

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЕСТЕСТВЕННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ НАУКАХ

УДК 501,551.463

В.М. Галкин¹, Е.Н. Пелиновский²

ОБ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ В ТЕОРИИ СОЛИТОНОВ И РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН ЦУНАМИ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева¹,
Институт прикладной физики РАН²

Обсуждаются особенности использования в эволюционных уравнениях условий, отличных от начальных. В качестве примеров рассматриваются уравнения Максвелла, Буссинеска, Кортвега де-Вриза, а также уравнения идеальной жидкости. Приводятся вычисления к эффекту разрыва в линеаризованной задаче распространения волн цунами, найденного в своё время авторами.

Ключевые слова: эволюционное уравнение, солитон, волны цунами, идеальная жидкость.

Содержание статьи можно разделить на две части. В одной из них обсуждается линейная модель цунами, возбуждаемого локальным очагом возмущения. В своё время [1, 2] авторы обнаружили неожиданный эффект бесконечного разрыва высоты волны цунами. Разумеется, это свидетельствует об ограниченности описания цунами с помощью этой модели, но с математической точки зрения результат представляется достаточно интересным. В публикациях [1, 2] опущены детали вычислений и мы воспроизводим их здесь.

Другая часть касается некоторых замечаний относительно эволюционных уравнений физики, в частности, гидродинамики. В качестве иллюстрации приводятся несколько классических примеров.

1. Под эволюционным уравнением понимается уравнение (система уравнений) вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1)$$

где $x = x(t)$ может быть скаляром, вектором или более сложно устроенной величиной. Аргумент t интерпретируется как время. В постановке задач, в вопросах существования и единственности решений физикам помогает их интуиция. Поскольку большинство математиков (во всяком случае – «чистых») физической интуицией не обладает, то их эвристический подход к (1) в сущности есть метод Эйлера численного решения дифференциальных уравнений: зная $x(t)$ в момент времени t , из (1) находится $x(t + dt) = x(t) + f(t, x)dt$ в момент $t + dt$ с повторением этого процесса.

Однако порой ситуация усложняется добавлением к (1) дополнительных ограничений не эволюционного характера. Рассмотрим несколько примеров.

1.1. В системе уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned} \quad (2)$$

эволюционными относительно полей \vec{E} и \vec{H} являются последние два уравнения. Эвристические соображения математика наталкивают на мысль, что первые два уравнения в каком-то смысле должны следовать из оставшихся. И действительно, взяв дивергенцию от оставшихся, находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \frac{\partial \operatorname{div} \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{j} = 0. \quad (3)$$

Таким образом, первые два уравнения играют роль начальных условий: $\operatorname{div} \vec{H} \equiv 0$ и $\operatorname{div} \vec{E} \equiv 4\pi \rho$, если эти равенства выполняются в начальный момент и, кроме того, выполняется требование (уравнение неразрывности) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$. Последнее есть внешнее ограничение по отношению к полям.

Нашу трактовку трудно найти в учебниках по электродинамике.

1.2. В конце XX века (примерно с 70-х годов) наблюдался бум исследований по нахождению солитонных решений уравнений гидродинамики. Мы коснёмся лишь двух уравнений: Буссинеска

$$u_{tt} - u_{xx} - 3(u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0 \quad (4)$$

и Кортевега де-Вриза (КдВ)

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (5)$$

При поиске рациональных по x решений, равных нулю при $x = \pm \infty$, легко устанавливается, что это решение должно иметь полюсы второго порядка и записываться в виде

$$u = -2 \sum \frac{1}{(x - x_i)^2}, \quad (6)$$

где суммирование ведётся по полюсам $x_i = x_i(t)$.

В [3] Абловиц и Сигур приводят для уравнений КдВ условия

$$\dot{x}_i = 12 \sum_{j \neq i} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} \text{ и } \sum_{j \neq i} \frac{1}{(x_i - x_j)^3} = 0. \quad (7)$$

Для уравнения Буссинеска соответствующие уравнения не приводятся, но их легко получить теми же методами. Они оказываются таковыми:

$$\ddot{x}_i = 24 \sum_{j \neq i} (x_i - x_j)^{-3} \text{ и } \dot{x}_i^2 + 12 \sum_{j \neq i} (x_i - x_j)^{-2} - 1 = 0. \quad (8)$$

Можно предположить, что, как и в 1.1, вторые уравнения в (7) и (8) следуют из начальных условий. Однако это не так. Положение более благополучно в случае уравнения Буссинеска. Обозначим через I_i левую часть второго уравнения в (8). На решениях первого уравнения временная производная от I_i записывается как

$$\dot{I}_i = 24 \sum_{j \neq i} (x_i - x_j)^{-3} (\dot{x}_i + \dot{x}_j) = 24 J_i. \quad (9)$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} \dot{J}_i = & -3 \sum_{j \neq i} (x_i - x_j)^{-4} (I_i - I_j) + 36 \sum_{j \neq i} (x_i - x_j)^{-4} \left(\sum_{k \neq i} (x_i - x_k)^{-2} - \sum_{k \neq j} (x_j - x_k)^{-2} \right) + 24 \sum_{j \neq i} (x_i - x_j)^{-3} \\ & \left(\sum_{k \neq i} (x_i - x_k)^{-3} + \sum_{k \neq j} (x_j - x_k)^{-3} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Если разложить на простейшие дроби (по переменной x_i) слагаемые $(x_i - x_j)^{-4} (x_i - x_k)^{-2}$ и $(x_i - x_j)^{-3} (x_i - x_k)^{-3}$, то в (10) пропадают все суммы кроме первой.

Итак, получаем:

$$\dot{I}_i = 24J_i, \quad \dot{I}_i = -3 \sum_{j \neq i} (x_i - x_j)^{-4} (I_i - I_j), \quad (11)$$

Следовательно, если брать начальные данные для эволюционного уравнения в (8) на многообразии $I_i = 0, J_i = 0$, то $I_i \equiv 0$ на решениях и эти решения уравнения Буссинеска. В [4] найдено семейство рациональных решений предельным переходом в семействе многосоли-тонных решений. Приведённые ранее рассуждения показывают, что найденные там решения исчерпывают все рациональные решения уравнения Буссинеска.

Для уравнения КдФ положение хуже. Если взять производную от левк4444ой части I_i второго уравнения в (7), то на решениях эволюционного уравнения получим

$$J_i = \dot{I}_0 = \sum \left[(x_i - x_j)^{-4} (x_i - x_k)^{-2} - (x_i - x_j)^{-4} (x_j - x_k)^{-2} \right].$$

Равенства $I_i = 0, J_i = 0$ оказываются независимыми, т.е. появляется дополнительное ограничение $J_i = 0$. Независимость проверяется следующим образом. В системе $I_i = 0$ с четырьмя переменными x_1, x_2, x_3, x_4 решения есть. Но известно, что 4-полюсных рациональ-ных решений уравнения КдФ не существует, поэтому $I_i \equiv 0$ невозможен.

1.3. *Наконец, обратимся к уравнениям движения идеальной (несжимаемой, но не обя-зательно однородной) жидкости*

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \nabla) \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \bar{f}, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \text{div} \rho \bar{v} = 0, \quad \text{div} \bar{u} = 0. \quad (12)$$

Первое знакомство с (12) озадачивает: в двух эволюционных уравнениях три неизвестных величины – скорость \bar{u} , плотность ρ и давление P . Последнее к тому же определяется не од-нозначно: к P можно добавить произвольную константу. Если никаких ограничений не до-бавлять, то можно достаточно произвольно задать \bar{u} (взять поле скоростей в виде ротора) и из остальных уравнений определить P и ρ . Чтобы снять эту неопределённость, нужно при-влечь граничные условия, т.е. решать (12) в некоторой области V . Если взять дивергенцию от первого уравнения, то получаем

$$\text{div} \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) = \text{div} (\bar{f} - (\bar{r} \nabla) \bar{u}). \quad (13)$$

Знание в момент времени t значения \bar{u} и эллиптичность уравнения позволяют вос-становить P в тот же момент t по информации о P на границе. Далее восстанавливаются \bar{u} и ρ в момент $t + dt$ и граница $S(t + dt)$ области, занятой жидкостью. Затем процедура повторяется.

О характере информации о давлении на границе $S(t)$ в (13) дают представление две задачи – в одной из них требуется исследовать эволюцию газового пузыря, всплывающего в неограниченном объеме однородной жидкости. Внутри пузыря давление газа является по-стоянным (равным 0!) и для (13) получаем внешнюю задачу Дирихле. Во второй задаче ис-следуются поверхностные волны в океане с горизонтальным дном. На поверхности океана давление постоянно (его опять можно взять равным нулю), а на дне скорость направлена ему параллельно. Из (12) следует, что известной становится нормальная производная (т.е. пер-пендикулярная дну) – компонента градиента P . Краевая задача в (13) использует на $S(t)$ знание либо P (на поверхности океана), либо нормальную производную от P .

Понимание изложенных соображений, собственно, является ключом к построению численных алгоритмов. Кроме того, вскрывается природа математических трудностей: в конце концов надо решать уравнение типа Пуассона (13). Некоторые упрощения в алгорит-мах, способствующие пониманию качественной картины, известны в двух случаях. В трёх-

мерных задачах часто используют линеаризацию уравнения движения, т.е. ограничиваются рассмотрением малых отклонений от явно получаемых решений. В двумерных задачах возможно уменьшение количества независимых функций. Так в задаче о всплывании газового пузыря в потенциальной жидкости [5] было использовано конформное отображение круга на поверхности $S(t)$ пузыря и получены более удобные уравнения, численные расчёты по которым позволили проанализировать качественную картину.

2. Обратимся к задаче об излучении волн цунами локальными источниками возмущения. Вывод линейного приближения (дно океана горизонтально, изменение высоты волны мало по сравнению с уровнем невозмущённой поверхности) приводится в известном курсе гидродинамики Ландау и Лифшица [6]. Высота $u(x, y, t)$ волны в точке $M(x, y)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (14)$$

Решение ищется в бесконечной области изменения декартовых координат x, y при заданных начальных условиях

$$u|_{t=0} = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x, y). \quad (15)$$

Предполагается, что f и g равны нулю вне ограниченной выпуклой области D , а внутри ее постоянны.

Решение задачи Коши даётся формулой [7]:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{ct}} \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{c^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} + \frac{1}{2\pi c} \iint_{S_{ct}} \frac{g(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{c^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}, \quad (16)$$

где S_{ct} – круг радиуса ct с центром в точке (x, y) .

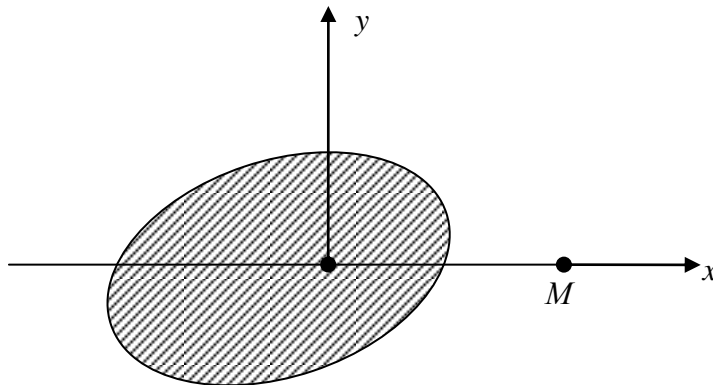


Рис. 1

Второе слагаемое в (16) не представляет особого интереса. Интеграл сходится, равен нулю, если S_{ct} не пересекается с D и имеет асимптотику $\frac{1}{2\pi c^2 t} \iint_D g(\xi, \eta) d\xi d\eta$. Поведение же первого слагаемого более интересное. Исследуем его сначала для случая круговой области D с центром в точке $(0,0)$. Чтобы уменьшить количество параметров в (16), произведём масштабное преобразование в (14). С его помощью можно добиться выполнения требований:

Радиус $D=1$, $c=1$, $f = \pi c (= \text{const})$ внутри D . При $g = 0$ (16) переходит в

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{t \cap D}} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}. \quad (17)$$

Если точку M выбрать как на рис. 1, то область интегрирования в (17) будет выглядеть, как это показано на рис. 2 и рис. 3 (указана часть области, соответствующая $y \geq 0$).

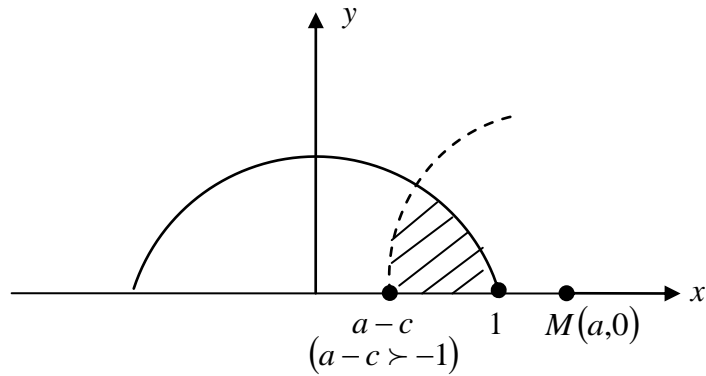


Рис. 2

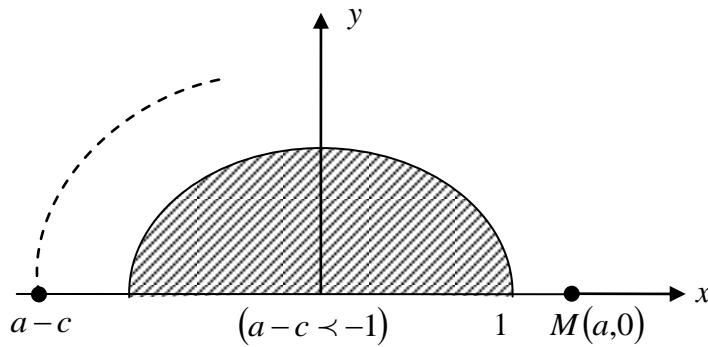


Рис. 3

В (17) можно выполнить интегрирование по η . Для точки $M(a, 0)$ получается

$$u(a, 0, t) = \frac{\partial}{\partial t} V,$$

где $V = 0$, если $t < a - r$,

$$\frac{\pi}{2}(\lambda - a + t) + \int_{\lambda}^1 \arcsin \sqrt{\frac{1 - \xi^2}{t^2 - (\xi - a)^2}} d\xi, \tag{18}$$

если $a - r < t < a + r$,

$$\int_{-1}^1 \arcsin \sqrt{\frac{1 - \xi^2}{t^2 - (\xi - a)^2}} d\xi,$$

если $t > a + r$.

Здесь $\lambda = \frac{a^2 + 1 - t^2}{2a}$.

Дифференцирование по времени дает окончательный ответ

$u = 0$, если $t < a - r$,

$$\frac{\pi}{2} \left(-\frac{t}{a} + 1 \right) + \frac{t}{a} \arcsin \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{t^2 - (\lambda - a)^2}} - \int_{\lambda}^r \sqrt{\frac{1 - \xi^2}{t^2 - a^2 - 1 + 2a\xi}} \frac{t}{t^2 - (\xi - a)^2} d\xi, \tag{19}$$

для $a - r < t < a + r$ и

$$-\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi^2}{t^2 - a^2 - 1 + 2a\xi}} \frac{t}{t^2 - (\xi - a)^2} d\xi,$$

для $t > a + r$.

Более или менее стандартные вычисления для нахождения приближений u в окрестностях точек $t = a - 1$ и $t = a + 1$ приводят к следующим результатам: в точке $a - 1$ u претерпевает скачок величиной $\frac{\pi}{2\sqrt{a}}$. В окрестности же точки $a + 1$ имеет асимптотику

$$\frac{t}{2a\sqrt{a}} \ln|t - a - 1|.$$

Для области, отличной от круга, ситуацию проясняет следующее соображение. Точкам $t = a \pm 1$ в общем случае соответствуют наиболее далекая и наиболее близкая к M точки границы D . Их окрестности можно аппроксимировать кругами, соприкасающимися с границей D , и поведение u в окрестностях моментов времени, когда ct достигает наименьшего и наибольшего расстояний M до D , аналогично тому, что имеет место для круговой области.

Библиографический список

1. **Galkin, V.M.** Propagation of Tsunami waves generated by elliptical sources / V.M. Galkin [et al.] // Sci Tsunami Hazards, 1986. 4. №3. P. 149–152.
2. **Галкин, В.М.** Формирование излучения волн цунами эллиптическими очагами / В.М. Галкин [и др.] // Нестационарные длинноволновые процессы на шельфе курильских островов / Институт морской геологии и геофизики. Владивосток. 1984. С. 19–29.
3. **Абловиц, М.** Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – М.: Мир, 1987.
4. **Galkin, V.M.** The structure of rational solutions to the Boussinesq equation / V.M. Galkin, D.E. Pelinovsky, Yu.A. Stepanyants // Phisika D 80 91995). P. 246–255.
5. **Галкин, В.М.** Потенциальное обтекание газовой полости идеальной жидкостью. / В.М. Галкин, В.И. Голинько, Ю.А. Степанянц / Горьк. политехн. ин-т // Колебания и волны в жидкости. Горький 1988. С. 106–113.
6. **Ландау, Л.Д.** Теоретическая физика. Т. VI, Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – М.: Наука, 1986.
7. **Кошляков, Н.С.** Основные дифференциальные уравнения математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Изд. Физ.-мат лит., 1962.

Дата поступления
в редакцию 25.01.2012

V.M.Galkin¹, E.N.Pelinovsky²

On the evolution equations in the soliton theory and in the tsunami waves propagation

Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.Y. Alexeev¹
Institute of Applied Physics AIN²

In this paper the peculiarities of the non initial conditions using for evolution equations are discussed. As the examples Maxwell, Boussinesq, KdV and ideal fluid equations are considered. The calculations for the «breakdown» effect that the authors had found for the linearised problem of the tsunami waves propagation are given.

Key words: evolution equation, soliton, tsunami waves, ideal fluid.