Приложение B

Алгебро-геометрическое доказательство гипотезы Виттена

М. Э. Казарян, С. К. Ландо

В главе 4 приведена формулировка гипотезы Виттена, описывающей индексы пересечения ψ-классов на пространствах модулей комплексных кривых с отмеченными точками. Изложенное в той же главе доказательство Концевича гипотезы Виттена использует методы, выводящие за пределы алгебраической геометрии — среды, в которой гипотеза сформулирована. В своем доказательстве Концевич рассматривает комбинаторное пространство модулей — результат умножения пространства модулей комплексных кривых с n отмеченными точками на положительный октант в $\mathbb{R}^n$. Компактификация этого пространства добавляет к нему особенностей, и для обоснования корректности проводимых вычислений приходится преодолевать целый ряд технических трудностей.

После того, как в 2004 г. вышло английское издание этой книги, оказалось, что числа Гурвица и формула ELSV, изложенные в ее 5-й главе, открывают путь к прямому доказательству гипотезы Виттена, полностью лежащему в рамках алгебраической геометрии. Такое доказательство мы и предлагаем в настоящем приложении. Чтобы сделать изложение по возможности замкнутым, мы постарались отсылки к основному тексту книги свести к минимуму.

B.1 Введение

Напомним формулировку гипотезы Виттена.

Пусть $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ обозначает пространство модулей стабильных комплексных кривых рода g с n отмеченными точками [DM]. Для числа $i \in \{1, \dots, n\}$ обозначим через $\mathcal{L}_i$ линейное расслоение над $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$, слой которого над точкой $(C; x_1, \dots, x_n) \in \overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ является кокасательной прямой к кривой C в отмеченной точке x_i. Через $\psi_i \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g;n})$ обозначается первый класс Черна этого линейного расслоения, $\psi_i = c_1(\mathcal{L}_i)$. Рассмотрим производящую функцию

$$F(t_0, t_1, \dots) = \sum \langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \rangle \frac{t_{d_1} \dots t_{d_n}}{|\mathrm{Aut}(d_1, \dots, d_n)|} \tag{B.1}$$

для индексов пересечения этих классов,

$$\langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \rangle = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} \psi_1^{d_1} \dots \psi_n^{d_n},$$

где род g однозначно восстанавливается из тождества

$$d_1 + \dots + d_n = \dim \overline{\mathcal{M}}_{g;n} = 3g - 3 + n.$$

Первые несколько членов разложения функции имеют вид

$$\begin{aligned} F \quad = \quad & \frac{1}{24}t_1 + \frac{1}{6}t_0^3 + \frac{1}{48}t_1^2 + \frac{1}{24}t_0t_2 + \frac{1}{6}t_0^3t_1 + \frac{1}{1152}t_4 + \frac{1}{72}t_1^3 + \frac{1}{12}t_0t_1t_2 + \frac{1}{48}t_0^2t_3 \\ & + \frac{1}{6}t_0^3t_1^2 + \frac{1}{24}t_0^4t_2 + \frac{29}{5760}t_2t_3 + \frac{1}{384}t_1t_4 + \frac{1}{1152}t_0t_5 + \dots \end{aligned}$$

Знаменитая гипотеза Виттена утверждает, что *вторая производная $U = \partial^2 F/\partial t_0^2$ производящей функции F удовлетворяет уравнению КдФ*

$$\frac{\partial U}{\partial t_1} = U \frac{\partial U}{\partial t_0} + \frac{1}{12} \frac{\partial^3 U}{\partial t_0^3}. \tag{B.2}$$

Заметим, что уравнение КдФ можно понимать как рекуррентное соотношение, позволяющее вычислить все индексы пересечения, если заданы «начальные условия». Виттен показал, что функция F удовлетворяет уравнению струны и дилатон-уравнению (см. п. 4.6), которые обеспечивают необходимые начальные условия и, совместно с уравнением КдФ (B.2), порождают всю иерархию.

К настоящему моменту известно несколько доказательств гипотезы Виттена. В доказательстве Концевича [K] (см. п. 4.9) используются квадратичные дифференциалы Дженкинса–Штребеля и матричные интегралы, доказательство Окунькова и Пандарипанде [OP], отправной точкой в котором служат числа Гурвица, также использует матричное интегрирование и графы на поверхностях с последующим применением асимптотического анализа. Доказательство Мирзахани [M] основано на римановой геометрии пространств модулей и изучении объемов Вейля–Петерссона. Доказательство Кима и Лю [KimLiu] по духу похоже на излагаемое ниже, однако в нем используются двойные, а не простые числа Гурвица и довольно сложный асимптотический анализ. Приводимое нами изложение следует [KL]. Позднее Казарян [K] модифицировал это рассуждение и показал, как выводить всю иерерахию уравнений КдФ для функции F (а не только первое ее уравнение) из иерархии КП для чисел Гурвица. Здесь мы решили ограничиться более простым доказательством из [KL].

Подобно Окунькову и Пандарипанде, мы начинаем с чисел Гурвица, но затем следуем по другому пути. Как объяснялось в главе 5, числа Гурвица перечисляют разветвленные накрытия двумерной сферы с предписанными точками ветвления и типами ветвления над этими точками. Мы будем пользоваться только разветвленными накрытиями с вырожденным ветвлением лишь над одной точкой. В доказательстве мы используем следующие, сейчас хорошо известные, свойства этих чисел:

- формулу ELSV [ELSV1,ELSV2], см. главу 5, связывающую числа Гурвица с теорией пересечения на пространствах модулей. В этой формуле закодирована вся геометрическая часть рассуждения;

- связь между числами Гурвица и интегрируемыми иерархиями. Впервые существование этой связи было высказано в качестве гипотезы Пандарипанде [P] и доказано, в усиленной форме, Окуньковым [O]. Этот результат носит, по существу, чисто комбинаторный характер. Нам понадобится упрощенный вариант рассуждения Окунькова для простых чисел Гурвица.

Формула ELSV позволяет выразить индексы пересечений ψ-классов по пространствам модулей кривых через числа Гурвица. При этом уравнение КП, которому подчиняется производящая функция для чисел Гурвица, преобразуется в уравнение КдФ на числа пересечений. Отметим, что существование такого доказательства было предсказано в [GJV]. Одна из основных особенностей приводимого доказательства состоит в том, что известные эффективные алгоритмы для вычисления чисел Гурвица — относительно простого комбинаторного объекта — дают независимое средство подсчета индексов пересечения. Во втором разделе мы обсуждаем иерархию Кадомцева–Петвиашвили и ее связь с геометрией полубесконечного грассманиана и доказываем, что производящая функция для простых чисел Гурвица является семейством решений иерархии. Раздел 3 посвящен выводу из этого утверждения гипотезы Виттена.

B.2 Иерархия Кадомцева–Петвиашвили и числа Гурвица

Иерархия Кадомцева–Петвиашвили (ниже, иерархия КП) это вполне интегрируемая система уравнений в частных производных, играющая важную роль в математической физике. Иерархию КдФ можно рассматривать как специализацию иерархии КП. Общая теория иерархии КП, принадлежащая Сато [SS], интерпретирует решения этой системы уравнений как полубесконечные плоскости, т.е. точки полубесконечного грассманиана. В основном тексте книги этот подход затрагивался в п. 3.6.4 в связи с построением решений иерархии КдФ. Здесь мы заново проговорим его для случая иерархии КП. В соответствии с ним, доказательство того, что некоторая функция является решением иерархии, сводится к ее реализации как точки полубесконечного грассманиана. В частности, мы выполним такое отождествление для функции $H(u; p_1, p_2, \dots)$ — производящей функции для простых чисел Гурвица.

В.2.1 Вложения грассманианов и уравнения Плюккера

Рассмотрим грассманиан $G(2,4)$ двумерных векторных плоскостей в 4-мерном векторном пространстве $V \equiv \mathbb{C}^4$. Любую двумерную плоскость в V можно задать векторным произведением $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ произвольной пары φ_1, φ_2 линейно независимых векторов в ней. Это векторное произведение определено корректно с точностью до постоянного множителя; оно однозначно определяет двумерную плоскость, а значит задает вложение грассманиана $G(2,4)$ в проективизацию внешнего квадрата пространства V, $G(2,4) \hookrightarrow P\Lambda^2 V$. Непосредственное обобщение этой конструкции задает вложение произвольного грассманиана $G(k,n)$ k-мерных плоскостей в n-мерном пространстве V в проективизацию $P\Lambda^k V$.

Уравнения Плюккера это уравнения, задающие образ этого вложения. Отметим, что размерность грассманиана $G(k,n)$ равна $k(n-k)$, а размерность проективизации $P\Lambda^k V$ равна $\binom{n}{k} - 1$, поэтому, вообще говоря, образ вложения не совпадает со всем проективизированным внешним произведением $P\Lambda^k V$. Например, образ вложения грассманиана $G(2,4)$ в $P\Lambda^2 V$ это гиперповерхность в пятимерном проективном пространстве.

Найдем уравнение этой гиперповерхности. Зафиксируем базис e_1, e_2, e_3, e_4 в V. Тогда вектора $f_{ij} = e_i \wedge e_j$, $1 \le i < j \le 4$, задают естественный базис в пространстве $\Lambda^2 V$; обозначим через y_{ij} систему координат относительно этого базиса. Образ вложения грассманиана состоит из разложимых векторов. По определению внешнего произведения, проективные координаты образа плоскости, натянутой на эту пару векторов (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), равны

$$y_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} = a_i b_j - a_j b_i.$$

Непосредственное вычисление показывает, что эти координаты удовлетворяют однородному уравнению

$$y_{12}y_{34} - y_{13}y_{24} + y_{14}y_{23} = 0,$$

которое и есть уравнение Плюккера вложения грассманиана.

Для произвольных n и k уравнения Плюккера остаются квадратичными. Другими словами, *идеал в кольце многочленов от переменных y_{ij}, состоящий из многочленов, обращающихся в нуль на образе плюккерова вложения грассманиана, порожден квадратичными многочленами.*

B.2.2 Пространство рядов Лорана

Возьмем теперь в качестве V бесконечномерное векторное пространство формальных рядов Лорана от одной переменной. Элементы этого пространства имеют вид $c_{-k}z^{-k}+c_{-k+1}z^{-k+1}+\dots$. Мономы z^k, $k=\dots,-2,-1,0,1,2,\dots$, образуют *стандартный* базис в V. По определению, *полубесконечное внешнее произведение* $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}V$ это векторное пространство, натянутое на векторы

$$v_\beta = z^{m_1}\wedge z^{m_2}\wedge z^{m_3}\wedge\dots,\qquad m_1<m_2<m_3<\dots,\qquad m_i=b_i-i;$$

здесь β это разбиение, $\beta=(b_1,b_2,b_3,\dots)$, $b_1\geq b_2\geq b_3\geq\dots$, все части которого за исключением конечного числа равны нулю. В частности, $m_i=-i$ для всех достаточно больших i.

Вакуум-вектор

$$v_\emptyset = z^{-1}\wedge z^{-2}\wedge z^{-3}\wedge\dots$$

соответствует пустому разбиению. Аналогично,

$$v_{1^1}=z^0\wedge z^{-2}\wedge z^{-3}\wedge\dots,\qquad v_{2^1}=z^1\wedge z^{-2}\wedge z^{-3}\wedge\dots,$$
$$v_{1^2}=z^0\wedge z^{-1}\wedge z^{-3}\wedge\dots,$$

и т.д.

B.2.3 Бозон-фермионное соответствие

Нумерация базисных векторов в полубесконечном внешнем произведении $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}V$ разбиениями устанавливает естественный изоморфизм векторных пространств между этим пространством и векторным пространством степенных рядов от бесконечного набора переменных $p_1,p_2,\dots$. Этот изоморфизм переводит базисный вектор v_β в многочлен Шура $s_\beta=s_\beta(p_1,p_2,\dots)$. Такой многочлен представляет собой квазиоднородный многочлен степени $|\beta|=b_1+b_2+\dots$ от переменных p_i, если степень переменной p_i взять равной i.

Многочлены Шура для одночастичных разбиений задаются разложением

$$s_0+s_1z+s_2z^2+s_3z^3+s_4z^4+\dots=e^{p_1z+p_2\frac{z^2}{2}+p_3\frac{z^3}{3}+\dots},$$

а для произвольного разбиения β соответствующий многочлен Шура равен определителю

$$s_\beta=\det\ ||s_{b_j-j+i}||. \tag{B.3}$$

Здесь индексы i,j пробегают множество $\{1,2,\dots,n\}$ для достаточно большого n, и, поскольку $b_i=0$ для достаточно большого i, определитель, а значит и s_β, не зависит от n. Вот несколько первых многочленов Шура:

$$s_0=1,\qquad s_{1^1}=p_1,\qquad s_{2^1}=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2),\qquad s_{3^1}=\frac{1}{6}(p_1^3+3p_1p_2+2p_3),$$
$$s_{1^2}=\frac{1}{2}(p_1^2-p_2),\qquad s_{1^12^1}=\frac{1}{3}(p_1^3-p_3),\qquad s_{1^3}=\frac{1}{6}(p_1^3-3p_1p_2+2p_3).$$

В.2.4 Полубесконечный грассманиан и уравнения КП

Полубесконечный грассманиан $G(\frac{\infty}{2},\infty)$ состоит из разложимых векторов в $P\Lambda^{\frac{\infty}{2}}V$, т.е. из векторов вида

$$\varphi_1(z)\wedge\varphi_2(z)\wedge\varphi_3(z)\wedge\dots,$$

в которых каждый вектор φ_i является рядом Лорана по z и, для достаточно большого i, разложение вектора φ_i начинается с z^{-i}:

$$\varphi_i(z)=z^{-i}+c_{i1}z^{-i+1}+c_{i2}z^{-i+2}+\dots.$$

Определение В.2.1 *Уравнения Хироты* это уравнения Плюккера вложения полубесконечного грассманиана в проективизированное полубесконечное внешнее произведение $P\Lambda^{\frac{\infty}{2}}V$. Решения уравнений Хироты (т.е. полубесконечные плоскости) называются *τ-функциями* иерархии КП.

Уравнения Хироты являются полиномиальными уравнениями на коэффициенты разложения τ-функций, и их можно интерпретировать как дифференциальные уравнения в частных производных на сами функции. Будучи уравнениями Плюккера, они квадратичны по τ.

Определение В.2.2 Уравнения, в которые преобразуются уравнения Хироты для логарифмов τ-функций при бозонно-фермионном соответствии, называются *уравнениями Кадомцева–Петвиашвили*, или *уравнениями КП*.

Другими словами, произвольное решение уравнений КП можно получить как результат следующей процедуры:

- берем полубесконечную плоскость $\varphi_1(z)\wedge\varphi_2(z)\wedge\dots$ в V;
- разложив по степеням z, заменяем соответствующую точку в полубесконечном грассманиане линейной комбинацией базисных векторов v_β, и умножаем на константу, чтобы сделать коэффициент при $v_\emptyset$ равным 1;
- заменяем в полученной линейной комбинации каждый вектор v_β соответствующим многочленом Шура $s_\beta(p_1,p_2,\dots)$, получая таким образом ряд от бесконечного набора переменных $p_1,p_2,\dots$;
- берем логарифм получившегося ряда.

При этом нет необходимости знать явный координатный вид уравнений КП.

Пример В.2.3 Первое уравнение КП на неизвестную функцию $W=W(p_1,p_2,\dots)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 W}{\partial p_2^2}=\frac{\partial^2 W}{\partial p_1\partial p_3}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial p_1^2}\right)^2-\frac{1}{12}\frac{\partial^4 W}{\partial p_1^4} \qquad (\text{В.4})$$

(обратите внимание на то, что оно в естественном смысле однородно). Возьмем $\varphi_1(z) = z^{-1} + az^0 + bz^1$, $a, b \in \mathbb{C}$, и положим $\varphi_i(z) = z^{-i}$ for $i \geq 2$ (ср. с примером 3.6.2). Тогда реализация описанной выше процедуры дает

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots = v_\emptyset + av_{1^1} + bv_{2^1} \mapsto 1 + ap_1 + \frac{1}{2}b(p_1^2 + p_2).$$

Поэтому функция

$$W(p_1, p_2) = \log(1 + ap_1 + \frac{1}{2}b(p_1^2 + p_2))$$

является решением первого уравнения КП (и, разумеется, их всех). Утверждение про первое уравнение КП (B.4) можно проверить непосредственно, однако уже это вычисление достаточно трудоемко.

B.2.5 Действие матричной группы

Линейные преобразования векторного пространства V многочленов Лорана индуцируют линейные преобразования полубесконечного векторного произведения $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}V$. Те линейные преобразования пространства V, которые переводят полубесконечные плоскости в полубесконечные плоскости, индуцируют преобразования, сохраняющие вложенный грассманиан. В этом разделе мы рассматриваем индуцированное действие преобразований, представимых в базисе $\{z^k\} \subset V$, $k \in \mathbb{Z}$, диагональными матрицами; только такие преобразования понадобятся нам для изучения простых чисел Гурвица. По очевидным причинам, индуцированное действие такого преобразования на $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}V$ также записывается в базисе v_β диагональной матрицей.

Пример B.2.4 Рассмотрим линейное преобразование $V \to V$, состоящее в умножении вектора z^{-1} на постоянную a при сохранении остальных базисных векторов. Ясно, что действие этого преобразования на $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}V$, записанное в базисе v_β, умножает на a всякий базисный вектор, в разложение которого входит z^{-1} (т.е. $v_\emptyset, v_{1^2}$, и т.д.), и сохраняет все остальные базисные вектора (v_{1^1}, v_{2^1}, и т.д.). Требование, чтобы множитель z^{-1} входил в разложение вектора v_β, означает, что разбиение β содержит часть b_i, такую, что $b_i - i = -1$. Отметим, что разбиение может содержать не более одной такой части, поскольку части b_i следуют в убывающем порядке, а последовательность i строго возрастает.

Важным следствием этого примера является то, что собственное число действия диагональной матрицы на V на $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}V$, отвечающее вектору v_β, *симметрично зависит от разностей* $b_i - i$. Другими словами, функция, сопоставляющая разбиению β собственное число, отвечающее вектору v_β, принадлежит кольцу так называемых сдвинутых симметрических функций.

Определение B.2.5 Функция на разбиениях $\beta = (b_1, b_2, \dots)$ называется *сдвинутой симметрической*, если она симметрична относительно перестановок частей $b_i - i$.

Подчеркнем еще раз, что части $b_1, b_2, \ldots$ разбиения β идут в невозрастающем порядке, $b_1 \geq b_2 \geq \ldots$, и все они кроме конечного числа равны 0. Определение сдвинутой симметрической функции существенно использует это предположение.

Пространство сдвинутых симметрических функций, зависящих от бесконечного числа переменных, является проективным пределом Γ пространств Γ_k сдвинутых симметрических функций, зависящих от k переменных. (В [OO] алгебра Γ обозначается через Λ^*. Мы используем другое обозначение, чтобы не произошло путаницы с внешним произведением.) Предел берется относительно проекций $\Gamma_{k+1} \to \Gamma_k$, состоящих в том, что последняя переменная полагается равной нулю. Совокупность комплекснозначных сдвинутых симметрических функций образует алгебру. Эта алгебра была введена и исследована в [KO]. Причина, по которой она была введена, состоит в том, что некоторые естественные элементы в центрах групповых алгебр симметрических групп оказываются сдвинутыми симметрическими.

Итак, у нас есть корректно определенное действие на $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}V$ произвольной диагональной матрицы $z^k \mapsto a_k z^k$, $a_k \neq 0$, *конечное количество элементов a_k с отрицательными индексами в которой отлично от* 1. Действительно, если бы таких элементов было бесконечно много, то для вычисления действия соответствующей матрицы на каком-нибудь базисном векторе, например, на $v_\emptyset$, нам потребовалось бы вычислять произведение бесконечно большого числа сомножителей. К счастью, действие на *проективизированном* пространстве $P\Lambda^{\frac{\infty}{2}}V$, которое и составляет предмет нашего изучения, можно продолжить до действия диагональных матриц с бесконечным количеством отличных от 1 элементов a_k с отрицательными индексами. Действительно, поскольку нас интересует действие на проективизированном пространстве, смысл имеют лишь отношения собственных чисел, а не сами числа, а эти отношения корректно определены для произвольной диагональной матрицы.

В самом деле, любые два базисных вектора $v_\beta, v_\nu \in \Lambda^{\frac{\infty}{2}}V$ имеют общий хвост: начальные члены их разложения могут быть различны, однако, начиная с некоторого места, скажем K, разложения начинают совпадать. Тогда отношение соответствующих собственных чисел равно $\frac{a_{b_1-1}\cdots a_{b_K-K}}{a_{n_1-1}\cdots a_{n_K-K}}$ (чем, в частности, объясняется наложенное нами условие, что диагональные элементы матрицы не должны обращаться в нуль). Тем самым, мы должны определить действие диагональной матрицы на $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}V$ таким образом, чтобы отношения собственных чисел сохранялись. Выбор такого действия определяется выбором собственного значения, отвечающего вакуум-вектору $v_\emptyset$, которое можно взять произвольным. Естественнее всего положить его равным 1. В результате мы получаем следующее индуцированное действие диагональной матрицы (a_k) на V на $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}V$:

$$v_\beta \mapsto \left(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{a_{b_i-i}}{a_{-i}}\right) v_\beta.$$

Произведение в скобках корректно определено, поскольку все сомножители за исключением конечного числа равны 1. Таким образом, действие тора диагональных матриц на проективизированной полубесконечной внешней степени пространства V является индуктивным пределом действий торов T_K, состоящих из диагональных матриц, диагональные элементы a_i которых равны 1 для $i = -(K+1), -(K+2), \dots$.

Поскольку действие бесконечномерного тора $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}(\mathbb{C}^*)_i$ на проективизированной полубесконечной внешней степени корректно определено, также корректно определено и действие соответствующей алгебры Ли. Оно также диагонально, и действие диагональной матрицы $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ (диагональные элементы которой уже не обязательно ненулевые) на базисном векторе v_β имеет вид

$$v_\beta \mapsto \left(\sum_{j=1}^{\infty}(\alpha_{b_j-j} - \alpha_{-j})\right) v_\beta.$$

B.2.6 Иерархия КП и r-КдФ иерархии

r-КдФ иерархия, $r = 2, 3, \dots$, представляет собой редукцию иерархии КП. Рассмотрим подпространства в V, инвариантные относительно умножения на z^r. Такие полубесконечные пространства образуют подграссманиан

$$G_r(\frac{\infty}{2}, \infty) \subset G(\frac{\infty}{2}, \infty).$$

По определению, логарифмы соответствующих τ-функций это *решения r-КдФ иерархий*. При бозонно-фермионном соответствии эти логарифмы переходят в такие решения иерархии КП, которые не зависят от переменных p_i с индексом i кратным r. Иерархию 2-КдФ также называют просто иерархией КдФ.

B.2.7 Производящая функция для простых чисел Гурвица как решение иерархии КП

Обозначим через S_n симметрическую группу, состоящую из перестановок n элементов $\{1, 2, \dots, n\}$. Всякую перестановку $\sigma \in S_n$ можно представить в виде произведения транспозиций, причем таких разложений в произведение много. Для заданного натурального m нас будет интересовать число упорядоченных наборов $\rho_1, \dots, \rho_m$ из m транспозиций, произведение которых есть данная перестановка σ,

$$\sigma = \rho_m \circ \dots \circ \rho_1.$$

Очевидны следующие утверждения:

- число таких разложений зависит лишь от циклового типа перестановки σ, а не от самой перестановки;

- существует минимальное число $m_{\min} = m_{\min}(\sigma)$, для которого есть такое разложение, и это минимальное число равно $n - c(\sigma)$, где через $c(\sigma)$ обозначено число циклов в σ;

- все значения m, для которых число разложений ненулевое, имеют одну и ту же четность, совпадающую с четностью перестановки σ.

Теперь мы готовы дать строгое определение простых чисел Гурвица в терминах перестановок.

Определение B.2.6 Пусть β — разбиение числа n, $\beta \vdash n$. *Простое число Гурвица* $h^\circ_{m;\beta}$ определяется равенством

$$h^\circ_{m;\beta} = \frac{1}{n!}\left|\{(\rho_1,\dots,\rho_m), \rho_i \in C_2(S_n) | \rho_m \circ \dots \circ \rho_1 \in C_\beta(S_n)\}\right|.$$

Здесь через $C_2(S_n)$ обозначено множество всех транспозиций в S_n, а $C_\beta(S_n)$ это множество всех перестановок циклового типа $\beta \vdash n$ в S_n, так что, в частности, $C_2(S_n) = C_{1^{n-2}2^1}(S_n)$. *Связное простое число Гурвица* $h_{m;\beta}$ определяется аналогичным образом, только мы подсчитываем лишь те наборы из m перестановок, порождаемая которыми подгруппа $\langle\tau_1,\dots,\tau_m\rangle \subset S_n$ действует на множестве $\{1,\dots,n\}$ транзитивно.

Отметим, что так определенные связные простые числа Гурвица по сути совпадают с числами Гурвица, введенными в п. 5.3.1 и перечисляющими связные разветвленные накрытия сферы (там добавлялся еще множитель $|\mathrm{Aut}(\beta)|$), однако отличаются от них индексацией: там в качестве первого индекса выступает род накрывающей поверхности, тогда как здесь это число m точек простого ветвления. По формуле Римана–Гурвица эти два числа линейно выражаются друг через друга, и выбор подходящего варианта определяется удобством использования.

Соберем простые числа Гурвица в две производящие функции:

$$H^\circ(u; p_1, p_2, \dots) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\beta} h^\circ_{m;\beta} p_{b_1} p_{b_2} \dots \frac{u^m}{m!}; \tag{B.5}$$

$$H(u; p_1, p_2, \dots) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\beta} h_{m;\beta} p_{b_1} p_{b_2} \dots \frac{u^m}{m!}, \tag{B.6}$$

где в обоих случаях β пробегает множество всех разбиений.

Предложение 3.8.3 дает

Предложение B.2.7 *Справедливо равенство* $H^\circ = \exp(H)$.

Это утверждение позволяет переписывать высказывания о простых числах Гурвица как высказывания о связных простых числах Гурвица и наоборот.

В этом разделе мы доказываем, что производящая функция $H(u;p_1,p_2,\dots)$ для простых чисел Гурвица является решением иерархии КП при каждом значении параметра u. Это утверждение верно при $u=0$, поскольку $H(0;p_1,p_2,\dots)=p_1$: лишь (неразветвленное) тождественное накрытие $S^2\to S^2$ не имеет точек простого ветвления. Для общего значения u это утверждение вытекает из того, что $\exp(H)$ является интегральной кривой векторного поля в $P\Lambda^{\frac{\infty}{2}}V$, касающегося полубесконечного грассманиана. Это векторное поле индуцировано линейным преобразованием $V\to V$, которое диагонально в стандартном базисе z^k. А именно, это преобразовние $z^k\mapsto(k-\frac{1}{2})^2z^k$.

Обозначим через $\mathbb{C}[S_n]$ $n!$-мерную групповую алгебру симметрической группы S_n. Напомним, что для разбиения κ числа n мы обозначили через $C_\kappa\in\mathbb{C}[S_n]$ сумму всех перестановок в S_n с цикловым типом κ. Мы введем специальное обозначение C_1 для класса C_{1^n} единичной перестановки, который является единицей в алгебре $\mathbb{C}[S_n]$, и C_2 для суммы $C_{1^{n-2}2^1}$ всех транспозиций. Элемент C_κ является центральным элементом в $\mathbb{C}[S_n]$ для любого κ. Эти классы порождают центр алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ как векторное пространство.

Простые числа Гурвица допускают следующую естественную интерпретацию. Умножим класс C_κ на m-ю степень класса C_2. Тогда $h^\circ_{m;\kappa}$ это просто коэффициент при C_1 в произведении $C_\kappa C_2^m$, деленный на $n!$.

В самом деле, коэффициент при C_1 в центральном элементе групповой алгебры можно узнать, подсчитав след действия этого элемента на $\mathbb{C}[S_n]$ левым или правым умножением. Действительно, умножение на любую перестановку из S_n кроме тождественной, будучи перестановкой без неподвижных точек базиса в $\mathbb{C}[S_n]$, имеет нулевой след. Поэтому умножение на произвольный базисный элемент C_κ кроме C_1 имеет нулевой след, а след умножения на C_1 равен $n!$ — размерности пространства представления.

Групповая алгебра произвольной конечной группы G естественно изоморфна прямой сумме алгебр автоморфизмов всех неприводимых представлений этой группы (см. теорему А.1.5):

$$\mathbb{C}[G]=\bigoplus\mathrm{End}(V_i),$$

где сумма в правой части берется по всем неприводимым представлениям V_i группы G. Неприводимые представления симметрической группы S_n находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с разбиениями числа n, откуда для $G=S_n$ получаем

$$\mathbb{C}[S_n]=\bigoplus_{\beta\vdash n}\mathrm{End}(V_\beta). \tag{B.7}$$

Рассмотрим центральный элемент

$$P=\sum_{\kappa\vdash n}p_\kappa C_\kappa\in\mathbb{C}[S_n][p_1,p_2,\dots],$$

где $p_\kappa = p_{\kappa_1} p_{\kappa_2} \dots$ — моном от формальных переменных, а суммирование идет по всем разбиениям κ числа n. Теперь подсчитаем след центрального элемента PC_2^m, примененного к обеим частям изоморфизма (В.7). Слева имеем

$$n! \sum_{\kappa \vdash n} h^\circ_{m;\kappa} p_\kappa.$$

Справа след можно вычислить, изменив порядок суммирования:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} PC_2^m &= \sum_{\kappa \vdash n} \operatorname{tr} p_\kappa C_\kappa C_2^m \\ &= \sum_{\beta \vdash n} (\operatorname{tr} \sum_{\kappa \vdash n} p_\kappa C_\kappa C_2^m)|_{\mathrm{End}(V_\beta)} \\ &= \sum_{\beta \vdash n} (f_2(\beta))^m s_\beta(p). \end{aligned}$$

Здесь через $f_2(\beta)$ обозначен след центрального элемента C_2 в неприводимом представлении V_β, а $s_\beta(p)$ — согласно еще одному определению — многочлен Шура, отвечающий разбиению β,

$$s_\beta(p) = \sum_{\kappa \vdash |\beta|} p_\kappa \operatorname{tr} C_\kappa|_{V_\beta}.$$

Эквивалентность двух определений многочленов Шура — стандартный факт, известный под именем теоремы Фробениуса; доказательство можно найти, например, в [Sa]. В конце концов мы получаем

$$\sum_{\kappa \vdash n} h^\circ_{m;\kappa} p_\kappa = \sum_{\beta \vdash n} s_\beta(1,0,0,\dots) s_\beta(p) f_2(\beta)^m.$$

После умножения на $u^m/m!$ и суммирования по всем m и n мы заключаем, что

$$H^\circ(u; p_1, p_2, \dots) = \sum_\beta s_\beta(1,0,0,\dots) s_\beta(p) e^{f_2(\beta)u} = e^{F_2 u} e^{p_1},$$

где через F_2 обозначен диагональный оператор на $\Lambda^{\frac{\infty}{2}} V$, индуцированный диагональным оператором $z^k \mapsto (k-\frac{1}{2})^2 z^k$ на V. Отметим, что в координатах p_i оператор F_2 принимает вид оператора cut-and-join из [GJ]:

$$F_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left((i+j) p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + ij p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right).$$

Многочлены Шура s_β — собственные функции этого оператора, а $f_2(\beta)$ — соответствующие собственные значения.

Приведенные выше рассуждения доказывают основное утверждение настоящего раздела.

Теорема В.2.8 *Функция H удовлетворяет иерархии КП при каждом значении переменной u; в частности, она является решением уравнения КП* (В.4).

B.3 Доказательство гипотезы Виттена

Нашим основным инструментом в этом разделе будет формула ELSV (теорема 5.3.1), выражающая связные простые числа Гурвица в терминах индексов пересечений некоторых классов на пространствах модулей кривых. В обозначениях этого приложения она принимает вид

$$h_{m;\beta} = m! \prod \frac{b_i^{b_i}}{b_i!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} \frac{1 - \lambda_1 + \lambda_2 - \cdots \pm \lambda_g}{(1 - b_1\psi_1)\dots(1 - b_n\psi_n)}. \tag{B.8}$$

Здесь $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ — разбиение с n положительными частями, число m точек простого ветвления и род g накрывающей кривой связаны формулой Римана–Гурвица $m = |\beta| + n + 2g - 2$, $\psi_i = c_1(\mathcal{L}_i) \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g;n})$, $i = 1, \dots, n$, — первые классы Черна расслоений кокасательных прямых в отмеченных точках, и $\lambda_j \in H^{2j}(\overline{\mathcal{M}}_{g;n})$, $j = 0, \dots, g$, $\lambda_0 = 1$, — классы Черна расслоения голоморфных 1-форм (расслоения Ходжа). Формула (B.8) справедлива при «стабильных»значениях параметров: при $g = 0$ значение n должно удовлетворять неравенству $n \geq 3$. Однако в производящую функцию H входят в качестве коэффициентов и числа Гурвица, отвечающие значениям $n = 1$ и $n = 2$ при $g = 0$. К счастью, для этих чисел Гурвица со времен самого́ Гурвица известны явные формулы, которые позволяют внести необходимые поправки.

B.3.1 Выражение индексов пересечений ψ-классов через числа Гурвица

Очевидно, что для всякого неотрицательного целого числа d существуют константы c_b^d, $b = 1, \dots, d + 1$, такие, что

$$\sum_{b=1}^{d+1} \frac{c_b^d}{1 - b\psi} = \psi^d + O(\psi^{d+1}), \tag{B.9}$$

причем этими условиями константы определяются однозначно. Эти константы равны

$$c_b^d = \frac{(-1)^{d-b+1}}{(d - b + 1)!(b - 1)!}.$$

Действительно, нам надо доказать, что первые $d - 1$ производных по ψ от линейной комбинации

$$\sum_{b=1}^{d+1} \frac{c_b^d}{1 - b\psi}$$

обращаются в нуль в нуле, а производная с номером d равна $d!$. Значение i ой производной этой линейной комбинации в точке $\psi = 0$ равно

$$(-1)^{i+1} \frac{1}{i!} \left(\binom{d}{0} 1^i - \binom{d}{1} 2^i + \binom{d}{2} 3^i - \cdots \pm \binom{d}{d} d^i \right).$$

Здесь выражение в скобках совпадает со значением в точке $x = 1$ результата применения i-ой итерации оператора xd/dx к многочлену $(1-x)^d$; это значение равно 0 при $0 \le i < d$ и $(-1)^d d!$ при $i = d$, что и требовалось.

Перемножая тождества (B.9) для различных d, получаем равенство

$$\sum_{b_1=1}^{d_1+1} \cdots \sum_{b_n=1}^{d_n+1} \frac{c_{b_1}^{d_1} \dots c_{b_n}^{d_n}}{(1-b_1\,\psi_1)\dots(1-b_n\,\psi_n)} = \prod_{i=1}^{n} \psi_i^{d_i} + \dots,$$

где многоточие в правой части обозначает члены, степень которых превышает $d_1 + \dots + d_n$. В частности, при $d_1 + \dots + d_n = 3g - 3 + n$ линейная комбинация

$$\sum_{b_1=1}^{d_1+1} \cdots \sum_{b_n=1}^{d_n+1} c_{b_1}^{d_1} \dots c_{b_n}^{d_n} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} \frac{1 - \lambda_1 + \dots \pm \lambda_g}{(1-b_1\psi_1)\dots(1-b_n\psi_n)}$$

просто равна $\langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \rangle$, поскольку интеграл от членов старшей степени равен нулю. Принимая во внимание коэффициент при интеграле в формуле (B.8), мы получаем следующее явное тождество.

Теорема B.3.1 *Для произвольной последовательности неотрицательных целых чисел $d_1, \dots, d_n$ справедливо равенство*

$$\langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \rangle = \sum_{b_1=1}^{d_1+1} \cdots \sum_{b_n=1}^{d_n+1} \left(\frac{1}{m!} \prod_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{d_i+1-b_i}}{(d_i+1-b_i)!\,b_i^{b_i-1}} \right) h_{g;b_1,\dots,b_n},$$

где значение g определяется по левой части, $\sum d_i = 3g - 3 + n$, и $m = 2g - 2 + |\beta| + n$.

Утверждение теоремы удобно сформулировать в терминах производящих функций. Представим производящую функцию H в виде суммы

$$H = H_{0;1} + H_{0;2} + H_{\mathrm{st}}, \tag{B.10}$$

где в стабильной части H_{st} собраны все мономы, коэффициенты которых даются формулой (B.8), а $H_{0;1}$ и $H_{0;2}$ это производящие функции для чисел разветвленных накрытий сферы сферой с одной («полиномиальные») и двумя («тригонометрические полиномиальные») прообразами выделенной точки ветвления соответственно. Две последние производящие функции известны со времен Гурвица (см. упражнение 5.1.8 и формулу (5.15)):

$$\begin{aligned} H_{0;1} &= \sum_{b=1}^{\infty} h_{0;b} p_b \frac{u^{b-1}}{(b-1)!} = \sum_{b=1}^{\infty} \frac{b^{b-2}}{b!} p_b u^{b-1} \\ H_{0;2} &= \frac{1}{2} \sum_{b_1,b_2=1}^{\infty} h_{0;b_1,b_2} p_{b_1} p_{b_2} \frac{u^{b_1+b_2}}{(b_1+b_2)!} = \frac{1}{2} \sum_{b_1,b_2=1}^{\infty} \frac{b_1^{b_1} b_2^{b_2}}{(b_1+b_2) b_1! b_2!} p_{b_1} p_{b_2} u^{b_1+b_2}. \end{aligned}$$

На самом деле ниже нам понадобятся не столько точные формулы для $H_{0;1}, H_{0;2}$, сколько то, что в эти функции входят мономы от p_i степени не выше двух, и справедливы равенства

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial p_1^2}(H_{0;1}+H_{0;2}) &= \frac{1}{2}u^2,\\ \frac{\partial^2}{\partial p_2^2}(H_{0;1}+H_{0;2}) &= u^4,\\ \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_3}(H_{0;1}+H_{0;2}) &= \frac{9}{8}u^4.\end{aligned}$$

Обозначим через $G_{\mathrm{st}} = G_{\mathrm{st}}(u; t_0, t_1, \dots)$ результат следующей замены переменных в ряде H_{st}:

$$p_b = u^{-b-\frac{1}{3}} \frac{b!}{b^b} \sum_{d=b-1}^{\infty} c_b^d u^{-\frac{2}{3}d} t_d = \sum_{d=b-1}^{\infty} \frac{(-1)^{d-b+1}}{(d-b+1)! b^{b-1}} u^{-b-\frac{2d+1}{3}} t_d. \tag{B.11}$$

Этот результат является рядом от переменных $t_0, t_1, \dots$, коэффициенты которых являются формальными рядами Лорана по $u^{2/3}$. Действительно, степени переменной u во вкладе монома $p_{b_1} \dots p_{b_n}$ в разложение имеют вид

$$(b_1 + \dots + b_n + 2g - 2 + n) + \sum_{i=1}^{n} \left(-b_i - \frac{2d_i+1}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(3g - 3 + n - \sum_{i=1}^{n} d_i\right),$$

а значит после умножения на 3 становятся четными натуральными числами. С другой стороны, степени параметра u при каждой переменной t_d ограничены снизу, поскольку t_d входит только в разложения переменных $p_1, \dots, p_{d+1}$.

Теорема B.3.2 1. *В ряде G_{st} отсутствуют члены с отрицательными степенями параметра u.*

2. *Свободный член по u, $G_{\mathrm{st}}|_u = 0$ (который корректно определен ввиду первого утверждения), совпадает с производящей функцией F для чисел пересечений, определенной равенством* (B.1),

$$F(t_0, t_1, \dots) = G_{\mathrm{st}}(0; t_0, t_1, \dots).$$

Доказательство. Представим функцию $H_{\mathrm{st}} = H - H_{0,1} - H_{0,2}$ в виде $H_{\mathrm{st}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n$, где в H_n собраны члены, отвечающие числам Гурвица, перечисляющим накрытия с в точности n прообразами бесконечности. Тогда, поскольку число простых критических точек равно

$$m = 2g-2+n+\sum b_i = \tfrac{2}{3}(3g-3+n)+\sum(b_i+\tfrac{1}{3}) = \tfrac{2}{3}\dim \overline{\mathcal{M}}_{g,n}+\sum(b_i+\tfrac{1}{3}),$$

формула (В.8) дает

$$\begin{aligned}
H_n &= \sum_{g,b_1,\ldots,b_n} h_{g,b_1,\ldots,b_n} \frac{u^m}{m!} p_{b_1}\ldots p_{b_n}\\
&= \sum_{g,b_1,\ldots,b_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{b_i^{b_i}\, u^{b_i+\frac13}}{b_i!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \frac{1-u^{\frac23}\lambda_1+u^{\frac43}\lambda_2-\ldots}{\prod_{i=1}^{n}(1-b_i u^{\frac23}\psi_i)} p_{b_1}\ldots p_{b_n}\\
&= \left\langle (1-u^{\frac23}\lambda_1+u^{\frac43}\lambda_2-\ldots)\prod_{i=1}^{n}\sum_{b\ge1}\frac{b^b u^{b+\frac13}}{b!}\frac{p_b}{(1-bu^{\frac23}\psi_i)}\right\rangle;
\end{aligned}$$

здесь дробь понимается как формальный степенной ряд, а угловые скобки обозначают интегрирование каждого монома по тому пространству $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$, размерность которого совпадает со степенью монома. Применяя нашу замену переменных (В.11), получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{b\ge1}\frac{b^b u^{b+\frac13}}{b!}\frac{p_b}{(1-bu^{\frac23}\psi_i)} &= \sum_{d\ge b-1\ge0}\frac{c_b^d}{(1-bu^{\frac23}\psi_i)}u^{-\frac23 d}t_d\\
&= \sum_{d\ge0}\big((u^{\frac23}\psi_i)^d+\ldots\big)u^{-\frac23 d}t_d = \sum_{d\ge0}\big(\psi_i^d+\ldots\big)\,t_d, \qquad i=1,2,\ldots,n.
\end{aligned}$$

где многоточие обозначает члены старшей степени по u. Поэтому соответствующее слагаемое в G_{st} равно

$$(G_{\mathrm{st}})_n = \sum_{d_1,\ldots,d_n}\langle\prod_{i=1}^{n}\psi_i^{d_i}+\ldots\rangle t_{d_1}\ldots t_{d_n}.$$

Теорема В.3.2 доказана.

В.3.2 Вывод уравнения КдФ

По теореме В.3.2, G_{st} является степенным рядом от $u^{2/3}, t_0, t_1, \ldots$, коэффициент $G|_{u=0}$ при u^0 которого совпадает с функцией F. По определению, G_{st} является результатом подстановки (В.11) в ряд $H_{\mathrm{st}} = H - H_{0;1} - H_{0;2}$. Из уравнения (В.4) вместе с явными формулами для $H_{0;1}$ и $H_{0;2}$ вытекает, что H_{st} удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 H_{\mathrm{st}}}{\partial p_2^2} = \frac{\partial^2 H_{\mathrm{st}}}{\partial p_3\partial p_1} - \frac12\left(\frac{\partial^2 H_{\mathrm{st}}}{\partial p_1^2}\right)^2 - \frac12 u^2\frac{\partial^2 H_{\mathrm{st}}}{\partial p_1^2} - \frac1{12}\frac{\partial^4 H_{\mathrm{st}}}{\partial p_1^4}.$$

Замена переменных (В.11) приводит к следующей замене частных производных

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p_1} &= u^{4/3}\frac{\partial}{\partial t_0};\\
\frac{\partial}{\partial p_2} &= 2u^{9/3}\frac{\partial}{\partial t_1}+2u^{7/3}\frac{\partial}{\partial t_0}\\
\frac{\partial}{\partial p_3} &= 9u^{14/3}\frac{\partial}{\partial t_2}+9u^{12/3}\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac92 u^{10/3}\frac{\partial}{\partial t_0}.
\end{aligned}$$

Применяя эту замену к предыдущему уравнению, после деления его на $u^{16/3}$, мы можем переписать его в виде

$$\left(\frac{\partial^2 G_{\mathrm{st}}}{\partial t_1 \partial t_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 G_{\mathrm{st}}}{\partial t_0^2}\right)^2 - \frac{1}{12}\frac{\partial^4 G_{\mathrm{st}}}{\partial t_0^4}\right) + u^{2/3}\left(9\frac{\partial^2 G_{\mathrm{st}}}{\partial t_0 \partial t_2} - 4\frac{\partial^2 G_{\mathrm{st}}}{\partial t_0^4}\right) = 0. \tag{B.12}$$

Коэффициент при u^0 в (B.12) имеет вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_0^2}\right)^2 - \frac{1}{12}\frac{\partial^4 F}{\partial t_0^4} = 0.$$

Дифференцируя последнее уравнение по t_0, мы получаем нужное нам уравнение КдФ (B.2) на функцию $U = \partial^2 F/\partial^2 t_0^2$. Тем самым, гипотеза Виттена доказана.

Литература

[A] V. I. Arnold *Topological classification of trigonometric polynomials and combinatorics of graphs with an equal number of vertices and edges*, Funct. Anal. and its Appl., vol. **30**, no. 1, 1–14 (1996)

[DKJM] E. Date, M. Kashivara, M. Jimbo, T. Miwa, *Transformation groups for soliton equations*, in: Proc. of RIMS Symposium on Non-Linear Integrable Systems, Singapore, World Science Publ. Co., 39–119 (1983)

[DM] P. Deligne, D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 36, 75–109 (1969)

[ELSV1] T. Ekedahl, S. K. Lando, M. Shapiro, A. Vainshtein, *On Hurwitz numbers and Hodge integrals*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math., **328**, 1175–1180 (1999)

[ELSV2] T. Ekedahl, S. K. Lando, M. Shapiro, A. Vainshtein, *Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves*, Invent. math., **146**, 297–327 (2001)

[GJ] I. P. Goulden, D. M. Jackson, *Transitive factorisation into transpositions and holomorphic mappings on the sphere*, Proc. Amer. Math. Soc., **125**, no. 1, 51–60 (1997)

[GJV] I. P. Goulden, D. M. Jackson, R. Vakil, *The Gromov–Witten potential of a point, Hurwitz numbers, and Hodge integrals*, Proc. London Math. Soc. (3), **83**, 563–581 (2001)

[GV] T. Graber, R. Vakil, *Hodge integrals and Hurwitz numbers via virtual localization*, Compositio Math. **135**, no. 1, 25–36 (2003)

[HM] J. Harris, D. Mumford, *On the Kodaira dimension of the moduli space of curves*, Invent. Math., **67**, no. 1, 23-88 (1982)

[H1] A. Hurwitz, *Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungpunkten*, Math. Ann., **39**, 1–61 (1891)

[H2] A. Hurwitz, *Über die Anzal der Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungpunkten*, Math. Ann., **55**, 51–60 (1902)

[KS] V. Kac, A. Schwarz, *Geometric interpretation for the partition function of* $2D$ *gravity*, Phys. Lett. B, **257**, no. 3–4, 329–334 (1991)

[K] M. É. Kazarian, *KP hierarchy for Hodge integrals*, preprint (2007)

[KL] M. É. Kazarian, S. K. Lando, *An algebro-geometric proof of Witten's conjecture*, J. Amer. Math. Soc., **20**, 1079–1089(2007), math.AG/0601760

[KO] S. Kerov, G. Olshanski, *Polynomial functions on the set of Young diagrams*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math., **319**, no. 2, 121–126 (1994)

[KimLiu] Y.-S. Kim, K. Liu, *A simple proof of Witten conjecture through localization*, math.AG/0508384, 9 pp.

[K] M. Kontsevich, *Intersection theory on the moduli space of curves and the Airy function*, Comm. Math. Phys., **147**, 1–23 (1992)

[L] S. K. Lando, *Ramified coverings of the two-dimensional sphere and intersection theory in spaces of meromorphic functions on algebraic curves*, Russ. Math. Surv., **57**, no. 3, 463–533 (2002)

[LZ] S. K. Lando, A. K. Zvonkin, *Graphs on surfaces and their applications*, Springer (2004)

[M] M. Mirzakhani, *Weil–Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves*, preprint (2003)

[O] A. Okounkov, *Toda equations for Hurtwitz numbers*, Math. Res. Lett. **7**, no. 4, 447–453 (2000)

[OO] A. Okounkov, G. Olshanski, *Shifted Schur functions*, Algebra i Analiz, **9**, no 2, 73–146 (1997); translation in St.Petersburg Math. J., **9**, no. 2, 239-300 (1998)

[OP] A. Okounkov, R. Pandharipande, *Gromov–Witten theory, Hurwitz numbers, and matrix models I*, math.AG/0101147 (2001)

[P] R. Pandharipande, *The Toda equations and the Gromov–Witten theory of the Riemann sphere*, Lett. Math. Phys. **53**, no. 1, 59–74 (2000)

[Sa] B. E. Sagan, *The Symmetric Group*, Springer, 2001

[SS] M. Sato, Y.Sato, *Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifolds*, in: Nonlinear partial differential equations in applied science, North-Holland, Amsterdam, 259–271 (1983)

[SW] G. Segal, G. Wilson, *Loop groups and equations of the KdV type*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., N 61, 5–65 (1985)

[Sh] S. V. Shadrin, *Geometry of meromorphic functions and intersections on moduli spaces of curves*, Int. Math. Res. Notes, **38**, 2051–2094 (2003)

[W1] E. Witten, *Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli spaces*, Surveys in Differential Geometry, vol. 1, 243–269 (1991)

[W2] E. Witten, *Algebraic geometry associated with matrix models of two-dimensional gravity*, in: Topological models in modern mathematics, Stony Brook, NY, 1991; Publish or Perish, Houston TX, 235–269 (1993)

[Z] D. Zvonkine, *Enumeration of ramified coverings of the sphere and 2-dimensional gravity*, math.AG/0506248 (2005)