Полуполе с обобщенным сложением: основные свойства и некоторые приложения в экономике*

В. Д. Матвеенко[1]

1. Введение

При различных значениях параметра $p \neq 0$ будем рассматривать функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p)^{\frac{1}{p}}$ от n неотрицательных аргументов. С точки зрения тропической математики, эта функция интересна тем, что она связывает идемпотентные операции $x \oplus y = \max\{x, y\}$ и $x \oplus y = \min\{x, y\}$ со стандартной линейно-алгебраической операцией $x \oplus y = x + y$. Действительно, функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при $p \to -\infty$ превращается в $\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, при $p = 1$ – в $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$, а при $p \to +\infty$ – в $\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

При значениях параметра $p \geq 1$ функция F используется как норма – так называемая норма Гельдера; особенно часто используется евклидова норма, для которой $p = 2$.

Эта же самая функция F, как при положительных, так и при отрицательных значениях параметра p, используется в экономике как производственная функция, описывающая выпуск продукта в зависимости от затрат факторов производства. Это один из вариантов так называемой производственной CES-функции. Аббревиатура CES расшифровывается как constant elasticity of substitution

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №14-01-00448)

[1]Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"в Санкт-Петербурге, ул. Союза Печатников, д. 16, 190008, С.-Петербург

– постоянная эластичность замещения; под эластичностью замещения подразумевается величина, равная для указанной функции $\sigma = 1/(1-p)$.

По-видимому, впервые CES-функция была введена в экономике в статье Солоу [10], как функция, описывающая объем выпуска продукта Y с использованием двух факторов производства: капитала в количестве K и труда в количестве L. Производственная функция в [10] имела вид: $Y = (AK^p + L^p)^{\frac{1}{p}}$, где $A > 0$, $p \neq 0$. Солоу рассматривал CES-функцию при значениях параметра $p \leq 1$, однако отмечал, что она имеет экономический смысл и при $p > 1$. Впоследствии различные формы CES-функции получили широкое распространение в экономике; в частности, широко используется производственная функция вида F. В работе [2] построена вероятностная модель потока технологических идей, которая эндогенно приводит к производственной функции вида $Y = A(K^{-1} + L^{-1})^{-1}$.

В экономике часто используется также иная форма CES-функции: $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha_1 x_1^p + \alpha_2 x_2^p + \cdots + \alpha_n x_n^p)^{\frac{1}{p}}$, где параметры α_i положительны и $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$. По некоторым своим свойствам функции F и G сходны, а по некоторым существенно отличаются. В частности, функция F при значении параметра $p = 0$ имеет разрыв второго рода, тогда как функция G при $p \to 0$ превращается в $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ – последняя функция часто используется в экономике, в частности, как производственная функция Кобба-Дугласа и как обобщенное решение Нэша задачи о сделках. О другом отличии функций F и G, связанном с монотонностью по параметру p, будет сказано позднее.

Сейчас экономисты придают значение интерпретации того факта, что при $p \leq 1$ вторая смешанная производная функций F и G положительна. Это соответствует более широкому свойству супермодулярности (см. [11]), экономический смысл которого состоит в том, что увеличение одного фактора производства, например, в результате увеличения усилий экономического агента, производящего данный фактор, повышает эффективность других факторов производства и, тем самым, делает оправданным повышение усилий другими экономическими агентами. Наоборот, при $p > 1$ вторая смешанная производная отрицательна, что соответствует субмодулярности, которая означает, что при увеличения усилий одним экономическим агентом, увеличение усилий других агентов теряет свою эффективность (например, [4]).

В настоящее время случай $p \leq 1$ рассматривается как стандартный в экономике, и такого рода CES-функции используются во многих экономических исследованиях, однако в ряде исследований (например, [4]) используется предположение $p > 1$.

В данной статье мы рассматриваем функцию F с позиций тропической математики, на основе введения операции обобщенного сложения $x \oplus y = (x^p + y^p)^{\frac{1}{p}}$. Такое рассмотрение представляется полезным также и с точки зрения приложений, поскольку функция F, несмотря на ее широкое использование, все еще остается недостаточно хорошо исследованной, особенно при $p < 0$.

2. Полуполе обобщенных сумм

Введем обозначения

$$\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} | r > 0\}, \qquad \mathbb{R}_- = \{r \in \mathbb{R} | r < 0\},$$

где $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел. В качестве множества-носителя будем рассматривать

$$\mathbb{X} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup \{+\infty\}.$$

Будем также рассматривать семейство параметров $p \in \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$.

Как обычно, при использовании элементов 0 и $+\infty$, полагаем, что если $p \in \mathbb{R}_+$, то $0^p = 0$, $+\infty^p = +\infty$. Если $p \in \mathbb{R}_-$, то $0^p = +\infty$, $+\infty^p = 0$.

2.1. Операции сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$

При записи операций над элементами носителя будут использованы знаки обычных арифметических операций.

При фиксированном значении параметра p для любых $x \in \mathbb{X}$ и $y \in \mathbb{X}$ определим

$$x \oplus y = (x^p + y^p)^{\frac{1}{p}},$$
$$x \otimes y = x \times y$$

.

2.2. Свойства сложения

2.2.1. Ассоциативность. Для любых $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{X}$ и $z \in \mathbb{X}$ имеем
$$(x \oplus y) \oplus z = (x^p + y^p + z^p)^{\frac{1}{p}} = x \oplus (y \oplus z)$$

2.2.2. Существование нуля $\mathbb{0} = 0$, если $p \in \mathbb{R}_+$, и $\mathbb{0} = \{+\infty\}$, если $p \in \mathbb{R}_-$. При $p \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{0} \oplus x = (0 + x^p)^{\frac{1}{p}} = x \oplus \mathbb{0} = x,$$

При $p \in \mathbb{R}_-$,

$$\mathbb{0} \oplus x = (\ +\infty^p + x^p)^{\frac{1}{p}} = x \oplus \mathbb{0} = x.$$

2.2.3. Существование бесконечного элемента $\mathbb{G} = +\infty$, если $p \in \mathbb{R}_+$, и $\mathbb{G} = 0$, если $p \in \mathbb{R}_-$. При $p \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{G} \oplus x = (+\infty^p + x^p)^{\frac{1}{p}} = x \oplus \mathbb{G} = \mathbb{G},$$

При $p \in \mathbb{R}_-$,

$$\mathbb{G} \oplus x = (0^p + x^p)^{\frac{1}{p}} = x \oplus \mathbb{G} = \mathbb{G}.$$

2.2.4. Коммутативность.

$$x \oplus y = (x^p + y^p)^{\frac{1}{p}} = (y^p + x^p)^{\frac{1}{p}} = y \oplus x$$

2.2.5. Идемпотентность в пределе при $p \to -\infty$ и при $p \to +\infty$. Имеют место предельные переходы

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \to \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

при $p \to -\infty$,

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \to \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

при $p \to +\infty$.

Для доказательства первого из этих переходов, считаем, для простоты обозначений, что

$$x_1 = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Тогда

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = x_1[1 + (\frac{x_2}{x_1})^p + \cdots + (\frac{x_n}{x_1})^p]^{\frac{1}{p}}.$$

Поскольку $\frac{x_2}{x_1} \geq 1, \ldots, \frac{x_n}{x_1} \geq 1$, $p \to -\infty$ и $\frac{1}{p} \to 0$, имеет место сходимость

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \to x_1.$$

Предельный переход при при $p \to +\infty$ проверяется аналогично.

2.2.6. Монотонность суммы по параметру p. Если элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не все равны 0, и ни один из них не равен $+\infty$, то сумма $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$ убывает по параметру p на интервале значений параметра $\mathbb{R}_+$. Если элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не все равны $+\infty$, и ни один из них не равен 0, то сумма $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$ убывает по параметру p на интервале значений параметра $\mathbb{R}_-$.

Доказательство. Производная функции F по p равна

$$(x_1^p + \ + x_n^p)^{\frac{1}{p}} \ln(x_1^p + \ + x_n^p)(-\frac{1}{p^2}) + \\ + \frac{1}{p}(x_1^p + \ + x_n^p)^{\frac{1}{p}-1}(x_1^p \ln x_1 + \ + x_n^p \ln x_n);$$

она имеет тот же знак, что и функция

$$-[(x_1^p + \ + x_n^p)\ln(x_1^p + \ + x_n^p) - p(x_1^p \ln x_1 + \ + x_n^p \ln x_n)] =$$

$$= -[x_1^p \ln((x_1^p + \ + x_n^p)x_1^{-p}) + \ + x_n^p \ln((x_1^p + \ + x_n^p)x_n^{-p})] =$$

$$= -[x_1^p \ln(1 + x_1^{-p}(x_1^p + \ + x_n^p)) + \ + x_n^p \ln(1 + x_n^{-p}(x_1^p + \ + x_n^p))] < 0,$$

что означает, что функция F убывает по p.

Отметим, что здесь проявляется существенное различие между функцией $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и указанной во введении функцией $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Последняя возрастает (а не убывает!) по p – см. [5], Theorem 16, pp.26-27.

2.3. Свойства умножения

На множестве $\mathbb{R}_+$ определена обычная операция умножения $\otimes = \times$, относительно которой $\mathbb{R}_+$ является коммутативной группой.

Стандартные свойства умножения почти полностью переносятся на множество $\mathbb{X}$. Единственное препятствие состоит в том, что вряд ли можно считать $\mathbb{0}$ и $\mathbb{G}$ взаимно обратными элементами.

2.3.1. Ассоциативность.

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$$

2.3.2. Существование единицы $\mathbb{1} = 1$.

$$x \otimes \mathbb{1} = x$$

$$\mathbb{1} \otimes x = x$$

2.3.3. Поглощение нуля и поглощение бесконечного элемента.

$$x \otimes \mathbb{0} = \mathbb{0}$$

$$x \otimes \mathbb{G} = \mathbb{G}$$

2.3.4. Умножение коммутативно.

$$x \otimes y = y \otimes x$$

2.3.5. Существование обратного. Для x, отличного от $\mathbb{0}$ и от $\mathbb{G}$, обратным является x^{-1}:

$$x^{-1} \otimes x = \mathbb{1}$$

$$x \otimes x^{-1} = \mathbb{1}$$

2.3.6. Дистрибутивность умножения. Дистрибутивность умножения слева:

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes (y^p + z^p)^{\frac{1}{p}} = [(xy)^p + (xz)^p]^{\frac{1}{p}} = x \otimes y \oplus x \otimes z$$

Дистрибутивность умножения справа:

$$(x \oplus y) \otimes z \;=\; z \otimes (x \oplus y) \;=\; z \otimes x \oplus z \otimes y \;=\; x \otimes z \oplus y \otimes z$$

Из дистрибутивности умножения следует, что $x \oplus x = x \otimes (1 \oplus 1) = 2^{\frac{1}{p}}x$. При сложении k экземпляров числа x действует формула $x \oplus x \oplus \cdots \oplus x = x \otimes (1 \oplus 1 \oplus \cdots \oplus 1) = k^{\frac{1}{p}}x$. Это легко доказать по индукции: $k^{\frac{1}{p}} \otimes x \oplus x = x \otimes (k^{\frac{1}{p}} \oplus 1) = (k+1)^{\frac{1}{p}}x$.

В частности, при $p = 1$ действует обычное сложение $\oplus = +$, при котором $x \oplus x \oplus \cdots \oplus x = kx$. При $p = 2$ результатом сложения является величина диагонали k-мерного куба: $x \oplus x \oplus \cdots \oplus x = \sqrt{kx^2} = \sqrt{k} \cdot x$.

2.4. Решение уравнения $x \oplus a = b$ и операция вычитания

Уравнение $x \oplus a = b$ перепишем как $(x^p + a^p)^{\frac{1}{p}} = b$. Возведем обе части в степень p :

$$x^p + a^p = b^p$$

и выразим

$$x^p = b^p - a^p.$$

Если $b^p - a^p > 0$, то

$$x = (b^p - a^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Условие $b^p - a^p > 0$ при $p \in \mathbb{R}_+$ эквивалентно $b > a$, а при $p \in \mathbb{R}_-$ – эквивалентно $b < a$.

Кроме того, уравнение имеет решение при $b = a$. В таком случае, $x = \mathbb{0}$, т.е. $x = 0$ при $p \in \mathbb{R}_+$ и $x = -\infty$ при $p \in \mathbb{R}_+$.

Таким образом, уравнение $x \oplus a = b$ имеет решение при $b \geq a$, если $p \in \mathbb{R}_+$, и при $b \leq a$, если $p \in \mathbb{R}_+$.

Можно записать решение уравнения, как

$$x = b \ominus a,$$

где операция $\ominus$ определяется аналогично введенной выше операции $\oplus$, но с использованием обычного вычитания вместо обычного сложения:

$$b \ominus a = (b^p - a^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Имеют место равенства

$$x \ominus \mathbb{O} = x,$$

$$\mathbb{G} \ominus x = \mathbb{G}.$$

Приведем примеры разности. Числа s и t из $\mathbb{R}_+$ называются сопряженными показателями, если $1/s + 1/t = 1$. Для такой пары при значении параметра $q = -1$ выполняются равенства $s \oplus t = 1$, $t = 1 \ominus s$. Другой пример: если a, b – катеты прямоугольного треугольника, c – гипотенуза, то при значении параметра $q = 2$ выполняются равенства $a \oplus b = c$, $b = c \ominus a$.

2.5. Отношение порядка

Далее через $\leq$ будем обозначать обычное отношение порядка на множестве $\mathbb{X}$, а через $\preceq$ – вводимое нами отношение порядка.

Определим отношение линейного порядка на $\mathbb{X}$ таким образом, что неравенство $b \succeq a$ выполняется в том и только в том случае, когда определена операция $b \ominus a$.

В случае $p \in \mathbb{R}_+$ это приводит нас к обычному порядку на $\mathbb{X}$:

$$x \preceq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq y.$$

При этом минимальным элементом множества $\mathbb{X}$ является $\mathbb{O} = 0$, а максимальным элементом является $\mathbb{G} = +\infty$.

В случае $p \in \mathbb{R}_-$ порядок на $\mathbb{X}$ – противоположный обычному:

$$x \preceq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \geq y.$$

При этом минимальным элементом множества $\mathbb{X}$ является $\mathbb{O} = +\infty$, а максимальным элементом является $\mathbb{G} = 0$.

В обоих случаях, при $p \in \mathbb{R}_+$ и при $p \in \mathbb{R}_-$, порядок – линейный.

Имеет место монотонность сложения: если $x \preceq y$, то $x \oplus z \preceq y \oplus z$.

Доказательство. Пусть $p \in \mathbb{R}_+$. Тогда $x \leq y$, $x^p \leq y^p$. Отсюда получаем $x^p + z^p \leq y^p + z^p$, $(x^p + z^p \leq y^p + z^p)^{\frac{1}{p}}$, т.е. $x \oplus z \preceq y \oplus z$.

Пусть $p \in \mathbb{R}_-$. Тогда $x \geq y$, $x^p \leq y^p$. Отсюда $x^p + z^p \leq y^p + z^p$, $(x^p + z^p \geq y^p + z^p)^{\frac{1}{p}}$, т.е. $x \oplus z \preceq y \oplus z$.

Следствием только что доказанного является неравенство

$$x \preceq x \oplus y.$$

Докажем, что $x \preceq y$ в том и только в том случае, если $x \oplus y = \delta y$, где $1 \preceq \delta \preceq 2^{\frac{1}{p}}$.

Доказательство. Если $p \in \mathbb{R}_+$, то речь идет о неравенстве $x \leq y$. Оно эквивалентно равенству $x = \nu y$, где $0 < \nu \leq 1$. Тогда

$$x \oplus y = (\nu \oplus 1) \otimes y = (\nu^p + 1)^{\frac{1}{p}} y.$$

Здесь $1 < 1 + \nu^p \leq 2$, следовательно, $\delta = \nu \oplus 1 \leq 2^{\frac{1}{p}}$.

Если $p \in \mathbb{R}_-$, то неравенство принимает вид $x \geq y$, что эквивалентно равенству $x = \nu y$, где $\nu \geq 1$. Снова

$$x \oplus y = (\nu^p + 1)^{\frac{1}{p}} y.$$

Здесь $1 < 1 + \nu^p \leq 2$, следовательно, $1 \geq \delta = (1 + \nu^p)^{\frac{1}{p}} \geq 2^{\frac{1}{p}}$.

В обоих случаях $1 \preceq \delta \preceq 2^{\frac{1}{p}}$.

2.6. Об уравнениях $\max\{a, x\} = b$ и $\min\{a, x\} = b$

Посмотрим на уравнение $x \oplus a = b$ и его решение $x = b \ominus a$ в предельных случаях $p \to -\infty$ и $p \to +\infty$.

Пусть $b \succ a$. Если $p \in \mathbb{R}_+$, это означает $b > a$, тогда

$$b \ominus a = b(1 - (\frac{a}{b})^p)^{\frac{1}{p}} \to \max\{a, b\}$$

при $p \to -\infty$. Это соответствует тому, что решением уравнения $\max\{a, x\} = b$ при $a < b$ является $x = b$.

Если $p \in \mathbb{R}_-$, то $b \succ a$ означает $b < a$, тогда

$$b \ominus a \to \min\{a, b\}$$

при $p \to +\infty$. Это соответствует тому, что решением уравнения $\min\{a, x\} = b$ при $a > b$ является $x = b$.

2.7. Квадратные уравнения

Наличие операций $\oplus$, $\ominus$ и $\otimes$ позволяет определить многочлены и находить решения уравнений при тех сочетаниях параметров, которые не выводят из множества $\mathbb{X}$. В частности, решением квадратного уравнения $a \otimes x^2 \oplus b \otimes x \ominus c = \mathbb{0}$, как легко проверить является

$$x = (2^{\frac{1}{p}} \otimes a)^{-1} \otimes [(b^2 \oplus 4^{\frac{1}{p}} \otimes ac)^{\frac{1}{2}} \ominus b],$$

если это выражение неотрицательное.

Аналогия с решением обычного квадратного уравнения усиливается, если заметить, что $2^{\frac{1}{p}} = 1 \oplus 1$, $4^{\frac{1}{p}} = 2 \oplus 2, .$

Квадратное уравнение $a \otimes x^2 \oplus b \otimes x \oplus c = \mathbb{0}$ при $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ не имеет решения в $\mathbb{X}$. Если бы решение существовало, оно имело бы вид

$$x = (2^{\frac{1}{p}} \otimes a)^{-1} \otimes [(b^2 \ominus 4^{\frac{1}{p}} \otimes ac)^{\frac{1}{2}} \ominus b],$$

что выводит нас из $\mathbb{X}$.

2.8. Метрика на $\mathbb{X}$

В качестве расстояния между элементами множества $\mathbb{X}$ можно использовать модуль разности $|x \ominus y|$, который определим, как $x \ominus y$, если $x \succeq y$, и $y \ominus x$, если $y \succeq x$. Обратим внимание, что модуль разности определен и в тех случаях, когда не определена сама разность. Модуль разности может служить метрикой на $\mathbb{X}$, если пользоваться при сравнении расстояний операцией $\oplus$ и порядком $\preceq$.

Проверим выполнение неравенства треугольника в форме

$$| \; x \ominus y \; | \preceq | \; x \ominus z \; | \oplus | \; z \ominus y \; | \; .$$

Это неравенство переписывается как

$$| \; x^p - y^p \; |^{\frac{1}{p}} \preceq (| \; x^p - z^p \; | + | \; z^p - y^p \; |)^{\frac{1}{p}}$$

и в каждом из случаев $p \in \mathbb{R}_-$ и $p \in \mathbb{R}_+$ сводится к

$$| \; x^p - y^p \; | \leq | \; x^p - z^p \; | + | \; z^p - y^p \; | \; .$$

Последнее неравенство справедливо, поскольку представляет собой обычное неравенство треугольника для элементов $\mathbb{X}$, являющихся p-ми степенями элементов x, y, z.

2.9. Линейная и выпуклая комбинации элементов из $\mathbb{X}$

Если $x_1, \ldots, x_k$ – элементы $\mathbb{X}$, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – элементы $\mathbb{R}_+$, то можно определить линейную комбинацию элементов $x_1, \ldots, x_k$, как

$$\lambda_1 \otimes x_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_k \otimes x_k.$$

Частным случаем линейной комбинации является выпуклая комбинация. Определим выпуклую комбинацию элементов $x_1, \ldots, x_k$ из $\mathbb{X}$ как

$$\lambda_1 \otimes x_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_k \otimes x_k,$$

где $\lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_k = 1$. Введем обозначение $\alpha_i = \lambda_i^p$, где $i = 1, \ldots, k$. Тогда выпуклая комбинация записывается, как $(\alpha_1 v_1^p + \alpha_2 v_2^p + \cdots + \alpha_k v_k^p)^{\frac{1}{p}}$ при $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$.

Таким образом, описанная выше функция $G(x_1, \ldots, x_n)$ – это не что иное, как выпуклая комбинация элементов $x_1, \ldots, x_n$, тогда как функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ – сумма этих элементов.

Выпуклая комбинация элементов заключена между их минимумом $\min\{x_1, \ldots, x_k\}$ и максимумом $\max\{x_1, \ldots, x_k\}$. При фиксированных α_i, $i = 1, \ldots, k$ (и при переменных $\lambda_i = \alpha_i^p$) выпуклая комбинация возрастает по параметру p, изменяясь от $\min\{x_1, \ldots, x_n\}$ при $p \to -\infty$ до $\max\{x_1, \ldots, x_n\}$ при $p \to +\infty$.

Имеет место идемпотентность: если все k элементов равны x: $x_1 = ... = x_k = x$, то и их выпуклая комбинация равна x. Легко показать, что всякая точка интервала (a, b) в $\mathbb{R}_+$ является выпуклой комбинацией граничных точек.

3. Действия над векторами

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – векторы с элементами из множества $\mathbb{X}$. Множество таких векторов обозначим $\mathbb{X}^n$. Определим сумму векторов как вектор $x \oplus y = (x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, \ldots, x_n \oplus y_n)$. Очевидно, что если $\mathbf{0} = (\mathbb{0}, \mathbb{0}, \ldots, \mathbb{0})$ – нулевой вектор, $\mathbf{G} = (\mathbb{G}, \mathbb{G}, \ldots, \mathbb{G})$, и $x \neq \mathbf{0}, x \neq \mathbf{G}$, то $x \oplus \mathbf{0} = x$, $x \oplus \mathbf{G} = \mathbf{G}$. Можно проверить, что $\mathbf{0} \oplus \mathbf{G} = \mathbf{G}$.

Произведение вектора на элемент $\lambda \in \mathbb{X}$ определим как $\lambda \otimes x = (\lambda \otimes x_1, \lambda \otimes x_2, \ldots, \lambda \otimes x_n)$.

3.1. Линейная и выпуклая комбинации векторов

Если $v_1, \ldots, v_k$ – векторы (элементы $\mathbb{X}^n$), а $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – скаляры (элементы $\mathbb{R}_+$), то можно определить линейную комбинацию векторов, как вектор

$$\lambda_1 \otimes v_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_k \otimes v_k.$$

Любой вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, элементы которого не равны $\mathbb{0}$ и $\mathbb{G}$, представляется единственным образом как линейная комбинация единичных векторов $(1, \mathbb{0}, \ldots, \mathbb{0}), (\mathbb{0}, 1, \ldots, \mathbb{0}), \ldots, (\mathbb{0}, \mathbb{0}, \ldots, 1)$; коэффициенты в этом разложении равны $a_1^{\frac{1}{p}}, a_2^{\frac{1}{p}}, \ldots, a_n^{\frac{1}{p}}$.

Если коэффициенты линейной комбинации $\lambda_1 \otimes v_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_k \otimes v_k$ таковы, что $\lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_k = 1$, то линейная комбинация называется выпуклой комбинацией.

Приведем пример. Рассмотрим в $\mathbb{X}^2$ точки (векторы) $x = (1, 3^{\frac{1}{p}})$ и $y = (5^{\frac{1}{p}}, 7^{\frac{1}{p}})$. Если поместить каждую из этих точек на координатную плоскость (u, v), то их соединяет "прямая"$v = u \oplus 2^{\frac{1}{p}}$. Легко проверить, что на этой же "прямой"лежит любая выпуклая комбинация $\lambda_1 x \oplus \lambda_2 y$, где $\lambda_1 \oplus \lambda_2 = 1$. При $p = 1$ соединяющим точки "отрезком"служит действительно отрезок прямой, тогда как, например, при $p = \frac{1}{2}$ в роли "прямой"выступает парабола, а при $p = 2$ – гипербола.

3.2. Скалярное произведение

Скалярным произведением двух векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ назовем элемент $\mathbb{X}$, равный $\langle x, y\rangle = x_1 \otimes y_1 \oplus x_2 \otimes y_2 \oplus \cdots \oplus x_n \otimes y_n$. Так определенное скалярное произведение обладает привычными свойствами:

$$\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle,$$

$$\langle x_1 \oplus x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle \oplus \langle x_2, y\rangle,$$

$$\langle \lambda \otimes x, y\rangle = \langle x, \lambda \otimes y\rangle = \lambda \otimes \langle x, y\rangle$$

Эти свойства легко проверяются. Например,

$$\langle \lambda \otimes x, y\rangle = \lambda \otimes x_1 \otimes y_1 \oplus \cdots \oplus \lambda \otimes x_n \otimes y_n =$$
$$= \lambda \otimes (x_1 \otimes y_1 \oplus \cdots \oplus x_n \otimes y_n) = \lambda \otimes (x \oplus y).$$

Скалярное произведение убывает по параметру p. А именно, пусть скалярные произведения $\langle x, y\rangle_r, \langle x, y\rangle_s$ определены, соответственно, при значениях параметра r и s, где $r < s$. Пусть эти скалярные произведения не равны $\mathbb{0}$ или $\mathbb{G}$. Тогда $\langle x, y\rangle_r > \langle x, y\rangle_s$.

Чтобы убедиться в этом, перепишем неравенство в форме

$$(x_1 \otimes y_1 \oplus \cdots \oplus x_n \otimes y_n)_r > (x_1 \otimes y_1 \oplus \cdots \oplus x_n \otimes y_n)_s.$$

Это неравенство прямо следует из свойства монотонности суммы по параметру.

Из монотонности скалярного произведения по параметру вытекает следующее обобщение неравенства Гельдера. Предположим, что $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ – векторы, с элементами из $\mathbb{X}$; $p > 1, q > 1, s \geq 1$ – числа, причем $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, т.е. p и q – сопряженные показатели. Пусть скалярное произведение $\langle a, b\rangle_s$ определено со значением параметра s, сумма $(a_1 \oplus \cdots \oplus a_n)_p$ определена со значением параметра p, а сумма $(b_1 \oplus \cdots \oplus b_n)_q$ – со значением параметра q. Тогда

$$\langle a, b\rangle_s \leq (a_1 \oplus \cdots \oplus a_n)_p \otimes (b_1 \oplus \cdots \oplus b_n)_q.$$

Само неравенство Гельдера – это рассматриваемое неравенство при $s = 1$. Из монотонности скалярного произведения по параметру следует, что всегда $\langle a, b\rangle_s \leq \langle a, b\rangle_1$, и, значит, из неравенства Гельдера следует его обобщение.

3.3. Норма

Определим норму вектора как $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$. Таким образом, $\|x\| = (x_1^{2p} + ...x_n^{2p})^{\frac{1}{2p}}$. В случае обычного сложения $\oplus = +$, т.е. при $p = 1$, $\|x\|$ – это стандартная евклидова норма. При $p = 1/2$ норма – это $x_1 + \cdots + x_n$. В пределе при $p \to +\infty$ норма превращается в $\max\{x_1, \ldots, x_n\}$. Это три классические нормы. В пределе при $p \to -\infty$ норма – это $\min\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Выполняются следующие свойства нормы: $\|x\| \succeq \mathbb{0}$; $\|x\| = \mathbb{0}$ в том и только в том случае, если $x = \mathbb{0}$; $\|\lambda \otimes x\| = \lambda \otimes \|x\|$; неравенство треугольника в форме $\|x \oplus y\| \preceq \|x\| \oplus \|y\|$.

Проверим не очевидные из этих свойств. Пусть $\|x\| = \mathbb{0}$. Это значит, что $(x_1^{2p} + ...x_n^{2p})^{\frac{1}{2p}} = \mathbb{0}$. Если $p \in \mathbb{R}_+$, то, очевидно, $x_1^{2p} + ...x_n^{2p} = 0$. Следовательно, $x_1^{2p} = ... = x_n^{2p} = 0$, и значит $x_1 = ... =$

$x_n = 0$, т.е. $x = \mathbb{0}$. Если же $p \in \mathbb{R}_-$, то $(x_1^{2p} + ...x_n^{2p})^{\frac{1}{2p}} = +\infty$. Следовательно, $x_1^{2p} = ... = x_n^{2p} = 0$. Отсюда следует $x_1 = ... = x_n = +\infty$, т.е. $x = \mathbb{0}$.

Проверим выполнение неравенства треугольника. Оно может быть записано, как

$$[(x_1^p+y_1^p)^2+\cdots+(x_n^p+y_n^p)^2]^{\frac{1}{2p}} \preceq [(x_1^{2p}+\cdots+x_n^{2p})^{\frac{1}{2}}+(y_1^{2p}+\cdots+y_n^{2p})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{p}}.$$

В каждом из случаев $p \in \mathbb{R}_-$ и $p \in \mathbb{R}_+$ последнее неравенство сводится к

$$[(x_1^p+y_1^p)^2+\cdots+(x_n^p+y_n^p)^2]^{\frac{1}{2}} \leq (x_1^{2p}+\cdots+x_n^{2p})^{\frac{1}{2}}+(y_1^{2p}+\cdots+y_n^{2p})^{\frac{1}{2}},$$

т.е. к неравенству Минковского.

Заметим, что неравенство треугольника в "классической"форме $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ выполняется только при $2p > 1$.

Поскольку норма $\|x\|$ представляет собой сумму $(x_1 \oplus \cdots \oplus x_n)_{2p}$ при значении параметра, равном $2p$, из монотонности суммы (и скалярного произведения) по параметру следует монотонность нормы по параметру. А именно, если нормы $\|x\|_r$ и $\|x\|_s$ определены, соответственно, при значениях параметра r и s, где $r < s$, то $\|x\|_r \geq \|x\|_s$.

Отсюда, в частности, следует, что при любом значении параметра, $\|x\| \preceq x_1 \oplus ... \oplus x_n$. Другим следствием монотонности нормы являются неравенства между классическими нормами; например, $\|x\|_1 \leq \|x\|_{\frac{1}{2}}$ означает $(\sum_{j=1}^n x_j^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{j=1}^n |x_j|$.

Также, выполняется неравенство Коши в форме $\langle x, y\rangle \preceq \|x\| \otimes \|y\|$. Оно следует из обычного неравенства Коши, примененного к векторам $(x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p)$, $(y_1^p, y_2^p, \ldots, y_n^p)$.

Если в нашей версии неравенства Коши положить $y = (1, \ldots, 1)$, то получим неравенство $n^{-\frac{1}{p}}(x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_n) \leq \|x\|$. При $p = 1$ это известное неравенство $n^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^n |x_j| \leq (\sum_{j=1}^n x_j^2)^{\frac{1}{2}}$.

3.4. Метрика на $\mathbb{X}^n$

Чтобы определить на $\mathbb{X}^n$ метрику, введем понятие вектора различия векторов x, y; это вектор $\delta_{xy} = (|x_1 \ominus y_1|, |x_2 \ominus y_2|, \ldots, |x_n \ominus y_n|)$. Определим метрику

$$\rho(x, y) = \|\delta_{xy}\| = \langle \delta_{xy}, \delta_{xy}\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом,

$$\rho(x,y) = [(x_1^p - y_1^p)^2 + (x_2^p - y_2^p)^2 + \cdots + (x_n^p - y_n^p)^2]^{\frac{1}{2p}}.$$

Видим, что $\rho(x,y)^p$ представляет собой евклидово расстояние между точками $x^p = (x_1^p, \ldots, x_n^p)$ и $y^p = (y_1^p, \ldots, y_n^p)$.

Очевидно, что $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; $\rho(x,y) = \rho(y,x)$. Проверим неравенство треугольника в форме $\rho(x,y) \preceq \rho(x,z) \oplus \rho(z,y)$. Оно эквивалентно неравенству $\rho(x,y)^p \leq \rho(x,z)^p + \rho(z,y)^p$, которое, очевидно, верно, поскольку представляет собой неравенство треугольника для евклидовых расстояний между точками x^p, y^p и $z^p = (z_1^p, \ldots, z_n^p)$.

4. Действия над матрицами

Пусть A – квадратная матрица размера n с элементами $a_{ij} \in \mathbb{X}$; x – вектор столбец с элементами $x_i \in \mathbb{X}$. Произведением $A \otimes x$ матрицы на вектор называется вектор b с элементами $b_i = a_{i1} \otimes x_1 \oplus a_{i2} \otimes x_2 \oplus \cdots \oplus a_{in} \otimes x_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Число μ называется собственным числом, а вектор $\mathbf{x}$ – собственным вектором, если $A \otimes \mathbf{x} = \mu \otimes \mathbf{x}$. Аналогично определяются произведение вектора-строки на матрицу и левый собственный вектор (строка).

Если A и B – две квадратные матрицы одинакового размера n, с элементами a_{ij}, b_{ij} $i, j = 1, 2, \ldots, n$, то их произведением называется матрица C с элементами $c_{ij} = a_{i1} \otimes b_{1j} \oplus a_{i2} \otimes b_{2j} \oplus \cdots \oplus a_{in} \otimes b_{nj}$. Легко проверить, что произведение матриц обладает ассоциативностью и коммутативностью. Степень k квадратной матрицы A – это произведение k экземпляров матрицы: $A^k = A \otimes A \otimes ... \otimes A$.

4.1. Динамика и экономические приложения

Пусть A – квадратная матрица размера n; x_0 – заданный начальный n-мерный вектор. Рассмотрим динамическую систему

$$x(t+1) = A \otimes x(t), t = 0, 1, 2, ...$$

В эквивалентной форме эта система может быть записана как

$$x(t) = A^t \otimes x(0), t = 0, 1, 2, ...$$

Обозначим через $\mathbf{x}(t)$ вектор, компонентами которого являются степени $x_i(t)^p$ компонентов вектора $x(t)$; через $\mathbf{A}$ – матрицу с элементами $\mathbf{a}_{ij} = a_{ij}^p$. Тогда

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), t = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t\mathbf{x}(0), t = 0, 1, 2, ...$$

Предположим, что матрица A неразложимая и примитивная; тогда этими свойствами обладает и матрица $\mathbf{A}$. Согласно теореме Перрона-Фробениуса, фробениусово (т.е. наибольшее по модулю) собственное число λ матрицы $\mathbf{A}$ положительно; соответствующий (фробениусов) собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$ состоит из положительных элементов; и имеет место сходимость

$$\lambda^{-t}\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}$$

при $t \to +\infty$. Более конкретно, $\mathbf{x}$ – это тот из семейства пропорциональных друг другу фробениусовых собственных векторов, для которого $\mathbf{p}\mathbf{x} = \mathbf{p}\mathbf{x}(0)$, где $\mathbf{p}$ – левый фробениусов собственный вектор (какой-нибудь из семейства пропорциональных векторов).

Следовательно,

$$\mu^{-t}x(t) \to x,$$

при $t \to +\infty$, где $\mu = \lambda^{\frac{1}{p}}$, $x_i(t) = \mathbf{x}_i(t)^{\frac{1}{p}}, i = 1, 2, \ldots, n$.

Проверим, что, в смысле операций $\oplus$ и $\otimes$, число μ является собственным числом матрицы A, а x – собственным вектором, т.е. что имеет место $A \otimes x = \mu x$. Действительно, последнее равенство означает, что $\langle a_i, x\rangle = \mu x_i$ для каждой строки a_i $(i = 1, \ldots, n)$ матрицы A. Возведение обеих частей в степень p дает эквивалентные равенства $a_{i1}^p x_1^p + \cdots + a_{in}^p x_n^p = \lambda x_i^p$, $i = 1, \ldots, n$, т.е. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

В работе [6] проводится исследование зависимости темпа роста (собственного числа) μ от параметра p. Случаи $p \in \mathbb{R}_-$ и $p \in \mathbb{R}_+$ интерпретируются, соответственно, как высокая и низкая степень дополняемости деятельности экономических агентов.

Данная динамическая система в предельном случае при $p \to -\infty$ превращается в

$$x_i(t) = \min_j a_{ij}x_j(t).$$

Этот предельный тропический случай подробно исследован в работе [3]. В работе [7] эта система используется в качестве модели экономического развития с взаимными положительными экстерналиями – см. также [1], раздел 4.10.2. В этой модели имеется n экономических агентов. Состояние каждого агента i в период времени t описывается одним числом $x_i(t)$, которое называется значением агента. Это может быть, например, прибыль, доход, богатство, мера знания и т.п. Начальные значения агентов, $x_i(0)$, заданы. Развитие моделируется как рост во времени значений агентов при следующих ограничениях

$$x_i(t+1) \leq a_{ii}x_i(t), i = 1, \ldots, n$$

$$x_i(t+1) \leq a_{ij}x_j(t), j = 1, \ldots, n; j \neq i; i = 1, \ldots, n.$$

Матрица коэффициентов A задана. Неравенства первого типа описывают собственные ограничения развития агента i. Неравенства второго типа описывают ограничения положительных экстерналий, которые создаются другими агентами и используемых агентом i. Под экстерналиями понимаются неценовые связи и неприобретаемые на рынке, но используемые агентом блага. Эти ограничения связаны со степенью развития других агентов; например, может быть недостаток тех или иных услуг, например, банковских, медицинских, недостаток информации, другие агенты могут быть ненадежны как поставщики (например, наличие сбоев электроснабжения) и т.п.

Обобщение модели развития с положительными экстерналиями применительно к динамике агломераций предлагается в работе [9]. Там изучается модель с двумя местоположениями (центр и периферия) и двумя типами агентов: стационарные и свободные. Свободные агенты могут менять местоположение и давать трансферт стационарным агентам в данном местоположении. Рассматривается динамика такой системы.

4.2. Возможность отличия характера динамики в предельном тропическом случае

Важный факт состоит в том, что характер динамики системы может радикально отличаться в предельном случае $p \to -\infty$ по сравнению со случаем $p \in \mathbb{R}_-$ и в предельном случае $p \to +\infty$ по сравнению со случаем $p \in \mathbb{R}_+$.

Приведем простой пример. Пусть квадратная матрица A размера 2 имеет элементы $a_{11} = a$, $a_{12} = b$, $a_{21} = c$, $a_{22} = \mathbb{0}$, где $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Тогда матрица p-х степеней $\mathbf{A}$ имеет элементы $\mathbf{a}_{11} = a^p$, $\mathbf{a}_{12} = b^p$, $\mathbf{a}_{21} = c^p$, $\mathbf{a}_{22} = 0$. Матрица $\mathbf{A}$ неразложима и примитивна; ее фробениусово собственное число равно

$$\lambda = \frac{a^p + \sqrt{a^{2p} + 4b^p c^p}}{2}.$$

Для системы $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ имеет место сходимость последовательности $\lambda^{-t}\mathbf{x}(t)$ к фробениусову собственному вектору $\mathbf{x}$. Соответственно, последовательность $\mu^{-t}x(t)$ сходится к собственному вектору x.

При $p \to -\infty$ собственное число μ сходится к тропическому собственному числу:

$$\mu \to \min\{a, \sqrt{bc}\}.$$

Действительно, если $a < \sqrt{bc}$, то запишем λ как

$$\lambda = \frac{a^p(1 + \sqrt{1 + 4(bc/a^2)^p})}{2}.$$

Поскольку $bc/a^2 > 1$, при $p \to -\infty$

$$\lambda \to a^p,$$

$$\mu \to a.$$

Если $a > \sqrt{bc}$, то представляем λ в виде

$$\lambda = \sqrt{b^p c^p}\frac{(\frac{a}{\sqrt{bc}})^p + \sqrt{(\frac{a}{\sqrt{bc}})^{2p} + 4}}{2}.$$

Поскольку $a/\sqrt{bc} > 1$, при $p \to -\infty$

$$\lambda \to \sqrt{b^p c^p},$$

$$\mu \to \sqrt{bc}.$$

Однако, хотя, как видим, тропическое собственное число наследуется от обычного собственного числа, при $a > \sqrt{bc}$ в тропическом случае характер динамики совершенно иной: последовательность $\mu^{-t}x(t)$ не сходится к собственному вектору, а выходит на цикл порядка 2.

Аналогично, в пределе при $p \to +\infty$, рассматриваемая динамическая система превращается в

$$x_i(t) = \max_j a_{ij}x_j(t).$$

В нашем примере можно убедиться, что собственное число сходится к тропическому собственному числу:

$$\mu \to \max\{a, \sqrt{bc}\}.$$

При $a > \sqrt{bc}$ характер динамики в тропическом случае в пределе при $p \to +\infty$ – тот же самый, что и при $p < +\infty$: траектории сходятся к лучу, соответствующему фробениусову собственному вектору; тогда как при $a < \sqrt{bc}$ характер динамики в тропическом случае иной: траектории выходят на предельный цикл порядка 2.

Список литературы

[1] Кривулин Н.К. Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб: Издательство С.-Петерб. ун-та, 2009. 256 с.

[2] Матвеенко А.В., Полякова Е.В. Моделирование изменения технологий и потребительских предпочтений // Вестник Костромского государственного университета имени Н.А.Некрасова. 2012. Т. 18, № 6. С. 159-162.

[3] Матвеенко В.Д. Оптимальные траектории схемы динамического программирования и экстремальные степени неотрицательных матриц // Дискретная математика. 1990. Т. 2, в. 1. С. 59-71.

[4] Grossman G.M., Maggi G. Diversity and trade // American Economic Review. 2000. Vol. 90, no. 5, P. 1255-1275.

[5] Hardy G., Littlewood J.E., Polya G. Inequalities, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1952. 324 p.

[6] Martemyanov Y.P., Matveenko V.D. On the dependence of the growth rate on the elasticity of substitution in a network // Int. J. of Process Management and Benchmarking. 2014. Vol. 4, no. 4. P. 475-492.

[7] Matveenko V. Development with positive externalities: the case of the Russian economy // J. of Policy Modeling. 1995. Vol. 17, no. 3. P. 207-221.

[8] Matveenko V. Anatomy of production function // Economics Bulletin. 2011. Vol. 30, no. 3. P. 1906-1913.

[9] Matveenko V. Powers of matrices with an idempotent operation and an application to dynamics of spatial agglomerations. // Tropical and idempotent mathematics / Ed. by G.L. Litvinov, V.P. Maslov, A.G. Kushner, S.N. Sergeev. Moscow: French-Russian Laboratory "J.-V.Poncelet" Moscow Center for Continuous Mathematical Education Independent University of Moscow. 2012. P. 149-155.

[10] Solow R. 1956. A contribution to the theory of economic growth // Quarterly Journal of Economics. 1956. Vol. 70, no. 1. P. 65-94.

[11] Topkis D.M. Supermodularity and complementarity. Princeton: Princeton University Press, 1998.