федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

Кафедра «Прикладная математика-1»

М.М.Деркач, А.М.Филимонов, Д.А.Филимонов

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Рекомендовано редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия для
студентов, обучающихся по специальности
«Прикладная математика и информатика»

Москва – 2013

УДК 517.98
Д36

Деркач М.М., Филимонов А.М., Филимонов Д.А. Функциональный анализ и его приложения. Учебное пособие. — М.: МИИТ, 2013. — 84 с.

В учебном пособии изложены основные понятия функционального анализа, причем большое внимание уделено прикладной стороне.

Первая часть курса (главы I - IV) посвящена стандартным вопросам, отбор которых определяется теми приложениями, которые рассматриваются во второй части. Вторая часть содержит некоторые применения методов функционального анализа к задачам математической физики. В частности, речь идет о доказательстве существования обобщенных (в смысле Соболева) решений краевых задач для стационарных уравнений и о существовании обобщенных собственных значений и собственных функций в нестационарных задачах. Там же анализируются и свойства этих обобщенных решений (проблема следов). Приведены теоремы вложения Соболева и теорема Кондрашова о компактности оператора вложения, используемые при анализе обобщенных решений.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности «Прикладная математика и информатика».

Рецензенты:

Научный сотрудник, к. ф.-м. н	А.С. Воронцов (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН)
Доцент кафедры «Высшая математика», к. ф.-м. н.	М.Б. Аверинцев (МИИТ)

Содержание

Введение

Методические комментарии

Курс функционального анализа на специальности «Прикладная математика и информатика» читается во втором семестре третьего курса. Параллельно, в то же самое время, читаются курсы «Уравнения математической физики» и третья часть курса «Численные методы», посвященная вариационным методам решения задач математической физики. Это, а также небольшое время, отведенное на курс функционального анализа, и обусловливает содержание этого курса, призванного не только сообщить основные понятия функционального анализа, но продемонстрировать, как «работают» соответствующие методы. Соответственно курс условно делится на две большие части.

Первая часть курса (главы I – IV) посвящена стандартным вопросам, отбор которых был построен по принципу жесткой минимальности и определялся теми приложениями, которые рассматриваются во второй части. Поэтому изложение во многих местах, хорошо освещенных в литературе, по необходимости сжатое и конспективное. Центральное место в первой части занимает теорема о пополнении метрических пространств. Для дальнейшего существенна не только формулировка, но и доказательство, из которого видна конструкция пополнения. Дело в том, что с помощью вариационных методов (практическая реализация которых рассматривается в курсе «Численные методы»), получается существование *обобщенных* решений, т.е. элементов *пополненных* функциональных пространств. Поэтому такие решения представляют собой, вообще говоря, не функции, а классы эквивалентных фундаментальных последовательностей. В связи с этим возникает проблема граничных значений решений (проблема следов) и необходимость введения соболевских пространств. Эти вопросы обсуждаются во второй части курса (глава V).

Интегралу Лебега отведено минимальное место и он определен лишь для функций из L_2, что вполне достаточно для рассматриваемых приложений. Теорема о некомпактности шара в бесконечномерном пространстве (используемая во второй части при анализе «почти обратного» оператора) лишь иллюстрируется на примере пространства m. С целью экономии времени теорему Хана – Банаха можно привести без доказательства, оставив ее доказательство (в том числе и в несепарабельном случае) в качестве теоретической части курсовой работы. Аналогичное соображение относится и к доказательству единственности пополнения метрического пространства. Вообще, в первой части проведена достаточно жесткая экономия времени.

Вторая часть содержит некоторые применения методов функционального анализа к задачам математической физики. В частности, речь идет о доказательстве существования обобщенных (в смысле Соболева) решений краевых задач для стационарных уравнений и о существовании обобщенных собственных значений и собственных функций в нестационарных задачах. Там же анализируются и свойства этих обобщенных решений (проблема следов). Приведены теоремы вложения Соболева и теорема Кондрашова о компактности оператора вложения, используемые при анализе обобщенных решений. Доказательство теоремы Соболева о вложении в C приведено в одномерном случае, так как оно в этом случае достаточно просто и хорошо иллюстрирует идею доказательства в многомерном случае. Трехмерный случай может быть предложен для самостоятельного изучения, например, по книге В.А. Треногина [3] в качестве теоретической части курсовой работы.

Доказательство теоремы Гильберта – Шмидта проведено в том виде, как оно изложено в книге Г. Е. Шилова [5] (здесь, как и в теореме о пополнении пространств, для приложений во второй части важна не только формулировка, но и подробное доказательство).

В курсе по возможности используются унифицированные обозначения, однако от этого иногда имеются отступления в соответствии со сложившейся традицией. Во всяком случае, сто́ит согласовать эти обозначения с лекторами курсов «Численные методы» и «Уравнения математической физики».

При изложении возможны некоторые пересечения с курсом «Численные методы», но они неизбежны в силу самой логики изложения. Впрочем, речь идет о доказательстве всего нескольких простых утверждений. Можно, конечно, руководствоваться принципом «повторение — мать учения». Но можно, по согласованию с лектором курса «Численные методы», эти доказательства (при сохранении точных формулировок) опустить ради экономии времени.

Каждая курсовая работа (проект) состоит из двух частей. Первая часть — теоретическая, в которой предлагается самостоятельно, по литературе, разобрать ряд вопросов, не получивших достаточного освещения в курсе. Вторая — практическая, в которой дано достаточно унифицированное вычислительное задание, различающееся числовыми данными и содержащее теоретические вопросы.

Возможные примеры таких вычислительных заданий приведены в конце курса.

Литература, включенная в предлагаемый список, подобрана, в основном, исходя из прикладной направленности курса.

1 Пространства

1.1 Метрические пространства

Определение. Пусть отображение $\varrho\colon \mathbb{M}\times\mathbb{M}\to\mathbb{R}^1$ таково, что для всех $x, y \in M$ имеем

$$\begin{gathered}\varrho(x,y)\geqslant 0, \quad \varrho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y;\\ \varrho(x,y)=\varrho(y,x); \quad \varrho(x,y)\leqslant \varrho(x,z)+\varrho(z,y).\end{gathered} \tag{1}$$

Тогда ϱ называется *метрикой* на множестве $\mathbb{M}$, а само множество в этом случае называется *метрическим пространством.*

Следствие. Легко проверяется,что

$$|\varrho(x,y)-\varrho(z,u)|\leqslant \varrho(x,z)+\varrho(y,u). \tag{2}$$

В самом деле,

$$\varrho(x,y)\leqslant \varrho(x,z)+\varrho(y,z)\leqslant \varrho(x,z)+\varrho(y,u)+\varrho(z,u),$$

так что

$$\varrho(x,y)-\varrho(z,u)\leqslant \varrho(x,z)+\varrho(y,u).$$

Меняя ролями x с z и y с u, получаем требуемое утверждение.

Последовательностью называется отображение $\mathbb{N}\to\mathbb{M}$ ($\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, а $\mathbb{M}$ — метрическое пространство).

Шар с центром в точке a и *радиусом* r определяется так:

$$B_a^r=\{x\in\mathbb{M}|\varrho(x,a)<r\}.$$

ε-окрестность точки a — это шар B_a^ε. *Предел последовательности* определяется так же, как и в курсе математического анализа:

$$a=\lim_{h\to+\infty} y_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N \Rightarrow \varrho(a,y_n)<\varepsilon.$$

Совершенно аналогично тому, как это было в курсе математического анализа, определяются понятия *открытого* и *замкнутого множеств*, *предельной точки*, *ограниченного подмножества*, *фундаментальной последовательности*, *всюду плотного множества*. Аналогично доказываются единственность предела и фундаментальность сходящейся последовательности.

Если $\mathbb{M}$ — линейное пространство над полем действительных или комплексных чисел, то метрику, в частности, можно ввести с помощью нормы.

Определение. Отображение $\|\cdot\|\colon \mathbb{M} \to \mathbb{R}^1$ называется *нормой* (над полем $\mathbb{P}$ вещественных или комплексных чисел), если для любых $x, y \in M$, $\lambda \in \mathbb{P}$ имеем

$$\begin{aligned}
&\|x\| \geqslant 0,\\
&\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;\\
&\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|,\\
&\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.
\end{aligned}$$

Тогда можно положить $\varrho(x, y) = \|x - y\|$; при этом легко проверяются все свойства (1).

Если $\mathbb{M}$ — линейное пространство со скалярным произведением, то норму можно ввести как $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. И в этом случае легко проверяются аксиомы метрики. Кроме того, как показано в алгебре, в этом случае выполняется неравенство Коши-Буняковского:

$$(x, y) \leqslant \|x\|\|y\|.$$

Теорема. Метрика является непрерывной функцией своих аргументов, т.е.

$$x_n \to x_0, \quad y_n \to y_0 \Rightarrow \varrho(x_n, y_n) \to \varrho(x_0, y_0).$$

Доказательство. Это сразу следует из свойства (2). Аналогично можно доказать непрерывность нормы и скалярного произведения.

Пространство непрерывных функций с равномерной метрикой: $C[0,1]$

Пусть X — множество всех непрерывных функций, заданных на отрезке $[0,1]$. Введем метрику, полагая

$$\rho(x,y) = \max_t |x(t) - y(t)|.$$

Проверим выполнение аксиом метрики.

То, что $\rho(x,y) \geqslant 0$ и $\rho(x,y) = 0$, лишь если $x(t) \equiv y(t)$, а также, что $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, очевидно. Остается проверить аксиому треугольника.

Для любого $t \in [0,1]$ имеем

$$\begin{aligned} |x(t) - z(t)| &= |[x(t) - y(t)] + [y(t) - z(t)]| \leqslant \\ &\leqslant |x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)| \leqslant \\ &\leqslant \max_t |x(t) - y(t)| + \max_t |y(t) - z(t)| = \\ &= \rho(x,y) + \rho(y,z). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\rho(x,z) = \max_t |x(t) - z(t)| \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

Множество всех непрерывных функций, заданных на отрезке [0,1], в котором метрика введена указанным образом, называется *пространством непрерывных функций* и обозначается $C[0,1]$. Мы будем называть его также *пространством непрерывных функций с чебышевской метрикой*, так как расстояние между функциями совпадает с чебышевским уклонением.

Рассмотрим сходимость в пространстве $C[0,1]$. Пусть дана последовательность $\{x_n(t)\}$ элементов из $C[0,1]$, сходящаяся к $x(t)$ ($\rho(x_n, x) \to 0 \quad$ при $\quad n \to \infty$). Это значит, что

$$\max_t |x_n(t) - x(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

т. е. для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что

$$\max_t |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$$

для всех $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ и, следовательно,

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$$

для $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ и для всех $t \in [0, 1]$. Но это означает, что последовательность $\{x_n(t)\}$ равномерно сходится к функции $x(t)$.

Легко видеть, что и обратно, если последовательность $\{x_n(t)\}$ равномерно сходится к $x(t)$, то $\rho(x_n, x) \to 0$.

Таким образом, сходимость в пространстве $C[0, 1]$ есть *равномерная сходимость* на отрезке [0,1].

Пространство ограниченных числовых последовательностей: m

Пусть X — множество всех ограниченных числовых последовательностей

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}.$$

Это значит, что для каждого x существует такая константа K_x, что $|\xi_j| \leqslant K_x$ для всех j.

Пусть $x = \{\xi_j\}$ и $y = \{\eta_j\}$ принадлежат X. Введем расстояние равенством

$$\rho(x, y) = \sup_j |\xi_j - \eta_j|.$$

Очевидно, проверки требует лишь аксиома треугольника. Имеем

$$|\xi_j - \zeta_j| \leqslant |\xi_j - \eta_j| + |\eta_j - \zeta_j| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_j |\xi_j - \eta_j| + \sup_j |\eta_j - \zeta_j| = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Следовательно, и

$$\sup_j |\xi_j - \zeta j| = \rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Полученное пространство называется *пространством ограниченных числовых последовательностей и обозначается буквой m.*

Пусть x_n и x — элементы из m, $x_n = \{\xi_j^{(n)}\}$, $x = \{\xi_j\}$ и $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$; это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что

$$\rho(x_n, x) = \sup_j |\xi_j^{(n)} - \xi_j| < \varepsilon, \text{ при } n \geqslant n_0(\varepsilon).$$

Отсюда

$$|\xi_j^{(n)} - \xi_j| < \varepsilon$$

при $n \geqslant n_o(\varepsilon)$ и любом j.

Легко видеть, что и обратно, если $|\xi_j^{(n)} - \xi_j| < \varepsilon$ при $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ и всех j, то $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, сходимость в пространстве m есть *сходимость по координатам, равномерная относительно номеров координат.*

Пространство сходящихся числовых последовательностей: c

Пусть X — множество сходящихся числовых последовательностей

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\},$$

т.е. для любого натурального i существует

$$\lim_{i \to \infty} \xi_i = \xi.$$

Пусть

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}, \qquad y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots\}.$$

Полагаем

$$\rho(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i|.$$

Полученное пространство называется *пространством c*. Через $c_0 \subset c$ обозначается подпространство (т.е. подмножество с той же метрикой) сходящихся к нулю последовательностей. Очевидно, что пространство c сходящихся числовых последовательностей является подпространством пространства m ограниченных числовых последовательностей.

Отсюда следует выполнение аксиом метрики в c и то, что сходимость в c есть *сходимость по координатам, равномерная относительно номеров координат*.

Пространство ограниченных вещественных функций. Рассмотрим множество всех ограниченных функций $x(t)$ вещественной переменной t, заданных на отрезке [0,1]. Введем метрику, полагая

$$\rho(x, y) = \sup_t |x(t) - y(t)|.$$

Без труда проверяем, что все аксиомы метрики выполняются. Множество всех вещественных ограниченных функций с такой метрикой называется *пространством M*[0,1]. Легко видеть, что сходимость в пространстве M [0,1] есть *равномерная сходимость на отрезке* [0,1]. Ясно также, что $C[0,1] \subset M[0,1]$.

Понятие метрики позволяет ввести понятие сходимости. Однако, бывает и так, что для каких-либо целей понятие сходимости вводится непосредственно, с помощью тех, или иных конструкций. Тогда возникает естественный вопрос: нельзя ли описать эту сходимость в терминах какой-либо метрики. Если это возможно, то это называется метризацией пространства.

Пространство всех числовых последовательностей. Приведем пример метризуемого пространства. Пусть X — множество всех последовательностей вещественных чисел. Введем в этом множестве понятие предельного перехода, полагая, что $x_n = \{\xi_j^{(n)}\}$ стремится к $x = \{\xi_j\}$, если $\xi_j^{(n)} \to \xi_j$ для всех $j = 1$, 2, 3, ... (вообще говоря, неравномерно относительно j). Мы получаем, таким образом, некоторое множество, которое назовем *пространством* s.

Покажем, что пространство s можно метризовать, то есть, ввести такую метрику, сходимость в которой соответствовала бы первоначально введенной сходимости.

Пусть $x = \{\xi_j\} \in s$ и $y = \{\eta_j\} \in s$. Положим

$$\rho(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|\xi_j - \eta_j|}{(1 + |\xi_j - \eta_j|)}$$

Аксиомы тождества и симметрии очевидны.

Аксиома треугольника следует из неравенства

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|},$$

которое доказывается следующим образом.

Пусть a и b одного знака. Можно считать, что $a > 0$ и $b > 0$ и тогда

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} = \frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

Пусть теперь a и b разных знаков. Считаем, что $|a| \geqslant |b|$. Тогда

$$|a+b| \leqslant |a|.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Имеем

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0,$$

так что $f(x)$ — возрастающая функция. Значит,

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|},$$

Возвращаясь к аксиоме треугольника, находим

$$\begin{aligned}
\rho(x,z) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|\xi_j - \zeta_j|}{1+|\xi_j - \zeta_j|} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|\xi_j - \eta_j + \eta_j - \zeta_j|}{1+|\xi_j - \eta_j + \eta_j - \zeta_j|} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|\xi_j - \eta_j|}{1+|\xi_j - \eta_j|} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|\eta_j - \zeta_j|}{1+|\eta_j - \zeta_j|} = \\
&= \rho(x,y) + \rho(y,z),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Покажем, что сходимость в смысле введенной метрики есть сходимость по координатам (вообще говоря, неравномерная относительно номеров координат). В самом деле, пусть $x_n = \left\{\xi_j^{(n)}\right\}$, $x = \{\xi_j\}$ и $x_n \to x$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|\xi_j^{(n)} - \xi_j|}{1+|\xi_j^{(n)} - \xi_j|} < \varepsilon$$

при $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Но тогда для каждого фиксированного j тем более

$$\frac{1}{2^j} \cdot \frac{|\xi_j^{(n)} - \xi_j|}{1+|\xi_j^{(n)} - \xi_j|} < \varepsilon$$

при $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, и так как ε произвольно, а j фиксировано, то

$$|\xi_j^{(n)} - \xi_j| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Пусть, обратно,

$$|\xi_j^{(n)} - \xi_j| \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

для каждого j. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Выберем сначала m так, чтобы

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\varepsilon}{2},$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\rho(x_n, x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|\xi_j^{(n)} - \xi_j|}{1 + |\xi_j^{(n)} - \xi_j|} = \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|\xi_j^{(n)} - \xi_j|}{1 + |\xi_j^{(n)} - \xi_j|} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|\xi_j^{(n)} - \xi_j|}{1 + |\xi_j^{(n)} - \xi_j|} < \\
&< \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|\xi_j^{(n)} - \xi_j|}{1 + |\xi_j^{(n)} - \xi_j|} + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Так как число слагаемых в оставшейся сумме конечно и фиксировано, то можно выбрать такое $n_0(\varepsilon)$, что

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|\xi_j^{(n)} - \xi_j|}{1 + |\xi_j^{n} - \xi_j|} < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Но тогда для $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ имеем

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Из доказанного следует, что сходимость в смысле введенной метрики совпадает со сходимостью, ранее определенной в пространстве s, и, следовательно, введение этой метрики приводит к метризации пространства s. Отметим также, что можно построить примеры неметризуемых пространств.

Пространство сходимости по мере. Пусть X — совокупность всех измеримых функций $x(t)$, определенных на отрезке $[0, 1]$. Две функции, совпадающие почти всюду, мы считаем тождественными.

Введем метрику посредством равенства

$$\rho(x, y) = \int\limits_0^1 \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|}\, dt.$$

Так же как и в предыдущем примере, убеждаемся, что аксиомы метрики выполняются.

Полученное пространство называется *пространством* $S[0, 1]$. Можно показать, что сходимость в $S[0, 1]$ есть *сходимость по мере.* Определение сходимости по мере см. в [1].

Пространство функций с интегрируемой p-й степенью. Пусть X — множество всех непрерывных на $[0, 1]$ функций. Для таких функций полагаем

$$\rho(x, y) = \left(\int\limits_0^1 |x(t) - y(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Выполнение аксиом тождества и симметрии легко проверяется; аксиома треугольника следует из неравенства Минковского для интегралов. Полученное пространство называется *пространством* $CL_p[0, 1]$.

Пусть $x_n(t) \in CL_p[0, 1]$, $n = 1, 2, ...,$ и $\{x_n(t)\}$ сходится к $x_n(t) \in CL_p[0, 1]$, т. е.

$$\int\limits_0^1 |x(t) - y(t)|^p\, dt \to 0$$

при $n \to \infty$. Тогда говорят, что последовательность функций $\{x_n(t)\}$ сходится *в среднем с показателем* (индексом) p к функции $x(t)$. При $p = 2$ говорят просто о *сходимости в среднем.*

Пространство числовых последовательностей l_p $(p \geqslant 1)$**.** Пусть X — множество последовательностей вещественных

чисел
$$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\},$$
принадлежащих l_p.

Если $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ и $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots\}$, то определим расстояние по формуле
$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$
Выполнение аксиом симметрии и тождества проверяется без труда. Аксиома треугольника следует из неравенства Минковского для сумм.

Полученное пространство называется *пространством* l_p. Пространство l_2 называется *координатным гильбертовым пространством.*

Можно показать (см. критерий компактности в пространстве l_p), что сходимость последовательности $\{x_n\}$, $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$ к элементу $x = \{\xi_i\}$ в пространстве l_p означает, что

1) $\xi_i^{(n)} \to \xi_i$ при $n \to \infty$ для всех i;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N_0(\varepsilon)$, что $\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p < \varepsilon^p$ для $N \geqslant N_0(\varepsilon)$ и всех n.

1.2 Полнота

Определение. Метрическое пространство называется *полным*, если в нем каждая фундаментальная последовательность имеет предел по метрике этого пространства, принадлежащий этому пространству.

Определение. Полное нормированное линейное пространство называется *банаховым.*

Напоминание. Отношение эквивалентности в множестве $\mathbb{M}$ порождает разбиение этого множества на непересекающиеся классы.

Определение. Два метрических пространства $\mathbb{M}$ и $\tilde{\mathbb{M}}$ называются изометричными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее расстояние:

$$\mathbb{M} \simeq \tilde{\mathbb{M}} \Leftrightarrow \varrho(x, y) = \tilde{\varrho}(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Теорема о пополнении. Для любого неполного метрического пространства $\mathbb{M}$ существует минимальное полное пространство $\mathbb{P} \supset \tilde{\mathbb{M}} \simeq \mathbb{M}$. Пространство $\mathbb{P}$ называется *пополнением* $\mathbb{M}$. При этом $\mathbb{P}$ единственно с точностью до изометрии.

Лемма 1. В $\mathbb{M}$ рассмотрим множество фундаментальных последовательностей $\{x_n\}, \{y_n\}, \ldots$. Их множество обозначим через $\mathbb{P}$. Тогда для каждой пары таких последовательностей существует $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n)$.

Доказательство. Рассмотрим

$$|\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x_m, y_m)| \leqslant \varrho(x_n, x_m) + \varrho(y_n, y_m) \to 0$$

$\Rightarrow \{\varrho(x_n, y_n)\}$ — фундаментальная последовательность действительных чисел. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n)$.

В множестве всех фундаментальных последовательностей введем отношение эквивалентности:

$$\{x_n\} \sim \{x'_n\} \Leftrightarrow \varrho(x_n, x'_n) \to 0$$

Тогда получим разбиение на классы: $\tilde{x} \ni \{x_n\}$. Множество этих классов обозначим $\mathbb{P}$.

Лемма 2. Предел в лемме 1 не меняется при замене последовательности на ей эквивалентную.

Доказательство. Рассмотрим

$$\varrho(x'_n, y_n) \leqslant \varrho(x_n, x'_n) + \varrho(x_n, y_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \varrho(x'_n, y_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n).$$

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x'_n, y_n)$.

Определение. Положим

$$\tilde{\varrho}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n)$$

Проверка аксиом метрики: $\tilde{\varrho} = 0 \Leftrightarrow \{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$. Проверка остальных аксиом тривиальна. Таким образом, множество $\mathbb{P}$ становится метрическим пространством.

Рассмотрим множество $\tilde{\mathbb{M}} \subset \mathbb{P}$, порожденное стационарными последовательностями: $(x_1, x_1, x_1, ...) \in \tilde{x_1}$.

Ясно, что в каждом *таком* классе может быть только одна стационарная последовательность. При этом, если $\{x\}$ и $\{y\}$ стационарны, то $\varrho(x, y) = \tilde{\varrho}(\tilde{x}, \tilde{y})$. Таким образом $\tilde{\mathbb{M}} \simeq \mathbb{M}$.

Лемма 3. $\tilde{\mathbb{M}}$ всюду плотно в $\mathbb{P}$.

Доказательство. Пусть $\tilde{x}^* \in \mathbb{P}$ и $\forall \varepsilon > 0$. Возьмем $\{x_n\} \in \tilde{x}^*$. Пусть из $n, m > N \Rightarrow \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Рассмотрим стационарную последовательность

$$x_{m_0}, x_{m_0}, x_{m_0}, ... \quad (m_0 > N).$$

Эта последовательность принадлежит $\tilde{x}_{m_0} \in \tilde{\mathbb{M}}$. С другой стороны,

$$\varrho(\tilde{x}^*, \tilde{x}_{m_0}) = \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x_{m_0}) < \varepsilon \Rightarrow \overline{\tilde{\mathbb{M}}} = \mathbb{P}.$$

Лемма 4. Пространство $\mathbb{P}$ полно.

Доказательство. Вначале рассмотрим любую фундаментальную последовательность точек из $\mathbb{M}$, трактуемых как элементы $\mathbb{P}$, т.е. как стационарные последовательности

$$x_1 \leftrightarrow \{x_1\} \in \tilde{x}_1, \quad x_2 \leftrightarrow \{x_2\} \in \tilde{x}_2, \ldots .$$

Эта последовательность фундаментальна в $\mathbb{M}$ по построению, а в силу изометрии с $\tilde{\mathbb{M}}$ она фундаментальна и в $\mathbb{P}$. Но последовательность $x_1, x_2, \ldots$ порождает некоторый класс $\tilde{x}^*$. Рассмотрим

$$x_k, x_k, x_k, \ldots, x_k, \cdots \leftrightarrow \tilde{x}_k,$$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots \leftrightarrow \tilde{x}^*.$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{\varrho}\,(\{x_n\}, \{x_k\}_n) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x_k) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} (\tilde{\varrho}_k = \varepsilon_k) = \lim_{k\to\infty} \tilde{\varrho}\,(\tilde{x}_k, \tilde{x}^*) = 0,$$

т.е. фундаментальная последовательность точек из $\tilde{\mathbb{M}}$ сходится к $\tilde{x}^* \in \mathbb{P}$.

Пусть теперь имеется фундаментальная последовательность точек из $\mathbb{P}$:

$$\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \tilde{x}_3^*, \dots, \tilde{x}_k^*, \dots.$$

Так как по лемме 3 множество $\tilde{\mathbb{M}}$ всюду плотно в $\mathbb{P}$, то

$$\forall \tilde{x}_k^* \ \exists \tilde{x}_k \in \tilde{\mathbb{M}} \Rightarrow \tilde{\varrho}(\tilde{x}_k^*, \tilde{x}_k) < \frac{1}{k}.$$

Но последовательность $\{\tilde{x}_k\}$ фундаментальна, так как

$$\tilde{\varrho}(\tilde{x}_k, \tilde{x}_m) \leqslant \tilde{\varrho}(\tilde{x}_k, \tilde{x}_k^*) + \tilde{\varrho}(\tilde{x}_k^*, \tilde{x}_m^*) + \tilde{\varrho}(\tilde{x}_m, \tilde{x}_m^*) < \frac{1}{k} + \tilde{\varrho}(\tilde{x}_k^*, \tilde{x}_m^*) + \frac{1}{m}.$$

Поэтому существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{x}_k = \tilde{x}^*$ при $k \to \infty$. Отсюда

$$\tilde{\varrho}(\tilde{x}_k^*, \tilde{x}^*) \leqslant \tilde{\varrho}(\tilde{x}_k^*, \tilde{x}_k) + \tilde{\varrho}(\tilde{x}_k, \tilde{x}^*) \leqslant \frac{1}{k} + \tilde{\varrho}(\tilde{x}_k, \tilde{x}^*) \to 0.$$

Значит $\tilde{x}_k^* \to \tilde{x}^*$.

Можно доказать единственность (в упомянутом выше смысле) пространства $\mathbb{P}$.

Пример. Пространство $C[a,b]$ полное, $CL_1[a,b]$, $CL_2[a,b]$ не полные.

Пополнение пространства $CL_p[0,1]$ обозначается как $L_p[0,1]$.

Пространство $L_2[0,1]$ называется *гильбертовым функциональным пространством* по имени великого немецкого математика Давида Гильберта (1862–1943).

Пример. Рассмотрим множество действительных чисел с метрикой $\rho(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$. Тогда, по описанной конструкции пополнения, классы эквивалентности, содержащие стационарные последовательности, соответствуют обычным точкам прямой. Например, класс, содержащий последовательности $1, 1, 1, \ldots$ и $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{k}{k+1}, \ldots$ соответствует единице. А класс, не содержащий стационарной последовательности, является элементом пополнения. Например, класс, содержащий последовательности $1, 2, 3, \ldots$ и $1, 2^2, 3^2, \ldots$ естественно отождествить с $+\infty$.

Примечание. Конструкцию пополнения можно применить и к нормированному пространству. В этом случае на классах $\tilde{x}, \tilde{y}$ можно доопределить алгебраическую операцию сложения и умножения на числа λ.

Если же исходное пространство обладало скалярным произведением, то можно определить и скалярное произведение $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Подробнее об этом пойдет речь в следующем параграфе.

1.3 Понятие об интеграле Лебега

В множестве непрерывных ограниченных функций, определенных в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ с кусочно гладкой границей введем скалярное произведение

$$(u, v) = \int\limits_{\Omega} uv dx_1 \ldots dx_N.$$

Пополнение по норме, порожденной этим произведением обозначим $L_2(\Omega)$:

$$\|u\|^2 = \int\limits_{\Omega} u^2 dx_1 \ldots dx_N. \tag{3}$$

Пусть $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ фундаментальные по норме (3) последовательности непрерывных функций. Рассмотрим числовую последовательность (u_k, v_k) :

$$|(u_k, v_k) - (u_m, v_m)| \leqslant |(u_k, v_k) \pm (u_k, v_m) - (u_m, v_m)| \leqslant$$
$$\leqslant |(u_k - u_m, v_k)| + |(u_m, v_k - v_m)| \leqslant$$
$$\leqslant \|u_k - u_m\| \|v_k\| + \|u_m\| \|v_k - v_m\| \to 0.$$

Поэтому последовательность $\{(u_k, v_k)\}$ фундаментальна и существует $\lim\limits_{k\to\infty} (u_k, v_k)$.

Можно показать, что этот предел не зависит от замены последовательностей $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ на им эквивалентные. Поэтому можно положить

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} u_k v_k dx_1 \ldots dx_N.$$

В частности, существует

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} u_k \cdot 1 dx_1 \ldots dx_N,$$

называемый *интегралом Лебега* от функции $\tilde{u} \in L_2$.

Подчеркнем, что $\tilde{u}$ — это не одна конкретная функция, а класс эквивалентных (в смысле нормы (3)) фундаментальных последовательностей функций. Таким образом, конкретные значения $\tilde{u}$ в точках области определения и, в частности, в граничных точках, не заданы.

1.4 Понятие об обобщенных функциях

В пункте 1.2 была приведена конструкция пополнения метрических пространств. Элементами пополнения служили классы эквивалентности фундаментальных последовательностей.

Понятие фундаментальной последовательности обычно вводится в *метрическом* пространстве и представляет собой естественное обобщение этого понятия для числовых последовательностей.

Однако, сходная (но, вообще говоря, не точно такая же как раньше) конструкция приводит к понятию обобщенной функции. Мы сейчас опишем, как это делается, причем соответствующие последовательности будем так же называть фундаментальными, вкладывая в это несколько иной смысл.

Определение. Будем говорить, что последовательность непрерывных функций $\{F_n(x)\}$ сходится к функции $F(x)$ *почти равномерно* на интервале (A, B) (где $-\infty \leqslant A < B \leqslant +\infty$) и писать $F_n(x) \rightrightarrows F(x)$, если она сходится к $F(x)$ равномерно на каждом конечном замкнутом отрезке, содержащемся в (A, B).

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ непрерывных функций, определенных на (A, B) назовем *фундаментальной*, если существует целое число $k \geqslant 0$ и последовательность k раз непрерывно дифференцируемых функций $\{F_n(x)\}$ такие, что

1. $F_n^{(k)}(x) = f_n(x)$,

2. $F_n(x) \rightrightarrows F(x)$.

Лемма. Если последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$ ограничена и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на (A, x_0) (x_0, B) , то

$$\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt, x \in (A, B).$$

Доказательство. Пусть $|f_n(x)| \leqslant M$. Для заданного $\varepsilon > 0$ и отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ $(A < a < x_0 < b < B)$ зафиксируем номер n_0 такой, чтобы выполнялось неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}(b - a)$$

для всех $n \geqslant n_0$ на отрезках

$$a \leqslant x \leqslant x_0 - \frac{\varepsilon}{4M}. \quad x_0 + \frac{\varepsilon}{4M} \leqslant x \leqslant b.$$

Тогда при $n > n_0$ интеграл от функции $|f_n(x) - f(x)|$ будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ на каждом из этих отрезков, а также на каждом из отрезков

$$x_0 - \frac{\varepsilon}{4M} \leqslant x \leqslant x_0, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \frac{\varepsilon}{4M}$$

Поэтому при $n > n_0$ и $a < x < b$ будет выполняться неравенство

$$\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt < \varepsilon,$$

что и доказывает лемму.

Следствие. Последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна.

Отметим, что из этой леммы следует, что поточечный предел фундаментальной (в нашем новом смысле) последовательности (если он существует) может оказаться разрывной функцией.

Пример 1. Последовательность функций

$$g_n(x) = \frac{1}{1 + e^{-nx}}$$

ограничена, причем $g_n(x) \rightrightarrows 0$, $(-\infty < x < 0)$ и $g_n(x) \rightrightarrows 1$ $(0 < x < +\infty)$. В силу следствия из леммы эта последовательность фундаментальна. Отметим, что поточечный предел $g_n(x)$ в данном случае существует при любом x и является разрывной функцией (так называемая функция Хевисайда).

Пример 2. Последовательность

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-\frac{nx^2}{2}}$$

фундаментальна. Действительно, последовательность

$$g_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_n(t)dt$$

ограничена, $g_n(x) \rightrightarrows 0$ $(-\infty < x < 0)$, $g_n(x) \rightrightarrows 1$ $(0 < x < +\infty)$. Отметим, что в данном примере поточечный предел $f_n(x)$ при $x = 0$ не существует ($\lim f_n(0) = +\infty$, рекомендуется сделать чертеж).

Определение. Две фундаментальные последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ назовем эквивалентными, если существуют последовательности $\{F_n(x)\}$ и $\{G_n(x)\}$ и целое число $k \geqslant 0$ такие, что

$$F_n^{(k)}(x) = f_n(x),$$
$$G_n^{(k)}(x) = g_n(x),$$
$$F_n(x) \rightrightarrows \Phi(x) \leftleftarrows G_n(x).$$

Можно проверить, что так введенная эквивалентность действительно обладает всеми нужными свойствами и порождает разбиение на классы эквивалентных фундаментальных последовательностей.

Определение. Обобщенной функцией (конечного порядка) будем называть класс эквивалентных фундаментальных последовательностей.

Класс, порожденный функциями, приведенными в примере 2, будем называть δ-функцией.

Мы не будем строго определять действия над обобщенными функциями. Наглядное представление о таких объектах можно получить, рассматривая какую-нибудь последовательность из соответствующего класса. В частности, оказывается, что для

δ-функции справедливы следующие соотношения:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\varphi(x)dx = \varphi(x_0),$$

$$\theta'(x) = \delta(x)$$

Здесь через $\delta(x - x_0)$ обозначена «сдвинутая» δ-функция, порожденная последовательностью

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-\frac{n(x-x_0)^2}{2}}$$

а $\theta(x)$ — так называемая функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

В заключение подчеркнем, что как и в обобщенные функции — это не «настоящие» функции, а классы эквивалентных фундаментальных последовательностей. Поэтому нельзя говорить о «значениях» таких функций в отдельных точках.

Наконец, отметим, что существуют и другие способы построения обобщенных функций. В частности, мы исходили из последовательностей непрерывных функций. Возможны другие способы построения теории обобщенных функций, при которых обобщенные функции можно трактовать как некоторые «пределы» разрывных функций.

1.5 Компактность

Определение. Подмножество $\mathbb{K}$ метрического пространства $\mathbb{M}$ называется *предкомпактным*, если произвольное бесконечное подмножество, принадлежащее $\mathbb{K}$ имеет предельную точку.

Если соответствующая точка принадлежит $\mathbb{K}$, то $\mathbb{K}$ называется *компактом.*

Утверждение. Для предкомпактности $\mathbb{K}$ необходимо и достаточно, чтобы каждая последовательность точек из $\mathbb{K}$ имела сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\mathbb{K}$ предкомпактно. Возьмем любую последовательность точек из $\mathbb{K}$. Если в ней бесконечно много различных элементов, то существует предельная точка. Если в ней конечное число различных элементов, то хотя бы один из них повторяется бесконечно много раз.

Обратно, из элементов любого бесконечного подмножества $\mathbb{K}$ образуем последовательность различных точек. Это тоже бесконечное множество. Значит у него существует предельная точка, а, следовательно, существует сходящаяся подпоследовательность.

Определение. Множество $\mathbb{D}$ называется *ε-сетью* для $\mathbb{K}$, если

$$\forall\, x \in \mathbb{K}\ \exists\, d \in \mathbb{D}\ \Rightarrow \varrho(x, d) \leqslant \varepsilon$$

Теорема. Пусть полное $\mathbb{M} \supset \mathbb{K}$. Тогда для предкомпактности $\mathbb{K}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала конечная ε-сеть.

Необходимость. Возьмем произвольное $x_1 \in \mathbb{K}$. Если для любого $x \in \mathbb{K}$ расстояние $\varrho(x, x_1) \leqslant \varepsilon$, то ε-сеть построена. В противном случае существует $x_2 \in \mathbb{K}$, такое что $\varrho(x_2, x_1) > \varepsilon$. Если для любого $x \in \mathbb{K}$ расстояние $\varrho(x, x_1) \leqslant \varepsilon$ или $\varrho(x, x_2) \leqslant \varepsilon$, то ε-сеть построена. В противном случае существует $x_3 \in \mathbb{K}$ такое, что $\varrho(x_3, x_2) > \varepsilon$ и $\varrho(x_3, x_1) > \varepsilon$. Продолжаем этот процесс. Он обязательно оборвется, так как иначе существует последовательность $x_1, x_2, \ldots,$ из которой нельзя извлечь сходящейся подпоследовательности, что противоречит предположению о предкомпактности.

Достаточность. Рассмотрим любое бесконечное подмножество $\mathbb{G} \subset \mathbb{K}$. Возьмем последовательность $\varepsilon_n \to 0$ и для любого

ε_n строим сеть $d_1^{\varepsilon_n}, \ldots, d_{h_n}^{\varepsilon_n}$ так, что объединение соответствующих замкнутых шаров $\bar{B}_{d_1}^{\varepsilon_n}, \ldots, \bar{B}_{d_{h_n}}^{\varepsilon_n}$ содержит $\mathbb{K}$, а следовательно, и $\mathbb{G}$. Но так как $\mathbb{G}$ бесконечно, а шаров конечное число, то хотя бы один шар содержит бесконечное подмножество $\mathbb{G}_1 \subset \mathbb{G}$ (для ε_1) и получаем для $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$ последовательность $\mathbb{G} \supset \mathbb{G}_1 \supset \mathbb{G}_2 \supset \ldots$.

Но, поскольку $\mathbb{C}_1 \subset \bar{B}^{\varepsilon_1}$, то $\mathbb{G}_2 \subset \bar{B}^{\varepsilon_2} \subset B^{\varepsilon_1}$. Получаем последовательность $\bar{B}^{\varepsilon_1} \supset B^{\varepsilon_2} \supset \ldots$, причем их радиусы $\varepsilon_n \to 0$. Возьмем последовательность $\xi_1 \in \mathbb{G}_1, \xi_2 \in \mathbb{G}_2, \ldots$. Тогда, начиная с некоторого номера, $\varrho(\xi_k, \xi_m) < \varepsilon_n$, поэтому последовательность $\{\xi_k\}$ фундаментальна, а следовательно существует предельная точка принадлежащая $\mathbb{M}$ (в силу полноты $\mathbb{M}$).

Следствие. Всякое предкомпактное множество ограничено. Для доказательства достаточно взять 1-сеть в $\mathbb{M}$.

Как показывает пример единичного шара в m, ограниченное множество может и не быть компактным.

Можно доказать, что во всяком бесконечномерном нормированном пространстве единичный шар не компактен.

2 Отображения

2.1 Основные понятия

Рассмотрим отображение F одного метрического пространства X в другое Y:

$$F\colon X \to Y$$

Определение. Отображение F называется *ограниченным*, если

$$\exists C > 0\ \exists x_0 \in X\ \forall x \in X \Rightarrow \varrho(x, x_0) \leqslant C$$

Определение. Отображение F называется *непрерывным в точке* x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \varrho(x, x_0) < \delta\ \Rightarrow \varrho(F(x), F(x_0)) < \varepsilon \tag{4}$$

или, что то же (эквивалентность проверяется так же, как в курсе математического анализа),

$$\forall \{x_n\} \to x_0 \Rightarrow \{F(x_n)\} \to F(x_0).$$

Определение. Отображение F называется *непрерывным на подмножестве метрического пространства* X, если оно непрерывно в каждой точке этого подмножества.

Определение. Если в (4) потребовать, чтобы δ не зависело от $\forall x_0 \in X$, то F называется *равномерно непрерывным на* X.

Пусть есть семейство отображений

$$F_\gamma\colon X \to Y,\ \ \gamma \in \Gamma.$$

Определение. Если каждое F_γ равномерно непрерывно на X, причем δ не зависит от γ, то семейство $\{F_\gamma\}$ называется равностепенно непрерывным на X.

Легко проверяется, что если X, Y — компакты, и отображение $F\colon X \to Y$ непрерывно на X, то F ограничено и равномерно непрерывно.

Теорема. Пусть X, Y — компакты. Рассмотрим множество $M(X \to Y)$ ограниченных отображений $X \rightharpoonup Y$. Тогда формула

$$\varrho_M(F, G) = \sup_{x \in X} \varrho_Y(F(x), G(x)),$$

где $F, G \in M(X \to Y)$ задает метрику на M, причем пространство $M(X \to Y)$ полное.

Доказательство. Проверка аксиом метрики очевидна. Проверим полноту пространства M. Для этого рассмотрим фундаментальную в M последовательность $\{F_n\}$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m > N \ \Rightarrow \varrho_M(F_n, F_m) < \varepsilon.$$

Но

$$\varrho_M(F_n, F_m) \geqslant \varrho_Y(F_n(x), F_m(x)), \ \forall x \in X.$$

Значит, последовательность значений $\{F_n(x)\}$ для $\forall x \in X$ фундаментальна в Y. В силу компактности Y существует предельный элемент в Y, зависящий от x. Этот элемент обозначим через $F(x)$. Таким образом, возникает отображение $F\colon X \to Y$. Так как Y — компакт, то Y ограничено, т.е. содержится в некотором шаре с центром в y_0. Значит, и $F(x)$ ограничено, что и доказывает полноту M.

Теорема. Если $C(X \to Y)$ — множество непрерывных отображений компакта X в компакт Y с той же метрикой, что и в $M(X \to Y)$, то $C(X \to Y)$ замкнуто в $M(X \to Y)$.

Доказательство. Нужно показать, что предельная функция непрерывна. Это следует из соотношения

$$\begin{aligned}\varrho_Y(F(x), F(x_0)) \leqslant \varrho_Y(F(x), F_n(x)) &+ \\ + \varrho_Y(F_n(x), F_n(x_0)) &+ \varrho_Y(F(x_0), F_n(x_0)),\end{aligned}$$

так как $F_n \to F$ равномерно, а F_n непрерывна в точке x_0.

2.2 Критерий компактности в $C(X \to Y)$.

Пусть X, Y компакты.

Теорема Арцела. Для предкомпактности семейства $\{F_\gamma\}$, $(\gamma \in \Gamma)$ непрерывных отображений $F_\gamma : X \to Y$ необходимо и достаточно, чтобы это семейство было равностепенно непрерывно.

Доказательство. Достаточность. Так как Y — компакт, то семейство $\{F_\gamma\}$, $(\gamma \in \Gamma)$ равномерно ограничено. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу равностепенной непрерывности семейства $\{F_\gamma\}$, $\gamma \in \Gamma$ можно найти такое $\delta > 0$, чтобы

$$\varrho(\tilde{x}, x) < \delta \Rightarrow \varrho(F(\tilde{x}), F(x)) < \varepsilon.$$

В X возьмем $\delta/2$ сеть: точки $x_1, \ldots, x_n$ и шары $\bar{B}_{x_1}, \ldots, \bar{B}_{x_n}$ радиуса $\delta/2$.

Рассмотрим множества

$$X_k = \bar{B}_{x_k} \setminus \bigcup_{j<k} B_{x_j}.$$

Ясно, что $X_k \bigcap X_i = \varnothing$ $(k \neq i)$, и $\bigcup_k X_k = X$. Так как Y — компакт, то в Y рассмотрим ε-сеть $y_1, \ldots, y_m$.

Обозначим через $S(x)$ множество функций, принимающих на любом X_k постоянные значения, равные одному из $y_1, \ldots y_m$. Таких функций mn штук. Покажем, что они образуют 2ε-сеть для семейства F_γ в $M(X \to Y)$. Возьмём произвольное F_γ. Для любого X_k и $x \in X_k$, $\tilde{x} \in X_k$ имеем:

$$\varrho_Y(F_\gamma(x), \delta(x)) \leqslant \varrho_Y(F_\gamma(x), F_\gamma(\tilde{x})) + \\ + \varrho_Y(F_\gamma(\tilde{x}), \delta(x)) + \varrho_Y(F_\gamma(\delta(x), \delta(\tilde{x})).$$

Но так как $x, \tilde{x} \in \Lambda_k \subset \bar{B}_{x_k}$, то $\varrho(x, \tilde{x}) < \varrho(x, \tilde{x}) + \varrho(x_k, \tilde{x}) < \delta$.

Поэтому

$$\varrho_Y(F_\gamma(x), F_\gamma(\tilde{x})) < \varepsilon,\ \varrho_Y(F_\gamma(\tilde{x}), \delta(x)) < \varepsilon,$$
$$\varrho_Y(\delta(x), \delta(\tilde{x})) = 0.$$

Значит, функции $\delta(x)$ образуют конечную 2ε-сеть для F_γ. Поэтому F_γ компактно в $M(X \to Y)$. Но поскольку для всех γ $F_\gamma \in C(X \to Y)$ и $C(X \to Y)$ замкнуто в $M(X \to Y)$, то F_γ компактно в $C(X \to Y)$ (так как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных отображений есть непрерывное отображение).

Аналогично можно привести критерий компактности в $L_2(\Omega)$.

2.3 Теоремы о неподвижной точке

Определение. Отображение $F\colon X \to X$ метрического пространства X в себя называется сжимающим, если

$$\exists\ 0 < q < 1\ \forall\ x, y \in X \Rightarrow \varrho(x, y) \leqslant q\varrho(F(x), F(y)). \tag{5}$$

Определение. Отображение $F\colon X \to Y$ метрического пространства X в себя называется компактным, если F непрерывно на X и переводит $\forall$ ограниченное множество из X в предкомпактное.

Теорема. (Принцип сжимающих отображений.) Если F сжимающее отображение, а X — полное метрическое пространство, то существует и единственна неподвижная точка x^* для F т.е. такая, что $F(x^*) = x^*$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$\forall x_0 \in\ x_1 = F(x_0),\ x_2 = F(x_1), ...$$

Оценим

$$\begin{aligned} \varrho(x_{n+1}, x_n) =& \varrho(F(x_n), F(x_{n-1})) \leqslant \\ \leqslant q\varrho(x_n, x_{n-1}) =& q\varrho(F(x_{n-1}), F(x_{n-2})) \leqslant \\ \leqslant q^2\varrho(x_{n-2}, x_{n-3}) \leqslant& \ldots \leqslant q^n\varrho(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{6}$$

Оценим

$$\varrho(x_{n+p}, x_n) \leqslant \varrho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \varrho(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \cdots +$$
$$+\varrho(x_{n+1}, x_n) \leqslant\leqslant (q^{n+p-1} + q^{n+p-2} + \cdots + q^n)\varrho(x_1, x_0) =$$
$$= q^n \frac{1 - q^p}{1 - q}\varrho(x_1, x_0) \leqslant q^n \frac{1}{1 - q}\varrho(x_1, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, последовательность x_n фундаментальна следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^* \in X$ (в силу полноты X), При этом

$$x_{n+1} = F(x_n) \Rightarrow x^* = F(x^*),$$

так как из (5) следует непрерывность отображения F.

Единственность точки x^* следует из того, что

$$x_1^* \neq x_2^* \Rightarrow \varrho(F(x_1^*), F(x_2^*)) = \varrho(x_1^*, x_2^*) \leqslant q\varrho(x_1^*, x_2^*) \Rightarrow x_1^* = x_2^*.$$

Теорема. (Принцип Шаудера). Если F — компактное отображение банахова пространства X в себя и F отображает замкнутый шар в себя, то в этом шаре существует хотя бы одна неподвижная точка.

Примеры применения — существование решения задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x\Big|_{t=t_0} = x_0. \end{cases}$$

Изложение этих примеров можно найти, например, в книгах [2] и [3].

3 Линейные операторы

3.1 Норма оператора

Пусть X, Y нормированные пространства и отображение $A\colon X \to Y$ обладает следующими свойствами:

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2);$$
$$A(\lambda x) = \lambda A(x).$$

Определение. Отображение, обладающее этими свойствами, называется линейным оператором.

Определение. Пусть A и B линейные операторы. Тогда по определению полагаем $(A + B)x = Ax + Bx, (\lambda A)x = A(\lambda x)$. Таким образом возникает *линейное пространство операторов*.

Если $X = Y$, то аналогично можно определить $(AB)x = A(Bx)$.

Определение. Оператор A называется непрерывным в точке x_0, если

$$\|x_n - x_0\|_X \to 0 \Rightarrow \|Ax_n - Ax_0\|_Y \to 0$$

Из определения линейного оператора сразу следует, что непрерывность линейного оператора A в произвольной точке эквивалентна непрерывности A в нуле.

Определение непрерывности линейного оператора вполне соответствует определению непрерывности отображения общего вида(не обязательно линейного).

Однако, в теории линейных операторов используется несколько иное, чем для общих отображений, понятие ограниченности.

Определение. Оператор $A\colon X \to Y$ называется *ограниченным*, если

$$\exists C_A \Big| \|Ax\|_Y \leqslant C_A \|x\|_X \quad \forall x \in X. \tag{7}$$

Отметим, что в силу линейности это условие можно заменить таким:

$$\exists C_A \Big| \|Ax\|_Y \leqslant C_A, \quad \|x\|_X = 1.$$

Утверждение. Оператор A ограничен тогда и только тогда, когда он непрерывен.

Доказательство. Пусть A ограничен, Тогда из (7) сразу следует непрерывность в нуле, а значит, и в произвольной точке. Если же A непрерывен в нуле, но неограничен, то

$$\forall n\ \exists x_n\ (\|x_n\| = 1)\ \& \|Ax_n\ \| > n\ \Rightarrow \left\| A\left(\frac{x_n}{n}\right) \right\| > 1.$$

Но

$$\left\| \frac{x_n}{n} \right\| = \frac{1}{n}\|x_n\| = \frac{1}{n} \to 0.$$

Получаем противоречие с предполагавшейся непрерывностью A.

Рассмотрим число

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Примечание. Мы использовали для этого числа обозначение нормы, так как далее будет показано, что соответствие $A \to \|A\|$ действительно задает норму.

Можно показать, что $\|A\| = \inf C_A$ по всем неотрицательным константам C_A.

Таким образом, можно записать

$$\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|.$$

Утверждение. В линейном пространстве ограниченных линейных операторов $\mathfrak{L}(X \to Y)$ соответствие $A \to \|A\|$ задаёт норму, так что пространство $\mathfrak{L}(X \to Y)$ становится нормированным.

Доказательство. Проверим аксиомы нормы:

$$\|(A+B)x\|_Y \leqslant \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y \leqslant (\|A\| + \|B\|)\|x\|_X.$$

Таким образом,

$$\forall x \ (\|x\| = 1) \Rightarrow \|(A+B)x\| \leqslant (\|A\| + \|B\|)\|x\|.$$

Значит,

$$\sup_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| = \|A+B\| \leqslant (\|A\| + \|B\|)\|x\|.$$

Теорема. Если X, Y банахово, то $\mathfrak{L}(X \to Y)$ тоже банахово.

Доказательство проводится по той же схеме, что доказательство полноты пространства ограниченных отображений $M(X \to Y)$.

Утверждение. Если $X = Y$, то $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

Доказательство. $\|ABx\| \leqslant \|A\|\|Bx\| \leqslant \|A\|\|B\|\|x\|$.

Следствие. $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$.

Если $A\colon X \to Y$ взаимно однозначно, то существует обратное отображение $A^{-1}\colon Y \to X$. Можно показать (см., например, [4, с.248]), что отображение A^{-1} — линейное.

Теорема. Если линейный оператор $A\colon X \to Y$, (где X, Y банаховы), ограничен, то A^{-1} тоже ограничен.

Доказательство. См., например, [4, с.248].

3.2 Продолжение операторов и функционалов

Назовём линейным многообразием подмножество банахова пространства $L \subset X$, замкнутое (в алгебраическом смысле) относительно операции сложения и умножения на число. Если L еще и замкнуто по норме X, то оно называется подпространством (в конечномерных пространствах, рассматривавшихся в алгебре, это дополнительное требование излишне). Можно ввести норму $\|A\|_L$ как

$$\|A\|_L = \sup \|Ax\|,\ \|x\| = 1,\ x \in L.$$

Теорема. Пусть $A\colon L \to Y$, $\overline{L} = X$, A ограничен на L, Y полные (черта над L означает замыкание на норме). Тогда существует и единственно отображение

$$B\colon X \to Y,\ \text{такое что } Bx = Ax (x \in L), \|B\| = \|A\|_L.$$

Доказательство. Для любого $x \in X$ существует последовательность $\{x_n\} \in L, x_n \to x \Rightarrow \{x_n\}$ фундаментальна.

Рассмотрим

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leqslant \|A\|_L \cdot \|x_n - x_m\| \to 0.$$

Поэтому последовательность $\{Ax_n\}$ фундаментальна в Y. Следовательно, существует $\lim Ax_n = Bx$ (полагаем по определению). Можно проверить, что B — линейный оператор. Так как $L \subset X$, то $\|B\| \geqslant \|A\|_L$. Но

$$\|Bx\| = \| \lim_{n\to\infty} Ax_n\| = \lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A\|_L \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|A\|_L \|x\| \Rightarrow \|B\| \leqslant \|A\|_L.$$

Значит $\|B\| = \|A\|_L$.

В предыдущей теореме многообразие L предполагалось всюду плотным в X. В следующей теореме это необязательно, но речь идет не о продолжении линейного *оператора*, а о продолжении линейного *функционала.*

Теорема Хана–Банаха. Пусть L_0 линейное многообразие в X, f — линейный ограниченный функционал, определенный на L_0. Тогда существует линейный ограниченный функционал $g\colon X \to R^1$ такой, что $g(x) = f(x)$, $(x \in L_0), \|g\| = \|f\|_{L_0}$

Доказательство. Фиксируем некоторый $x_0 \notin L_0$. Рассмотрим множество

$$y = tx_0 + x,\ x \in L_0,\ \forall t \in R^1. \tag{8}$$

Это множество обозначим L_1. Каждый его элемент однозначно представим в виде (8):

$$x_1 + t_1 x_0 = x_2 + t_2 x_0 \Rightarrow L_0 \ni x_1 - x_2 = (t_2 - t_1)x_0 \ \notin L_0$$

Рассмотрим $\forall \check{x}, \hat{x} \in L_0$. Тогда

$$|f(\check{x}) - f(\hat{x})| = |f(\check{x} - \hat{x})| \leqslant \|f\|\|\check{x} - \hat{x}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|\|\check{x} + x_0\| + \|f\|\|\hat{x} + x_0\|$$

поэтому

$$f(\check{x}) - \|f\|\|\check{x} + x_0\| \leqslant f(\hat{x}) + \|f\|\|\hat{x} + x_0\|,$$

значит

$$a = \sup_{x \in L_0} (f(x) - \|f\|\|x + x_0\|) \leqslant$$
$$\inf_{x \in L0} (f(x) + \|f\|\|x + x_0\|) = b.$$

Поэтому существует c такое что $a \leqslant c \leqslant b$. Таким образом,

$$f(x) - \|f\|\|x + x_0\| \leqslant c \leqslant f(x) + \|f\|\|x + x_0\|$$

Откуда

$$f(x) - c \leqslant \|f\|\|x + x_0\| \ \&\ c - f(x) \leqslant \|f\|\|x + x_0\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) - c \geqslant -\|f\|\|x + x_0\|$$

Поэтому

$$|f(x) - c| \leqslant (\|f\|\|x + x_0\|); \tag{9}$$

Введем новый функционал $g(y)$, определив его для элемента $y = x + tc$ так:

$$g(y) = f(x) - tc.$$

Очевидно, что f и g на L совпадают. Покажем, что g ограничен и $\|g\| = \|f\|$. Возможны два случая:

1). $t > 0$. Так как $\frac{x}{t} \in L_1$то из (9) следует, что

$$|g(y)| = t\left|f\left(\frac{x}{t}\right) - c\right| \leqslant t\left(\|f\| \cdot \left\|\frac{x}{t} + x_0\right\|\right) =$$
$$= \|f\| \cdot \|x + tx_0\| = \|f\| \cdot \|y\|.$$

2) $t < 0$. Тогда из (9) следует, что

$$f\left(\frac{x}{t}\right) - c \geqslant \|f\| \left\|\frac{x}{t} + x_0\right\| = -\frac{1}{|t|}\|f\|\|x + tx_0\| = \frac{1}{t}\|f\|\|y\|$$

Значит

$$g(y) = t\left(f\left(\frac{x}{t}\right) - c\right) \leqslant t \cdot \frac{1}{t}\|f\|\|y\| = \|f\|\|y\|,$$

так что

$$|g(y)| \leqslant \|f\|\|y\|.$$

После этого (если X — сепарабельное), берем некоторое счетное всюду плотное подмножество и аналогично строим $L_2, L_3, \ldots$, а затем продолжаем по непрерывности построенный функционал на все X, что можно сделать по предыдущей теореме. Можно доказать, что результат остается верным и для несепарабельного пространства X.

3.3 Спектр оператора. Резольвента

Пусть дан линейный оператор A

$$A : D_A \to X, \quad D_A \subset X.$$

Здесь D_A — линейное многообразие, X — банахово пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Для любого фиксированного значения параметра $\lambda \in \mathbb{C}$ возможны три ситуации:

1. Оператор $(A - \lambda E)^{-1}$ существует, определен на всем X и ограничен. В этом случае λ называется регулярным, оператор $R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}$ называется резольвентой, а λ принадлежит так называемому резольвентному множеству $\varrho(A)$.

2. Оператор $(A - \lambda E)^{-1}$ не существует, так как нет однозначной обратной разрешимости, т.е. существует нетривиальное решение $r \neq 0$ уравнения

$$(A - \lambda E)r = 0.$$

В этом случае λ называется собственным значением, а r — собственным вектором оператора A. При этом множество всех собственных значений образует так называемый точечный спектр $\sigma_p(A) \ni \lambda$.

3. Оператор $(A - \lambda E)^{-1}$ существует, но либо не ограничен, либо определен не на всем X. Множество соответствующих значений λ образует так называемый непрерывный спектр $\sigma_c \ni \lambda$.

Пример 1. Рассмотрим пространство комплекснозначных непрерывных функций $C[0,1]$. Положим $Ay = ty(t)$. Тогда

$$(A - \lambda E)y = 0 \Rightarrow (t - \lambda)y(t) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \sigma_p = \varnothing,$$

$$(A - \lambda E)y = f \Rightarrow y(t) = \frac{1}{t - \lambda} f(t).$$

Следовательно, оператор $(A - \lambda E)^{-1}$ определен для любого $\lambda \in \mathbb{C} \backslash [0,1]$, но если $\lambda \in [0,1]$, то он существует не для всех $f \in C[0,1]$. Поэтому $\sigma_c = [0,1]$

$$R_\lambda f = \frac{1}{t - \lambda} f.$$

Пример 2. Рассмотрим пространство комплекснозначных непрерывных функций $C[0,1]$ и оператор $A = \frac{d}{dt}$, $D_A = C^1[0,1]$.

Найдем

$$(A-\lambda E)y = 0 \Rightarrow \dot{y} - \lambda y = 0 \Rightarrow y = ce^{\lambda t} \Rightarrow \sigma_p = \mathbb{C}$$

Резольвента: $A-\lambda E$ не обратим (нет однозначности), поэтому $\varrho(A) = \varnothing$.

Пример 3. То же, что и в примере 2, но $D_A = \{y \in C | y(0) = 0\}$. Тогда

$$(A-\lambda E)y = 0 \Rightarrow y \equiv 0 \Rightarrow \sigma_p = \varnothing$$

Резольвента:

$$(A-\lambda E)y = f \Rightarrow \dot{y} - \lambda y = f \Rightarrow y = y(0)e^{\lambda t} + e^{\lambda t}\int\limits_0^t e^{-\lambda s} f(s)ds;$$

$$y(t) = e^{\lambda t}\int\limits_0^t e^{-\lambda s} f(s)ds \Rightarrow \sigma_c = \varnothing; \quad \varrho(A) = \mathbb{C}.$$

Пример 4. То же, что и в примере 2, но $D_A = \{y \in C^1 | y(1) = \alpha y(0), \alpha > 0\}$. Тогда

$$(A-\lambda E)y = 0 \Rightarrow y = ce^{\lambda t}; \quad ce^{\lambda} = \alpha c \Rightarrow \lambda_k = \ln\alpha + 2\pi k i \in \sigma_p.$$

Ищем обратный оператор:

$$(A-\lambda E)y = f \Rightarrow y = ce^{\lambda t} + e^{\lambda t}\int\limits_0^t e^{-\lambda s} f(s)ds;$$

$$ce^{\lambda} + e^{\lambda}\int\limits_0^1 e^{-\lambda s} f(s)ds = \alpha c \Rightarrow c = \frac{1}{\alpha - e^{\lambda}}\left(e^{\lambda}\int\limits_0^1 e^{-\lambda s} f(s)\right);$$

$$\sigma_c = \varnothing, \quad \varrho(A) = \mathbb{C} \backslash \sigma_p$$

Пример 5. То же, что и в примере 2, но $D_a = \{y \in C^1 | y(0) = y(1) = 0\}$. Тогда

$$(A - \lambda E)y = 0 \Rightarrow y \equiv 0 \Rightarrow \sigma_p = \varnothing.$$

Ищем обратный оператор:

$$(A - \lambda E)y = f \Rightarrow y = ce^{\lambda t} + e^{\lambda t} \int\limits_0^t e^{-\lambda s} f(s) ds \ \& \ y(0) = 0 \Rightarrow c = 0;$$

$$y(1) = e^{\lambda} \int\limits_0^1 e^{-\lambda s} f(s) ds = 0. \tag{10}$$

Поэтому $(A - \lambda E)^{-1}$ определен не для всех $f \in C[0, 1]$, а лишь для таких, для которых выполняется условие (10). Значит, $\sigma_c = \mathbb{C}; \quad \varrho(A) = \varnothing$.

Упражнение. Рассмотреть оператор $A = p_0 \frac{d^2}{dx^2} + p_1 \frac{d}{dx} + p_2$ на $C[0, 1]$.

1. $D_A = \{y \in C[0, 1]\}$.
2. $D_A = \{y \in C^2[0, 1] | \quad y(0) = y(1) = 0\}$.
3. $D_A = \{y \in C^2[0, 1] | \quad y'(a) - \alpha y(a) = 0; \quad y'(b) + \beta y(b) = 0\}$
4. $D_A = \{y \in C^2[0, 1] | \quad y(a) = 0; \quad y'(a) = 0\}$.
5. $D_A = \{y \in C^2[0, 1] | \quad y(a) = y'(a) = y(b) = y'(b) = 0\}$

3.4 Спектр ограниченных и компактных операторов.

Перейдем к изучению спектра ограниченных операторов.

Теорема. Если $A : X \to X$ ограничен и $\|A\| < 1$, то оператор $B = A - E$ обратим, причем

$$B^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$S_n = -\sum_{0}^{n} A^k.$$

Тогда

$$\|S_n - S_m\| = \|\sum_{n+1}^{m} A^k\| \leqslant \sum_{n+1}^{m} \|A^k\| \leqslant \sum_{n+1}^{m} \|A\|^k \leqslant \frac{\|A\|^{n+1}}{1-\|A\|}.$$

Таким образом, последовательность $\{S_n\}$ фундаментальна по норме пространства операторов $L(X \to X)$, которое является полным. Поэтому существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -S$. Кроме того, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\| \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \|A\|^n$, то $\lim A^n = 0$.

Найдем

$$-SB = -\lim_{n\to\infty} S_n B = -\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A^k (A - E) =$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (A^{k+1} - A^k) = -\lim_{n\to\infty} (A^n - E) = E.$$

Аналогично проверяем, что $-BS = E$.

Следствие 1. Если $\|A\lambda^{-1}\| < 1$, то есть $\|A\| < |\lambda|$, то

$$\left(\frac{1}{\lambda} A - E\right)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}.$$

Следствие 2. Оператор

$$R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{A}{\lambda} - E\right)^{-1}$$

существует при $|\lambda| > \|A\|$, так что спектр σ принадлежит кругу радиуса $\|A\|$. Можно доказать, что σ — непустое замкнутое множество.

Определение. Величина

$$r_A = \sup_{\lambda \in \sigma} |\lambda|$$

называется спектральным радиусом оператора A. Ясно, что $r_A \leqslant \|A\|$.

Перейдем к изучению спектра компактных операторов.

Пусть A — линейный оператор, переводящий каждое ограниченное множество в предкомпактное. Тогда A ограничен и, следовательно, непрерывен. Поэтому A компактен (как компактное отображение).

Утверждение. Точка $\lambda = 0$ принадлежит спектру компактного оператора.

Доказательство. Пусть B ограниченный оператор, а A — компактный. Тогда AB компактный. Если бы $\lambda = 0 \notin \sigma$, то существовал бы ограниченный $R_{\lambda=0} = A^{-1}$. Поэтому $A^{-1}A = E$ компактный. Но в бесконечномерном пространстве единичный шар не компактен. Поэтому $\lambda = 0 \in \sigma$.

Теорема Рисса-Шаудера. Спектр компактного оператора состоит из нуля и конечного или счетного множества собственных значений конечной кратности. При этом единственной предельной точкой спектра может быть только ноль. Это число ноль может быть собственным значением конечной или бесконечной кратности, но может и не быть собственным значением. См. по этому поводу примеры в [9, с. 457-465].

4 Геометрия гильбертова пространства

4.1 Гильбертово пространство (основные понятия)

Определение. Векторное пространство с скалярным произведением, полное по норме, порожденной этим скалярным произведением, называется *гильбертовым пространством* H. Его элементы будем называть *векторами*. Обычно гильбертовыми называются *бесконечномерные* пространства. Из свойств скалярного произведения следует неравенство Коши – Буняковского (оно доказывалось в курсе алгебры)

$$\begin{gathered} |(x,y)| \leqslant \|x\|\|y\|, \\ \|x\| = \sqrt{(x,x)}, \\ \|y\| = \sqrt{(y,y)}. \end{gathered} \tag{11}$$

Отметим,что если исходное линейное пространство рассматривается над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, то аксиомы скалярного произведения имеют вид:

$$\begin{gathered} (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y); \\ (x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2); \\ (\lambda x, y) = \lambda(x, y); \\ (x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y); \\ (x, y) = \overline{(y, x)}; \\ (x, x) \in \mathbb{R}^1; \\ (x, x) \geqslant 0; \\ (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{gathered}$$

При этом неравенство (11) сохраняется. Из неравенства (11) сразу следует непрерывность скалярного произведения.

Лемма о параллелограмме. Если $\forall p, q \in H$, то

$$2\|p\|^2 + 2\|q\|^2 = \|p+q\|^2 + \|p-q\|^2. \tag{12}$$

Доказательство получается непосредственной проверкой.

Свойство (12) позволяет выяснить, можно ли норму в некотором нормированном пространстве задать с помощью скалярного произведения.

Векторы u, z назовем *ортогональными*, если $(u, z) = 0$.

Пусть дана счетная система векторов, в которой каждая конечная подсистема линейно независима. Тогда можно применить процесс ортогонализации, известный из курса алгебры.

Определение. Ортонормированную систему $e_1, ..., e_n, ...$ назовем *полной* в H, если из условия $(z, e_n) = 0, \quad n = 1, \ldots$ следует, что $z = 0$.

Теорема. Если система $e_1, ..., e_n, ...$ полна в H, то для любого $z \in H$

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \tag{13}$$

причем

$$\|z\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Сходимость ряда в (13) понимается, как сходимость его частичных сумм по норме H. Таким образом, в указанном смысле система $e_1, ..., e_n, ...$ образует базис в H.

Доказательство. Пусть разложение (13) возможно; найдем выражение для коэффициентов c_k, пользуясь непрерывностью скалярного произведения:

$$(z, e_m) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, e_m \right) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, e_m \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k e_k, e_m \right) = c_m.$$

Таким образом, $c_k = (z, e_k)$.

По заданному вектору z составим вектор s_n

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (z, e_k) e_k.$$

Обозначим $h = z - s_n$. Найдем

$$(h, e_m) = (z, e_m) - (\sum_{k=1}^{n} (z, e_k) e_k, e_m) = (z, e_m) - (z, e_m) = 0.$$

Значит, $h \perp \forall e_m \Rightarrow h \perp s_n$. Поэтому, по теореме Пифагора

$$\|z\|^2 = \|s_n\|^2 + \|h\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (z, e_k)^2 + \|h\|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} (z, e_k)^2.$$

Значит, частичные суммы s_n ограничены, следовательно, ряд сходится, причем

$$\sum_{k=1}^{n} (z, e_k)^2 \leqslant \|z\|^2. \tag{14}$$

Неравенство (14) называется *неравенством Бесселя.*

Полагая $m = n + p$, рассмотрим

$$\|s_m - s_n\|^2 = \| \sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k \|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} c_k^2 \to 0$$

в силу сходимости ряда (14). Значит, последовательность $\{s_n\}$ фундаментальна. В силу полноты H существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in H$. Покажем, что $z = s$.

Рассмотрим

$$(s, e_m) = \lim_{n\to\infty} (s_n, e_m) = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} c_k e_k, e_m) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ c_m = c_m = (z, e_m)$$

Поэтому

$$(z - s, e_m) = 0 \quad \forall e_m, \text{ откуда } z - s = 0$$

в силу полноты $e_1, ..., e_n, ...$.

Наконец,

$$\|z\|^2 = (z, z) = (\lim_{n\to\infty} s_n, \lim_{n\to\infty} \ s_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Рассмотрим критерий полноты ортонормированной системы

$$e_1, ..., e_n, ... \tag{15}$$

Теорема. Для полноты ортонормированной системы (15) в H необходимо и достаточно, чтобы линейные комбинации векторов (15) образовывали всюду плотное множество в H.

Доказательство. Если система (15) полна, то для любого $z = \lim s_n$, что и доказывает необходимость. Пусть теперь для некоторого $g \in H$ выполнены равенства

$$(g, e_k) = 0, \quad \forall k. \tag{16}$$

Значит, для любых линейных комбинаций системы (15) тоже выполнены равенства (16). Таким образом, ортогональное дополнение к вектору g содержит все e_k, все их линейные комбинации и замыкание всех линейных комбинаций, то есть все пространство H (так как система (15) всюду плотна в H). В частности, $(g, g) = 0$ значит, $g = 0$, то есть система (15) полна в H.

Следствие. Во всяком сепарабельном гильбертовом пространстве H существует базис.

4.2 Ортогональное разложение. Теорема Рисса

Определение. Пусть дано линейное подпространство L гильбертова пространства H. Через $L^{\perp}$ обозначим множество векторов h перпендикулярных любому $v \in L$.Тогда $L^{\perp}$ называется *ортогональным дополнением* к L. Ясно, что $L^{\perp}$ — подпространство: $(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2, v) = \alpha_1 (h_1, v) + \alpha_2 (h_2, v) = 0$. Легко проверяется замкнутость.

Теорема об ортогональном разложении. Пусть L — подпространство H. Тогда для любого $z \in H$ существуют и единственны $v \in L$ и $h \in L^{\perp}$ такие, что

$$z = v + h. \tag{17}$$

Доказательство. Обозначим

$$d = \inf_{\tilde{v} \in L} \|z - \tilde{v}\|.$$

Если $d > 0$, то существует $v_n \in L$ такое, что $\|z - v_n\| \to d$. Рассмотрим

$$u_n = z - v_n; u_m = z - v_m.$$

По лемме о параллелограмме, примененной к u_n, u_m, получаем

$$2\|z - v_n\|^2 + 2\|z - v_m\|^2 = 4\left\|z - \frac{v_n + v_m}{2}\right\|^2 + \|v_n - v_m\|^2. \tag{18}$$

Но левая часть (18) стремится к $4d^2$, а слагаемое $4\left\|z - \frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2$ из правой части стремится к $w4d^2$.

Поэтому $\|v_n - v_m\|^2 \to 0$ и, следовательно, последовательность $\{v_n\}$ фундаментальна. Значит, существует $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$. Полагаем $h = z - v \Rightarrow \|h\|^2 = d^2$. Покажем, что $h \perp L$. Возьмем произвольное $w \in L$ и действительное число τ. Тогда $v - \tau w \in L$. Рассмотрим

$$d^2 \leqslant \|z - (v - \tau w)\|^2 = \|h + \tau w\|^2 = d^2 + 2\tau(h, w) + \tau^2 \|w\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\tau(h,w)+\tau^2\|w\|^2 \geqslant 0, \quad \forall\tau \Rightarrow (h,w)=0 \ \Rightarrow h\in L^{\perp}.$$

Покажем единственность разложения (17). Пусть

$$z = v_1+h_1 = v_2+h_2 \Rightarrow L \ni v_1-v_2 = h_2-h_1 \in L^{\perp} \Rightarrow$$
$$v_1=v_2; \quad h_1=h_2,$$

Что и требовалось доказать.

Теорема Рисса. Пусть $f\colon H\to R$ линейный ограниченный функционал. Тогда существует и единственно $z_0\in H$ такое, что

$$f(z)=(z,z_0) \qquad \forall z\in H.$$

Доказательство. Рассмотрим множество

$$L=\{\zeta\in H | f(\zeta)=0\}.$$

Очевидно, что L — подпространство. Рассмотрим $L^{\perp}$ и покажем, что $L^{\perp}$ одномерно. Пусть $\forall h_1,h_2\in L^{\perp}$. Рассмотрим

$$w=f(h_1)h_2-f(h_2)h_1\in L^{\perp}. \tag{19}$$

Но

$$f(w)=0\Rightarrow w\in L \ \&\ w\in L^{\perp}=(w,w)=0\Rightarrow w=0.$$

Следовательно, в силу (19), h_1,h_2 линейно зависимы, а значит, $L^{\perp}$ одномерно. Пусть $e\in L^{\perp}$ единичный вектор. Рассмотрим произвольный

$$h\in L^{\perp}\Rightarrow h=\tau e.$$

Но любой $z\in H$ выражается как $z=h+v, \quad v\in L, \quad h\in L^{\perp}$. Поэтому $(z,e)=\tau(e,e)+(e,v)=\tau$.Далее,

$$z=\tau e+v=(z,e)e+v$$
$$f(z)=(z,e)f(e)+f(v)=(z,e)f(e)=(z,f(e)e).$$

Обозначим $z_0 = f(e)e$.

Единственность.

$$(z, z_0) = (z, \tilde{z}_0) \Rightarrow \forall z \Rightarrow (z, z_0 - \tilde{z}_0) = 0$$
$$(z_0 - \tilde{z}_0, z_0 - \tilde{z}_0) = 0 \Rightarrow z_0 = \tilde{z}_0.$$

4.3 Эрмитовы операторы. Теорема Гильберта–Шмидта

Пусть H — гильбертово пространство над полем действительных или комплексных чисел.

Определение. Ограниченный оператор $A : H \to H$ называется *эрмитовым*, если

$$(Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x,\, y \in H. \tag{20}$$

Можно доказать, что из соотношения (20) следует ограниченность оператора A (см. [2, с. 349]). Поэтому, для упрощения, в это определение часто сразу включают требование ограниченности оператора A, как это и сделано в настоящем изложении.

Далее, в пределах данного параграфа, все векторы, обозначенные буквой e (с индексами или без них), будем считать единичными.

Утверждение 1. Если оператор A эрмитов и λ собственное значение, соответствующее собственному вектору e, то λ — действительно.

Доказательство. Пусть H — пространство над полем комплексных чисел. Тогда

$$\lambda = \lambda(e, e) = (\lambda e, e) = (Ae, e) = (e, Ae) = (e, \lambda e) = \bar{\lambda}(e, e) = \bar{\lambda}.$$

Пусть H — пространство над полем действительных чисел. Тогда

$$(\lambda e, \lambda e) \geqslant 0 \Rightarrow \lambda^2(e, e) \geqslant 0 \Rightarrow \lambda^2 \geqslant 0.$$

Утверждение 2. Если A эрмитов и $\lambda_1 \neq \lambda_2$ собственные значения, соответствующие собственным векторам e_1, e_2, то $(e_1, e_2) = 0$.

Доказательство.

$$\lambda_1(e_1, e_2) = (Ae_1, e_2) = (e_1, Ae_2) = (e_1, \lambda_2 e_2) = \lambda_2(e_1, e_2) \Rightarrow$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(e_1, e_2) = 0 \Rightarrow (e_1, e_2) = 0.$$

Утверждение 3. Если A эрмитов, то

$$\|Ae\|^2 \leqslant \|A^2 e\|,$$

причем знак равенства достигается в том и только в том случае, когда вектор $e = e_0$, где $A^2 e_0 = \mu e_0; \quad \mu = \|Ae_0\|^2$.

Доказательство.

$$\|Ae\|^2 = (Ae, Ae) = (A^2 e, e) \leqslant \|A^2 e\| \|e\| = \|A^2 e\|. \tag{21}$$

Пусть

$$\|Ae\|^2 = \|A^2 e\| \Rightarrow (A^2 e, e) = \|A^2 e\| \|e\|.$$

Но неравенство Коши-Буняковского превращается в равенство только в случае параллельных векторов. Следовательно,

$$A^2 e = \mu e \Rightarrow e = e_0.$$

Далее, из неравенства (21) следует, что $(A^2 e_0, e_0) = \mu(e_0, e_0) = \mu = \|Ae_0\|^2$.

Утверждение 4. Если A эрмитов и компактен, то существует так называемый *максимальный* вектор p, $\|p\| = 1$, такой, что $\|Ap\| = M = \|A\|$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $y_n = Ae_n$ такую, чтобы $\|y_n\| \to M$. В силу компактности A из $\{y_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Будем считать, что сходится сама последовательность $\{y_n\}$, т.е. $y_n \to y$. Рассмотрим единичный вектор $p = \frac{y}{M}$. Покажем, что p — искомый. Для этого, пользуясь непрерывностью оператора A, найдем

$$Ap = A\left(\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{M}\right) = \lim_{n\to\infty} A\left(\frac{y_n}{M}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{M} A^2 e_n.$$

Но $\|y_n\| \leqslant M$, так что $\|\frac{y_n}{M}\| \leqslant 1$. Обозначим $p_n = \frac{y_n}{M}$. Тогда

$$\|p_n\| \leqslant 1 \Rightarrow \|Ap_n\| \leqslant M.$$

С другой стороны, в силу утверждения 3, имеем:

$$M \geqslant \left\| A\left(\frac{Ae_n}{M}\right)\right\| = \frac{1}{M}\|A^2 e\| \geqslant \frac{1}{M}\|Ae_n\|^2 \to M.$$

Итак, с учетом непрерывности нормы,

$$M \leftarrow \|\frac{1}{M} A^2 e_n\| \leqslant M \Rightarrow \|Ap\| = M.$$

Утверждение 5. Если A — эрмитов и компактен, то максимальный для A вектор p является собственным для A^2 с собственным значением $\mu = \|A\|^2$.

Доказательство. Используя утверждение 3, получаем

$$\|A\|^2 = \|Ap\|^2 \leqslant \|A^2 p\| \leqslant \|A^2\| \leqslant \|A\|^2 \Rightarrow \|Ap\|^2 = \|A^2 p\|.$$

Следовательно, вектор p собственный для A^2 с собственным значением $\mu = \|Ap\|^2 = \|A\|^2$.

Утверждение 6. Если A эрмитов и компактен, то у него существует собственный вектор r с собственным значением λ, причем $|\lambda| = \|A\| = M$.

Доказательство. Из утверждения 4 следует, что существует максимальный для A вектор p, причем $A^2 p = M^2 p$. Поэтому рассмотрим

$$(A^2 - M^2 E)p = 0 \Rightarrow (A - ME)(A + ME)p = 0.$$

Обозначим $z = (A + ME)p$. Если $z = 0$, то $r = p$, $\lambda = -M$. Если $z \neq 0$, то $r = z$, $\lambda = M$.

Утверждение 7. Если A эрмитов и компактен, то любая ортонормированная система собственных векторов $e_1, ..., e_k, ...$ с собственными значениями $|\lambda_k| > \delta$ конечна.

Доказательство. Пусть e_j, e_k собственные векторы с собственными значениями λ_j, λ_k (не исключается, что $\lambda_j = \lambda_k$). Рассмотрим

$$\|Ae_j - Ae_k\|^2 = \|\lambda_j e_j - \lambda_k e_k\|^2 =$$
$$= (\lambda_j e_j - \lambda_k e_k, \lambda_j e_j - \lambda_k e_k) = \lambda_j^2 + \lambda_k^2 > 2\delta^2.$$

Но это противоречит компактности оператора A.

Утверждение 8. Если A эрмитов и L — инвариантное относительно A подпространство, то подпространство $L^\perp$, состоящее из всех векторов, ортогональных L, тоже инвариантно относительно A.

Доказательство. Рассмотрим $\forall v \in L, \forall h \in L^\perp$. Тогда

$$(v, h) = 0, \quad Av \in L \Rightarrow (Av, h) = 0 = (v, Ah) \Rightarrow Ah \in L^\perp.$$

Теорема Гильберта-Шмидта. Если A эрмитов и компактен в H, то произвольный $z \in H$ может быть представлен в виде

$$z = v + h = \sum_k c_k e_k + h$$

где $h \in \mathrm{Ker\,A}$, $e_1, ...$ собственные векторы оператора A, соответствующие ненулевым собственным значениям $\lambda_1, ...$. Здесь через $\mathrm{Ker}\, A$ обозначено так называемое ядро оператора A, т.е. множество векторов, отображаемых оператором A в нулевой вектор.

Доказательство. Рассмотрим на действительной оси множество ненулевых собственных значений (в силу утверждения 6 оно непустое) $\lambda_1, ...,$ упорядоченных по убыванию $|\lambda_k|$ (это можно сделать на основании утверждения 7) с учетом их кратности (она конечна на основании утверждения 7). Обозначим через L линейное подпространство, натянутое на $e_1, ...$, замкнутое по норме. Тогда L инвариантно относительно A, так как $e_1, ...$ — собственные. Рассмотрим произвольный $h \in L^{\perp}$. Рассмотрим A на $L^{\perp}$ ($L^{\perp}$ инвариантно относительно A на основании утверждения 8). Тогда из утверждения 6 следует, что существует собственный вектор $h_0 \in L^{\perp}$ такой, что для соответствующего ему собственного значения λ_0 $|\lambda_0| = \|A\|$ на $L^{\perp}$. Но $\lambda_0 = 0$, так как ненулевые собственные значения соответствуют собственным вектором $e_k \in L$. Поэтому $\|A\|_{L^{\perp}} = 0$ откуда $Ah = 0$ и, следовательно, $h \in \mathrm{KerA}$.

5 Некоторые применения функционального анализа

5.1 Положительно определенные операторы

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Пусть D_s — всюду плотное множество в H, которое является линейным многообразием, т.е. замкнуто относительно операций сложения и умножения на числа из основного поля, которое мы будем считать полем действительных чисел (для простоты). Рассмотрим линейный оператор $S\colon D_s \to H$.

Определение. Оператор S называется *симметричным*, если

$$(Su, v) = (u, Sv), \quad \forall u, v \in D_s.$$

Определение. Симметричный оператор S называется *положительным*, если

$$\begin{gathered} (Sv, v) \geqslant 0; \\ (Sv, v) = 0 \Longleftrightarrow v = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Определение. Положительный оператор S называется *положительно определенным*, если существует $q > 0$ такое, что

$$\forall v \quad (Sv, v) \geqslant q^2(v, v). \tag{23}$$

Пример. $H = L_2(0,1)$; $D_s = \{v \in C^2 | v(0) = v(1) = 0\}$; $S = -\frac{d^2}{dx^2}$. Найдем

$$(Su, v) = -\int\limits_0^2 u'' v dx = -u'v\,|_0^1 + \int\limits_0^1 u'v'dx = (u, Sv).$$

Следовательно

$$(Sv, v) = \int\limits_0^1 v'^2 dx \geqslant 0;$$

Кроме того,

$$(Sv, v) = 0 \Longleftrightarrow v'^2 = 0 \Longleftrightarrow v = \text{const};$$
$$v(0) = 0 \Longrightarrow v = 0.$$

Далее,

$$v(x) = v(0) + \int\limits_0^x v'(x)dx = \int\limits_0^x v'(x)dx \Rightarrow$$

$$v(x) \leqslant \sqrt{\int\limits_0^x dx}\sqrt{\int\limits_0^x v'^2dx} \leqslant \sqrt{x}\sqrt{\int\limits_0^1 v'^2dx} \Rightarrow$$

$$v^2(x) \leqslant x\int\limits_0^1 v'^2dx \Rightarrow \int\limits_0^1 v^2dx \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^1 v'^2dx \Rightarrow \int\limits_0^1 v^2dx \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^1 v'^2dx.$$

Поэтому $(Sv, v) = \int\limits_0^1 v'^2dx \geqslant 2\int\limits_0^1 v^2dx.$

Упражнение. Проверить положительность оператора $S = \frac{d^4}{dx^4}$, если

$$H = L_2(0,1), \quad D_s = \{v \in c^4 \mid v(0) = v(1) = v'(0) = v'(1) = 0\}.$$

Аналогично можно показать, что операторы $S = -\Delta$, $\quad S = \Delta^2$ (где Δ — оператор Лапласа) являются положительно определенными на классах достаточно гладких функций, обращающихся в ноль на гладкой границе фиксированной области Ω (в случае $S = -\Delta$) и обращающихся в ноль вместе с своей нормальной производной (в случае $S = \Delta^2$). При этом, в частности, если $S = -\Delta$, то

$$(Sv, v) = \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^n v_{x_k}^2 dx, \quad dx = dx_1 ... dx_n. \tag{24}$$

С физической точки зрения величина (24) пропорциональна потенциальной энергии свободно колеблющейся мембраны, закрепленной на границе.

Введем в H новое скалярное произведение следующим образом. Для элементов $u, v \in D_s$ положим

$$(u, v)_s = (Su, v).$$

Упражнение. Проверить аксиомы скалярного произведения. Это новое скалярное произведение порождает новую норму

$$\|v\|_s^2 = (Sv, v),$$

называемую энергетической нормой.

Из условия (23) следует, что

$$\|v\| \leqslant \frac{1}{q}\|v\|_s.$$

Поэтому, если последовательность $\{v_n\}$ фундаментальна по энергетической норме, то она фундаментальна и по обычной норме. Отсюда нетрудно проверить, что пополнение H_s множества D_s по энергетической норме вложено в H:

$$D_s \subset H_s \subset H.$$

Рассмотрим уравнение

$$Su = f \in H, \quad u \in D_s. \tag{25}$$

Теорема. Уравнение (25) может иметь не более одного решения.

Доказательство. Если u_1, u_2 решения (25), то их разность удовлетворяет уравнению

$$S(u_1 - u_2) = 0. \tag{26}$$

Умножая скалярно обе части (26) на $(u_1 - u_2)$, получаем

$$(S(u_1 - u_2), (u_1 - u_2)) = 0.$$

Отсюда, в силу (22), следует, что $u_1 = u_2$.

Рассмотрим функционал

$$F(v) = (Sv, v) - 2(f, v). \tag{27}$$

Теорема. Для того чтобы элемент u был решением уравнения (25) необходимо и достаточно, чтобы он обращал в минимум функционал (27).

Доказательство. Пусть u — решение уравнения (25). Возьмем произвольное $z \in D_s$ и рассмотрим преобразование

$$\begin{gathered} F(u+z) = (S(u+z), u+z) - 2(f, u+z) = (Su, u) + 2(Su, z) + \\ +(z, z) - 2(f, u) - 2(f, z) = F(u) + 2(Su - f, z) + (Sz, z) = \\ = F(u) + (Sz, z). \end{gathered}$$

Последнее выражение минимально при $z = 0$. Этим доказана необходимость условия минимальности.

Обратно, пусть u доставляет минимум функционалу (27). Рассмотрим значение $F(u + \tau z)$ при $z \in D_s, \tau \in \mathbb{R}$:

$$F(u + \tau z) = F(u) + 2\tau(Su - f, z) + \tau^2(Sz, z) \geqslant F(u)$$

$$\Rightarrow 2\tau(Su - f, z) + \tau^2(Sz, z) \geqslant 0 \Rightarrow (Su - f, z) = 0 \quad \forall z \in D_s.$$

Поскольку $\bar{D}_s = H$, то $Su - f = 0$.

Однако, может случиться так, что в множестве D_s минимум функционала F не достигается. Расширим область определения функционала F до всего H_s. Для этого перепишем (27) в виде

$$F(v) = (v, v)_s - 2(f, v), \quad v \in D_s.$$

При заданной функции f выражение (f, v) есть линейный функционал относительно v. Кроме того,

$$|(f, v)| \leqslant \|f\| \|v\| \leqslant \|f\| \frac{1}{q} \|v\|_s, \quad v \in D_s.$$

Поэтому линейный функционал (f, v) ограничен на D_s. Значит, по теореме Хана – Банаха его можно продолжить на все H_s с сохранением нормы. А тогда, по теореме Рисса, функционал (f, v) (как функционал на H_s) можно представить в виде скалярного произведения на H_s

$$(u, v)_s = (f, v), \quad \forall v \in H_s, \tag{28}$$

т.е. существует единственное $u \in H_s$ такое, что для любого $v \in H_s$ выполняется (28).

Покажем, что именно этот элемент реализует минимум функционала F. Для этого рассмотрим

$$F(v) = (v, v)_s - 2(f, v) = (v, v)_s - 2(u, v)_s =$$

$$= (v, v)_s - (u, v)_s \pm (u, u)_s = (v - u, v - u)_s - (u, u)_s.$$

Последнее выражение минимально при $v = u$. На этом основании, элемент $u \in H_s$, реализующий минимум функционала F, будем называть *обобщенным решением* уравнения (25).

Для построения такого решения можно выбрать ортонормированный базис в H_s: $e_1, \ldots, e_k$ (это можно сделать, пользуясь сепарабельностью) и записать

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, e_k)_s e_k = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k.$$

Для практического построения решения можно воспользоваться так называемым методом Ритца, идея которого состоит в следующем.

Пусть $\Phi(v)$ — некоторый функционал, такой что $\Phi(v) \geqslant r \in \mathbb{R}$ для всех $v \in H_s$. Тогда существует $d = \inf \Phi(v)$. Назовем последовательность $\{v_n\}$ *минимизирующей*, если $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(v_n) = d$. Сама эта последовательность $\{v_n\}$ при этом может и не иметь предела. Однако, если

$$\Phi(v_n) = F(v_n) = \|v_n - u\|_s^2 - \|u\|_s^2,$$

то существует $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = u$. В самом деле, $-\|u\|_s^2 = d \leftarrow F(v_n) = \|v_n - u\|_s^2 - \|u\|_s^2 \Rightarrow \|v_n - u\|_s^2 \to 0$.

Поэтому достаточно построить минимизирующую последовательность. Для этого выбираем в D_s полную линейно независимую систему $g_1, g_2, \ldots$. Рассмотрим

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} a_k g_k.$$

$$F(v_n) = \left(\sum_k a_k s g_k, \sum_j a_j s g_j \right) - 2 \left(\sum_k a_k g_k, f \right).$$

Из условий $\frac{\partial F}{\partial a_k} = 0$ находим соответствующие a_k:

$$\begin{cases} (Sg_1, g_1)a_1 + (Sg_1, g_2)a_2 + \cdots = (f, g_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (Sg_n, g_1)a_1 + (Sg_1 n, g_2)a_2 + \cdots = (f, g_n) \end{cases}$$

Подробнее о методе Ритца и о способе выбора последовательности $g_1, g_2, \ldots$ говорится в курсе «Численные методы».

5.2 Оператор, почти обратный к положительно определенному

Мы рассмотрели положительно определенный оператор $S\colon D_s \to H$ и с его помощью ввели новое скалярное произведение $(u, v)_s =$

(Su, v). Кроме того, рассматривая уравнение $Su = f \in H$, мы получили, что для любой функции $f \in H$ существует и единственнен такой элемент $u \in H_s$, что

$$(u, v)_s = (f, v), \quad \forall v \in H_s.$$

Таким образом, можно считать, что определен линейный оператор $A : H \to H_s$, для которого $Af = u$, и при этом

$$(Af, v)_s = (f, v), \quad \forall v \in H_s. \tag{29}$$

Вспоминая неравенство $\|v\|_s^2 \geqslant q^2\|v\|$, получаем, что при $Af = u = v$ имеем:

$$\|Af\|_s^2 = |(Af, v)_s| = |(f, v)| \leqslant \|f\|\|v\| \leqslant \frac{1}{q}\|f\|\|v\|_s = \frac{1}{q}\|f\|\|Af\|_s.$$

Поэтому

$$\|Af\|_s \leqslant \frac{1}{q}\|f\|.$$

Отсюда следует, что A - ограниченный оператор.

Отметим, что $S : D_s \to H$, а $A : H \to H_s \supset D_s$, так что Af не обязательно принадлежит D_s. Тем не менее, если $u = Af \in D_s$, то $Su = f \Rightarrow SAf = f$. С другой стороны, если $f = Su$, то $Af = u = ASu$. В этом смысле можно считать, что A «обратный» к S, хотя область значений A, вообще говоря, шире, чем область определения S, даже если рассматривать сужение A на H_s. Поэтому так определенный оператор A будем называть *почти обратным* к оператору S.

Теорема. A эрмитов на H_s и положителен.

Доказательство. Для $v, f \in H_s$ в силу (29) имеем:

$$(Af, v)_s = (f, v) = (v, f) = (Av, f)_s = (f, Av)_s.$$

Полагая $f = v$, получаем

$$(Av, v)_s = (v, v) \geqslant 0,$$

причем $(v,v)=0 \Leftrightarrow v=0$.

Следствие. Если μ — собственное значение оператора A, соответствующее элементу e, то $\mu>0$. Действительно, так как $(Ae,e)=\mu \geqslant 0$, то $\mu \geqslant 0$. Но $\mu \neq 0$, так как иначе $(Ae,e)=0$ для $e\neq 0$. Поэтому $\mathrm{Ker\,A}=\{0\}$.

Дальнейшее изучение свойств оператора A зависит от конкретного вида оператора S. Поскольку в приложениях S — чаще всего дифференциальный оператор (например, $S=-\Delta$ или $S=\Delta^2$), то предварительно рассмотрим специальный класс гильбертовых пространств — так называемые соболевские пространства.

5.3 Соболевские пространства. Теорема вложения в C

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей Г. Рассмотрим множество бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty(\bar\Omega)$ со скалярными произведениями:

$$(u,v)_{W_2{}^\ell}=(u,v)_{L_2}+\sum_{1\leqslant r\leqslant \ell}(D^r u, D^r v)_{L_2},$$

$$(u,v)_{\hat W_2^\ell}=(u,v)_{L_2}+\sum_{r=\ell}(D^r u, D^r v)_{L_2}.$$

Здесь

$$D^r=\frac{\partial^r}{\partial x_1^{r_1}...\partial x_n^{r_n}},\quad r=r_1+...+r_n.$$

Эти скалярные произведения порождают нормы

$$\|v\|_{W_2{}^\ell}=\left(\sum_{1\leqslant |r|\leqslant l}\|D^r v\|^2_{L_2}+\|v\|^2_{L_2}\right)^{\frac12}, \tag{30}$$

$$\|v\|_{\hat{W}_2^\ell} = \left(\sum_{|r|=l} \|D^r v\|_{L_2}^2 + \|v\|_{L_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (31)$$

Лемма. Нормы $\|v\|_{W_2{}^\ell}$ и $\|v\|_{\hat{W}_2^\ell}$ эквивалентны нормам

$$\sum_{1\leqslant|r|\leqslant\ell} \|D^r v\|_{L_2} + \|v\|_{L_2}; \quad \sum_{|r|=l} \|D^r v\|_{L_2} + \|v\|_{L_2},$$

соответственно.

Доказательство. Это следует из эквивалентности соответствующих норм в конечномерных пространствах. В частности, в нашем случае, это следует из неравенства

$$\sqrt{a^2+b^2} \leqslant |a| + |b| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

Определение. Пополнения пространства $C^\infty(\bar{\Omega})$ по нормам (30) или (31) обозначаются $W_2^\ell(\Omega)$ и $\hat{W}_2^\ell(\Omega)$, соответственно, и называются *соболевскими пространствами.* Из каких элементов состоят соболевские пространства? Как видно из доказательства теоремы о пополнении, соболевские пространства, как и всякий результат пополнения произвольного метрического пространства, состоят из классов эквивалентных фундаментальных последовательностей. Однако, поскольку в качестве «исходного» взято конкретное функциональное пространство, то можно уточнить и свойства пополнения.

Теорема Соболева о вложении в $C(\bar{\Omega})$.

Если $\ell > \frac{n}{2}$, то существует линейный ограниченный оператор

$$J : W_2^\ell(\Omega) \to C(\bar{\Omega}).$$

Доказательство. Для простоты ограничимся случаем $n = 1$, $\ell = 1$. Из курса анализа известно, что для непрерывной функции $u_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ справедлива теорема о среднем:

$$\exists \xi \in (a, b) : u_n(\xi) = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b u_n(x)dx.$$

Поэтому для $u_n \in C^\infty$ имеем

$$u_n(x) = \int\limits_{\xi}^{x} u_n'(x)dx + \frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} u_n(x)dx.$$

Следовательно,

$$|u_n(x)| \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b 1^2dx}\sqrt{\int\limits_a^b (u_n')^2dx} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{b-a}}\sqrt{\int\limits_a^b 1^2dx}\sqrt{\int\limits_a^b (u_n')^2dx} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{b-a}\|u_n'\|_{L_2} + \frac{1}{\sqrt{b-a}}\|u_n\|_{L_2} \leqslant K\|u\|_{W_2^l}.$$

Поэтому, если последовательность $\{u_n\}$ фундаментальна в $W_2^\ell(a,b)$, то она фундаментальна и в $C[a,b]$. Следовательно, существует равномерный предел $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) \in C[a,b]$. Таким образом, каждому классу эквивалентных фундаментальных по норме W_2^ℓ последовательностей можно сопоставить непрерывную функцию, содержащуюся в этом классе.

5.4 Обобщенные производные. Теорема вложения в W

Рассмотрим для простоты случай $n = 1, \quad \ell = 1$. Возьмём последовательность $u_k \in C^\infty$, фундаментальную по норме W_1^1. Это означает, что

$$\|u_k - u_m\|_{L_2}^2 + \|u_k' - u_m'\|_{L_2}^2 \to 0.$$

В силу полноты L_2, существуют пределы (в L_2)

$$u_k \xrightarrow{L_2} v; \quad u_k' \xrightarrow{L_2} z.$$

Как связаны между собой v и z? Возьмем произвольное $u \in C_0^\infty[a,b]$. Здесь $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ — множество бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в ноль в некоторой ε-окрестности границы Γ, причем ε для каждой φ, вообще говоря, свое. Такие функции будем называть *финитными.*

Рассмотрим

$$(u_n', \varphi)_{L_2} = \int\limits_a^b u_n' \varphi dx = u_n \varphi \mid_a^b - \int\limits_a^b u_n \varphi' dx =$$

$$= - \int\limits_a^b u_n \varphi' dx = -(u_n, \varphi')_{L_2}. \tag{32}$$

Поскольку скалярное произведение на «предельных» элементах определялось по непрерывности, то

$$(z, \varphi)_{L_2} = -(v, \varphi')_{L_2}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty. \tag{33}$$

Поэтому естественно назвать z *обобщенной производной* от v. Аналогично, последовательно интегрируя по частям (32), можно получить производные высших порядков

$$(z, \varphi) = (-1)^r (v, \varphi^{(r)}).$$

Точно так же можно ввести и обобщенные частные производные при $n > 1$.

Отметим важное отличие обобщенных производных от обычных производных: старшие производные могут быть определены в пространстве $\hat{W}_2^l$, минуя младшие производные:

$$\|u_k - u_m\|_{L_2}^2 + \|u_k^{(l)} - u_m^{(l)}\|_{L_2}^2 \to 0.$$

Это же верно и для частных производных. При этом, оказывается, что из существования старших обобщенных частных производных, вообще говоря, не следует существование младших. Однако, если существуют все обобщенные частные производные порядка ℓ, то существуют и обобщенные частные производные всех младших порядков. Это формализуется в следующей теореме:

Теорема Соболева (о вложении в W). Если $\ell > k$, то $\hat{J} \colon \hat{W}_2^\ell \to \hat{W}_2^k$, $\hat{J}$ — линейный ограниченный оператор.

Поэтому с самого начала можно рассматривать не пространства $\hat{W}_2^\ell$, а W_2^ℓ. Однако, в некоторых случаях удобнее иметь дело с пространствами $\hat{W}_2^\ell$.

Можно доказать также, что для обобщенных производных справедливо соотношение

$$\left\| z(x) - \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right\|_{L_2} \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

Отметим при этом, что обобщенная производная определяется не в точке, а сразу во всей области Ω.

Для практического вычисления обобщенных производных можно пользоваться формулой (33), начиная с выражения $-(v, \varphi')$ и преобразуя ее так, чтобы получить (z, φ) для некоторой функции z.

Пример. Вычислить $|x|'$.

$$-\int_a^b |x| \varphi' dx = -\left[\int_a^0 (-x)\varphi' dx + \int_0^b x\varphi' dx \right] =$$

$$= -\left[-x\varphi' |_a^0 + \int_a^0 \varphi dx + x\varphi' |_0^b - \int_0^b \varphi dx \right] =$$

$$= -\int\limits_a^0 \varphi dx + \int\limits_0^b \varphi dx = \int\limits_a^b \operatorname{sgn}(x)\varphi dx.$$

Пример. Вычислить $(\operatorname{sgn}(x))'$.

$$-\int\limits_a^b \operatorname{sgn}(x)\varphi' dx = -\left[\int\limits_a^0 (-1)\varphi' dx + \int\limits_0^b 1\varphi' dx\right] = 2\varphi(0).$$

Однако, не существует (обычной) функции $z(x)$ такой, чтобы

$$\int\limits_a^b z(x)\varphi(x)dx = 2\varphi(0), \quad \forall\varphi \in C_0^\infty[a,b].$$

В самом деле, положим

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} e^{\frac{-\varepsilon_k^2}{\varepsilon_k^2 - x^2}}, & |x| < \epsilon_k, \\ 0, & |x| \geqslant \varepsilon_k. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{2}{e} = 2\varphi_k(0) = \int\limits_a^b z\varphi_k dx; \quad \left|\int\limits_a^b z\varphi_k dx\right| \leqslant \max|z\varphi_k| \cdot 2 \cdot \varepsilon_k \to 0.$$

5.5 Следы функций. Теоремы вложения в L_2

Пример. Рассмотрим последовательность функций на отрезке $[0;3]$:

$$u_n(x) = \begin{cases} (1-nx)(-1)^{n+1}, & 0 \leqslant x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \leqslant x < 3 - \frac{1}{n}, \\ (1-n(3-x))(-1)^{n+1}, & 3 - \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$$

где $n = 1, 2, \ldots$. Найдем

$$\|u_n\|^2_{L_2} = 2\int\limits_0^{\frac{1}{n}}(1-nx)^2dx = \frac{2}{3n} \xrightarrow{L_2} 0.$$

Однако, последовательности значений $u_n(3) = (-1)^{n+1}, u_n(0) = (-1)^{n+1}$ не сходятся. Аналогично можно рассмотреть последовательность $v_n(x) = \sqrt[n]{n}u_n(x)$. Тогда

$$\|v_n(x)\|^2_{L_2} = \frac{2\sqrt{n}}{3n} \to 0 \Rightarrow v_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} 0.$$

Однако $v_n(0) = \sqrt[n]{n}(-1)^{n+1}$ не имеет предела не только в обычном смысле, но и последовательность $v_n^2(0)$ также не имеет предела (это - аналог сходимости в L_2). Тем не менее, функции $z_n = \frac{1}{n}u_n$стремятся к 0 (в $W_2^1(a,b)$), причем в этом случае существует предел $\lim n \to \infty z_n(0) = 0$.

Таким образом, для функций из $W_2^\ell(\Omega)$, вообще говоря, можно в некотором смысле определить некоторые аналоги «значений на границе» (проблема в том, что для функций из $L_2(\Omega)$ граница Γ является множеством меры ноль).

Теорема Соболева о вложении в $L_2(\Gamma)$.

Существует линейный ограниченный оператор $B\colon W_2^\ell(\Omega) \to L_2(\Gamma)$, причем для непрерывных $v \in W_2^\ell(\Omega)$, откуда $Bv = v(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$.

Определение. Образ Bv, $v \in W_2^\ell(\Omega)$ называется *следом* v на границе Γ.

Для дальнейшего нам потребуется еще одна теорема вложения в $L_2(\Omega)$:

Теорема Кондрашова о компактности вложения в $L_2(\Omega)$.

Линейный тождественный оператор I

$$I : W_2^\ell(\Omega) \to L_2(\Omega),$$

является компактным.

5.6 Компактность оператора, почти обратного к положительно определенному

До сих пор пространства H, H_s и оператор S были абстрактными. Предположим теперь, что $H = L_2(\Omega)$, а S — дифференциальный оператор вида $S = -\Delta$ или $= \Delta^2$, определенный на классе достаточно гладких функций, обращающихся в ноль на границе (в случае $S = -\Delta$) или обращающихся в ноль на границе вместе со своей нормальной производной (в случае $S = \Delta^2$).

В этих случаях, путем интегрирования по частям, получаем

$$\|u\|^2_{-\Delta} = \int\limits_\Omega \sum_k u^2_{x_k} dx, \quad dx = dx_1 ... dx_n; \tag{34}$$

$$\|u\|^2_{\Delta^2} = \int\limits_\Omega \sum_{k,j} u^2_{x_k x_j} dx, \quad dx = dx_1 ... dx_n. \tag{35}$$

Поэтому, в случае (34), сходимость в H_s эквивалентна сходимости в $W_2^\ell(\Omega) \supset H_s$ (на функции из $W_2^\ell(\Omega)$ не накладывается ограничений на их значения на границе). В случае (35) сходимость в H_s эквивалентна сходимости в $\hat{W}_2^2(\Omega)$, что по теореме вложения в W эквивалентно сходимости в $W_2^2(\Omega)$.

В общем случае произвольного положительно определенного дифференциального оператора S, естественно предположить, что

$$H_s(\Omega) \subset W_2^\ell(\Omega) \subset L_2(\Omega).$$

Теорема. Оператор $A\colon H_s \to H_s$ компактен (A — почти обратный к S).

Доказательство. Рассмотрим любое ограниченное множество $M \subset H_s$ и его образ $\tilde{M} = AM \subset H_s$. Если $\tilde{v} \in \tilde{M}$, то существует $v \in M$ такое, что $Av = \tilde{v}$.

Возьмем любую последовательность $\{\tilde{v}_n\} \in \tilde{M}$ и рассмотрим соответствующую последовательность $\{v_n\} \in M \subset H_s \subset W_2^\ell \subset L_2$.

По теореме Кондрашова существует сходящаяся в L_2 последовательность $\{v_{n_k}\}$. Но так как $\{v_{n_k}\}$ сходящаяся, то она фундаментальна. Поэтому

$$\left\|\tilde{v}_{n_k} - \tilde{v}_{m_k}\right\|_s = \left\|Av_{n_k} - Av_{m_k}\right\|_s = \left\|A(v_{n_k} - v_{m_k})\right\|_s \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{q}\left\|v_{n_k} - v_{m_k}\right\|_{L_2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

5.7 Задачи на собственные значения

Ранее мы рассмотрели уравнение

$$Su = f \in H, \quad u \in D_s.$$

Заменив f на λu, рассмотрим по аналогии уравнение

$$Su = \lambda u.$$

Определение. (По аналогии с определением обобщенного решения). Если существуют λ и $e \neq 0$ такие, что

$$(e, v)_s = \lambda(e, v), \quad \forall v \in H_s, \tag{36}$$

то e назовем обобщенным собственным вектором оператора S. При этом пространство H_s строится по оператору S так же, как и раньше. Точно так же можно построить почти обратный оператор A, удовлетворяющий основному тождеству

$$(Af, v)_s = (f, v), \quad f \in H, \quad \forall v \in H_s. \tag{37}$$

Если существует e — решение (36), то полагая, в (37) $f = e$, получаем

$$(Ae, v)_s = (e, v), \quad \forall v \in H_s. \tag{38}$$

Из (36), (38) получаем задачу отыскания обобщенных собственных векторов оператора S в следующей форме

$$(e,v)_s = \lambda(Ae,v)_s \Leftrightarrow (e-\lambda Ae,v)_s = 0, \quad \forall v \in H_s.$$

Поэтому

$$e = \lambda Ae. \tag{39}$$

Если бы $\lambda = 0$ соответствовало обобщенному собственному вектору $e \neq 0$ оператора S, то в силу (36) мы получили бы, что $e = 0$, что невозможно. Поэтому собственные значения оператора S (если они есть) $\lambda \neq 0$, можно обозначить $\frac{1}{\lambda} = \mu$.

Значит, задачу (39) можно записать как задачу на собственные значения оператора A:

$$Au = \mu u.$$

Поскольку A эрмитов и компактен, то по теореме Гильберта – Шмидта существует счетный набор собственных значений оператора A. А поскольку оператор A — положителен, то все его собственные значения положительны. Значит, существует счетный набор собственных значений оператора A:

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geqslant \dots$$

и соответствующих ортонормированных собственных векторов

$$e_1, e_2, \dots$$

Поэтому для оператора S получаем счетный набор положительных собственных значений

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots$$

Кроме того, поскольку A положителен, то $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Значит,

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} (z,e_k)e_k \quad \forall z \in H_s.$$

Это обосновывает возможность разложения начальных условий в методе Фурье для эволюционных уравнений по обобщенным собственным векторам.

Примечание. Если размерность области Ω равна единице, то можно получить явное выражение для оператора A с использованием функции Грина. В этом случае легко проверить, что обобщенные собственные функции будут достаточно гладкими, т.е. классическими. В общем случае, при некоторых не слишком ограничительных дополнительных условиях это тоже верно.

5.8 Построение собственных функций в задаче Штурма–Лиувилля

На отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ рассмотрим дифференциальный оператор

$$S[u] = (p(x)u'(x))' - q(x)u(x), \tag{40}$$

определенный для дважды дифференцируемых функций функций $u(x)$, удовлетворяющих условиям

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{41}$$

Здесь $p \in C^1[a,b]$, $q \in C[a,b], p(a)p(b) \neq 0$.

Оператор S не является ограниченным и он определен не на всем пространстве $L_2[a,b]$, а лишь на множестве D_2 дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям (41). Но в своей области определения он симметричен:

$$(Su, v) = (u, Sv), \tag{42}$$

что проверяется непосредственным интегрированием по частям с использованием условий (41).

Определение. Назовем собственной функцией оператора S функцию $e(x) \in D_2[a,b]$, $(e(x) \not\equiv 0)$, для которой при некотором

λ выполняются соотношения

$$S[e] = \lambda e, \tag{43}$$

Теорема. Собственные функции оператора S образуют в $L_2(a,b)$ полную ортогональную систему, если уравнение

$$Su = 0, \quad u \in D_2[a,b]$$

имеет только тривиальное решение (условие невырожденности).

Доказательство. Для доказательства покажем, что существует (симметричный, компактный) оператор A такой, что

$$\forall u \in D_2[a,b] \Rightarrow A(Su) = u, \tag{44}$$

$$\forall g \in C[a,b] \Rightarrow Ag \in D_2[a,b], \ \& S(Ag) = g. \tag{45}$$

Оператор A мы будем называть обратным к S, несмотря на то, что его область определения шире, чем область определения S.

В этом смысле оператор A аналогичен почти обратному рассмотренному в 5.6.

Если мы докажем существование такого оператора A, то отсюда будет вытекать утверждение теоремы. В самом деле, по теореме Гильберта–Шмидта оператор A обладает полной системой ортогональный собственных функций $e_1(x), \ldots, e_n(x), \ldots$ с ненулевыми собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$. Если мы покажем, что все эти собственные функции непрерывны, то применяя к равенству

$$e_k = \frac{1}{\lambda_k} Ae_n$$

оператор S, получаем

$$Se_n = \frac{1}{\lambda_n} sAE_n = \frac{1}{\lambda_n} e_n,$$

так что функция $e_n(x)$ является собственной функцией оператора S с собственным значением λ_n^{-1}.

Далее, поскольку $\forall u \in D_2[a,b]$ выполняется соотношение (44), то $u(x)$ принадлежит области значений оператора A. Значит, $u(x)$ принадлежит области значений оператора A. Значит $u(x)$ может быть представлена в виде

$$u(x) = \sum \lambda_n e_n(x), \lambda_n \neq 0.$$

Но $\overline{D}_2(a,b) = L_2(a,b)$, так что $\{e_n(x)\}$ образуют полную систему в $L_2(a,b)$.

Остается указать способ построения оператора A. Для этого при любом $g \in C[a,b]$ решим уравнение

$$Su = g \tag{46}$$

Пусть u_1 и u_2 — два линейно независимых решения уравнения

$$Su = 0, \tag{47}$$

причем $u_1(a) = 0$, $u_2(b) = 0$. Ищем решение уравнения (47) в виде

$$u(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x). \tag{48}$$

методом вариации произвольных постоянных. Тогда для неизвестных $c_1(x)$ и $c_2(x)$ получаем систему

$$\begin{cases} c_1' u_1 + c_2' u_2 = 0, \\ c_1' u_1' + c_2' u_2 = g. \end{cases}$$

Легко проверяется, что определитель этой системы на самом деле не зависит от x и равен некоторой константе $c_0 \neq 0$. Поэтому

$$c_1' = \frac{u_1 g}{c_0}, \quad c_2' = \frac{u_2 g}{c_0}.$$

Значит решение имеет вид

$$
\begin{gathered}
u = c_1 u_1 + c_2 u_2 = \\
= c_0^{-1} u_1(x) \int\limits_a^x u_2(\xi) g(\xi) d\xi + c_0^{-1} u_2(x) \int\limits_x^b u_1(\xi) g(\xi) d\xi.
\end{gathered} \tag{49}
$$

Непосредственно видно, что $u(a) = u(b) = 0$.

Введя функцию

$$
G(x,\xi) = \begin{cases} c_0^{-1} u_1(x) u_2(\xi), & \xi < x \\ c_0^{-1} u_1(\xi) u_2(x), & \xi > x \end{cases}
$$

можно записать, что

$$
u = \int\limits_a^b G(x,\xi) g(\xi) d\xi \tag{50}
$$

Функция G называется функцией Грина соответствующей краевой задачи.

Можно проверить, что функция $u(x)$, определенная формулой (50), принадлежит $C^2[a,b]$.

Отметим лишь, что используя понятие δ-функции, функцию Грина можно определить, как решение задачи

$$
S[G] = \delta(x - \xi), \quad G\big|_{x=a} = G\big|_{x=b} = 0.
$$

5.9 Верхние оценки собственных значений

Для эволюционных уравнений величины соответствующих собственных значений дают возможность найти, в частности, собственные частоты колебаний. Однако, точное отыскание собственных значений можно провести лишь для небольшого числа очень простых областей специального вида (прямоугольник, круг и т.п.). Например, даже для области в виде треугольника для этого нельзя воспользоваться методом Фурье. Поэтому возникает важная задача получения оценок для собственных значений. В этом параграфе рассмотрен один из возможных подходов к решению этой задачи.

При доказательстве теоремы Гильберта – Шмидта было показано, что если A — компактный эрмитов оператор в H_s, то у него существует единичный собственный вектор e_0, отвечающий максимальному по модулю собственному значению m, причем $|m| = \|A\|$. Поэтому

$$|(Ae_0, e_0)_s| = |m||(e_0, e_0)_s| = |m|$$

и

$$|(Av, v)_s| \leqslant \|Av\|_s \|v\|_s = \|Av\|_s \leqslant \|A\|, \ \|v\|_s = 1.$$

Но, поскольку оператор A положительный, то все его собственные значения μ_k положительны. Значит, $m = \|A\|$, так что $m = \mu_1 = \max \mu_k$. Поэтому можно записать, что

$$\mu_1 = \max_{v \in H_s} \frac{(Av, v)_s}{(v, v)_s}.$$

Значит,

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mu_1} = \min_{v \in H_s} \frac{(v, v)_s}{(Av, v)_s} = \min_{v \in H_s} \frac{(v, v)_s}{(v, v)}.$$

Поэтому

$$\lambda_1 \leqslant \min_{v \in D_s} \frac{(Sv, v)}{(v, v)}. \tag{51}$$

Для практического применения оценки (51) поступают следующим образом. Выберем систему функций $g_1, g_2, \ldots$ (о выборе этой системы идет речь в курсе «Численные методы») и положим

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} a_k g_k, \tag{52}$$

где a_k — неизвестные коэффициенты. Будем искать

$$\min(Sv_n, v_n)$$

при условии

$$\|v_n\|_s^2 = 1.$$

Составляем функцию Лагранжа

$$\mathfrak{L} = \left(S\left(\sum_k a_k g_k\right), \sum_k a_j g_j \right) - \eta \left(\sum_k a_k g_k, \sum_k a_j g_j \right),$$

где η — множитель Лагранжа. После преобразований получаем

$$\mathfrak{L} = \sum_k \sum_j a_k a_j \left(S g_k, g_j\right) - \eta \sum_k \sum_j a_k a_j \left(g_k, g_j\right).$$

Дифференцируя $\mathfrak{L}$ по каждому a_j, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_k a_k (S g_k, g_j) - \eta \sum_k a_k (g_k, g_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

или, что то же

$$\sum_k \left((S g_k, g_j) - \eta\left(g_k, g_j\right)\right) a_k = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{53}$$

Для существования ненулевого решения системы (53) необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы равнялся нулю:

$$\det \begin{pmatrix} (Sg_1, g_1) - \eta(g_1, g_1) & (Sg_2, g_1) - \eta(g_2, g_1) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (Sg_1, g_n) - \eta(g_1, g_n) & (Sg_2, g_n) - \eta(g_2, g_n) & \ldots \end{pmatrix} = 0.$$

Можно доказать, что все корни η_j этого уравнения действительны (и положительны), причем каждый корень служит верхней оценкой соответствующего собственного значения:

$$\lambda_1 \leqslant \eta_1; \quad \lambda_2 \leqslant \eta_2, \ldots$$

где $\eta_1 \leqslant \eta_2 \leqslant \cdots \leqslant \eta_n$. Можно доказать также, что при этом точность оценок повышается с ростом числа слагаемых n в формуле (52).

Дополнение. Вычислительная часть курсового проекта

Задание 1. Дано уравнение колебаний мембраны

$$u_{tt} = \Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) u$$

имеющей форму кольцевого сектора Ω ($0 \leqslant \varphi \leqslant \theta,\ 1 \leqslant r \leqslant \ell$, где $0 < \theta < 2\pi,\ 0 < l < \infty$), закрепленного по всей своей границе Γ.

1. Найти первую (наименьшую) собственную частоту колебаний по методу Фурье (использовать соответствующие таблицы на стр. 242– 243 книги [10]).

2. Оценить сверху эту частоту по методу Ритца, взяв в качестве базисных функции $g_1 = g_0,\ g_2 = g_0 r\cos\varphi$, где $g_0 = (r-1)(\ell - r)(\theta - \varphi)\varphi$. Сравнить результат с предыдущим пунктом.

Рассмотрим одномерный вариант задачи:

$$u_{tt} = \Delta u = u_{xx}, \quad u(0,t) = u(\ell,t) = 0.$$

Почему точечный спектр оператора $S = -\Delta$ состоит из *счетного* числа собственных значений? Есть ли наименьшее положительное собственное значение? Есть ли нулевое собственное значение? Есть ли комплексные и отрицательные собственные значения? Есть ли непрерывный спектр? Можно ли разложить начальные условия в ряд по собственным функциям? Если это возможно, то в смысле какой нормы сходится соответствующий ряд? Как построить соответствующую функцию Грина в этом случае? Каковы спектральные свойства оператора A, почти обратного к оператору S? Найти явное выражение для оператора A.

Задание 2. Дано уравнение поперечных колебаний пластинки

$$u_{tt} = -\Delta^2 u = -\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) u =$$

$$= -\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) u$$

имеющей форму кольцевого сектора Ω ($0 \leqslant \varphi \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 1 \leqslant r \leqslant \ell$), закрепленного и зажатого по всей своей границе Γ ($u|_\Gamma = 0,\ \partial u/\partial\vec{\nu}|_\Gamma = 0$; $\vec{\nu}$ — вектор внешней нормали к границе Ω).

Оценить сверху первую (наименьшую) собственную частоту колебаний пластинки. В качестве базисной принять функцию $g_1 = g_0^2$ из пункта 2.

Рассмотрим одномерный вариант задачи:

$$u_{tt} = -\Delta^2 u = -u_{xxxx}, \quad u(0,t) = u(\ell,t) = 0,$$
$$u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0.$$

Можно ли разложить начальные условия в ряд по собственным функциям? Если это возможно, то в смысле какой нормы сходится соответствующий ряд? Как построить соответствующую функцию Грина в этом случае? Каковы спектральные свойства оператора A, почти обратного к оператору S? Найти явное выражение для оператора A.

Проверить симметрию и положительность соответствующего оператора Δ^2 в одномерном случае.

Задание 3. Даны варианты краевых условий для мембраны ($\Delta u = f,\ u|_\Gamma = 0$) и пластинки ($\Delta^2 u = f,\ u|_\Gamma = 0,\ \partial u/\partial\vec{\nu}|_\Gamma = 0$) в n-мерной области Ω.

Сформулировать задачу об отыскании обобщенного решения как минимума соответствующего функционала. Воспользовавшись теоремами вложения Соболева, определить, какими свойствами обладает обобщенное решение при $n = 1,\ n = 2,\ n = 3$. В каком смысле выполняются краевые условия для обобщенного решения?

Варианты заданий

1.	$\theta = \pi$	$\ell = 1.2$	16.	$\theta = \pi/2$	$\ell = 12$
2.	$\theta = \pi$	$\ell = 1.5$	17.	$\theta = \pi$	$\ell = 2.0$
3.	$\theta = 2\pi/3$	$\ell = 1.2$	18.	$\theta = 2\pi/3$	$\ell = 1.5$
4.	$\theta = 2\pi/3$	$\ell = 2.0$	19.	$\theta = \pi/2$	$\ell = 1.2$
5.	$\theta = \pi/2$	$\ell = 1.5$	20.	$\theta = \pi/2$	$\ell = 2.0$
6.	$\theta = 2\pi/5$	$\ell = 1.2$	21.	$\theta = 2\pi/5$	$\ell = 1.5$
7.	$\theta = 2\pi/5$	$\ell = 2.0$	22.	$\theta = \pi$	$\ell = 1.1$
8.	$\theta = \pi$	$\ell = 1.3$	23.	$\theta = \pi$	$\ell = 1.4$
9.	$\theta = \pi$	$\ell = 1.6$	24.	$\theta = \pi$	$\ell = 1.7$
10.	$\theta = \pi$	$\ell = 1.8$	25.	$\theta = \pi$	$\ell = 1.9$
11.	$\theta = \pi$	$\ell = 2.5$	26.	$\theta = \pi$	$\ell = 3.0$
12.	$\theta = \pi$	$\ell = 4.0$	27.	$\theta = \pi/2$	$\ell = 5.0$
13.	$\theta = \pi/2$	$\ell = 6.0$	28.	$\theta = \pi/2$	$\ell = 7.0$
14.	$\theta = \pi/2$	$\ell = 8.0$	29.	$\theta = \pi/2$	$\ell = 9.0$
15.	$\theta = \pi/2$	$\ell = 10$	30.	$\theta = \pi/2$	$\ell = 11$

Список литературы

[1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1989.

[2] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М., Наука, 1965.

[3] Треногин В.А. Функциональный анализ. М., Физматлит, 2002.

[4] Федоров В.М. Курс функционального анализа. СПб., Лань, 2005.

[5] Шилов Г.Е. Математический анализ. Специальный курс. М., Физматлит, 1961.

[6] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., Наука, 1988.

[7] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., Наука, 1976.

[8] Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., РУДН, 1997.

[9] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М., Мир, 1985.

[10] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции, М., Наука, 1968 г.

Св. план 2013, поз.127

Деркач Мария Михайловна
Филимонов Андрей Матвеевич
Филимонов Дмитрий Андреевич

Функциональный анализ и его приложения

Учебное пособие

по дисциплине «Функциональный анализ»
для студентов специальности «Прикладная математика и информатика»

Подписано в печать Формат 60x84/16 Тираж 100 экз.
Усл.-печ. л. - Заказ №

УПЦ ГИ МИИТ, 127994, Москва, ул.Образцова, д.9, стр.9