САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ФИЛИАЛ
НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

А. В. Михеев

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КУРСУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2012

УДК 517.91
ББК 22.161
М69

Рекомендовано к печати Учебно-методическим советом НИУ ВШЭ — Санкт-Петербург

Рецензенты:
д. физ.-мат. н., профессор, зав. кафедрой ВМ-2 СПбГЭТУ «ЛЭТИ» *А.М. Коточигов*

к. физ.-мат. н., доцент, зав. кафедрой математики НИУ ВШЭ – Санкт-Петербург *Ю.И. Рейнов*

М69 **Михеев, А. В.** Сборник задач по дифференциальным уравнениям: учеб. пособие [Текст] / А. В. Михеев ; Санкт-Петербургский филиал Нац. исслед. ун-та «Высшая школа экономики». — СПб.: Отдел оперативной полиграфии НИУ ВШЭ — Санкт-Петербург, 2012. — 68 с. — 100 экз. — ISBN 978-5-7598-0934-4

Данный сборник содержит задачи по курсу дифференциальных уравнений, читаемому автором на факультете экономики НИУ ВШЭ – Санкт-Петербург.

В начале каждой темы дается краткое изложение основных теоретических фактов и разбираются примеры решений типовых задач.

Для студентов и слушателей программ высшего профессионального образования.

УДК 517.91
ББК 22.161

ISBN 978-5-7598-0934-4

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Дифференциальные уравнения: основные определения 4

§ 2. Задача нахождения первообразной 7

§ 3. Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными 12

§ 4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка 17

§ 5. Уравнения Бернулли 22

§ 6. Уравнения в полных дифференциалах 25

§ 7. Уравнения, допускающие понижение порядка...................................... 28

§ 8. Комплексные числа 31

§ 9. Функциональные линейные пространства... 39

§ 10. Однородные линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами 42

§ 11. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами и стандартной правой частью 49

§ 12. Принцип суперпозиции 55

§ 13. Метод вариации постоянных 58

§ 14. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме.. 61

Литература 65

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и производные неизвестной функции $y(x)$. Общий вид дифференциального уравнения:

$$F\Big(x, y(x), y'(x), \dots y^{(n)}(x)\Big) = 0. \quad (1.1)$$

Запись $y^{(n)}(x)$ означает производную n-го порядка от функции $y(x)$ (то есть «n штрихов»). Всякое дифференциальное уравнение обязано содержать хотя бы одну производную от неизвестной функции $y(x)$ (в противном случае это будет не **дифференциальное**, а обычное **функционально**е уравнение).

Пример 1.1. Дифференциальными уравнениями будут, например, уравнения вида:

$$y' - 3y + x = 0, \quad y'' - \sin(x) \cdot y = x, \quad y' - y = x^2.$$

Не являются дифференциальными уравнениями:

$$y^2 - y = x, \quad x = \ln(y), \quad y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 0.$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, в него входящей (т.е. наибольший из порядков производных, содержащихся в уравнении).

Пример 1.2. Уравнение $y'' - x \cdot y + 2y = 0$ имеет порядок 2, $y''' \cdot y - y'' \cdot y' = 0$ – порядок 3, $y' - x \cdot y = \sin(x)$ – порядок 1.

Решением дифференциального уравнения (1.1) называется любая функция $y = \varphi(x)$, $x(a, b)$, такая, что подстановка ее в уравнение (1.1) превращает это уравнение в верное равенство для любого $x \in (a, b)$.

Множество всех решений дифференциального уравнения называется его **общим решением**, а любой элемент этого множества (подбираемый по определенному критерию) – **частным решением**.

Чаще всего общее решение дифференциального уравнения n-го порядка записывается в виде, зависящем от n произвольных параметров:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \qquad (1.2)$$

а частное решение соответствует конкретным значениям параметров $C_1, C_2, \ldots, C_n$, удовлетворяющим системе уравнений, называемой **системой начальных условий**:

$$\begin{cases} y(x_0) = b_0, \\ y'(x_0) = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases} . \qquad (1.3)$$

Здесь $y(x)$ – общее решение для (1.1), $x_0 \in (a, b)$ – некоторая точка из области определения $y(x)$, $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \Re$ – произвольные вещественные числа.

Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющего системе начальных условий (1.3), называется **задачей Коши**.

Задачи

Определить порядок дифференциальных уравнений:

1.1. $y^2 - \sin(y') \cdot y + x^2(1+x)(1+y) = 0.$

1.2. $y \cdot y' - (y'')^2 = x^2 + 1.$

1.3. $(y''' - y')^2 \cdot y' - x^5 \cdot \operatorname{tg}(y) + \cos(y) = 0$

1.4. $y \cdot y' \cdot y'' - 2(y'')^2 = \ln(x).$

1.5. $\sin(x) \cdot \cos(y') - \sin^2(y') = \dfrac{y'}{(y'')^3 + 1}.$

1.6. $(y')^4 \cdot \ln(y') = 1.$

1.7. $\log(xy' - y'') + \left(\dfrac{x}{y}\right)''' - y = 0.$

1.8. $(x^2 + x + y) = (x - y)(y^2)''.$

1.9. $(y - 2y'' \cdot x)^2 \sqrt{y'''} = 5.$

1.10. $\cos(y'' - 2y' + x) = 0.$

Определить, является ли функция $y(x)$ решением дифференциального уравнения:

1.11. $y = x^2, \quad y' \cdot x - 2y = 0.$

1.12. $y = \sin(x), \quad y'' + y = 0.$

1.13. $y = x^2 + x + 1, \quad 2y - y' - y'' = 2x^2 - 1.$

1.14. $y = \dfrac{1}{x}, \quad y' \cdot y'' - y''' = \dfrac{1}{x^5}.$

1.15. $y = (x-1) \cdot e^x, \quad y' - y = 2e^x.$

1.16. $y = e^{x^3}, \quad y' = 3x^2 y.$

1.17. $y = (x-2) \cdot (x-3), \quad y' = xy'' - 5.$

1.18. $y = \ln(\cos(x)), \quad y' = -\mathrm{tg}(x).$

1.19. $y = \sin(x), \quad y' \cdot \mathrm{tg}(x) - y = 0.$

Пусть цены на продукцию первого и второго сорта в каждый момент времени t описываются функциями $y(t) \cdot t$, $y^2(t)$ соответственно. Записать в виде дифференциальных уравнений следующие условия:

1.20. Цены на оба товара растут все время с одинаковой скоростью.

1.21. Цена на второй товар в каждый момент времени растет в 2 раза медленнее.

1.22. Цена на первый товар растет в каждый момент времени t в $\sin^2(t) + 1$ раз быстрее.

§ 2. ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНОЙ

Простейшее дифференциальное уравнение, общим решением которого является множество всех первообразных функции $f(x)$, имеет вид:

$$y' = f(x). \tag{2.1}$$

Тогда

$$y(x) = \int f(x)dx = F(x) + C, \tag{2.2}$$

где $F(x)$ – первообразная $f(x)$, C – произвольная вещественная константа. В случае, если у нас дополнительно имеется одно начальное условие вида:

$$y(x_0) = b_0, \tag{2.3}$$

то, подставив (2.2) в условие (2.3), мы можем найти константу C и соответствующее частное решение уравнения (2.2), удовлетворяющее (2.3):

$$F(x_0) + C = b_0,$$

следовательно

$$C = b_0 - F(x_0).$$

Пример 2.1. Пусть нам нужно найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' = 2x + 1. \tag{2.4}$$

Это легко сделать, взяв неопределенный интеграл от правой части. Получим:

$$y = x^2 + x + C,\ C \in \Re. \tag{2.5}$$

Здесь C – константа интегрирования, меняя которую мы получим все множество решений ДУ (1.4). Теперь найдем частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию:

$$y(1) = 3. \tag{2.6}$$

Чтобы определить константу C, подставим общее решение (2.5) в начальное условие (2.6). Получим:

$$y(1) = C + 2 = 3.$$

Отсюда $C = 1$ и соответствующее частное решение будет $y(x) = x^2 + x + 1$.

Рассмотрим кратко свойства неопределенного интеграла и основные методы взятия первообразной.

Свойства неопределенного интеграла

Свойство 2.1. Линейность: $\int \left(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\right) dx = \alpha \cdot \int f(x) dx + \beta \cdot \int g(x) dx, \quad \alpha, \beta \in \Re.$

Свойство 2.2. Интеграл от производной: $\int f'(x) dx = f(x) + C.$
Здесь $F(x)$ – первообразная $f(x)$, C – произвольная вещественная константа.

Свойство 2.3. Производная от интеграла: $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x).$

Свойство 2.4. Внесение функции под знак дифференциала:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(\varphi(x)) d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C.$$

Здесь $F(x)$ – первообразная $f(x)$, C – произвольная вещественная константа.

Пример 2.2. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' = \sin^{10}(x) \cdot \cos(x).$$

Имеем:

$$y(x) = \int \sin^{10}(x) \cdot \cos(x) dx = \int \sin^{10}(x) \cdot d(\sin(x)) = \frac{\sin^{11}(x)}{11} + C.$$

Иногда, наоборот, удобно не вносить функцию-множитель под знак дифференциала, а принять независимую переменную x в качестве функции, зависящей от другой переменной – t.

Свойство 2.5. Внесение функции под знак дифференциала:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Здесь $\varphi(t)$ – обратимая дифференцируемая функция с областью значения, совпадающей с областью определения $f(x)$ (подстановка).

Пример 2.3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' = \sqrt{1 - x^2}.$$

Тогда

$$y(x) = \int \sqrt{1 - x^2} dx.$$

Область определения подынтегральной функции – $x \in [-1,1]$. Возьмем в качестве подстановки функцию $x = \cos(t)$, $t \in [0, \pi]$. В этом случае эта функция является обратимой ($t = \arccos(x)$) и

$$y(x) = \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\cos^2 t} \cdot d(\cos(t)) =$$

$$= \int \sin(t) \cdot (-\sin(t))dt = -\int \sin^2(t)dt = \int \frac{\cos(2t)-1}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sin(2t) - \frac{1}{2} \cdot t + C = \frac{1}{4} \cdot 2\sin(t) \cdot \cos(t) - \frac{1}{2} \cdot t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\sin(\arccos(x)) \cdot \cos(\arccos(x)) -$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \arccos(x) + C = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \cdot \arccos(x) + C.$$

Свойство 2.6. Интегрирование по частям:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Другая запись того же свойства в форме, содержащей производные:

$$\int u(x) \cdot v'(x) \cdot dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \cdot dx.$$

Пример 2.4. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' = x \cdot \sin(x).$$

Чтобы решить это уравнение и найти первообразную от его правой части, воспользуемся свойством интегрирования по частям:

$$y(x) = \int x \cdot \sin(x)dx = \int x \cdot d(-\cos(x)) =$$

$$= -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x)dx = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C.$$

Задачи

Найти первообразные следующих функций:

2.1. $f(x) = 3x^2 + 2x + 3.$

2.2. $f(x) = x^2 - 2x \cdot \sin(x).$

2.3. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

2.4. $f(x)=\ln(\cos x)\cdot\sin(x)$.

2.5. $f(x)=\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$.

2.6. $f(x)=(x+\sin(x))^{10}\cdot(1-\cos(x))$.

2.7. $f(x)=\dfrac{\ln(2x)}{x}$.

2.8. $f(x)=x^2\ln(x)-\operatorname{arctg}(x)$.

2.9. $f(x)=\dfrac{\cos(\ln(2x))}{x}$.

2.10. $f(x)=\operatorname{tg}(2x)$.

2.11. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+3}$.

2.12. $f(x)=x\cdot e^{-2x}$.

Пусть $q(t)$ – количество продукции, произведенной в момент времени t, $v(t)$ – скорость роста этой величины в момент времени t. Найти количество продукции, произведенной в моменты времени $t = 1$ и $t = 2$, если (2.13 – 2.16):

2.13. $v(t)=3t^2+1,\quad q(0)=0$.

2.14. $(\;)$, (0) 1.

2.18. Продукция второго вида выпускается в два раза быстрее, чем первого?

2.19. Скорость убывания производства продукции второго вида пропорциональна скорости роста производства первой с коэффициентом A?

2.20. Пусть известно, что количество продукции первого вида растет по квадратичному закону $q_1(t) = t_2$, а второго вида – по экспоненциальному закону $q_2(t)$ = et. Найти скорость роста суммарного количества произведенной продукции в каждый момент времени t.

2.21. Государство решает перечислить на нужды предприятия в течение двух лет сумму в 20 000 у.е. Какая из двух схем финансирования выгоднее для предприятия:

1. Каждый год перечисляется по 10 000 у.е.
2. Первый год перечисляется 20 000 у.е., второй год – ничего.

§ 3. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЕННЫМИ И РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Уравнения с разделенными переменными имеют вид:

$$f(x)dx + g(y)dy = 0. \qquad (3.1)$$

Эта форма записи называется «записью в дифференциалах». Как и всегда, x считается независимой переменной, y – зависимой (y – функция от x), $y'(x) = \frac{dy}{dx}$. Однако эта запись позволяет считать x и y равноправными. «Разделенность переменных» в (3.1) означает, что первое слагаемое в уравнении зависит только от x, а второе – только от y. Разнося эти слагаемые по разным частям равенства и беря интегралы от обеих частей по dx и по dy соответственно, имеем:

$$\int f(x)dx = -\int g(y)dy.$$

После взятия интегралов у нас получится выражение, задающее неявную зависимость $y(x)$. В некоторых случаях y можно выразить через x также и в явной форме.

Пример 3.1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$e^y dy + \left(4x^3 - 2x\right)dx = 0.$$

Перенеся последнее слагаемое в правую часть, получим:

$$e^y dy = -\left(4x^3 - 2x\right)dx,$$

$$\int e^y dy = \int -\left(4x^3 - 2x\right)dx.$$

Находя первообразные от обеих частей, получим:

$$e^y + C_1 = -\frac{4x^4}{4} + 2\frac{x^2}{2} + C_2,$$

$$e^y = -x^4 + x^2 + C.$$

Поскольку C_1, C_2 – произвольные вещественные числа, мы можем объединить эти константы в одну ($C = C_2 - C_1$). Полученное соотношение позволяет найти функцию *y(x)* в явной форме и получить окончательный ответ в виде общего решения:

$$y = \ln(-x^4 + x^2 + C).$$

Пример 3.2. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xdx + ydy = 0.$$

Выполним ту же самую последовательность действий:

$$xdx = -ydy,$$

$$\int xdx = -\int ydy,$$

$$\frac{x^2}{2} + C_1 = -\frac{y^2}{2} + C_2,$$

$$\frac{x^2 + y^2}{2} = C_2 - C_1.$$

Обозначив $C = 2(C_2 - C_1)$, получим общее решение, на этот раз в виде неявной функции:

$$x^2 + y^2 = C, C \in \Re.$$

Уравнения с разделяющимися переменными имеют вид:

$$k(x) \cdot l(y)dx + m(x) \cdot n(y)dy = 0. \qquad (3.2)$$

Эти уравнения отличаются от уравнений с разделенными переменными тем, что в них переменные x и y еще не разделены, но, тем не менее, они приводятся к виду (3.1) при помощи простого преобразования. Действительно, разделим (3.2) на произведение функций $m(x) \cdot l(y)$:

$$k(x) \cdot l(y)dx + m(x) \cdot n(y)dy = 0 \,\Big|\, m(x) \cdot l(y),$$

$$\frac{k(x)}{m(x)}dx + \frac{n(y)}{l(y)}dy = 0.$$

Теперь, разделив переменные, мы можем решить полученное уравнение точно также как (3.1).

Замечание. Выполняя деление, мы априорно предполагали, что $m(x) \neq 0$ и $l(y) \neq 0$. Те функции y, при которых $l(y) = 0$, называются особыми решениями уравнения (3.2).

Пример 3.3. Найти частное решение уравнения:

$$y^2(1 + x)dx + x^2(1 - y)dy = 0, \qquad (3.3)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(1) = 1. \qquad (3.4)$$

Для начала разделим переменные:

$$y^2(1 + x)dx + x^2(1 - y)dy = 0 \,\Big|\, y^2 \cdot x^2,$$

$$\frac{1+x}{x^2}dx+\frac{1-y}{y^2}dy=0.$$

Особое решение: $y=0$. Теперь перенесем второе слагаемое направо и проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{1+x}{x^2}dx=-\int\frac{1-y}{y^2}dy,$$

$$\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx=-\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}\right)dy,$$

$$-\frac{1}{x}+\ln|x|+C_1=-\left(-\frac{1}{y}-\ln|y|\right)+C_2,$$

$$-\frac{1}{x}+\ln|x|+C_1=\frac{1}{y}+\ln|y|+C_2.$$

Сгруппировав слагаемые и объединив в одну константы C_1 и C_2, получим общее решение нашего уравнения в виде неявного соотношения:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\ln\left|\frac{y}{x}\right|=C. \tag{3.5}$$

Чтобы получить частное решение уравнения (3.3), удовлетворяющее начальному условию (3.4), необходимо подставить значения $x=1$, $y=1$ в общее решение (3.5) и найти константу C. Имеем:

$$2+\ln(1)=C\Rightarrow C=2,$$

и таким образом, получаем искомое частное решение:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\ln\left|\frac{y}{x}\right|=2.$$

Уравнения с заменой параметра. Уравнения вида

$$y'=f(ax+by+c) \tag{3.6}$$

сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными при помощи замены:

$$z=ax+by+c. \tag{3.7}$$

Решив полученное уравнение относительно функции z, мы находим неизвестную функцию y из равенства (3.7).

Пример 3.4. Найти общее решение уравнения:

$$y'=(x+y+1)^2. \tag{3.8}$$

Выполним замену:

$$z = x + y + 1. \quad (3.9)$$

В этом случае $y = z - x - 1$ и (3.8) превращается в уравнение относительно неизвестной функции z:

$$(z - x - 1)' = z^2 \Rightarrow z' - 1 = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 + 1 \Rightarrow \frac{dz}{z^2 + 1} = dx.$$

Проинтегрировав обе части уравнения, получим:

$$\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \int dx \Rightarrow \operatorname{arctg}(z) = x + C,\ C \in \mathfrak{R} \Rightarrow z = \operatorname{tg}(x + C),\ C \in \mathfrak{R}.$$

Теперь найдем окончательный ответ, выразив функцию y из (3.9):

$$y = \operatorname{tg}(x + C) - x - 1.$$

Задачи

Найти общие решения уравнений с разделенными переменными:

3.1. $2ydy = 3x^2dx$.

3.2. $y^{10}dy = (1 - 3x^3)dx$.

3.3. $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x - 1}$.

3.4. $(e^x + 1)dx = 6y^5dy$.

3.5. $\frac{dy}{1 + y^2} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

3.6. Найти частное решение уравнения $dy = (x^2 - 1)dx$, если $y(1) = 4$.

Найти общие решения уравнений с разделяющимися переменными:

3.7. $(1 + x^2)dy - 2xydx = 0$.

3.8. $1 + y' + y + xy' = 0$.

3.9. $y' = y^2 \cos(x)$.

3.10. $y' + y \cdot \operatorname{tg}(x) = 0$.

3.11. $\sqrt{4 - y^2}dx + y\sqrt{9 - x^2}dy = 0$.

3.12. $xyy' = (1 - x^2)^2$.

3.13. $e^{2x}(1+y')=1.$

3.14. $y'(1+5y)=xy\sin(2x).$

3.15. $y'-xy^3=0.$

3.16. Найти частное решение уравнения $(1 + x^2)dx = xydy$, если $y(2) = 1$.

3.17. Найти частное решение уравнения $y'+\dfrac{\mathrm{tg}(x)}{\mathrm{ctg}(y)}=0,$ если $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{6}.$

3.18. Найти частное решение уравнения $ydx + \mathrm{ctg}(x)dy$, если $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-1.$

3.19. Пусть зависимости спроса x и предложения y от цены p имеют вид:

$$x(p)=18+p+4\frac{dp}{dt},\; y(p)=22-2p+3\frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент времени цена p равна 20.

Найти общие решения уравнений методом замены параметра:

3.20. $y' = \cos^2(x - y)$.

3.21. $y' = e^{x+2y}$.

3.22. $y'=\sqrt{2x+y+1}.$

3.23. $y' = (10x + 5y + 1)^3$.

3.24. $y' = (x + y)^{10} - 1$.

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + a(x)y = b(x). \tag{4.1}$$

Здесь $a(x)$, $b(x)$ – некоторые функции, играющие роль коэффициента и свободного члена соответственно, $y(x)$ – неизвестная функция. Возможно два случая.

Случай 4.1. $b(x) = 0$ (однородное уравнение). В этом случае уравнение (4.1) имеет вид:

$$y' + a(x)y = 0. \tag{4.2}$$

Решим его в общем виде. Для этого представим производную в виде $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ и воспользуемся методом разделения переменных из § 3. Имеем:

$$y' = -a(x)y,$$

$$\frac{dy}{dx} = -a(x)y,$$

$$dy = -a(x)ydx,$$

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a(x)dx.$$

Пусть $A(x)$ – первообразная функции $a(x)$. Тогда, находя интегралы в левой и правой частях равенства, получим:

$$\ln|y| + C_1 = -A(x) + C_2,$$

$$\ln|y| = -A(x) + C, \quad C = C_2 - C_1,$$

$$|y| = e^{-A(x)+C} = e^C \cdot e^{-A(x)}.$$

Поскольку C – **произвольная вещественная** константа, то e^C – **произвольная положительная** константа. Обозначим ее как C_0. Тогда:

$$|y| = C_0 \cdot e^{-A(x)} \Rightarrow y = \pm C_0 \cdot e^{-A(x)}.$$

Поскольку согласно определению констант мы можем сказать, что $\pm C_0 = C$, то, избавляясь от модуля, мы получаем окончательное общее решение уравнения (4.2):

$$y = C \cdot e^{-A(x)}, \quad C \in \Re. \tag{4.3}$$

Пример 4.1. Одна из простейших разновидностей однородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка – **уравнение естественного роста**:

$$y' + ky = 0, \tag{4.4}$$

здесь k – некоторый постоянный коэффициент. Этим уравнением описывается большое количество процессов в биологии, экономике, социологии, и т.д. Из (4.3) следует, что его общее решение имеет вид:

$$y = C \cdot e^{-kx}, C \in \Re. \tag{4.5}$$

Пример 4.2. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' - 4xy = 0.$$

Сравнивая уравнение с его общим видом (4.2), получаем, что коэффициент $a(x) = -4x$, следовательно, первообразная $A(x) = = -4 \cdot \frac{x^2}{2} = -2x^2$. Поэтому согласно (4.3)

$$y = C \cdot e^{-2x^2}.$$

Пример 4.3. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию:

$$y' - \sin(x) \cdot y = 0;\ y(0) = 1.$$

Действуя аналогично (4.1), сначала находим общее решение:

$$a(x) = -\sin(x) \Rightarrow A(x) = \cos(x) \Rightarrow y = C \cdot e^{-\cos(x)}.$$

Теперь подставим общее решение в начальное условие и найдем константу C:

$$y(0) = 1 \Rightarrow C \cdot e^{-\cos(0)} = 1 \Rightarrow C \cdot e^{-1} = 1 \Rightarrow C = e \Rightarrow y = e \cdot e^{-\cos(x)}.$$

Таким образом, искомым решением будет функция:

$$y = e^{1-\cos(x)}.$$

Случай 4.2. $b(x) \neq 0$ (неоднородное уравнение). Для решения линейного дифференциального уравнения первого порядка в общем виде применим метод, называемый «вариацией постоянной». Рассмотрим вид общего решения в (4.3). Положим, что вместо константы C там стоит некоторая функция $C(x)$:

$$y = C(x) \cdot e^{-A(x)}. \tag{4.6}$$

Как и в (4.3), здесь $A(x)$ – первообразная функции $a(x)$. Подставим (4.6) в (4.1) и будем искать функцию $C(x)$:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

$$C'(x) \cdot e^{-A(x)} + C(x) \cdot (-A'(x)) \cdot e^{-A(x)} + a(x) \cdot C(x) \cdot e^{-A(x)} = b(x).$$

Поскольку $A'(x) = a(x)$, то второе и третье слагаемое в левой части уравнения взаимно сокращаются. Остается:

$$\begin{gathered} C'(x) \cdot e^{-A(x)} = b(x) \Rightarrow C'(x) = e^{A(x)} \cdot b(x), \\ C(x) = \int e^{A(x)} \cdot b(x)dx. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Теперь, найдя $C(x)$, подставляем его в (4.6) и таким образом получаем общее решение для уравнения (4.1).

Пример 4.4. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' + \operatorname{tg}(x) \cdot y = \frac{1}{\cos(x)}. \tag{4.8}$$

Шаг 1. Решим однородное уравнение:

$$y' + \operatorname{tg}(x) \cdot y = 0. \tag{4.9}$$

Имеем:

$$a(x) = \operatorname{tg}(x) \Rightarrow A(x) = -\ln|\cos(x)| \Rightarrow y(x) =$$

$$= C \cdot e^{-A(x)} = C \cdot e^{\ln|\cos(x)|} = C \cdot |\cos(x)|.$$

Модуль, содержащий функцию $\cos(x)$, раскрывается в зависимость от знака косинуса. Заметим, что точки, в которых $\cos(x) = 0$, не входят в область определения уравнения, поскольку в них не существуют значения коэффициента $\operatorname{tg}(x)$.

Шаг 2. Найдем решение неоднородного уравнения (4.8). Для этого подставим в полученное решение однородного уравнения (4.9) место константы C функцию $C(x)$:

$$y(x) = C(x) \cdot \sigma \cdot \cos(x). \tag{4.10}$$

Здесь $\sigma = 1$, если $\cos(x) > 0$, $\sigma = -1$, если $\cos(x) < 0$. Сама функция $C(x)$ находится из (4.7):

$$C(x)=\int e^{-\ln|\cos(x)|}\cdot\frac{1}{\cos(x)}dx=\int\frac{dx}{e^{\ln|\cos(x)|}\cdot\cos(x)}=$$

$$=\int\frac{dx}{|\cos(x)|\cdot\cos(x)}=\sigma\int\frac{dx}{\cos^2(x)}=\sigma\left(\operatorname{tg}(x)+D\right).$$

Здесь D – произвольная вещественная константа, возникающая при взятии интеграла.

Подставляя найденную функцию $C(x)$ в (4.10), получим общее решение $y(x)$.

$$y(x)=\sigma\cdot\cos(x)\cdot\sigma\cdot\left(\operatorname{tg}(x)+D\right)=\sigma^2\cdot\cos(x)\cdot\left(\operatorname{tg}(x)+D\right)=$$

$$=\cos(x)\cdot\left(\operatorname{tg}(x)+D\right).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\sigma=\pm1$, следовательно, всегда $\sigma^2=1$. Раскроем скобки и получим окончательный ответ:

$$y(x)=\cos(x)\cdot\operatorname{tg}(x)+D\cdot\cos(x)=\sin(x)+D\cdot\cos(x).$$

Задачи

Найти общие решения однородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

4.1. $y'+2y=0.$

4.2. $y'-8x^2y=0.$

4.3. $y'+\operatorname{tg}(2x)y=0.$

4.4. $y'-\dfrac{xy}{e^{x^2}}=0.$

4.5. $y'-\dfrac{\ln(x)y}{x}=0.$

Найти общие решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

4.6. $y'+\dfrac{2y}{x}=x^2.$

4.7. $y'+xy=x.$

4.8. $y'-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x^2}.$

4.9. $y' + 2y = 3e^x$.

4.10. $y' - \cos(x)y = x^2$.

Найти частные решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка, удовлетворяющие начальным условиям:

4.11. $y' + 3y = 1$, $y(0) = 0$.

4.12. $y' - \operatorname{tg}(x)y = 0$, $y(0) = 0$.

4.13. $y' - 2y = e^{2x}$, $y(0) = 1$.

4.14. $y' + 2\operatorname{tg}(x)y = \cos^4(x)$, $y(0) = -1$.

4.15. $y' - 2xy = e^{x^2}$, $y(1) = 1$.

Пусть количество производимой продукции в каждый момент времени t пропорционально скорости роста этой величины с коэффициентом $a(t)$, и кроме того, в начальный момент времени количество продукции равно нулю. Найти, сколько экземпляров произведено в моменты времени $t = 1$ и $t = 2$, если (4.16–4.18):

4.16. $a(t) = \sin(t) + 1$.

4.17. $a(t) = e^t$.

4.18. $a(t) = t^2 + 2t + 2$.

4.19. Должник платит p процентов от занятой суммы L за год. Какова будет итоговая годовая сумма к выплате, если известно, что проценты нарастают непрерывно?

4.20. В какую сумму обратилась бы копейка в 2000 году, если бы ее положили в Сбербанк в начале нашей эры под 5% годовых?

4.21. Известно, что ежегодный уровень инфляции составляет p процентов. Сколько лет потребуется для удвоения цен?

4.22. Пусть количество производимой продукции в каждый момент времени t равно $q(t)$, и оно убывает по естественному закону с коэффициентом $-a$, где $a > 0$. На поддержание производства в каждый момент времени направляются инвестиции в размере e^t. Определить перспективы производства в зависимости от a, если в начальный момент времени количество производимой продукции равно A.

§ 5. УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

Уравнения Бернулли в общем случае имеют вид:

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \quad n \neq 0,1. \tag{5.1}$$

Здесь $y(x)$ – неизвестная функция, $a(x)$, $b(x)$ – некоторые функции, являющиеся коэффициентами в уравнении (5.1). Покажем, что путем замены:

$$z = y^{1-n} \tag{5.2}$$

любое уравнение Бернулли сводится к неоднородному линейному уравнению (4.1). Поделим обе части (5.1) на y^n:

$$y' \cdot y^{-n} + a(x)y^{1-n} = b(x). \tag{5.3}$$

Найдем производную функции $z(x)$ в (5.2):

$$z' = \left(y^{1-n}\right)' = (1-n)y^{-n}y' \Rightarrow y^{-n}y' = \frac{z'}{1-n}. \tag{5.4}$$

Подставив (5.4) и (5.2) в (5.3), получаем новое уравнение, зависящее только от z:

$$\frac{z'}{1-n} + a(x)z = b(x). \tag{5.5}$$

Домножив обе части (5.5) на $(1 - n)$, получим линейное неоднородное уравнение первого порядка относительно $z(x)$ (см. § 4). Найдя общее решение $z(x)$, затем находим $y(x)$ из (5.2).

Пример 5.1. Найти общее решение уравнения Бернулли:

$$xy' - 4y = x^2\sqrt{y}. \tag{5.6}$$

Для начала, поделив обе части на x, избавимся от множителя при y' и приведем уравнение к виду (5.1):

$$y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}. \tag{5.7}$$

Теперь, согласно (5.3), разделим обе части уравнения (5.7) на $\sqrt{y}$:

$$y' \cdot y^{-\frac{1}{2}} - \frac{4y^{\frac{1}{2}}}{x} = x. \tag{5.8}$$

Теперь сделаем замену:

$$z = y^{\frac{1}{2}}. \tag{5.9}$$

Поскольку $z' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \cdot y'$, то $y' \cdot y^{-\frac{1}{2}} = 2z'$, и согласно (5.5), мы имеем:

$$2z' - \frac{4z}{x} = x.$$

$$z' - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}. \tag{5.10}$$

Полученное уравнение (5.10) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением вида (4.1) относительно неизвестной функции $z(x)$. Решим его методом § 4.

Первый шаг – решение однородного уравнения с такой же левой частью:

$$z' - \frac{2z}{x} = 0 \Rightarrow a(x) = -\frac{2}{x} \Rightarrow A(x) = -2\ln|x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x) = C \cdot e^{2\ln|x|} \Rightarrow z(x) = Cx^2,\ C \in \Re.$$

Теперь, заменив константу C на неизвестную функцию $C(x)$, найдем общее решение:

$$z(x) = C(x) \cdot x^2, \quad C(x) = \int \frac{x}{2} \cdot e^{-2\ln|x|} dx =$$

$$= \int \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2} \ln|x| + D,\ D \in \Re.$$

Следовательно, $z(x) = x^2 \left(\frac{1}{2} \ln|x| + D \right)$, $D \in \Re$. Поскольку из (5.9) следует, что $y = z^2$, то мы можем получить окончательный ответ:

$$y(x) = x^4 \cdot \left(\frac{1}{2} \ln|x| + D \right)^2.$$

Задачи

Найти общие решения уравнений Бернулли:

5.1. $y' - \frac{4}{x} y = x\sqrt{y}$.

5.2. $y' + 2xy = 2xy^3$.

5.3. $y' + \frac{2}{x} y = 3x^2 y^{\frac{3}{4}}$.

5.4. $xy' + 2y = y^2$.

5.5. $xy' + y = y^2 \ln(x)$.

5.6. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$.

5.7. $xy' + 2\sqrt{xy} = y$.

5.8. $xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}$.

Найти частные решение уравнений Бернулли, удовлетворяющие начальным условиям:

5.9. $y' + 3y = y^2 e^{2x}, \quad y(0) = 1$.

5.10. $y' - 7y = e^{3x} y^2$, $y(0) = 2$.

5.11. $y' - \frac{y}{x-3} = \frac{y^2}{x-3}, \quad y(1) = -2$.

5.12. Пусть количество производимой продукции в каждый момент времени t равно $q(t)$, и оно убывает по естественному закону с коэффициентом $-a$, где $a > 0$. На поддержание производства в каждый момент времени направляются инвестиции в размере $qb(t)$. Определить перспективы производства в зависимости от a и b, если в начальный момент времени количество производимой продукции равно A.

§ 6. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Рассмотрим дифференциальное уравнение, записанное, подобно уравнению (3.1), в дифференциальной форме:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \qquad (6.1)$$

Уравнение (6.1) называется **уравнением в полных дифференциалах**, если существует такая функция $U(x, y)$, что выполнены условия:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y). \qquad (6.2)$$

Другими словами, левая часть уравнения (6.1) является полным дифференциалом функции U:

$$dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \qquad (6.3)$$

В этом случае общим решением уравнения (6.1) будет функция $y(x)$, заданная неявным соотношением:

$$U(x, y) = C, \ C \in \Re. \qquad (6.4)$$

Имеет место следующая **теорема 6.1**:

Для того чтобы выражение $L = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ было полным дифференциалом некоторой функции U, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (6.5)$$

Функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ предполагаются дифференцируемыми и частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ – непрерывными в некоторой области $\Omega \subset \Re$.

Пример 6.1. Решить дифференциальное уравнение:

$$2xydx + (x^2 + 3y^2)dy = 0. \qquad (6.6)$$

Согласно общему виду (6.1), здесь $P(x, y) = 2xy$, $Q(x, y) = x^2 + 3y^2$.

Шаг 1. Проверим, что коэффициенты $P(x, y)$, $Q(x, y)$ в уравнении (6.6) удовлетворяют условиям (6.5). Для этого найдем их частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(2xy\right)'_y = 2x,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(x^2 + 3y^2\right)'_x = 2x.$$

Следовательно, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Шаг 2. Теперь найдем функцию U, удовлетворяющую условию (6.2). Для этого запишем (6.2) в виде системы:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 3y^2. \qquad (6.7)$$

Проинтегрируем первое из уравнений (6.7) по переменной x. Получим:

$$U \quad 2\frac{x^2}{2}y \qquad (y) \quad x^2 y \qquad (y). \qquad (6.8)$$

Здесь $\Psi(y)$ – функция от y, служащая «константой» интегрирования по x. Чтобы ее найти, подставим (6.8) во второе из уравнений (6.7):

$$(x^2 y + \Psi(y))'_y = x^2 + 3y^2 \Rightarrow x^2 + \Psi'(y) =$$

$$= x^2 + 3y^2 \Rightarrow \Psi'(y) = 3y^2 \Rightarrow \Psi(y) = y^3 + D.$$

Здесь D – произвольное вещественное число, которое в данном случае можно положить равным нулю, поскольку для решения уравнения нам достаточно найти лишь одну функцию U, полным дифференциалом которой является левая часть уравнения (6.6). Таким образом, мы получаем ответ вида (6.4):

$$x^2y + y^3 = C,\ C \in \Re.$$

Задачи

Найти общие решения уравнений в полных дифференциалах:

6.1. $(3x^2 + 2y)dx + (2x + 6y)dy = 0.$

6.2. $y \sin(y)dx + (x \sin(y) + xy \cos(y))dy = 0.$

6.3. $(2x - y)dx - xdy = 0.$

6.4. $(x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin(2y)dy = 0$.

6.5. $(ex + y + \sin(y))dx + (e^y + x + x\cos(y))dy = 0$.

6.6. $\frac{y}{x}dx + \left(3y^2 + \ln(x)\right)dy = 0$.

6.7. $\left(3x - 5x^2y^2\right)dx + \left(3y^2 - \frac{10}{3}x^3y\right)dy = 0$.

6.8. $3x^2y + \sin(x) = \cos(y) - x^3) \cdot y'$.

6.9. $(x\cos(2y) - 3)dx - x^2\sin(2y)dy = 0$.

6.10. $\left(3x^2 + 3x^2\ln\left(y\right)\right)dx - \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy = 0$.

Найти частные решения уравнений в полных дифференциалах, удовлетворяющие начальным условиям:

6.11. $(2x + ye^{xy})dx + (1 + xe^{xy})dy = 0,\ y(0) = 1$.

6.12. $(x^2 + 2xy)dx + (x^2 - y^2)dy = 0,\ y(1) = -1$.

6.13. $(3x^2 + 10xy)dx + (5x^2 - 1)dy = 0,\ y(1) = 0$.

6.14. $e^{-y}dx + (2 - xe^{-y})dy = 0,\ y(1) = 1$.

6.15. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy = 0, y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

6.16. $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y\ln(y)} = 0, \quad y(e) = e$.

§ 7. УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Рассмотрим некоторые типы уравнений, допускающих понижение порядка.

Тип 1. Пусть дано уравнение:

$$y^{(n)} = f(x), \tag{7.1}$$

здесь (n) означает производную n-го порядка от функции $y(x)$ (то есть «n штрихов»). Сделав замену:

$$z = y^{(n-1)}, \tag{7.2}$$

мы сведем наше уравнение к задаче нахождения первообразной (2.1):

$$z = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Теперь, повторив замену (7.2), найдем первообразную уже от функции z, и т. д.

Пример 7.1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''' = x - \sin(x).$$

Шаг 1. Делаем замену $z = y''$ и решаем уравнение

$$z' = x - \sin(x).$$

Находя первообразную от правой части, получаем:

$$z = \int \left(x - \sin\left(x\right)\right)dx = \frac{x^2}{2} + \cos(x) + C, \quad C \in \Re.$$

Шаг 2. Делаем замену $t = y'$ и решаем уравнение:

$$t' = \frac{x^2}{2} + \cos(x) + C$$

$$t = \frac{x^3}{6} + \sin(x) + Cx + D, \quad C, D \in \Re.$$

Шаг 3. Наконец, на последнем шаге находим саму функцию $y(x)$:

$$y' = \frac{x^3}{6} + \sin(x) + Cx + D$$

$$y = \frac{x^4}{24} - \cos(x) + \frac{Cx^2}{2} + Dx + E, \quad C, D, E \in \Re.$$

Тип 2. Уравнение вида:

$$F\left(x, y^{(k)}(x), y^{(k+1)}(x), \dots y^{(n)}(x)\right) = 0$$

приводится к виду (1.1) при помощи замены:

$$z = y^{(x)}(x). \tag{7.3}$$

В результате получается дифференциальное уравнение порядка n-k относительно новой функции z:

$$F\left(x, z(x), z'(x), \dots z^{(n-k)}(x)\right) = 0. \tag{7.4}$$

Решая уравнение (7.4), мы находим его общее решение $z(x)$, а затем, подставляя $z(x)$ в (7.3), ищем неизвестную функцию $y(x)$ из получившегося уравнения типа (7.1).

Пример 7.2. Найти общее решение уравнения:

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0.$$

Сделаем замену $z = y'$ и решим уравнение:

$$z' - \frac{z}{x} = 0.$$

Оно легко решается путем разделения переменных:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z| + C_1 = \ln|x| + C_2 \Rightarrow \ln|z| = \ln|x| + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z| = e^{\ln|x| + C} \Rightarrow |z| = C_0 e^{\ln|x|}, C_0 > 0 \Rightarrow |z| = C_0 |x|, C_0 > 0 \Rightarrow z = Cx, C \in \Re.$$

Теперь, зная $z(x)$, найдем функцию $y(x)$:

$$y' = Cx \Rightarrow y = \frac{Cx^2}{2} + D, \quad C, D \in \Re.$$

Задачи

Найти общие решения дифференциальных уравнений методом понижения порядка:

7.1. $y'' = \sin(2x) + 4x - 3$.

7.2. $y'' = e^x + \cos(5x) - 4$.

7.3. $y'' = x \cdot e^{x^2} + e^{-x}$.

7.4. $y'' = \cos^4(x) + 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{x+2}$.

7.5. $y'' = \frac{1}{1+x^2} + x - \sin(x)$.

7.6. $y''' = 3x - x^2 + \cos(x)$.

7.7. $y''y^3 = 1$.

7.8. $y'' = y'(1 + (y')^2)$.

7.9. $y'' - \frac{2}{x}y' = 2x^3$.

7.10. $xy'' - y' = x^2e^x$.

Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

7.11. $y'' = \left(e^{2x} + \sin(3x)\right)x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$.

7.12. $y'' = \left(x^2 + 7x + 9\right)e^x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 4$.

7.13. $y''\mathrm{tg}(y) = 2(y')^2, \quad y(1) = \frac{\pi}{4}, y'(1) = -2$.

7.14. $y'' - 2xy' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

7.15. $y'' = y'\ln(y')$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

7.16. $3y'y'' = 2y$, $y(0) = y'(0) = 1$.

7.17. $y'' = 2y^3$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

7.18. $y'' + y'\sqrt{(y')^2 - 1} = 0, \quad y(\pi) = 0, y'(\pi) = -1$.

§ 8. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Мнимой единицей называется символ, обозначаемый латинской буквой «i», для которого выполняется условие:

$$i^2 = -1. \qquad (8.1)$$

Комплексным числом называется сумма вида

$$z = a + bi, \qquad (8.2)$$

где a, b – вещественные числа. В частности, при $a = 0$ комплексное число $z = bi$ называется чисто мнимым, при $b = 0$ оно совпадает с вещественным числом a. Число a называется **вещественной частью** комплексного числа (8.2), а число b – его **мнимой частью**.

Всякое комплексное число (8.2) может быть изображено на плоскости $\Re^2$ точкой с координатами (a, b). При этом ось абсцисс (ox) называется **вещественной осью**, а ось ординат (oy) – **мнимой осью**.

Модулем комплексного числа (8.2) называется неотрицательное вещественное число

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (8.3)$$

Аргументом комплексного числа (8.2) называется угол в радианах между положительным направлением оси ox и радиус-вектором $\vec{r} = \{a, b\}$, измеренный в направлении против часовой стрелки. Аргумент обозначается как $\varphi = \arg(z)$ и принадлежит полуинтервалу $[0, 2p)$. Для нахождения аргумента в алгебраической форме находят угол φ из этого полуинтервала, удовлетворяющий системе уравнений

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \dfrac{a}{|z|}; \\ \sin(\varphi) = \dfrac{b}{|z|}. \end{cases} \qquad (8.4)$$

Зная модуль и аргумент комплексного числа, можно преобразовать его следующим образом:

$$z = a + bi = |z| \cdot \left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|} i \right) = |z| \cdot \big(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) \big). \qquad (8.5)$$

Запись вида (8.5) называется **тригонометрической формой комплексного числа** (8.2).

Вводя обозначение:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi), \tag{8.6}$$

получаем другую запись (8.7), называемую **показательной формой комплексного числа**:

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}. \tag{8.7}$$

Пример 8.1. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -1 + \sqrt{3} \cdot i$, записать его в тригонометрической и показательной формах.

Имеем:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Теперь, зная модуль z, мы можем найти его аргумент согласно (8.4), (8.5):

$$z = -1 + \sqrt{3} \cdot i = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right),$$

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = -1/2 \\ \sin(\varphi) = \sqrt{3}/2 \\ \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

Единственный угол φ, удовлетворяющий данной системе уравнений и лежащий на данном промежутке, равен $\dfrac{2\pi}{3}$. Поэтому тригонометрическая и показательная формы числа z будут иметь вид:

$$z = 2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \right),$$

$$z = 2 \cdot e^{\frac{2\pi}{3} i}.$$

Теперь рассмотрим действия, которые можно выполнять над комплексными числами.

Пусть имеются два комплексных числа:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + b_1 i, \\ z_2 &= a_2 + b_2 i. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Сложение и вычитание. Чтобы найти сумму (разность) двух комплексных чисел (8.8), мы должны по отдельности сложить (вычесть) их вещественные и мнимые части:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i, \\ z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i. \tag{8.9}$$

Пример 8.2. Найти сумму и разность двух комплексных чисел: $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - 4i$.

Имеем:

$$z_1 + z_2 = (1 + 3) + (2 - 4)i = 4 - 2i, \\ z_1 - z_2 = (1 - 3) + (2 + 4)i = -3 + 6i.$$

Умножение. Произведение комплексных чисел (8.3) находится из дистрибутивного закона и определения мнимой единицы (8.1). Имеем:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 a_2 i + a_1 b_2 i + b_1 b_2 i^2.$$

Поскольку $i^2 = -1$, окончательно получаем:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2) i. \tag{8.10}$$

Пример 8.3. Найти произведение двух комплексных чисел: $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - 4i$.

Имеем:

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (3 - 4i) = 3 + 6i - 4i - 8i^2 = \\ = (3 + 8) + (6 - 4)i = 11 + 2i.$$

Деление. Чтобы найти частное комплексных чисел z_1, z_2, введем одно вспомогательное определение.

Комплексным числом, **сопряженным** к комплексному числу $z = a + bi$, называется комплексное число $\overline{z} = a - bi$.

Комплексное число $z = a + bi$ и сопряженное к нему комплексное число $\overline{z} = a - bi$ связаны между собой соотношениями:

$$z + \overline{z} = 2a, \\ z \cdot \overline{z} = |z|^2. \tag{8.11}$$

Теперь, используя второе из соотношений (8.11), преобразуем частное $\frac{z_1}{z_2}$ путем домножения числителя и знаменателя дроби на множитель, сопряженный знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z}_2}{z_2\cdot\overline{z}_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_1a_2+b_1a_2i-a_1b_2i-b_1b_2i^2}{a_2^2+b_2^2}=$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2+(b_1a_2-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.$$

Пример 8.4. Найти частное двух комплексных чисел: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$.

Имеем:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{(1+i)^2}{1-i^2}=\frac{1+2i+i^2}{2}=\frac{1+2i-1}{2}=i.$$

Операции над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах

Пусть у нас есть два комплексных числа z_1, z_2, записанные в показательной форме:

$$z_1=|z_1|\cdot e^{i\varphi_1},\quad z_2=|z_2|\cdot e^{i\varphi_2}. \tag{8.12}$$

Тогда имеют место следующие **правила**:

1. При перемножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

$$z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$
$$z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right). \tag{8.13}$$

2. При делении двух комплексных чисел модуль первого из них делится на модуль второго, а из аргумента первого вычитается аргумент второго.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right). \tag{8.14}$$

3. При возведении комплексного числа z в степень n его модуль возводится в степень n, а аргумент умножается на n.

$$z^n=|z|^n e^{in\varphi},$$

$$z^n = |z|^n \left(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)\right). \qquad (8.15)$$

Последнее равенство носит название **«формула Муавра»**.

Пример 8.5. Выполнить умножение и деление двух комплексных чисел $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$ в тригонометрической (показательной) форме.

Для начала найдем модуль и аргумент комплексных чисел z_1, z_2:

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, |z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4} i},$$

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{7\pi}{4} i}.$$

Теперь найдем произведение и частное z_1, z_2 согласно (8.13) и (8.14):

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4} i} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{\frac{7\pi}{4} i} = 2 \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{4}\right) i} =$$

$$= 2 \cdot e^{2\pi i} = 2 \cdot \left(\cos(2\pi) + i \cdot \sin(2\pi)\right) = 2,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4} i}}{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{7\pi}{4} i}} = e^{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right) i} = e^{-\frac{6\pi}{4} i} = e^{-\frac{3\pi}{2} i} = e^{\frac{\pi}{2} i} = \cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2} = i.$$

В последнем равенстве с экспонентой мы прибавили к углу $-\frac{3\pi}{2}$ угол 2π (полный круг), чтобы аргумент попал в нужный диапазон от 0 до 2π.

Пример 8.6. Используя формулу Муавра, вычислить $(1 + i)^{10}$.

Рассмотрим комплексное число $z = 1 + i$ и найдем z^{10}. Из примера 8.5 нам уже известно, что

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4} i}.$$

Поэтому согласно формуле Муавра (8.15):

$$z^{10} = (1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10} \cdot e^{\frac{10\pi}{4}i} = 2^5 \cdot e^{\frac{5\pi}{2}i} =$$

$$= 32 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = 32 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2} \right) = 32i.$$

В последнем равенстве с экспонентой мы отняли 2π от угла $\frac{5\pi}{2}$, чтобы аргумент попал в нужный диапазон от 0 до 2π.

Корнем *n*-й степени из комплексного числа z называется такое число z_1, что $(z_1)n = z$. Если некоторое комплексное число $z \neq 0$ имеет модуль $|z|$ и аргумент φ, то оно имеет ровно n различных комплексных корней n-й степени $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, которые находятся по формуле:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n}i}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{8.16}$$

Пример 8.7. Найти все корни третьей степени из числа $z = 2i$.

Поскольку для $z = 2i$, $\varphi = \arg(z) = \frac{\pi}{2}$ и $|z| = 2$, то согласно (8.16) имеем при $k = 0, 1, 2$:

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{\frac{\pi}{2}+0}{3}i} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{\pi}{6}i} = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right),$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}i} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{5\pi}{6}i} = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{6} \right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right),$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}i} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{9\pi}{6}i} = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{2} \right) = -\sqrt[3]{2} \cdot i.$$

Квадратное уравнение $az^2 + bz + c = 0$ с дискриминантом $D = b^2 - 4ac < 0$ решается по той же формуле, как обычное квадратное уравнение. При этом $\sqrt{D} = \sqrt{-|D|} = \sqrt{i^2 D} = \pm i\sqrt{|D|}$. Таким образом,

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}. \tag{8.17}$$

Пример 8.8. Решить уравнение $z^2 + 4z + 5 = 0$.

Имеем: $D = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 16 - 25 = -9 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} =$ $= -2 \pm i$.

Задачи

Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме:

8.1. $(3 + 5i) + (7 - 2i)$.

8.2. $(3 - 2i) - (5 + i)$.

8.3. $(2 + 3i)(5 - 7i)$.

8.4. $(3 + 2i)(-5i)$.

8.5. $(2 + 3i)2$.

8.6. $(5 - i)3$.

8.7. $\frac{2+3i}{5-7i}$.

8.8. $\frac{1-i}{1+i}$.

8.9. $\frac{(2+3i)-(5+7i)}{2+3i}$.

8.10. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{12} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{12}$.

Записать комплексные числа в тригонометрической и показательной формах:

8.11. $z = 5i$.

8.12. $z = 1 + i$.

8.13. $z = -6$.

8.14. $z = -2 - 2i$.

8.15. $z = -3\sqrt{3} + 3i$.

Записать комплексные числа в алгебраической и тригонометрической формах:

8.16. $z = e^{\frac{5\pi}{4}i}$.

8.17. $z = 4e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

8.18. $z = 5e^{\frac{7\pi}{6}i}$.

8.19. $z = -2e^{\frac{11\pi}{6}i}$.

8.20. $z = \left(e^{\frac{\pi}{4}i} + e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^2$.

Решить уравнения в комплексных числах:

8.21. $z^2 + 4 = 0$.
8.22. $z^2 + 2z + 2 = 0$.
8.23. $z^2 - 4z + 13 = 0$.
8.24. $z^2 + 3z + 4 = 0$.
8.25. $4z^2 - 20z + 26 = 0$.
8.26. $25z^2 + 10z + 10 = 0$.
8.27. $z^4 + 4z^2 + 5 = 0$.
8.28. $z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0$.
8.29. $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$.
8.30. $z^3 - 8 = 0$.

Вычислить:

8.31. $\sqrt[3]{1-i}$.

8.32. $\sqrt[4]{-16}$.

8.33. $\sqrt[3]{2-2i}$.

8.34. $\sqrt[4]{i}$.

8.35. $\sqrt[4]{-2-2\sqrt{3}i}$.

8.36. $\sqrt[5]{3-4i}$.

8.37. $(3 - 3i)^5$.

8.38. $\left(\sqrt{3}+i\right)^{10}$.

§ 9. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Линейное векторное пространство – это множество элементов произвольной природы, над которыми введены две операции: сложение и умножение на число. Причем выполнение этих операций не должно выводить за пределы данного множества.

Пример 9.1. Линейными векторными пространствами являются:

1. Пространство n-мерных векторов с вещественными координатами:

$$\Re^n = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \mid x_i \in \Re, i = 1, 2, \dots n\}.$$

2. Пространство вещественных матриц размерности $m \times n$:

$$\Re^{m\times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\ a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \Re \right\}.$$

3. Пространство вещественных непрерывных функций, заданных на промежутке (a, b):

$$C = (a, b) = \{f : (a, b) \to \Re \mid f \text{ – непрерывна на } (a, b)\}.$$

Элементы линейного векторного пространства, независимо от его природы, называются **векторами**.

Из всех линейных векторных пространств для нас здесь представляют интерес именно **функциональные линейные пространства**, поскольку именно они возникают при рассмотрении общих решений линейных дифференциальных уравнений.

Пусть V – некоторое множество функций $f : (a, b) \to \Re$. Тогда оно будет являться **функциональным линейным пространством**, если выполнены два условия:

$$\begin{aligned} &1.\quad \forall f(x), g(x) \in V \quad f(x) + g(x) \in V. \\ &2.\quad \forall f(x) \in V, \alpha \in \Re \quad \alpha \cdot f(x) \in V. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Из трех линейных векторных пространств, приведенных в примере 9.1, функциональным линейным пространством является лишь $C\,(a, b)$ (п. 3).

Система функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $un(x)$, принадлежащих функциональному линейному пространству V, называется **линейно независимой**, если из равенства

$$\alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) + \ldots \alpha_n u_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \tag{9.2}$$

следует, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0. \tag{9.3}$$

Это условие можно сформулировать и по-другому: система функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ называется **линейно независимой**, если ни одна из функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ не выражается линейно через остальные функции системы.

Базисом линейного пространства V называется такой набор функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x) \in V$, что выполнено два условия:

1. Система функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ является линейно независимой.

2. Любая функция $u(x) \in V$ линейно выражается через функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ единственным образом: $u(x) = \alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) + \ldots \alpha_n u_n(x)$ $\forall\, x \in (a, b)$.

При этом набор вещественных чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ называется **координатами** функции $u(x)$ в базисе $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$. В общем случае одно и то же линейное пространство имеет бесконечное количество разных базисов, и одна и та же функция в каждом из них имеет свой набор координат.

Количество элементов в любом базисе пространства V называется его **размерностью** (обозначается $\dim V = n$).

К примеру, для пространств из (9.1): $\dim\Re^n = n$, $\dim\Re^{m\times n} = mn$, $\dim C\,(a, b) = \infty$.

Пример 9.2. Доказать, что функции $u_1(x) = e^x$, $u_2(x) = x \cdot e^x$, принадлежащие функциональному линейному пространству $C(\Re)$, являются линейно независимыми.

Приравняем к нулю линейное разложение (9.2):

$$\alpha_1 \cdot e^x + \alpha_2 \cdot x \cdot e^x = 0 \quad \forall x \in \Re. \tag{9.4}$$

Докажем, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Поскольку равенство (9.4) выполнено для любого вещественного x, подставим в него по очереди $x = 0$ и $x = 1$:

$$x = 0: \alpha_1 \cdot e^0 + \alpha_2 \cdot 0 \cdot e^0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0,$$

$$x = 1: \quad \alpha_1 \cdot e^1 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot e^1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 \cdot e + \alpha_2 \cdot e = 0 \Rightarrow \alpha_2 \cdot e = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0.$$

Пример 9.3. Пусть P_n – множество всех многочленов степени не выше n. Доказать, что оно является линейным функциональным пространством, найти любой его базис и определить размерность.

Обозначим степень многочлена $f(x)$ как $\deg(f(x))$. Тогда:

$$f(x),\ g(x) \in P_n \Rightarrow \deg(f(x)) \le n, \deg(g(x)) \le n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \deg(f(x) + g(x)) \le n \Rightarrow f(x) + g(x) \in P_n,$$

$$f(x) \in P_n \Rightarrow \deg(f(x)) \le n \Rightarrow \deg(\alpha \cdot f(x)) \le n \Rightarrow \alpha \cdot f(x) \in P_n.$$

Таким образом, условия (9.1) проверены, и P_n – функциональное линейное пространство. Покажем, что набор функций – одночленов $1, x, x_2, ..., x^n$ является базисом пространства P_n. Условие 2 из определения базиса очевидно выполнено, поскольку всякий многочлен степени не выше n представляет собой сумму произведений вещественных коэффициентов на указанные одночлены. Осталось проверить, что система функций $1, x, x_2, ..., x^n$ является линейно независимой. Пусть $u_0(x) = 1$, $u_1(x) = x$, $u_2(x) = x^2$, ..., $u_n(x) = x^n$. Тогда:

$$\alpha_0 u_0(x) + \alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) + \ldots \alpha_n u_n(x) = 0\ \forall x \in \Re \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots \alpha_n x^n = 0\ \forall x \in \Re.$$

Поскольку по основной теореме алгебры из тождественного равенства многочлена нулю следует равенство нулю всех его коэффициентов, то $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$ и $1, x, x^2, ..., x^n$ – базис P_n. Количество функций в этом базисе равно $n + 1$, следовательно $\dim P_n = n + 1$.

Задачи

Являются ли линейно независимыми функции:

9.1. e^x, e^{2x}.

9.2. e^{ax}, e^{bx} при $a \ne b$.

9.3. x, $x \cdot \sin(x)$, $x \cdot \sin^2(x)$.

9.4. x, $\mathrm{tg}(x)$, e^{-x}.

9.5. $x^2 - 1{,}2x^2 + 2$.

9.6. $1, x, x^2, (x + 1)^2$.

9.7. $1, \sin^2(x), \cos(2x)$.

9.8. $1, \ln(x), 2\log(x^2)$.

9.9. $(x - 1)^2, (x + 1)^2, x$.

9.10. $x^3 + 1, x - 1, x^2 + 2$.

§ 10. ОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ *n*-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Всякое однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0. \qquad (10.1)$$

Здесь $y(x)$ – неизвестная функция, a_0, a_1, ..., a_{n-1} – вещественные коэффициенты, в круглых скобках наверху указан порядок производной (таким образом, (n) означает «n штрихов»).

Можно показать, что **множество всех решений уравнения (10.1) является функциональным линейным пространством**.

Таким образом, если $y_1(x)$, $y_2(x)$ являются решениями (10.1), то $\alpha \cdot y_1(x) + \beta \cdot y_2(x)$ – также решение для любых $\alpha, \beta \in \Re$. Система функций, являющаяся базисом этого линейного пространства, называется **фундаментальной системой решений уравнения** (10.1).

Характеристическим уравнением, соответствующим дифференциальному уравнению (10.1), называется уравнение вида:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0. \qquad (10.2)$$

В левой части (10.2) стоит многочлен, зависящий от переменной λ. Чтобы получить (10.2) из (10.1), необходимо заменить функцию y на переменную λ, а порядок производной – на степень.

Пример 10.1. Написать характеристическое уравнение для однородного линейного дифференциального уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Заменив y на λ, а производную на степень, получим уравнение:

$$\lambda^2 = 3\lambda + 2 = 0.$$

Вид общего решения дифференциального уравнения (10.1) зависит от корней его характеристического уравнения (10.2).

Рассмотрим отдельно **случай дифференциального уравнения второго порядка**:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0. \qquad (10.3)$$

Его характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \qquad (10.4)$$

Данный случай, в свою очередь, разбивается на три следующих:

Случай 1. Уравнение (10.4) имеет два различных вещественных корня $\lambda_1, \lambda_2 \in \Re$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда фундаментальная система решений дифференциального уравнения (10.3) состоит из двух функций: $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$, и его общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \Re.$$

Пример 10.2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 5y' + 4y = 0.$$

Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$, корни которого $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$. Тогда фундаментальная система его решений состоит из двух базисных функций: $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{-4x}$, и общее решение будет иметь вид:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}, \quad C_1, C_2 \in \Re.$$

Случай 2. Уравнение (10.4) имеет один вещественный корень $\lambda \in \Re$ кратности два. Тогда фундаментальная система решений дифференциального уравнения (10.3) состоит из двух функций: $y_1(x) = e^{\lambda x}$, $y_2(x) = xe^{\lambda x}$, и его общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}, \quad C_1, C_2 \in \Re.$$

Пример 10.3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, имеет один корень $\lambda = -1$ кратности два. Тогда фундаментальная система его решений состоит из двух базисных функций: $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = xe^{-x}$, и общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x), \quad C_1, C_2 \in \Re.$$

Случай 3. Уравнение (10.4) имеет два сопряженных комплексных корня $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Тогда фундаментальная система решений дифференциального уравнения (10.3) состоит из двух функций $y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)$, $y_2(x) = e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$, и его общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x), \quad C_1, C_2 \in \Re.$$

Пример 10.4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ имеет два сопряженных комплексных корня $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$. Тогда фундаментальная система его решений состоит из двух базисных функций:

$y_1(x) = e^x \cdot \cos(2x)$, $y_2(x) = e^x \cdot \sin(2x)$, и общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^x \cdot \cos(2x) + C_2 e^x \cdot \sin(2x), \quad C_1, C_2 \in \Re.$$

Всякая **задача Коши** для дифференциального уравнения (10.3) содержит ровно два начальных условия (1.1):

$$\begin{cases} y(x_0) = b_0 \\ y(x_1) = b_1. \end{cases} \tag{10.5}$$

Поочередно подставляя общее решение уравнения (10.3) в начальные условия (10.5), получим систему уравнений для нахождения коэффициентов C_1, C_2.

Пример 10.5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{10.6}$$

Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Оно имеет два вещественных корня: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Это соответствует случаю 1. Поэтому фундаментальная система его решений состоит из двух функций: $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$, и общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \Re. \tag{10.7}$$

Теперь подставим общее решение (10.7) в начальные условия (10.6). Из первого условия получим равенство $C_1 + C_2 = 1$. Чтобы получить второе уравнение относительно C_1, C_2, вычислим сначала производную функции $y(x)$:

$$y'(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \Re.$$

Следовательно, из второго условия (10.6) получаем: $C_1 + 2C_2 = 0$.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 2C_2 = 0, \end{cases}$$

получаем значения коэффициентов $C_1 = 2$, $C_2 = -1$, и окончательный ответ:

$$y(x) = 2e^x - e^{2x}.$$

Теперь рассмотрим **общий случай дифференциального уравнения *n*-го порядка (10.1)**

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Его характеристическое уравнение имеет вид (10.2):

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Согласно основной теореме алгебры, **уравнение (10.2) имеет ровно *n* различных корней, вещественных или комплексных. Причем каждый комплексный корень содержится в этом множестве корней вместе со своим сопряженным.** Сопоставляя каждому корню (паре корней) свой набор функций и затем объединяя их в одно множество, мы получим фундаментальную систему решений для (10.1):

1. Каждому вещественному корню $\lambda \in \Re$ кратности 1 сопоставляется базисная функция $e^{\lambda x}$.

2. Каждому вещественному корню $\lambda \in \Re$ кратности $k > 1$ сопоставляется набор из k базисных функций $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1}e^{\lambda x}$.

3. Каждой паре комплексных корней $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ кратности 1 соответствует две базисных функции $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.

4. Каждой паре комплексных корней $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ кратности $k > 1$ соответствует набор из $2k$ функций $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $xe^{\alpha x}\cos(\beta x)$, ..., x^{k-1} $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $xe^{\alpha x}\sin(\beta x)$, ..., $x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.

Пример 10.6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y^{(4)} - 16y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^4 - 16 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 4) = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0.$$

Следовательно, данное уравнение имеет 4 корня:

$$\lambda_{1,2} = \pm 2,\ \lambda_{3,4} = \pm 2i.$$

Корню $\lambda_1 = 2$ соответствует базисная функция $y_1 = e^{2x}$, корню $\lambda_1 = -2 y_2 = e^{-2x}$, а паре комплексных корней – пара функций $\cos(2x)$, $\sin(2x)$ (поскольку вещественная часть $\alpha = 0$, то экспонента превращается в 1). Объединяя все базисные функции в одну систему, получаем ответ:

$$y_{\text{общ}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x).$$

Пример 10.7. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$ – пара комплексных корней кратности 2.

Следовательно, этой паре соответствует 4 базисных функции: $\cos(x)$, $\sin(x)$, $x \cdot \cos(x)$, $x \cdot \sin(x)$.

Получим окончательный ответ:

$$y_{\text{общ}} = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + C_3 x \cdot \cos(x) + C_4 x \sin(x).$$

Задачи

Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка:

10.1. $y'' + 3y' = 0$.

10.2. $y'' - 5y' + 6y = 0$.

10.3. $y'' + y' + y = 0$.

10.4. $y'' - 2y' + y = 0$.

10.5. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

10.6. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

10.7. $y'' + 49y = 0$.

10.8. $y'' - 4y' + 20y = 0$.

10.9. $y'' - 2y' + 8y = 0$.

10.10. $y'' + 6y' + 25y = 0$.

Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений высшего порядка:

10.11. $y''' - 3y' - 3y' = 0$.

10.12. $y^{(4)} - 16y = 0$.

10.13. $y''' + y'' - 2y' = 0$.

10.14. $y^{(4)} + y = 0$.

10.15. $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$.

10.16. $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9''' = 0$.

10.17. $y''' - y = 0$.

10.18. $y^{(4)} + 2y' + y = 0$.

10.19. $y^{(5)} - 4y''' + 3y' = 0$.

10.20. $y^{(6)} - 2y^{(5)} + 3y^{(4)} - 4y''' + 3y' - 2y' + y = 0$.

Найти частные решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка, удовлетворяющие начальным условиям:

10.21. $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 3.$

10.22. $y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

10.23. $y'' + 4y = 0, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2.$

10.24. $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1.$

10.25. $y'' - 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 8.$

10.26. $y'' + 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 4, y'(0) = -4.$

10.27. $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 4, y'(0) = 2.$

10.28. $y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Найти частные решения однородных дифференциальных уравнений высшего порядка, удовлетворяющие начальным условиям:

10.29. $y''' - 8y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 1.$

10.30. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 1.$

Найти однородные дифференциальные уравнения, характеристические уравнения которых имеют корни:

10.31. $\lambda = 1$ кратности 2.

10.32. $\lambda_1 = 1$ кратности 1 и $\lambda_2 = -2$ кратности 1.

10.33. $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ – пара сопряженных комплексных корней кратности 1.

10.34. $\lambda_{1,2} = \pm i$ кратности 2, $\lambda_3 = 1$ кратности 1 и $\lambda_4 = -1$ кратности 1.

10.35. $\lambda_1 = 1$ кратности 1, $\lambda_2 = -1$ кратности 1, $\lambda_2 = 2$ кратности 1.

Найти однородные дифференциальные уравнения, фундаментальные системы решений которых состоят из следующих функций:

10.36. e^x, e^{-x}.

10.37. e^x, e^{2x}, e^{3x}.

10.38. $\sin(2x)$, $\cos(2x)$.

10.39. e^{-4x}, xe^{-4x}, x^2e^{-4x}.

10.40. $\sin(x)$, $\cos(x)$, $x\sin(x)$, $x\cos(x)$.

10.41. e3$x\sin(4x)$, e3$x\cos(4x)$.

Пусть $s(t)$ – отклонение рыночной цены от естественного значения в момент времени t. Определить динамику развития цен в зависимости от параметра a, если это отклонение удовлетворяет уравнениям:

10.42. $s''(t) + as(t) = 0$.

10.43. $s''(t) + 2as(t) + s(t) = 0$.

§ 11. НЕОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ *n*-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СТАНДАРТНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Всякое неоднородное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x). \qquad (11.1)$$

Здесь $y(x)$ – неизвестная функция, $f(x)$ – непрерывная функция в правой части, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ – вещественные коэффициенты, в круглых скобках наверху указан порядок производной (таким образом, (n) означает «n штрихов»).

Согласно **теореме о структуре общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения (11.1)**, его общее решение имеет вид:

$$y_{\text{общ}} = y_0 + y_*. \qquad (11.2)$$

Здесь $y_{\text{общ}}$ – общее решение уравнения (11.1), y_0 – общее решение однородного уравнения с такой же левой частью, как у (11.1), y_* – частное решение неоднородного уравнения (11.1).

Таким образом задача нахождения общего решения неоднородного уравнения (11.1) сводится к задачам решения однородного уравнения (10.1) и подбора частного решения y_* для неоднородного уравнения с правой частью $f(x)$. Если эта правая часть имеет **стандартный вид**, то есть относится к одному из типов, перечисленных далее, существует несложный и однозначно определенный способ такого подбора. Когда общий вид частного решения уже известен, присутствующие в нем неизвестные множители находятся при помощи **метода неопределенных коэффициентов** (см. далее).

Случай 1. $f(x) = P_m(x) \cdot e^{\alpha x}$. Здесь $P_m(x)$ – многочлен степени m, $e^{\alpha x}$ – экспоненциальная функция (в частности, если в качестве функции $f(x)$ присутствует только $P_m(x)$, то $\alpha = 0$).

В этом случае частное решение y_* имеет вид:

$$y_* = x^s \cdot Q_m(x) \cdot e^{\alpha x}. \qquad (11.3)$$

Здесь $Qm(x)$ – также многочлен степени m, s – это кратность числа α как корня характеристического уравнения (10.2). В частности, если α не является его корнем, то $s = 0$.

Пример 11.1. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y = x^2. \tag{11.4}$$

Чтобы найти первое слагаемое y_0 из (11.2), сначала решим однородное уравнение:

$$y'' - 4y = 0. \tag{11.5}$$

Составим характеристическое уравнение для (11.5) и найдем его корни:

$$\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2.$$

Отсюда

$$y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \Re. \tag{11.6}$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения (11.4). Поскольку правая часть не содержит экспоненциальную функцию в качестве множителя, а только лишь многочлен второй степени x^2, то $\alpha = 0$. Поскольку 0 здесь не является корнем характеристического уравнения, следовательно, $s = 0$ и частное решение y_* имеет вид:

$$y_* = ax^2 + bx + c. \tag{11.7}$$

Чтобы найти коэффициенты a, b, c, необходимо подставить общий вид частного решения (11.7) в исходное неоднородное уравнение (11.4). Имеем:

$$y_*' = 2ax + b, \quad y_*'' = 2a \Rightarrow 2a - 4(ax^2 + bx + c) = x^2.$$

Перенеся все в левую часть, получим многочлен второй степени с некоторыми коэффициентами, тождественно равный нулю:

$$(-4a - 1)x^2 - 4bx + (2a - 4c) = 0.$$

Следовательно, по основной теореме алгебры все его коэффициенты также обязаны также равняться нулю. Приравнивая к нулю коэффициенты при каждой из степеней, получим систему для нахождения a, b, c:

$$\begin{cases} -4a-1=0 \\ -4b=0 \\ 2a-4c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-\dfrac{1}{4} \\ b=0 \\ c=-\dfrac{1}{8} \end{cases}.$$

Следовательно,

$$y_* = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$$

и общее решение уравнения (11.4) имеет вид:

$$y_{\text{общ}} = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}, \quad C_1, C_2 \in \Re.$$

Пример 11.2. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' + y = x \cdot e^{-x}. \tag{11.8}$$

Решаем однородное уравнение:

$$y'' + 2y' + y = 0. \tag{11.9}$$

Соответствующее характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ имеет единственный корень $\lambda = -1$ кратности 2. Следовательно, его общее решение:

$$y_0(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \Re.$$

Поскольку множитель $\alpha = -1$ в показателе экспоненты также является корнем кратности 2 характеристического уравнения, следовательно, $s = 2$, а значит, согласно (11.3), частное решение y_* неоднородного уравнения (11.8) имеет вид:

$$y_* = x^2(ax+b)e^{-x}. \tag{11.10}$$

Теперь подставим (11.10) в (11.8):

$$y_* = (ax^3 + bx^2)e^{-x} \Rightarrow y'_* = (3ax^2 + 2bx)e^{-x} - (ax^3 + bx^2)e^{-x} =$$

$$= (3ax^2 + 2bx - bx^2 - ax^3)e^{-x},$$

$$y''_* = (6ax - 2bx - 3ax^2 + 2b)e^{-x} - (3ax^2 - bx^2 - ax^3 + 2bx)e^{-x} =$$

$$= (6ax - 2bx - 3ax^2 + 2b - 3ax^2 + bx^2 + ax^3 - 2bx)e^{-x} \Rightarrow y''_* + 2y'_* + y_* =$$

$$= (6ax - 2bx - 3ax^2 + 2b - 3ax^2 + bx^2 + ax^3 - 2bx + 6ax^2 - 2bx^2 - 2ax^3 +$$

$$+ 4bx + ax^3 + bx^2) = (6ax + 2b)e^{-x}.$$

Приравнивая левую и правую части (11.8), получим систему уравнений на коэффициенты a, b:

$$(6ax+2b)e^{-x}=xe^{-x}\Rightarrow 6ax+2b=x\Rightarrow(6a-1)x+2b=0.$$

Следовательно, $a=\frac{1}{6},\, b=0,\, y_*=\frac{1}{6}x^3e^{-x}\Rightarrow y_{общ}=$

$$=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}++\frac{1}{6}x^3e^{-x}.$$

Случай 2. $f(x)=e^{\alpha x}\cdot\left(P_m(x)\cos(\beta x)+Q_n(x)\sin(\beta x)\right).$ Здесь $P_m(x)$ – многочлен степени m, $Q_n(x)$ – многочлен степени n, $e^{\alpha x}$ — экспоненциальная функция. Здесь частное решение y_* имеет вид:

$$y_*=x^s\cdot e^{\alpha x}\cdot\left(S_p(x)\cos(\beta x)+T_p(x)\sin(\beta x)\right).\qquad(11.11)$$

Здесь $p=\max\{m, n\}$, $S_p(x)$, $T_p(x)$ – многочлены степени p, число s показывает кратность вхождения пары комплексных корней $\alpha\pm\beta i$ в характеристическое уравнение (10.2). В частности, если эта пара не является его корнями, то $s=0$.

Пример 11.3. Найти общее решение уравнения

$$y''+y=x\cdot\sin(x).\qquad(11.12)$$

Однородное уравнение $y''+y=0$, соответствующее характеристическое уравнение: $\lambda^2+1=0$.

Корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2}=\pm i$. Следовательно,

$$y_0=C_1\cos(x)+C_2\sin(x).$$

Из вида правой части уравнения (11.12), согласно (11.11), определяем, что $\alpha=0$, $\beta=1$, $p=1$.

Поскольку пара комплексных чисел $\alpha\pm\beta i=\pm i$ входит в характеристическое уравнение один раз, то $s=1$. Следовательно,

$$y_*=x\cdot\left((ax+b)\cos(x)+(cx+d)\sin(x)\right).\qquad(11.13)$$

Вычислим производные функции y_*, подставляя (11.13) в (11.12):

$$y_*'=(ax+b)\cos(x)+(cx+d)\sin(x)+x(a\cos(x)-$$

$$-(ax+b)\sin(x)+c\sin(x)+(cx+d)\cos(x))=$$

$$=\cos(x)(2ax+b+cx^2+dx)+\sin(x)(cx+d-ax^2-bx+cx).$$

$$y_*''=-\sin(x)(2ax+b+cx^2+dx)+\cos(x)(2a+2cx+d)+$$

$$+\cos(x)(cx+d-ax^2-bx+cx)+\sin(x)(c-2ax-b+c)=$$

$$=\sin(x)(2c-4ax-2b-cx^2-dx)+\cos(x)(2a+4cx+2d-ax^2-bx).$$

Подставляя (11.13) в левую часть (11.12), получаем:

$$y_*''+y_*=\sin(x)(2c-4ax-2b)+\cos(x)(2a+4cx+2d)=x\sin(x),$$

$$(2c-2b)\sin(x)-4ax\sin(x)+(2a+2d)\cos(x)+4cx\cos(x)=x\sin(x).$$

Приравнивая коэффициенты при линейно независимых функциях $\sin(x)$, $\cos(x)$, $x\sin(x)$, $x\cos(x)$ слева и справа, получим систему уравнений относительно коэффициентов a, b, c, d:

$$\begin{cases} 2c-2b=0 \\ -4a=1 \\ 2a+2d=0 \\ 4c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b=c=0 \\ a=-1/4 \\ d=1/4 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$y_*=\frac{x}{4}\big(\sin(x)-x\cos(x)\big),$$

$$y_{\text{общ}}=C_1\cos(x)+C_2\sin(x)+\frac{x}{4}\big(\sin(x)-x\cos(x)\big).$$

Задачи

Найти общие решения неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка:

11.1. $y''-3y'+2y=5e^{-x}$.

11.2. $y''-5y'+4y=xe^{x}$.

11.3. $y''-6y'+9y=4x^2-2x+6$.

11.4. $y''-4y'+4y=x\cdot e^{2x}$.

11.5. $y''+3y'-4y=(x+1)e^{x}$.

11.6. $y''-7y'+6y=\sin(x)$.

11.7. $y''+4y=\cos(2x)$.

11.8. $y''+y=2x\cos(x)+\sin(x)$.

11.9. $y''-2y'+5y=e^{x}\cos(2x)$.

11.10. $y''+16y=3x\sin(4x)+\cos(4x)$.

11.11. $y''-y=(x^2+x+1)e^{x}$.

Найти частные решения неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка, удовлетворяющие начальным условиям:

11.12. $y'' + y = 4xe^{x}, \quad y(0) = -2, y'(0) = 0.$

11.13. $y'' + y = \sin(x), \quad y(0) = 1, y'(0) = 2.$

11.14. $y'' + 4y' + 4y = 8xe^{2x}, \quad y(0) = -1, y'(0) = 1.$

11.15. $y'' + 9y = 6\cos(3x), \quad y(0) = 1, y'(0) = 3.$

11.16. $y'' - y = e^{x}, y(0) = 0, y'(0) = -1.$

11.17. $y'' + 2y' - 3y = x^{2}e^{x}, y(0) = 1, y'(0) = 1.$

Найти общие решения неоднородных дифференциальных уравнений высшего порядка:

11.18. $y''' - 8y = xe^{2x}.$

11.19. $y''' + y'' = (x+1)^{2}e^{4x}.$

11.20. $y''' + 3y'' + 3y' + y = (x+4)e^{-x}.$

11.21. $y^{(4)} - y = x\big(\sin(x) + \cos(x)\big).$

§ 12. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

Предположим, что правая часть $f(x)$ уравнения (11.1) является суммой нескольких функций стандартного вида. В этом случае имеет место **принцип суперпозиции**:

общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x) \qquad (12.1)$$

является суммой общего решения y_0 однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0, \qquad (12.2)$$

и k частных решений уравнений

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, k. \qquad (12.3)$$

В сокращенной записи это утверждение можно сформулировать так:

$$y_{\text{общ}} = y_0 + y_{1*} + \ldots + y_{k*}, \qquad (12.4)$$

где y_0 – общее решение однородного уравнения (12.2), y_i, $i =$ $= 1, 2, \ldots, k$ – частные решения неоднородных уравнений (12.3).

Пример 12.1. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y' + 3y = xe^{-x} + x\cos(x). \qquad (12.5)$$

Сначала решим однородное уравнение:

$$y'' + 4y' + 3y = 0. \qquad (12.6)$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}, \quad C_1, C_2 \in \Re. \qquad (12.7)$$

Теперь найдем частное решение y_1 первого неоднородного уравнения

$$y'' + 4y' + 3y = xe^{-x}. \qquad (12.8)$$

Правая часть xe^{-1} этого уравнения соответствует случаю 1 в § 11. Согласно (11.3), $\alpha = -1$, $m = 1$, $s = 1$. Следовательно,

$$y_1 = x(ax + b)e^{-x}. \qquad (12.9)$$

Подставляя (12.9) в (12.8), аналогично (11.10) определяем коэффициенты a и b:

$$\begin{cases} a = 1/4 \\ b = -1/4 . \end{cases}$$

Найдем частное решение y_2 второго неоднородного уравнения

$$y'' + 4y' + 3y = x\cos(x). \tag{12.10}$$

Рассмотрев его правую часть $x\cos(x)$, из (11.11) найдем общий вид частного решения:

$$y_2 = (ax+b)\cos(x) + (cx+d)\sin(x). \tag{12.11}$$

Подставив (12.11) в (12.10), получим:

$$\begin{cases} a = 1/10 \\ b = 1/25 \\ c = 1/5 \\ d = -11/50 . \end{cases}$$

Складывая решения (12.7), (12.9), (12.11), получим:

$$y_{\text{общ}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{x}{4}(x-1)e^{-x} +$$

$$+(x/10 + 1/25)\cos(x) + (x/5 - 11/50)\sin(x).$$

Задачи

Используя принцип суперпозиции, найти общие решения дифференциальных уравнений:

12.1. $y'' - 2y' + y = x^2 - x + 3 + x\cos(x)$.

12.2. $y'' + 5y' + 6y = (x-2)e^{-3x} + x^2 + 2x - 3$.

12.3. $y'' + 6y' + 10y = (x+6)\cos(3x) - (18x+6)\sin(3x) + 2xe^{-3x}\cos x$.

12.4. $y'' + 9y = e^{-3x}(x-2) + 14 + 63x^2$.

12.5. $y'' - 2y' + y = \sin(x) + e^x + e^{-x}$.

12.6. $y'' - 4y' = (x+1)e^{4x} - \sin(4x)$.

12.7. $y'' + 7y' + 6y = xe^{-x} + 5e^{-6x}$.

12.8. $y'' + 2y' + y = -2\sin(x) + x + 2$.

12.9. $y''' - y' = 2e^x + \cos(x)$.

12.10. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x + \sin(5x)$.

Используя принцип суперпозиции, определить вид общего решения дифференциальных уравнений, не находя коэффициентов:

12.11. $y'' + y' - 2y = e^{2x}(2\cos(x) + (-3x^2 - 3x - 4)\sin(2x))$.

12.12. $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}(-4 + (-2x^2 + 4x + 5)e^{3x})$.

12.13. $y'' - 2y' - 8y = e^{5x}(-4 + (-x^2 + 5x + 1)e^{-x})$.

12.14. $y'' + 8y' + 16y = e^{-4x}(2\cos(4x) + (x^2 + x + 4))$.

12.15. $y'' - 7y' + 10y = e^{2x}(2 - 5\cos(3x))$.

12.16. $y'' - 2y' + y = e^{x}(-2x^2 - 5x - 3 - 4\cos(4x))$.

12.17. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}((-3x + 5)\cos(x) + (-4x - 2)\sin(3x))$.

12.18. $y'' - 8y' + 15y = (x + 3)e^{-5x} + (x^2 + x + 1)e^{-3x} + x^2\cos(2x)$.

12.19. $y'' + 10y' + 25y = (x - 4)e^{-5x} + \cos(4x) + (5x + 4)\sin(2x)$.

12.20. $y'' + y = x\cos(x) + \sin(x) + 2x^2 - 2$.

§ 13. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННЫХ

Рассмотрим еще раз общий вид уравнения (11.1)

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y=f(x). \tag{13.1}$$

Пусть правая часть $f(x)$ уравнения (11.1) является произвольной непрерывной функцией, $y(x)$ – неизвестная функция, a_0, a_1, ..., a_{n-1} – вещественные коэффициенты.

В этом случае решение уравнения состоит из двух этапов.

Этап 1. Находим фундаментальную систему решений однородного уравнения (см. § 10)

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y=0. \tag{13.2}$$

Эта фундаментальная система состоит из n линейно независимых функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $un(x)$. Следовательно, общее решение (13.2) будет иметь вид:

$$y(x)=C_1u_1(x)+C_2u_2(x)+\ldots+C_nu_n(x),\quad C_1,C_2,\ \ldots,\ C_n\in\Re. \tag{13.3}$$

Этап 2. Теперь заменим константы C_1, C_2, ..., C_n в (13.3) на функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$.

Эти функции определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)u_1(x)+C_2'(x)u_2(x)+\ldots+C_n'(x)u_n(x)=0\\ C_1'(x)u_1'(x)+C_2'(x)u_2'(x)+\ldots+C_n'(x)u_n'(x)=0\\ \ldots\ldots\ldots\\ C_1'(x)u_1^{(n-1)}(x)+C_2'(x)u_2^{(n-1)}(x)+\ldots+C_n'(x)u_n^{(n-1)}(x)=f(x). \end{cases} \tag{13.4}$$

Найдя из (13.4) $C_1'(x)=v_1(x), C_2'(x)=v_2(x),\ \ldots,\ C_n'(x)=v_n(x),$ получаем решение (13.4):

$$C_1(x)=V_1(x)+D_1, C_2(x)=V_2(x)+D_2,\ldots,C_x(x)=V_n(x)+D_n,$$

$$D_1,D_2,\ \ldots,\ D_n\in\Re,$$

где $V_i(x)$ – первообразная $v_i(x)$, $i = 1 \ldots n$.

Таким образом, получаем общее решение (13.1):

$$y_{\text{общ}}=C_1(x)u_1(x)+C_2(x)u_2(x)+\ldots+C_n(x)u_n(x)=$$

$$=(V_1(x)+D_1)u_1(x)+\ldots+(V_n(x)+D_n)u_n(x)=(D_1u_1(x)+D_2u_2(x)+\ldots+$$

$$+D_nu_n(x))+(V_1(x)u_1(x)+V_2(x)u_2(x)+\ldots+V_n(x)u_n(x))=y_0+y_*.$$

Здесь $y_0 = D_1u_1(x) + D_2u_2(x) + \ldots + D_nu_n(x)$, $D_1, D_2, \ldots, D_n$ – общее решение (13.2), $y_* = V_1(x)u_1(x) + V_2(x)u_2(x) + \ldots + V_n(x)u_n(x)$ – частное решение (13.1).

Пример 13.1. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}. \tag{13.5}$$

Сначала найдем общее решение однородного уравнения $y'' - 2y' + y = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, корень $\lambda = 1$ кратности 2. Следовательно, общее решение:

$$y_0 = C_1e^x + C_2xe^x, \quad C_1, C_2 \in \Re. \tag{13.6}$$

Теперь заменим в (13.6) константы C_1, C_2 на функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ и для их нахождения решим систему (13.4). Она примет вид:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0 \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = \dfrac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Сокращая обе части систему на e^x, получаем:

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)x = 0 \\ C_1'(x) + C_2'(x)(1+x) = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения и подставим во второе:

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)x \\ -C_2'(x)x + C_2'(x)(1+x) = \dfrac{1}{x}; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)x \\ -C_2'(x)x + C_2'(x)(1+x) = \dfrac{1}{x}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)x \\ C_2'(x) = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} C_1'(x) = -x + D_1 \\ C_2(x) = \ln|x| + D_2. \end{cases}$$

Следовательно, $y_{\text{общ}} = (-x + D_1)e^x + (\ln|x| + D_2)xe^x$.

Задачи

Найти общие решения дифференциальных уравнений методом вариации постоянных:

13.1. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin(x)}.$

13.2. $y'' + 4y = \operatorname{tg}(x).$

13.3. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}.$

13.4. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}.$

13.5. $y'' + y = \dfrac{2}{\cos^3(x)}.$

13.6. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}\ln(x).$

13.7. $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos(2x)}}.$

13.8. $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos(2x)}}.$

13.9. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos(x)}, \quad y(0) \quad 1,\ y'(0) \quad 0.$

§ 14. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Система линейных уравнений первого порядка в нормальной форме с n неизвестными функциями ($y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_n(t)$) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \dot{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{y}_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases} \qquad (14.1)$$

Здесь точка сверху обозначает первую производную функции, переменная t, от которой зависят неизвестные функции, для краткости опущена.

Общим решением системы (14.1) называется множество всех наборов функций (y_1, y_2, ..., y_n), превращающих каждое из уравнений этой системы в верное равенство для любого аргумента t.

Каждый элемент этого множества называется **частным решением** (14.1)

Система начальных условий для уравнения вида (14.1) имеет вид:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = b_1 \\ y_2(x_0) = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x_0) = b_n \end{cases} \qquad (14.2)$$

Каждая система начальных условий (14.2) позволяет выделить из общего решения одно частное.

Систему n уравнений первого порядка можно последовательно свести к одному линейному уравнению n-го порядка, решить его согласно методам § 10, а затем последовательно найти другие функции из остальных уравнений. Такой метод решения системы называется **методом исключения**.

Пример 14.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 - y_2 \\ \dot{y}_2 = -4y_1 + y_2 \end{cases} \qquad (14.3)$$

с начальными условиями

$$y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 1. \qquad (14.4)$$

Продифференцируем обе части первого уравнения и выразим из него:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = \dot{y}_1 - \dot{y}_2 \\ \dot{y}_2 = -4y_1 + y_2 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dot{y}_2 = \dot{y}_1 - \ddot{y}_1 \\ \dot{y}_2 = -4y_1 + y_2 \end{cases}.$$

Теперь исключим $\dot{y}_2$ из второго уравнения:

$$\begin{cases} \dot{y}_2 = \dot{y}_1 - \ddot{y}_1 \\ \dot{y}_1 - \ddot{y}_1 = -4y_1 + y_2. \end{cases}$$

Теперь вернемся к исходному первому уравнению и выразим оттуда y_2:

$$\begin{cases} y_2 = y_1 - \dot{y}_1 \\ \dot{y}_1 - \ddot{y}_1 = -4y_1 + y_1 - \dot{y}_1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y_2 = y_1 - \dot{y}_1 \\ \ddot{y}_1 - 2\dot{y}_1 - 3y_1 = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение для второго дифференциального уравнения имеет вид:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \Re.$$

Теперь найдем y_2 из первого уравнения: $y_2 = y_1 - \dot{y}_1$. Так как $\dot{y}_1 = 3C_1e^{3t} - C_2e^{-t}$, то

$$y_2 = -2C_1e^{3t} + 2C_2e^{-t}.$$

Теперь подставим найденное общее решение:

$$\begin{cases} y_1 = C_1e^{3t} + C_2e^{-t} \\ y_2 = -2C_1e^{3t} + 2C_2e^{-t} \end{cases}$$

в начальные условия (14.4). Получим систему уравнений относительно констант C_1, C_2:

$$\begin{cases} y_1(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y_2(0) = -2C_1 + 2C_2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = -C_1 \\ -4C_1 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{1}{4} \\ C_2 = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

таким образом, получаем окончательный ответ:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{e^{-t} - e^{3t}}{4} \\ y_2 = \dfrac{e^{3t} - e^{-t}}{2}. \end{cases}$$

Задачи

Найти общие решения систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

14.1. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

14.2. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$

14.3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 5x - 2y. \end{cases}$

14.4. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 7x - 8y. \end{cases}$

14.5. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

14.6. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

14.7. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$

14.8. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 5x - 4y. \end{cases}$

Решить системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями:

14.9. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 13x - 3y \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$

14.10. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 7x - 9y \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1. \end{cases}$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Королев А.В.* Курс дифференциальных и разностных уравнений. М.: ГУ ВШЭ, 2008.
2. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике. М.: Айрис Пресс, 2009.
3. *Ахтямов А.М.* Математика для социологов и экономистов. М.: Физматлит, 2008.
4. *Панюкова Т.А.* Основы теории дифференциальных уравнений для экономистов. М.: Либроком, 2011.
5. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: ЛКИ, 2008.
6. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения. М.: ЛКИ, 2008.

Учебное издание

Артем Валерьевич Михеев

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Учебное пособие

Ответственный за выпуск *О. Александрова*
Редактор, корректор *С. Апроцкая*
Компьютерная верстка *Е. Фортиной*

Подписано в печать 20.08.2012. Формат 60×88 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура NewtonC.
Усл. печ. л. 4,25. Тираж 100 экз. Заказ № 345.

Подготовлено к печати и отпечатано
отделом оперативной полиграфии
НИУ ВШЭ — Санкт-Петербург
198099, Санкт-Петербург, ул. Промышленная, д. 17а
Тел./факс: (812) 786-58-95