'(\omega_j) \ < \ \nu(\omega_j) + n\Delta_0,$$

$$\max\left(\nu'(\omega_1 \setminus \{i\}),...,\nu'(\omega_k \setminus \{i\})\right) \ <$$

$$< \ \max\left(\nu(\omega_1 \setminus \{i\}),...,\nu(\omega_k \setminus \{i\})\right) + n\Delta_0 = \nu(\omega_k \setminus \{i\}) + n\Delta_0,$$

$$\min\left(\nu'(\omega_{k+2} \setminus \{i\}),...,\nu'(\omega_{k+m} \setminus \{i\})\right) \ \ge$$

$$\ge \ \min\left(\nu(\omega_{k+2} \setminus \{i\}),...,\nu(\omega_{k+m} \setminus \{i\})\right) + \Delta_0 =$$

$$= \nu(\omega_{k+2} \setminus \{i\}) + \Delta_0 \ > \ \nu(\omega_{k+1} \setminus \{i\}),$$

$$\max\left(\nu'(\omega_{k+2} \setminus \{i\}),...,\nu'(\omega_{k+m} \setminus \{i\})\right) \ <$$

$$< \ \max\left(\nu(\omega_{k+2} \setminus \{i\}),...,\nu(\omega_{k+m} \setminus \{i\})\right) + n\Delta_0 =$$

$$= \nu(\omega_{k+m} \setminus \{i\}) + n\Delta_0 \ \le \ q + n\Delta_0,$$

$$\min\left(\nu'(\omega_{k+m+1} \setminus \{i\}),...,\nu'(\omega_l \setminus \{i\})\right) \ \ge$$

$$\ge \ \min\left(\nu(\omega_{k+m+1} \setminus \{i\}),...,\nu(\omega_l \setminus \{i\})\right) + \Delta_0 = \nu(\omega_{k+m+1} \setminus \{i\}) + \Delta_0.$$

Тогда, чтобы получить необходимые нам веса коалиций, необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} \nu(\omega_k \setminus \{i\} + n\Delta_0 \le \nu(\omega_{k+1} \setminus \{i\}) \\ q + n\Delta_0 \le q + \Delta \\ \nu(\omega_{k+m+1} \setminus \{i\} + \Delta_0 > q + \Delta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_0 \le \dfrac{\nu(\omega_{k+1} \setminus \{i\} - \nu(\omega_k \setminus \{i\})}{n} \\ \Delta_0 \le \dfrac{\Delta}{n} \\ \Delta < \nu(\omega_{k+m+1} \setminus \{i\}) - q + \Delta_0 \end{cases}$$

Так как $\nu(\omega_{k+1} \setminus \{i\}) > \nu(\omega_k \setminus \{i\})$, а $\nu(\omega_{k+m+1} \setminus \{i\}) > q$, эта система имеет множество решений. Вот, например, одно из них:

$$\begin{cases} \Delta = \nu(\omega_{k+m+1} \setminus \{i\}) - q \\ \Delta_0 = \min\left(\dfrac{\Delta}{n}, \dfrac{\nu(\omega_{k+1} \setminus \{i\}) - \nu(\omega_k \setminus \{i\})}{n}\right) \end{cases}$$

При таком изменении квоты и весов игроков мы получим то, что требовалось:

$$\max\left(\nu'(\omega_1 \setminus \{i\}),...,\nu'(\omega_k \setminus \{i\})\right) \ \le$$

$$\le \nu(\omega_{k+1} \setminus \{i\}) = q' - v_i' \ < \ \min\left(\nu'(\omega_{k+2} \setminus \{i\}),...,\nu'(\omega_{k+m} \setminus \{i\})\right) \le$$

$$\le \ \max\left(\nu'(\omega_{k+2} \setminus \{i\}),...,\nu'(\omega_{k+m} \setminus \{i\})\right) \ \le$$

$$\le \ q' = q + \Delta \ < \ \min\left(\nu'(\omega_{k+m+1} \setminus \{i\}),...,\nu'(\omega_l \setminus \{i\})\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\max\left(\nu'(\omega_1),...,\nu'(\omega_k)\right) \ \le \ \nu(\omega_{k+1}) = q' \ < \ \min\left(\nu'(\omega_{k+2}),...,\nu'(\omega_{k+m})\right) \ \le$$

$$\le \ \max\left(\nu'(\omega_{k+2}),...,\nu'(\omega_{k+m})\right) \ \le \ q' + \nu_i' \ < \ \min\left(\nu'(\omega_{k+m+1}),...,\nu'(\omega_l)\right)$$

Легко видеть, что игрок i остался ключевым во всех коалициях, кроме ω_{k+1}.

3.4. Аксиома диктатора

Определение. Диктатором в голосовании называется игрок, вес которого превышает квоту.

Аксиома диктатора. Диктатор всегда имеет влияние в голосовании, то есть его влияние всегда ненулевое, $\Phi > 0$.

3.5. Аксиома аддитивности

Игрок реально влияет на исход голосования, только когда он ключевой. Чем больше случаев, в которых игрок является ключевым, тем больше должно быть его влияние.

Далее в аксиоме рассматривается абсолютное (ненормированное) значение влияния.

Аксиома аддитивности. Если в ситуации 1 игрок A – ключевой в некотором множестве коалиций W^1, в ситуации 2 A – ключевой в множестве коалиций W^2, а в ситуации 3 A – ключевой в множестве коалиций $W^3 = W^1 \cup W^2$ и множества коалиций W^1 и W^2 не пересекаются, то влияние A в ситуации 3 равно сумме его влияний в первых двух, то есть:

$$\Phi^3(A) = \Phi^1(A) + \Phi^2(A).$$

Рассмотрим пример с тремя игроками A, B и C, имеющими веса 34, 33 и 33. Найдем влияние игрока A в трех ситуациях, различающихся квотой q. Пусть в 1-й ситуации $q = 51$, во 2-й $q = 75$, и в 3-й $q = 67$. Выпишем все коалиции, в которых A – ключевой игрок в рассматриваемых трех ситуациях: 1) AB, AC; 2) ABC; 3) AB, AC, ABC.

По аксиоме аддитивности получаем: $\Phi^3(A) = \Phi^1(A) + \Phi^2(A)$.

Ненормированные индексы Банцафа $\beta_i = N_i$ и Шепли — Шубика $\phi_i = \sum_{i \in S} (s-1)!(n-s)!$, удовлетворяют этой аксиоме:

$$\beta^1(A) = 2, \ \beta^2(A) = 1, \ \beta^3(A) = 3 = \beta^1(A) + \beta^2(A),$$

$$\phi^1(A) = 2, \ \phi^2(A) = 2, \ \phi^3(A) = 4 = \phi^1(A) + \phi^2(A).$$

А вот индекс влияния, зависящий только от веса игрока, например $\Phi(A) = \nu_A$, не будет удовлетворять аксиоме аддитивности, и приведенный пример доказывает это. Для такого индекса в нашем примере получаем:

$$\Phi^1(A) = \Phi^2(A) = \Phi^3(A) = 34.$$

Из аксиом диктатора и аддитивности далее выводятся свойство монотонности индекса влияния, свойство отсутствия влияния, свойство равенства влияний, свойство диктатора и общая теорема о представлении.

3.5.1. Свойство отсутствия влияния

Теорема 3. При выполнении аксиомы аддитивности, если игрок не является ключевым ни в одной коалиции, то его индекс влияния равен 0.

Доказательство. Допустим обратное: пусть индекс влияния игрока A в ситуации 1, в которой он не является ключевым ни в одной коалиции, равен некоторому числу $\Phi^1(A) > 0$. Рассмотрим ситуацию 2, в которой A является ключевым только в одной коалиции ω и имеет индекс влияния $\Phi^2(A)$. По теореме 1 такая ситуация существует.

Тогда по аксиоме аддитивности в ситуации 3, полностью совпадающей с ситуацией 2 (поскольку в ситуации 1 множество коалиций, где A – ключевой, пусто), индекс влияния A должен равняться сумме: $\Phi^3(A) = \Phi^1(A) + \Phi^2(A) > \Phi^2(A)$. Но так как ситуация 3 полностью совпадает с ситуацией 2, то и индексы влияния в этих ситуациях должны совпадать: $\Phi^3(A) = \Phi^2(A)$. Значит, исходное предположение неверно и $\Phi^1(A) = 0$.

3.5.2. Свойство диктатора

Теорема 4. Если выполнены аксиомы диктатора и аддитивности, то диктатору принадлежит 100% влияния в голосовании (все остальные игроки не имеют влияния).

Доказательство. Обозначим вес диктатора за V. Так как по определению V больше квоты q, то по свойству однозначности голосования суммарный вес всех остальных игроков не превосходит q. Рассмотрим любого такого игрока i и докажем, что он не будет ключевым ни в одной выигрывающей коалиции, то есть:

$$\forall \omega \ i \in \omega, \ \nu(\omega) > q \ \Rightarrow \ \nu(\omega) - \nu_i > q.$$

В любую выигрывающую коалицию должен входить диктатор, так как в противном случае ее вес не превзойдет q, даже если в нее войдут все остальные игроки. Но тогда:

$$\nu(\omega) \geq \nu_i + V \quad \Rightarrow \quad \nu(\omega) - \nu_i \geq V > q ,$$

то есть любой игрок i не является ключевым ни в какой коалиции.

По свойству отсутствия влияния (теорема 3) влияние всех игроков, кроме диктатора, равно 0. А по аксиоме диктатора влияние диктатора ненулевое. Таким образом, диктатору принадлежат все 100% влияния в голосовании.

3.5.3. Свойство равенства влияний

Теорема 5. При выполнении аксиом диктатора и аддитивности, если в двух различных ситуациях 1 и 2 (ситуации могут различаться весами игроков и квотой) игрок A является ключевым в одном и том же множестве коалиций: $W^1 = W^2$, то его индекс влияния в обеих ситуациях одинаков: $\Phi^1(A) = \Phi^2(A)$.

Доказательство. Рассмотрим ситуацию 0, в которой A не является ключевым ни в одной коалиции. Согласно свойству отсутствия влияния его индекс влияния равен 0: $\Phi^0(A) = 0$. Так как множество коалиций, где A – ключевой, в ситуации 0 пусто: $W^0 = \phi$, то множество коалиций, где A – ключевой, в ситуации 2 фактически равно: $W^2 = W^1 \cup W^0$. По аксиоме аддитивности получаем: $\Phi^2(A) = \Phi^1(A) + \Phi^0(A) = \Phi^1(A)$.

3.5.4. Общая теорема о представлении

Теорема 6. При выполнении аксиом диктатора и аддитивности индекс влияния игрока A, ключевого в коалициях $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k$, не зависит от ситуации, а зависит только от набора ключевых коалиций и равен $C_A(\omega_1) + C_A(\omega_2) + ... + C_A(\omega_k)$, где $C_A(\omega) \not\equiv 0$ – это функция, определяющая вклад коалиции ω в индекс влияния ее ключевого игрока A.

Доказательство. В соответствии со свойством равенства влияний в любой ситуации 1 (независимо от весов игроков и квоты), в которой A является ключевым только в одной коалиции ω_i, он будет иметь один и тот же индекс влияния $\Phi^1(A)$. То есть этот индекс не зависит от весов игроков и квоты, а зависит только от игрока и от коалиции ω_i, в которой он ключевой. Тогда этот индекс равен значению некоторой функции $C_A(\omega_i) \geq 0$. Это значение неотрицательно, потому что индекс влияния не может быть отрицательным.

Замечание. По теореме 1 такая ситуация 1 существует для любой коалиции ω, кроме $\omega = \{A\}$. Случай $\omega = \{A\}$ означает, что A – диктатор, так как его вес превышает квоту. Этот случай полностью описывается свойством диктатора (теорема 4). Это свойство показывает, что абсолютная величина влияния диктатора не важна. Важно только то, что его влияние ненулевое. Поэтому если A – диктатор, то можно положить его влияние равным $C_A(\{A\}) + C_A(\{AB\}) + ... + C_A(\{AB...\})$. Так как в эту сумму входят вклады всех возможных коалиций, включающих А, и $C_A(\omega) \not\equiv 0$, то эта сумма ненулевая. Таким образом, для случая, когда игрок является диктатором, данная теорема выполняется.

Пусть коалиции $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k$ упорядочены по возрастанию весов. По теореме 2 существует ситуация 2, в которой A будет ключевым во всех тех же коалициях, кроме первой: $\omega_2, ..., \omega_k$. Тогда, по аксиоме аддитивности, индекс влияния A равен:

$$\Phi(A) = C_A(\omega_1) + \Phi^2(A) ,$$

где $\Phi^2(A)$ – это индекс влияния A во 2-й ситуации. Далее, по теореме 2 снова существует ситуация 3, в которой A будет ключевым в коалициях $\omega_3, ..., \omega_k$ и по аксиоме аддитивности:

$$\Phi^2(A) = C_A(\omega_2) + \Phi^3(A) .$$

И так далее до последней коалиции, для которой получаем:

$$\Phi^{n-1}(A) = C_A(\omega_{k-1}) + \Phi^n(A) ,$$

где $\Phi^k(A)$ – это индекс влияния A в ситуации, в которой A – ключевой только в коалиции ω_k. Значит, $\Phi^k(A) = C_A(\omega_k)$. Складывая все слагаемые, имеем:

$$\Phi(A) = C_A(\omega_1) + C_A(\omega_2) + ... + C_A(\omega_k) .$$

3.5.5. Свойство монотонности

Теорема 7. При выполнении аксиом диктатора и аддитивности, если две ситуации 1 и 2 отличаются только тем, что вес игрока A в ситуации 2 больше, чем в ситуации 1: $\nu_A{}^2 > \nu_A{}^1$, то и его влияние во 2-й ситуации будет не меньше, чем в 1-й: $\Phi^2(A) \geq \Phi^1(A)$.

Доказательство. Обозначим набор всех коалиций, в которых игрок A является ключевым в ситуации 1, за W_1, а в ситуации 2 – за W_2. Докажем, что $W_1 \subset W_2$. Рассмотрим некоторую коалицию $\omega \in W_1$. В этой коалиции игрок A является ключевым в 1-й ситуации, что означает, что ω – выигрывающая коалиция, а $\omega \setminus A$ – проигрывающая.

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in \omega \setminus A} \nu_i < q \\ \sum\limits_{i \in \omega \setminus A} \nu_i + \nu_A{}^1 \geq q \end{cases}$$

Вес игрока во 2-й ситуации больше:

$$\nu_A{}^2 > \nu_A{}^1 \Rightarrow \sum_{i \in \omega \setminus A} \nu_i + \nu_A{}^2 > \sum_{i \in \omega \setminus A} \nu_i + \nu_A{}^1 \geq q .$$

Следовательно:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in \omega \setminus A} \nu_i < q \\ \sum\limits_{i \in \omega \setminus A} \nu_i + \nu_A{}^2 \geq q. \end{cases}$$

То есть и в ситуации 2 ω – выигрывающая коалиция, а $\omega \setminus A$ – проигрывающая. А значит, A – ключевой игрок коалиции ω и во 2-й ситуации. Получили:

$$\forall \omega \in W_1 \Rightarrow \omega \in W_2.$$

Следовательно, $W_1 \subset W_2$, и тогда либо $W_2 = W_1$ и $\Phi^2(A) = \Phi^1(A)$, либо $W_2 = W_1 \cup \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k\}$. Из общей теоремы о представлении имеем:

$$\Phi^2(A) = \Phi^1(A) + C_A(\omega_1) + ... + C_A(\omega_k) \geq \Phi^1(A) .$$

3.6. Аксиома анонимности

Индексы влияния анонимных игроков должны зависеть только от квоты и весов игроков. Таким образом, игроки становятся в каком-то смысле обезличенными, и два игрока, имеющие одинаковый вес, фактически ничем не отличаются друг от друга. Любая перестановка весов игроков вызывает такую же перестановку их индексов влияния.

Аксиома анонимности. Если две ситуации 1 и 2 отличаются друг от друга только тем, что веса двух игроков A и B поменялись местами: $\nu_A^2 = \nu_B^1$, $\nu_B^2 = \nu_A^1$, то и индексы влияния этих игроков поменяются местами: $\Phi^2(A) = \Phi^1(B)$, $\Phi^2(B) = \Phi^1(A)$.

Из этой аксиомы следуют свойства независимости вклада коалиции и зависимости вклада коалиции от размера.

3.6.1. Свойство независимости вклада коалиции

Теорема 8. При выполнении аксиом диктатора, аддитивности и анонимности вклад коалиции в индекс влияния ее ключевого игрока не зависит от этого игрока и его веса. Другими словами, если игроки A и B ключевые в некоторой коалиции ω, то ее вклады в их индексы влияния равны, то есть: $C_A(\omega) = C_B(\omega) = C(\omega)$.

Доказательство. Рассмотрим случай, в котором A и B – ключевые игроки только в одной коалиции ω. Тогда, по общей теореме о представлении: $\Phi(A) = C_A(\omega)$, $\Phi(B) = C_B(\omega)$.

Теперь поменяем веса игроков A и B: $\nu_A{}' = \nu_B$, $\nu_B{}' = \nu_A$. По аксиоме анонимности, их индексы влияния тоже поменяются местами: $\Phi'(A) = \Phi(B) = C_B(\omega)$, $\Phi'(B) = \Phi(A) = C_A(\omega)$.

Теперь докажем, что после изменения весов игроки A и B остались ключевыми только в коалиции ω. Ясно, что от того, что A и B поменялись весами, вес ν_ω коалиции ω, в которую они оба входят, не изменился. A был ключевым в ω, следовательно: $\nu_\omega - \nu_A \leq q$, $\nu_B{}' = \nu_A$ $\Rightarrow \nu_\omega - \nu_B{}' \leq q$. Значит, B после изменения весов остался ключевым в ω. Аналогично, B был ключевым в ω: $\nu_\omega - \nu_B \leq q$, $\nu_A{}' = \nu_B \Rightarrow$ $\Rightarrow \nu_\omega - \nu_A{}' \leq q$. То есть и A после изменения весов тоже остался ключевым в ω.

Осталось доказать, что после изменения весов не могло появиться другой коалиции, в которой A или B стал бы ключевым. Предположим обратное: существует коалиция $\omega^* \neq \omega$, в которой A стал ключевым:

$$\exists \omega^* \neq \omega \quad \begin{cases} \nu_{\omega^*} > q \\ \nu_{\omega^*} - \nu_A{}' \leq q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu_{\omega^* \setminus A} + \nu_A{}' > q \\ \nu_{\omega^* \setminus A} \leq q \end{cases}$$

Если $B \notin \omega^*$, то, так как $\nu_A{}' = \nu_B$, получаем:

$$\begin{cases} \nu_{\omega^*\setminus A} + \nu_B > q \\ \nu_{\omega^*\setminus A} \le q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu_{\omega^*\setminus A\cup B} > q \\ \nu_{\omega^*\setminus A} \le q \end{cases}$$

То есть B был ключевым до изменения весов в коалиции $\omega^*\setminus A \cup B$. Эта коалиция не может совпадать с ω, так как в нее не входит игрок A. Но B был ключевым только в ω, а значит, предположение $B \notin \omega^*$ неверно.

Рассмотрим случай $B \in \omega^*$. Имеем:

$$\begin{cases} \nu_{\omega^*} > q \\ \nu_{\omega^*} - \nu_A' \le q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu_{\omega^*} > q \\ \nu_{\omega^*} - \nu_B \le q \end{cases}$$

Это означает, что B был ключевым в коалиции $\omega^* \ne \omega$ до изменения весов. Снова получили противоречие, значит, и исходное предположение, что существует коалиция $\omega^* \ne \omega$, в которой A стал ключевым после изменения весов, неверно. Аналогично доказывается соответствующее утверждение и для игрока B.

Таким образом, A и B остались ключевыми только в одной коалиции ω. Тогда, по общей теореме о представлении, их индексы влияния стали: $\Phi'(A) = C_A(\omega)$, $\Phi'(B) = C_B(\omega)$. Но, как было получено выше, $\Phi'(A) = C_B(\omega)$, $\Phi'(B) = C_A(\omega)$. Следовательно, $C_A(\omega) = C_B(\omega)$. Так как $\forall A, B \in \omega \quad C_A(\omega) = C_B(\omega)$, то можно этот вклад коалиции ω в индексы влияния ее ключевых игроков обозначить просто $C(\omega)$.

3.6.2. Свойство зависимости вклада коалиции от размера

Теорема 9. При выполнении аксиом диктатора, аддитивности и анонимности любые коалиции с одинаковым числом их участников дают одинаковый вклад в индексы влияния своих ключевых игроков: $\forall \upsilon, \omega \quad |\upsilon| = |\omega| = k \;\Rightarrow\; C(\upsilon) = C(\omega) = C(k)$.

Доказательство. Пусть есть некоторая проигрывающая коалиция ω, которую игроки A и B делают выигрывающей. То есть игрок A является ключевым в коалиции $\omega \cup A$, а B – в коалиции $\omega \cup B$. Пусть также нет других таких коалиций, то есть А и B – ключевые только в одной коалиции. По общей теореме о представлении и свойству независимости вклада коалиции индексы влияния этих игроков равны следующим числам: $\Phi_A = C(\omega \cup A)$, $\Phi_B = C(\omega \cup B)$.

Теперь поменяем веса игроков A и B местами: $\nu_A' = \nu_B$, $\nu_B' = \nu_A$. По аксиоме анонимности, их индексы влияния тоже поменяются местами: $\Phi'(A) = \Phi(B) = C(\omega \cup B)$, $\Phi'(B) = \Phi(A) = C(\omega \cup A)$.

A был ключевым игроком в коалиции $\omega \cup A$. Это означает:

$$\begin{cases} \nu_\omega \le q \\ \nu_\omega + \nu_A > q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu_\omega \le q \\ \nu_\omega + \nu_B' > q \end{cases}$$

Значит, B остался ключевым в коалиции $\omega \cup B$. Других коалиций, где A был ключевым, нет:

$$\forall \upsilon \ne \omega \quad \left[\begin{array}{l} \nu_\upsilon > q \\ \nu_\upsilon + \nu_A \le q \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \nu_\upsilon > q \\ \nu_\upsilon + \nu_B' \le q \end{array}\right.$$

Значит, B не мог стать ключевым ни в одной коалиции, кроме $\omega \cup B$. Аналогично получается, что A остался ключевым только в коалиции $\omega \cup A$ после изменения весов. Значит, по общей теореме о представлении и свойству независимости вклада коалиции, индексы влияния A и B стали: $\Phi'(A) = C(\omega \cup A)$, $\Phi'(B) = C(\omega \cup B)$. Но выше мы получили: $\Phi'(A) = C(\omega \cup B)$, $\Phi'(B) = C(\omega \cup A)$. Значит, $C(\omega \cup A) = C(\omega \cup B)$.

Этот результат означает, что в любой коалиции ω' можно любого входящего в нее игрока A ($\omega' = \omega \cup A$) заменить на другого игрока B, и от этого вклад этой коалиции в индексы влияния ее ключевых игроков не изменится: $C(\omega' \setminus A) = C(\omega' \setminus A \cup B)$. Тогда для любых двух коалиций υ и ω с одинаковым числом участников можно всех игроков из υ заменить на игроков ω и $C(\upsilon)$ от этого не изменится. То есть $C(\upsilon) = C(\omega)$.

Отсюда фактически следует, что вклад коалиции в индексы влияния ее ключевых игроков зависит только от числа членов этой коалиции. Тогда вклад любой коалиции ω из k игроков ($|\omega| = k$) можно обозначить просто как $C(k)$.

3.7. Теорема о представлении при выполнении аксиомы анонимности

Индекс влияния, удовлетворяющий аксиомам диктатора, аддитивности и анонимности, может быть представлен в виде: $\Phi(A) = \sum_S C(s)$, где $s = |S|$, S – значимая для игрока А коалиция.

Функция $C(s) \neq 0$ – это вклад коалиции из s игроков в индексы влияния ее ключевых участников. Обратное утверждение тоже верно: индекс влияния, имеющий вид $\Phi(A) = \sum_S C(s)$, $C(s) \neq 0$, удовлетворяет аксиомам диктатора, аддитивности и анонимности. Для доказательства соответствующей теоремы сначала будут доказаны две леммы.

<u>Лемма 1</u>. Пусть игрок А – ключевой в коалициях $\omega_1^A,...,\omega_m^A$, и пусть веса игроков А и В поменяли местами: $\nu_A' = \nu_B$, $\nu_B' = \nu_A$. Тогда после замены весов В будет ключевым только в коалициях: $\omega'^B_1,...,\omega'^B_m$, где:

$$\omega'^B_i = \begin{cases} \omega_i^A, & \text{если } B \in \omega_i^A \\ \left(\omega_i^A \setminus A\right) \cup B, & \text{если } B \notin \omega_i^A \end{cases}$$

Например, если А был ключевым в коалициях АВЕ и АС, то после замены весов В будет ключевым в коалициях АВЕ и ВС.

<u>Доказательство</u>. То, что А был ключевым игроком в коалициях $\omega_1^A,...,\omega_m^A$ до замены весов, означает:

$$\forall i = \overline{1,m} \quad \begin{cases} \nu_{\omega_i^A} > q \\ \nu_{\omega_i^A} - \nu_A \le q \end{cases}$$

То, что других коалиций, где А – ключевой, нет, означает:

$$\forall \omega \ \ \forall i = \overline{1,m} \quad \omega \cup A \neq \omega_i^A \quad \left[\begin{array}{l} \nu_\omega + \nu_A \le q \\ \nu_\omega > q \end{array} \right. \tag{1}$$

Рассмотрим одну из коалиций, в которых А был ключевым до замены весов, – ω_i^A и докажем, что после замены весов В стал ключевым в:

$$\omega'^B_i = \begin{cases} \omega_i^A, & \text{если } B \in \omega_i^A \\ \left(\omega_i^A \setminus A\right) \cup B, & \text{если } B \notin \omega_i^A \end{cases}$$

Рассмотрим два случая: $B \in \omega_i^A$ и $B \notin \omega_i^A$.

Для $B \in \omega_i^A$ имеем:

$$\begin{cases} \nu_{\omega_i^A} > q \\ \nu_{\omega_i^A} - \nu_A \le q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu_{\omega_i^A} > q \\ \nu_{\omega_i^A} - \nu_B' \le q \end{cases}$$

Значит, после замены весов В стал ключевым в ω_i^A, и следовательно, $\omega'^B_i = \omega_i^A$.

Для $B \notin \omega_i^A$ имеем:

$$\begin{cases} \nu_{\omega_i^A} > q \\ \nu_{\omega_i^A} - \nu_A \le q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu_{\omega_i^A \setminus A} + \nu_A > q \\ \nu_{\omega_i^A \setminus A} \le q \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \nu_{\omega_i^A \setminus A} + \nu_B' > q \\ \nu_{\omega_i^A \setminus A} + \nu_B' - \nu_B' \le q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu_{\left(\omega_i^A \setminus A\right) \cup B} > q \\ \nu_{\left(\omega_i^A \setminus A\right) \cup B} - \nu_B' \le q \end{cases}$$

То есть В стал ключевым в $\left(\omega_i^A \setminus A\right) \cup B$, и $\omega'^B_i = \left(\omega_i^A \setminus A\right) \cup B$. Таким образом, после замены весов В стал ключевым в коалициях: $\omega'^B_1,...,\omega'^B_m$, где:

$$\omega'^B_i = \begin{cases} \omega_i^A, & \text{если } B \in \omega_i^A \\ \left(\omega_i^A \setminus A\right) \cup B, & \text{если } B \notin \omega_i^A \end{cases}$$

Теперь докажем, что нет других коалиций, отличных от $\omega'^B_1,...,\omega'^B_m$, в которых бы В стал ключевым. Допустим обратное – пусть существует коалиция: $\exists \omega \ \ B \in \omega \ \ \forall i = \overline{1,m} \ \ \omega \neq \omega'^B_i$, в которой В стал ключевым:

$$\begin{cases} \nu_\omega > q \\ \nu_\omega - \nu_B' \le q \end{cases}$$

Рассмотрим два случая: $A \in \omega$ и $A \notin \omega$.

1) В случае $A \in \omega$ для тех i, при которых $\omega'^B_i = \left(\omega^A_i \setminus A\right) \cup B$ (при $B \notin \omega^A_i$), условие $\omega \neq \omega'^B_i$ выполняется автоматически, потому что $A \in \omega$, но $A \notin \omega'^B_i = \left(\omega^A_i \setminus A\right) \cup B$. Для таких i $\omega \neq \omega^A_i$, так как $B \in \omega$, но $B \notin \omega^A_i$. Для остальных значений i $\omega'^B_i = \omega^A_i$, и так как, по нашему предположению, $\omega \neq \omega'^B_i$, то $\omega \neq \omega^A_i$. Тогда справедливо следующее утверждение:

$$\exists \omega \;\; A \in \omega \;\; \forall i = \overline{1,m} \;\; \omega \neq \omega^A_i \quad \begin{cases} \nu_\omega > q \\ \nu_\omega - \nu_B' \leq q \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu_\omega > q \\ \nu_\omega - \nu_B' \leq q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu_{\omega \setminus A} + \nu_A > q \\ \nu_{\omega \setminus A} \leq q \end{cases}$$

Тогда, обозначив $\omega^* = \omega \setminus A$, имеем:

$$\exists \omega^* \;\; \forall i = \overline{1,m} \;\; \omega^* \cup A \neq \omega^A_i \quad \begin{cases} \nu_{\omega^*} + \nu_A > q \\ \nu_{\omega^*} \leq q \end{cases}$$

Это противоречит условию (1) леммы, по которому нет коалиций, отличных от $\omega^A_1,...,\omega^A_m$, в которых А был бы ключевым игроком до замены весов.

2) В случае $A \notin \omega$ для тех i, при которых $\omega'^B_i = \omega^A_i$ (при $B \in \omega^A_i$), условие $\omega \neq \omega'^B_i$ выполняется автоматически, потому что $A \in \omega'^B_i = \omega^A_i$, но $A \notin \omega$. Для таких i $\left(\omega \cup A\right) \setminus B \neq \omega^A_i$, так как $B \in \omega^A_i$, но $B \notin \left(\omega \cup A\right) \setminus B$. Для остальных значений i $\omega'^B_i = \left(\omega^A_i \setminus A\right) \cup B$, и так как, по нашему предположению, $\omega \neq \omega'^B_i = \left(\omega^A_i \setminus A\right) \cup B$, то $\left(\omega \cup A\right) \setminus B \neq \omega^A_i$. В результате имеем:

$$\exists \omega \;\; A \notin \omega \;\; \forall i = \overline{1,m} \;\; \left(\omega \cup A\right) \setminus B \neq \omega^A_i \quad \begin{cases} \nu_\omega > q \\ \nu_\omega - \nu_B' \leq q \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu_\omega > q \\ \nu_\omega - \nu_B' \leq q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu_{\omega \setminus B} + \nu_B' > q \\ \nu_{\omega \setminus B} \leq q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu_{\omega \setminus B} + \nu_A > q \\ \nu_{\omega \setminus B} \leq q \end{cases}$$

Обозначая $\omega^* = \omega \setminus B$, получаем:

$$\exists \omega^* \;\; \forall i = \overline{1,m} \;\; \omega^* \cup A \neq \omega^A_i \quad \begin{cases} \nu_{\omega^*} + \nu_A > q \\ \nu_{\omega^*} \leq q \end{cases}$$

Это снова противоречит условию (1). В итоге предположение о том, что существует коалиция, отличная от $\omega'^B_1,...,\omega'^B_m$, в которой В был бы ключевым после замены весов, оказалось неверным. Значит, В стал ключевым только в коалициях: $\omega'^B_1,...,\omega'^B_m$, где:

$$\omega'^B_i = \begin{cases} \omega^A_i, & \text{\textit{если}} \;\; B \in \omega^A_i \\ \left(\omega^A_i \setminus A\right) \cup B, & \text{\textit{если}} \;\; B \notin \omega^A_i \end{cases}$$

Лемма 1 доказана.

<u>Лемма 2</u>. Пусть игрок А – ключевой в m коалициях, и число участников каждой из этих коалиций равно $s_1,...,s_m$, а игрок В – ключевой в n коалициях с числом участников $t_1,...,t_k$. Пусть веса игроков А и В поменяли местами: $\nu_A' = \nu_B$, $\nu_B' = \nu_A$. Тогда после замены весов В будет ключевым в m коалициях с размерами $s_1,...,s_m$, а А будет ключевым в *n* коалициях с размерами $t_1,...,t_k$.

<u>Доказательство</u>: Доказательство следует из леммы 1: ясно что $\left|\omega'^B_i\right| = \left|\omega^A_i\right| = s_i$, так как $\omega'^B_i = \omega^A_i$ либо $\omega'^B_i = \left(\omega^A_i \setminus A\right) \cup B$. Игроки А и В ничем не отличаются друг от друга, поэтому то же самое справедливо для коалиций, в которых А станет ключевым: $\left|\omega'^A_i\right| = \left|\omega^B_i\right| = t_i$.

<u>Теорема 10</u>. Индекс влияния игрока А может быть представлен в виде: $\Phi(A) = \sum\limits_S C(s)$, $C(s) \not\equiv 0$ (суммирование выполняется по всем

значимым для А коалициям S, $s = |S|$) тогда и только тогда, когда выполнены аксиомы диктатора, аддитивности и анонимности.

Доказательство. Для доказательства необходимости будет использована лемма 2, для доказательства достаточности – общая теорема о представлении и свойство зависимости вклада коалиции от размера.

Необходимость. Докажем справедливость аксиомы диктатора. Диктатор является ключевым игроком во всех возможных коалициях, включающих его. Число различных коалиций из s игроков, включающих диктатора, равно $\binom{n-1}{s-1}$, поэтому его индекс влияния равен:

$$\Phi(A) = \sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} \cdot C(s) > 0, \quad \text{так как} \quad C(s) \neq 0.$$

Значит, аксиома диктатора выполняется.

Докажем справедливость аксиомы аддитивности. Пусть в ситуации 1 игрок А – ключевой в множестве коалиций $W^1 = \{S_1,...,S_m\}$, в ситуации 2 игрок А – ключевой в множестве коалиций $W^2 = \{S_{m+1},...,S_k\}$, и в ситуации 3 игрок А – ключевой в множестве $W^3 = W^1 \cup W^2 = \{S_1,...,S_k\}$. Пусть размер коалиции ω_i равен s_i. Докажем, что индекс влияния в 3-й ситуации равен сумме индексов в 1-й и 2-й ситуациях: $\Phi^3(A) = \Phi^1(A) + \Phi^2(A)$:

$$\Phi^1(A) = C(s_1) + ... + C(s_m),$$

$$\Phi^2(A) = C(s_{m+1}) + ... + C(s_k),$$

$$\Phi^3(A) = C(s_1) + ... + C(s_k) = \Phi^1(A) + \Phi^2(A).$$

Теперь докажем справедливость аксиомы анонимности. Пусть веса двух игроков А и В поменялись местами: $\nu_A' = \nu_B$, $\nu_B' = \nu_A$. Докажем, что и индексы влияния этих игроков поменяются местами: $\Phi'(A) = \Phi(B)$, $\Phi'(B) = \Phi(A)$. Пусть размеры коалиций, в которых А был ключевым до замены весов, равны $s_1,...,s_m$, а в которых В был ключевым – $t_1,...,t_k$. Тогда их индексы влияния были:

$$\Phi(A) = C(s_1) + ... + C(s_m),$$

$$\Phi(B) = C(t_1) + ... + C(t_k).$$

По лемме 2 после замены весов А стал ключевым в коалициях с размерами $t_1,...,t_k$, а В – в коалициях с размерами $s_1,...,s_m$. То есть их индексы влияния стали:

$$\Phi'(A) = C(t_1) + ... + C(t_k),$$

$$\Phi'(B) = C(s_1) + ... + C(s_m).$$

Таким образом, индексы влияния игроков поменялись местами: $\Phi'(A) = \Phi(B)$, $\Phi'(B) = \Phi(A)$.

Достаточность. Как было показано выше, из аксиом диктатора, аддитивности и анонимности следуют общая теорема о представлении и свойство зависимости вклада коалиции от размера. Согласно общей теореме о представлении индекс влияния игрока А, ключевого в коалициях $\omega_1,\omega_2,...,\omega_k$, равен:

$$\Phi(A) = C_A(\omega_1) + C_A(\omega_2) + ... + C_A(\omega_k) = \sum_S C_A(S).$$

По свойству зависимости вклада коалиции от размера:

$C_A(S) = C(s)$, где $s = |S|$.

Таким образом, индекс влияния имеет вид:

$$\Phi(A) = \sum_S C(s),$$

что и требовалось доказать.

4. Вероятностное представление индекса влияния

Согласно вероятностной модели Laruelle — Valenciano индекс влияния игрока – вероятность для этого игрока оказать решающее влияние на исход голосования (если он проголосует «за», то и исход всего голосования будет «за», а если проголосует «против», то и исход будет «против») при заданном совместном распределении вероятностей проголосовать «да»/»нет» для всех игроков. Поскольку голос игрока – это дискретная случайная величина, имеющая два возможных значения: 1 («за») и 0 («против»), то совместное распределение таких величин представляет собой набор вероятностей всех возможных исходов голосования: 00...00, 00...01, ..., 11...11. Все индексы влияния отличаются друг от друга только этим совместным распределением: $p_{00...00}$, $p_{00...01}$, ..., $p_{11...11}$. Например, индексы Банцафа и Шепли — Шубика имеют соответственно следующие распределения в этой модели:

$$p_{i_1,i_2,...,i_n} = \frac{1}{2^n} \text{ и } p_{i_1,i_2,...,i_n} = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}, \textit{ где } k = \sum_{l=1}^{n} i_l$$

Для индексов влияния, имеющих описание в рамках вероятностной модели, аксиомы диктатора и аддитивности выполняются автоматически. Доказательство этого аналогично доказательству справедливости аксиом диктатора и аддитивности, приведенному в общей теореме о представлении. Справедливость аксиомы диктатора следует из того, что сумма вероятностей всех исходов равняется 1, то есть ненулевая.

Аксиома анонимности равносильна тому, что вероятности исходов голосования не зависят от конкретного распределения голосов «за» и «против», а только от их количества. Для доказательства соответствующей теоремы будут использованы леммы, доказанные в предыдущей главе.

Вероятностная модель накладывает определенные ограничения на индексы влияния. Поэтому не любой индекс влияния, имеющий представление в виде $\Phi(A) = \sum_S C(s)$, может быть представлен в рамках вероятностной модели. Для этого требуется выполнение некоторых дополнительных условий на функцию вклада коалиции $C(s)$. Эти условия и соответствующая теорема о представлении приведены в конце данной главы.

4.1. Анонимность и вероятностная интерпретация индекса влияния

Теорема 11. Для индексов влияния, имеющих описание в рамках вероятностной модели, аксиома анонимности у игроков равносильна тому, что вероятности исходов голосования не зависят от конкретного распределения голосов «за» и «против», а только от их количества:

$$\forall i_1,i_2,...,i_n;i_1',i_2',...,i_n' \ \sum_{l=1}^{n} i_l = \sum_{l=1}^{n} i_l' = s \Rightarrow p_{i_1,i_2,...,i_n} = p_{i_1',i_2',...,i_n'} = p_s,$$

где i_k – это голос игрока $k : i_k = 1$, если он проголосовал «за», и $i_k = 0$, если – «против». То есть вероятность любого исхода голосования не зависит от распределения $i_1, i_2, ..., i_n$ голосов «за» и «против», а только от числа s голосов «за».

Назовем это свойство **однородностью** совместного распределения. Заметим также, что такой индекс влияния может быть вычислен по формуле:

$$\Phi(A) = \sum_S \left(p(S) + p(S \setminus \{A\}) \right) = \sum_S \left(p_s + p_{s-1} \right),$$

где S – каждая значимая для игрока А коалиция, $s = |S|$ – число участников этой коалиции, $p(S) = p_s$ – вероятность образования этой коалиции из s игроков, а $P(S \setminus A) = p_{s-1}$ – вероятность образования этой же коалиции, только без игрока А (из $s-1$ игрока).

Доказательство. Аксиома анонимности формулируется в следующем виде: если веса двух игроков А и В поменять местами: $\nu_A' = \nu_B$, $\nu_B' = \nu_A$, то и индексы влияния этих игроков поменяются местами: $\Phi'(A) = \Phi(B)$, $\Phi'(B) = \Phi(A)$. Докажем сначала необходимость – то, что из этой аксиомы следует независимость вероятностей исходов голосования от распределения голосов. А затем докажем достаточность – то, что из независимости вероятностей следует анонимность.

Необходимость. Рассмотрим случай, когда игроки i и j – ключевые только в одной коалиции S. Тогда в соответствии с вероятностной моделью их индексы влияния равны:

$$\Phi(i) = p(S) + p(S \setminus \{i\}) = p_{\underset{i\ j}{*1*1*}} + p_{\underset{i\ j}{*0*1*}},$$

$$\Phi(j) = p(S) + p(S \setminus \{j\}) = p_{\underset{i\ j}{*1*1*}} + p_{\underset{i\ j}{*1*0*}}.$$

Из леммы 1 следует, что после замены весов игроки i и j так и останутся ключевыми только в коалиции S. А значит, по свойству равенства влияний их индексы не изменятся: $\Phi'(i) = \Phi(i), \Phi'(j) = \Phi(j)$. Тогда, из свойства анонимности, следует: $\Phi(i) = \Phi(j)$. Следовательно, следующие вероятности равны:

$$p_{\underset{i\ j}{*0*1*}} = p_{\underset{i\ j}{*1*0*}}. \qquad (2)$$

Так как в качестве S можно взять любую коалицию, а в качестве i и j – любых ее участников, то равенство (2) означает, что в любом исходе голосования можно поменять любые 1 и 0 местами и от этого его вероятность не изменится. Следовательно, любые два исхода $i_1, i_2, ..., i_n$ и $i_1', i_2', ..., i_n'$ с одинаковым числом s единиц (голосов «да») имеют одинаковую вероятность p_s, потому что один можно получить из другого, переставляя единицы.

Достаточность. Докажем, что из справедливости:

$$\forall i_1, i_2, ..., i_n; i_1', i_2', ..., i_n' \ \sum_{l=1}^{n} i_l = \sum_{l=1}^{n} i_l' = s \Rightarrow p_{i_1, i_2, ..., i_n} = p_{i_1', i_2', ..., i_n'} = p_s$$

следует, что если веса двух игроков A и B поменять местами: $\nu_A' = \nu_B,\ \nu_B' = \nu_A$, то и индексы влияния этих игроков поменяются местами: $\Phi'(A) = \Phi(B),\ \Phi'(B) = \Phi(A)$. Пусть размеры коалиций, в которых A был ключевым до замены весов, равны $s_1, ..., s_m$, а в которых B был ключевым – $t_1, ..., t_k$. Тогда их индексы влияния были:

$$\Phi(A) = \left(p_{s_1} + p_{s_1 - 1}\right) + ... + \left(p_{s_m} + p_{s_m - 1}\right)$$

$$\Phi(B) = \left(p_{t_1} + p_{t_1 - 1}\right) + ... + \left(p_{t_k} + p_{t_k - 1}\right)$$

По лемме 2, после замены весов A стал ключевым в коалициях с размерами $t_1, ..., t_k$, а B – в коалициях с размерами $s_1, ..., s_m$. То есть их индексы влияния стали:

$$\Phi'(A) = \left(p_{t_1} + p_{t_1 - 1}\right) + ... + \left(p_{t_k} + p_{t_k - 1}\right)$$

$$\Phi'(B) = \left(p_{s_1} + p_{s_1 - 1}\right) + ... + \left(p_{s_m} + p_{s_m - 1}\right)$$

Таким образом, индексы влияния игроков поменялись местами: $\Phi'(A) = \Phi(B),\ \Phi'(B) = \Phi(A)$, что и требовалось доказать.

Из этой теоремы следует, что индексы Банцафа и Шепли — Шубика удовлетворяют аксиоме анонимности, так как они имеют вероятностное описание с однородным совместным распределением. Для индекса Банцафа $p_s = \dfrac{1}{2^n}$, а для индекса Шепли — Шубика $p_s = \dfrac{1}{(n+1)\cdot\binom{n}{s}}$.

4.2. Теорема о вероятностной интерпретации индекса влияния

Индекс влияния, имеющий вероятностное описание с однородным (см. теорему 11) совместным распределением, может быть представлен в виде:

$$\Phi(A) = \sum_{S}\left(p_s + p_{s-1}\right), \qquad (3)$$

где $\Phi(A)$ – индекс влияния некоторого игрока A, суммирование выполняется по всем значимым для A коалициям S, $s = |S|$ – число участников коалиции S, p_s – вероятность образования этой коалиции из s игроков, а p_{s-1} – вероятность образования этой же коалиции только без игрока A (из $s-1$ игроков).

Теорема 12. Индекс влияния имеет вероятностное описание с однородным совместным распределением (может быть представлен в виде (3)) тогда и только тогда, когда выполнены:

- аксиома диктатора,
- аксиома аддитивности,
- аксиома анонимности,
- следующая система неравенств на функцию $C(s)$:

$$\Delta_s = C(s) - C(s-1)$$

$$\forall s = \overline{3,n} \quad \begin{cases} C(s) \geq \Delta_{s-1} \\ C(s) \geq \Delta_{s-1} + \Delta_{s-3} \\ ... \\ C(s) \geq \Delta_{s-1} + \Delta_{s-3} + ... + \Delta_2 \end{cases} \qquad (4)$$

(Эти неравенства приведены для нечетного s, для четного – последнее неравенство будет заканчиваться на Δ_1 вместо Δ_2.)

Доказательство. Сначала докажем необходимость – то, что из представления индекса в виде (3) следует выполнение аксиом диктатора, аддитивности, анонимности и неравенств (4).

Необходимость. Диктатор является ключевым игроком во всех возможных коалициях, включающих его. Число различных коалиций из s игроков, включающих диктатора, равно $\begin{pmatrix} n-1 \\ s-1 \end{pmatrix}$, поэтому его индекс влияния равен:

$$\Phi(A) = \sum_{s=1}^{n} \begin{pmatrix} n-1 \\ s-1 \end{pmatrix} \cdot \left(p_s + p_{s-1}\right).$$

Сумма вероятностей всех возможных исходов равна 1:

$$\sum_{s=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ s \end{pmatrix} p_s = 1.$$

Поэтому вероятность хотя бы одного исхода положительна:

$$\exists s \;\; p_s > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \Phi(A) = \sum_{s=1}^{n} \begin{pmatrix} n-1 \\ s-1 \end{pmatrix} \cdot \left(p_s + p_{s-1}\right) > 0 \; .$$

Доказательство справедливости аксиомы аддитивности несложно и полностью аналогично соответствующему доказательству, приведенному в общей теореме о представлении. То, что из представления в виде (3) следует справедливость аксиомы анонимности, доказано в теореме 11. Таким образом, обе эти аксиомы выполняются. В общей теореме о представлении показано, что их выполнение равносильно представлению индекса влияния в виде:

$$\Phi(A) = \sum_{S} C(s) \, , \tag{5}$$

где суммирование выполняется по всем значимым для игрока A коалициям S. Получили, что один и тот же индекс влияния может быть представлен и виде (3), и в виде (5). Приравнивая эти выражения с учетом коэффициента k, появляющегося из-за того, что для индексов влияния не важны их абсолютные значения, а лишь отношения между этими значениями (см. «Относительность индексов влияния»), имеем:

$$\sum_{S} \left(p_s + p_{s-1}\right) = k \cdot \sum_{S} C(s).$$

Так как игрок A может оказаться ключевым в различных наборах коалиций, то это равенство должно выполняться для любых множеств коалиций S, в том числе и когда суммирование производится только по некоторой одной коалиции S (такая ситуация всегда существует по теореме 1). Поэтому для любой коалиции S должно выполняться равенство:

$$p_s + p_{s-1} = k \cdot C(s).$$

Поскольку все элементы этого равенства зависят только от размера коалиции – s, а для n участников голосования коалиции могут включать от 1 до n игроков, то получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} p_0 + p_1 = k \cdot C(1) \\ p_1 + p_2 = k \cdot C(2) \\ \ldots \\ p_{n-1} + p_n = k \cdot C(n) \end{cases} \tag{6}$$

Так как p_s – это вероятность образования любой коалиции из s игроков, число различных коалиций размером s равно $\begin{pmatrix} n \\ s \end{pmatrix}$ и сумма вероятностей всех возможных исходов голосования равна 1, то должно выполняться равенство:

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} p_0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} p_1 + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} p_n = 1$$

Всего получается $n+1$ уравнение на неизвестные $p_0, \ldots, p_n$. Запишем эту систему в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & k \cdot C(1) \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & k \cdot C(2) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & k \cdot C(3) \\ \ldots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & k \cdot C(n) \\ \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} & \ldots & \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} & 1 \end{pmatrix}$$

Вычтем 1-ю, 2-ю, ..., n-ю строки из последней строки, так чтобы в первых n столбцах последней строки получились нули. В результате в последней строке получим:

$$p_n \cdot \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} = 1 - k \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(C(i+1) \cdot \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{n}{i-j} \right).$$

Используя бином Ньютона, получаем, что сумма в левой части равна нулю:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1)^i (-1)^{n-i} = (1-1)^n = 0.$$

В результате значение коэффициента k равно:

$$k = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} \left(C(i+1) \cdot \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{n}{i-j} \right)}.$$

Решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} p_0 = t \\ p_1 = k \cdot C(1) - t \\ p_2 = k \cdot C(2) - k \cdot C(1) + t \\ \ldots \\ p_n = k \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left[(-1)^i \cdot C(n-i) \right] + (-1)^i \cdot t \end{cases}$$

Так как требование, чтобы сумма вероятностей равнялась 1, уже выполнено, то, для того чтобы существовали такие вероятности $p_0, \ldots, p_n$, необходимо и достаточно, чтобы выражения в правых частях были неотрицательны:

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t \leq k \cdot C(1) \\ t \geq k \cdot \left(C(1) - C(2) \right) \\ t \leq k \cdot \left(C(1) - C(2) + C(3) \right) \\ t \geq k \cdot \left(C(1) - C(2) + C(3) - C(4) \right) \\ t \leq k \cdot \left(C(1) - C(2) + C(3) - C(4) + C(5) \right) \\ \ldots \\ t \geq k \cdot \left(C(1) - C(2) + C(3) - C(4) + \ldots + C(n-2) - C(n-1) \right) \\ t \leq k \cdot \left(C(1) - C(2) + C(3) - C(4) + \ldots + C(n-2) - C(n-1) + C(n) \right) \end{cases}$$

Здесь представлена система неравенств для случая нечетного n. Для четного n рассуждения аналогичны. Сгруппируем неравенства в этой системе по знаку неравенства:

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t \geq k \cdot \left(C(1) - C(2) \right) \\ t \geq k \cdot \left(C(1) - C(2) + C(3) - C(4) \right) \\ \ldots \\ t \geq k \cdot \left(C(1) - C(2) + C(3) - C(4) + \ldots + C(n-2) - C(n-1) \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \leq k \cdot C(1) \\ t \leq k \cdot \left(C(1) - C(2) + C(3) \right) \\ t \leq k \cdot \left(C(1) - C(2) + C(3) - C(4) + C(5) \right) \\ \ldots \\ t \leq k \cdot \left(C(1) - C(2) + C(3) - C(4) + \ldots + C(n-2) - C(n-1) + C(n) \right) \end{cases}$$

Для того чтобы эта система неравенств была совместна, необходимо и достаточно, чтобы каждое выражение в правой части неравенств из нижней группы было не меньше, чем каждое выражение в правой части неравенств из верхней группы. Такое условие приводит к следующим неравенствам на $\underline{C(s)}$. Введем обозначение: $\Delta(s) = C(s) - C(s-1)$. Для любого $s = \overline{3,n}$ должно быть выполнено:

$$\begin{cases} C(s) \geq \Delta_{s-1} \\ C(s) \geq \Delta_{s-1} + \Delta_{s-3} \\ \ldots \\ C(s) \geq \Delta_{s-1} + \Delta_{s-3} + \ldots + \Delta_2 \end{cases}$$

Эти неравенства приведены для нечетного s, для четного – последнее неравенство будет заканчиваться на Δ_1 вместо Δ_2.

Таким образом, получена система неравенств (4) и необходимость доказана. Система уравнений (6) имеет решения тогда и только тогда, когда выполнены эти неравенства.

Достаточность. Из аксиом диктатора, аддитивности и анонимности следует, что индекс влияния может быть представлен в виде (5). Докажем, что при условии выполнения неравенств (4) индекс влияния имеет вероятностное описание, то есть может быть представлен в виде (3).

Чтобы индекс влияния, имеющий вид (5), можно было представить в виде (3), необходимо и достаточно, чтобы система уравнений (6) имела решения. Выше было показано, что эта система имеет решения, если выполнены неравенства (4). Таким образом, достаточность доказана.

Заметим, что неравенства (4) выполняются для широкого набора функций вклада коалиции $C(s)$. Например, они выполняются для любой не строго монотонной функции. Это утверждение доказывается в следующей теореме.

4.3. Вклад значимых коалиций и вероятностная интерпретация

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о том, какие функции вклада значимых коалиций гарантируют вероятностную интерпретацию индекса влияния.

Теорема 13. Индекс влияния имеет вероятностное представление (3):

$$\Phi(A) = \sum_S \left(p_s + p_{s-1}\right),$$

такое, что последовательность $p_0, p_1, \ldots, p_n$ не строго возрастает / убывает отдельно по четным и нечетным номерам:

$$\begin{cases} p_0 \leq p_2 \leq p_4 \leq \ldots \\ p_1 \leq p_3 \leq p_5 \leq \ldots \end{cases} \Big/ \begin{cases} p_0 \geq p_2 \geq p_4 \geq \ldots \\ p_1 \geq p_3 \geq p_5 \geq \ldots \end{cases}$$

тогда и только тогда, когда выполнены аксиомы диктатора, аддитивности и анонимности и функция $C(s)$ является соответственно не строго возрастающей / убывающей:

$$C(1) \leq C(2) \leq \ldots \leq C(n) \quad / \quad C(1) \geq C(2) \geq \ldots \geq C(n).$$

Доказательство. Используя результаты доказательства теоремы о представлении, кроме выполнения аксиом диктатора, аддитивности и анонимности, имеем:

$$\begin{cases} C(1) = \frac{1}{k} \cdot \left(p_0 + p_1\right) \\ C(2) = \frac{1}{k} \cdot \left(p_1 + p_2\right) \\ \ldots \\ C(2m-1) = \frac{1}{k} \cdot \left(p_{2m-2} + p_{2m-1}\right) \\ C(2m) = \frac{1}{k} \cdot \left(p_{2m-1} + p_{2m}\right) \\ C(2m+1) = \frac{1}{k} \cdot \left(p_{2m} + p_{2m+1}\right) \\ \ldots \\ C(n) = \frac{1}{k} \cdot \left(p_{n-1} + p_n\right) \end{cases}$$

Отсюда получаем, что:

$$\forall m \quad C(2m-1) \le C(2m) \le C(2m+1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p_{2m-2} \le p_{2m} \\ p_{2m-1} \le p_{2m+1} \end{cases}$$

$$\forall m \quad C(2m-1) \ge C(2m) \ge C(2m+1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p_{2m-2} \ge p_{2m} \\ p_{2m-1} \ge p_{2m+1} \end{cases}$$

Осталось доказать, что для не строго монотонной функции $C(s)$ эта система уравнений на p_s всегда имеет решения. Для этого необходимо и достаточно выполнение неравенств (4):

$$\begin{cases} C(s) \ge \big(C(s-1) - C(s-2)\big) \\ C(s) \ge \big(C(s-1) - C(s-2)\big) + \big(C(s-3) - C(s-4)\big) \\ \ldots \\ C(s) \ge \sum\limits_{i=1}^{m} \big[C(s-2i+1) - C(s-2i)\big] \\ \ldots \\ C(s) \ge \Delta_{s-1} + \Delta_{s-3} + \ldots + \Delta_2 \end{cases}$$

Сначала рассмотрим случай не строго возрастающей функции $C(s)$ и докажем, что для любого m выполняется неравенство:

$$C(s) \ge \sum_{i=1}^{m} \big[C(s-2i+1) - C(s-2i)\big]$$

Перепишем сумму в правой части, убрав из-под знака суммы первое и последнее слагаемые:

$$\sum_{i=1}^{m} \big[C(s-2i+1) - C(s-2i)\big] = C(s-1) +$$

$$\sum_{i=1}^{m} \big[C(s-2i+1) - C(s-2i)\big] = C(s-1) +$$

Так как $C(s)$ – возрастающая функция, то $\big[-C(s-2i) + C(s-2i-1)\big] \le 0$ и $C(s) \ge C(s-1)$. Поэтому:

$$C(s-1) + \sum_{i=1}^{m-1} \big[-C(s-2i) + C(s-2i-1)\big] - C(s-2m) \le C(s-1) \le C(s).$$

И значит:

$$C(s) \ge \sum_{i=1}^{m} \big[C(s-2i+1) - C(s-2i)\big].$$

Теперь докажем это неравенство для не строго убывающей $C(s)$. В этом случае $\big[C(s-2i+1) - C(s-2i)\big] \le 0$ и, следовательно:

$$C(s) \ge 0 \ge \sum_{i=1}^{m} \big[C(s-2i+1) - C(s-2i)\big].$$

Таким образом, для не строго монотонной функции $C(s)$ неравенства (4) всегда выполняются и система уравнений имеет такие решения, что последовательность $p_0, p_1, \ldots, p_n$ не строго монотонна отдельно по четным и нечетным номерам.

Теорема 13 доказана.

<u>Теорема 14</u>. Если для индекса влияния выполнены аксиомы диктатора, аддитивности и анонимности, функция $C(s)$ является симметричной:

$C(n-s) = C(s)$,

и для левой ее половины выполнены неравенства (4), то такой индекс влияния имеет вероятностное представление (3):

$$\Phi(A) = \sum_{S} \big(p_s + p_{s-1}\big).$$

<u>Доказательство</u>. Доказательство основано на том, что из выполнения неравенств (4) для левой половины функции $C(s)$ следует их выполнение и для правой ее половины – $C(n-s)$. Доказательство не сложно, но не приводится в данной работе из-за своей громоздкости.

4.4. Примеры индексов влияния, имеющих вероятностное представление

Теорема 13 показывает, что одним из случаев, когда индекс влияния будет иметь вероятностное представление, является случай возрастающей либо убывающей функции вклада коалиции в индексы влияния ее ключевых игроков $C(s)$. Рассмотрим два примера таких функций: $C(s) = s$ и $C(s) = \frac{1}{s}$.

При функции $C(s) = s$ вклад коалиции в индексы влияния ее ключевых игроков прямо пропорционален размеру коалиции. Чем больше коалиции, в которых игрок является ключевым, тем больше его влияние. Такой выбор функции $C(s)$ можно объяснить: для того чтобы быть ключевым игроком в большой коалиции, нужно обладать большим влиянием.

При функции $C(s) = \frac{1}{s}$ вклад коалиции в индексы влияния ее ключевых игроков обратно пропорционален размеру этой коалиции. Чем меньше коалиции, которые игрок делает выигрывающими, тем больше его влияние. Такой выбор функции $C(s)$ также может быть оправдан – для того чтобы сделать маленькую коалицию выигрывающей, нужно обладать большим влиянием.

Для таких функций индекс влияния некоторого игрока i будет, соответственно, вычисляться по формулам:

$$1)\ \Phi(i) = \sum_{S} s,$$

$$2)\ \Phi(i) = \sum_{S} \frac{1}{s},$$

где суммирование производится по всем значимым для игрока i коалициям S. Например, для трех игроков A, B и C с весами 50, 49 и 1 и квотой 50 значимыми будут коалиции:

A: AB, AC, ABC

B: AB

C: AC

Индексы влияния A, B, C будут равны:

1) 7, 2, 2

2) $\frac{8}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{6}$

Чтобы найти вероятностное распределение, соответствующее индексу влияния, заданному функцией $C(s)$, необходимо решить

систему линейных уравнений. Например, для $C(s) = s$ в случае четырех игроков получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} p_0 + p_1 = k \\ p_1 + p_2 = 2k \\ p_2 + p_3 = 3k \\ p_3 + p_4 = 4k \\ p_0 + 4p_1 + 6p_2 + 4p_3 + p_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_0 = t \\ p_1 = k - t \\ p_2 = k + t \\ p_3 = 2k - t \\ p_4 = 2k + t \\ p_0 + 4p_1 + 6p_2 + 4p_3 + p_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{1}{20}$$

У этой системы множество решений, соответствующих различным значениям $t \in \left[0, \frac{1}{20}\right]$. Взяв $t = \frac{1}{40}$, получаем следующее распределение вероятностей, задающее наш индекс влияния:

$$p_{0000} = p_0 = \frac{1}{40}$$

$$p_{0001} = p_{0010} = p_{0100} = p_{1000} = p_1 = \frac{1}{40}$$

$$p_{0011} = p_{0101} = p_{0110} = p_{1001} = p_{1010} = p_{1100} = p_2 = \frac{3}{40}$$

$$p_{1110} = p_{1101} = p_{1011} = p_{0111} = p_3 = \frac{3}{40}$$

$$p_{1111} = p_4 = \frac{5}{40}$$

Из этого распределения видно, что более вероятны те исходы голосования, в которых больше голосов «да».

Аналогично можно получить вероятностное распределение для функции $C(s) = \frac{1}{s}$ в случае четырех игроков:

$$p_{0000} = p_0 = \frac{17}{90}$$

$$p_{0001} = p_{0010} = p_{0100} = p_{1000} = p_1 = \frac{7}{90}$$

$$p_{0011} = p_{0101} = p_{0110} = p_{1001} = p_{1010} = p_{1100} = p_2 = \frac{5}{90}$$

$$p_{1110} = p_{1101} = p_{1011} = p_{0111} = p_3 = \frac{3}{90}$$

$$p_{1111} = p_4 = \frac{3}{90}$$

Здесь уже более вероятными являются исходы с большим числом голосов «нет».

Литература

1. *Алескеров Ф.Т.* Индексы влияния, учитывающие предпочтения участников по созданию коалиций // ДАН. 2007. Т. 414. № 5. С. 594–597.

2. *Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А.* Бинарные отношения, графы и коллективные решения. М., 2006.

3. *Shapley L.S., Shubik M.* A method for Evaluting the Distribution of Power in a Committee System // American Political Science Review. 1954. No. 48. P. 787–792.

4. *Banzhaf J.F.* Weighted Voting Doesn' t Work: A Mathematical Analysis // Rutgers Law Review. 1965. No. 19. P. 317–343.

5. *Оуэн Г.* Теория игр. М., 1968.

6. *Owen G.* Multilinear Extensions of Games // Management Science. 1972. No. 18. P. 64–79.

7. *Dubey P.* On the Uniqueness of the Shapley Value // International Journal of Game Theory. 1975. No. 4. P. 131–139.

8. *Straffin P.* Homogeneity, independence, and power indices // Public Choice. 1977. No. 30. P. 107–118.

9. *Dubey P., Shapley L.S.* Mathematical Properties of the Banzhaf Power Index // Mathematics of Operation Research. 1979. No. 4. P. 99–131.

10. *Laruelle A., Valenciano F.* Shapley-Shubik and Banzhaf Indicies Revisited // Mathematics of Operation Research. 2000. No. 26. P. 89–104.

11. *Laruelle A., Valenciano F.* Assessing success and decisiveness in voting situations // Social Choice and Welfare. 2005. No. 24. P. 171–197.

12. *Kaniovskiy S.* The exact bias of the Banzhaf measure of power when votes are not equiprobable and independent // Austrian Institute of Economic Research. 2006.

13. *Friedman J., McGrath L., Parker C.* Achievable hierarchies in voting games // Theory and Decision. 2006. No. 61. P. 305–318.

Препринт WP7/2009/04
Серия WP7
Математические методы анализа решений
в экономике, бизнесе и политике

Бацын М.В., Калягин В.А.

Об аксиоматическом определении общих индексов влияния в задаче голосования с квотой

Публикуется в авторской редакции

Зав. редакцией оперативного выпуска *А.В. Заиченко*
Корректор *Н.В. Антонова*
Технический редактор *Ю.Н. Петрина*

Отпечатано в типографии ГУ ВШЭ с представленного оригинал-макета.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Тираж 150 экз. Уч.-изд. л. 1,9.
Усл. печ. 2,55. Заказ № . Изд. № 1116.

ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Тел.: (495) 772-95-71; 772-95-73