Мы рассматриваем области более общего вида.

Пусть область Ω_2 имеет следующий вид [2] $\Omega_2 = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные на отрезке $[a,b]$ липшицевы функции, то есть $\left|\frac{\psi(x_{t+1})-\psi(x_t)}{x_{t+1}-x_t}\right| \leqslant L_1$ и $\left|\frac{\varphi(x_{t+1})-\varphi(x_t)}{x_{t+1}-x_t}\right| \leqslant L_2$, где L_1, L_2 – const. Пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ – разбиение отрезка $[a,b]$. Положим $f_\tau(x) = \tau\psi(x) + (1-\tau)\varphi(x)$. Разобьем отрезок $[0,1]$ точками $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m = 1$ и в области Ω_2 рассмотрим сетку, задаваемую системой точек: $A(x_i, y_j) = (x_i, f_{\tau_j}(x_i))$, $i = 0,1,\ldots,n$, $j = 0,1,\ldots,m$.

Разбивая одной из диагоналей все трапеции вида $A_{ij}A_{i+1,j}A_{i,j+1}A_{i+1,j+1}$, где $i = 0,1,\ldots,n-1$, $j = 0,1,\ldots,m-1$, получим триангуляцию области Ω_2 . Предположим, что в каждой точке A_{ij}, $0 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant m$, задано значение сеточной функции u_{ij}.

Теорема. *В области Ω_2 выполняется неравенство*

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} u_{ij}^2 \leqslant C\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}\tilde{a}_{ij}^2 + \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n-1}\tilde{b}_{ij}^2\right) + \left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} u_{ij}\right)^2,$$

где $\tilde{a}_{kj} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{T_{kj}}$, $\tilde{b}_{kj} = \frac{\partial u}{\partial y}|_{T_{kj}}$, $\lambda = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n}(\psi(x_k) - \varphi(x_k))$, $C = 8\max^2[\lambda, b-a]\cdot\max\left[1, \max^2(L_1, L_2) + \frac{1}{2}\right]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-97034 р_поволжье_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдюшев А. А., Мифтахутдинов И. Х., Осипов П. П. *Проектирование непологих оболочек минимальной поверхности* // Изв. КазГАСУ. Строительные конструкции, здания и сооружения. – 2009. – № 2(12). – С. 86–92.

2. Клячин А. А. *Равномерная триангуляция плоских областей* // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ. – 2011. – № 2(15). – С. 43–49.

3. Михайленко В. Е., Ковалев С. Н. *Конструирование форм современных архитектурных сооружений.* – Киев: Будівельник, 1978. – 138 с.

А. Ю. Долгоносова, Н. И. Жукова

Нижегородский государственный университет,

dolgonosova@rambler.ru, n.i.zhukova@rambler.ru

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПОДХОДЫ К ПОНЯТИЮ СЛОЕНИЯ С ТРАНСВЕРСАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

Будем обозначать через (M,F) гладкое слоение коразмерности q на n-мерном многообразии M, а через $\mathfrak{X}_F(M)$ – модуль гладких векторных полей (над алгеброй гладких функций), касательных к этому слоению. Предположим, что слоение (M,F) задано N-коциклом $\{U_i, f_i, \{k_{ij}\}\}_{i,j\in J}$.

Если на многообразии N существует такая линейная связность ∇^N, что каждый локальный диффеоморфизм k_{ij} является изоморфизмом линейных свзностей, индуцированных связностью ∇^N на открытых подмножествах $f_i(U_i \cap U_j)$ и $f_j(U_i \cap U_j)$, то мы говорим, что (M,F) — *слоение с трансверсальной линейной связностью*, заданное (N,∇^N)-коциклом $\{U_i, f_i, \{k_{ij}\}\}_{i,j\in J}$.

Напомним, что векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$ называется *слоеным* или базовым, если для любого $Y \in \mathfrak{X}_F(M)$ скобка Ли $[X,Y]$ принадлежит $\mathfrak{X}_F(M)$ [1].

Линейная связность ∇ на M называется *проектируемой относительно слоения* (M,F), если на N существует такая линейная связность ∇^0, что каждая субмерсия $f: U \to V$ из N-коцикла, определяющего (M,F), удовлетворяет равенству

$$f_*(\nabla_{X_U} Y_U) = \nabla^0_{f_*(X_U)} f_*(Y_U)$$

для любых слоеных векторных полей X, Y на M.

Гладкое распределение $\mathfrak{N}$ на многообразии линейной связности (M,∇) называется *геодезически инвариантным* [2], если для любых $x \in M$ и $X \in \mathfrak{N}_x$ геодезическая $\gamma_X(s)$, удовлетворяющая начальным условиям $\gamma_X(0) = x$ и $\dot{\gamma}_X(0) = X$, является интегральной кривой распределения $\mathfrak{N}$.

Обозначим через H группу Ли $GL(R,q)$, а через $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(R,q)$ ее алгебру Ли. Пусть $\pi : P \to M$ — проекция расслоения трансверсальных реперов для слоения (M,F). Тогда $P(M,H)$ — главное H-расслоение. Рассмотрим произвольную связность Q в этом H-расслоении, то есть, q-мерное H-инвариантное распределение на многообразии P. При этом на P определена $\mathfrak{h}$-значная 1-форма связности ω. Будем говорить, что слоение (M,F) является *слоением с трансверсально проектируемой линейной связностью в смысле Молино* [1], если для любого векторное поля X, касательного к слоению (M,F), выполняются следующие два равенства:

$$1)\, i_X(\omega) = 0, \quad 2)\, i_X(d\omega) = 0,$$

то есть, если ω и $d\omega$ — базовые формы.

Теорема. *Пусть (M,F) — гладкое слоение коразмерности q на n-мерном многообразии M. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

1) *(M,F) — слоение с трансверсальной линейной связностью, заданное (N,∇^N)-коциклом $\{U_i, f_i, \{k_{ij}\}\}_{i,j\in J}$;*

2) *(M,F) — слоение с трансверсально проектируемой линейной связностью в смысле Молино;*

3) *для любого q-мерного распределения $\mathfrak{M}$, трансверсального слоению (M,F), на многообразии M существует трансверсально проектируемая линейная связность $\nabla^{\mathfrak{M}}$, относительно которой оба распределения $\mathfrak{M}$ и TF геодезически инвариантны.*

Предложение. *Линейная связность $\nabla^{\mathfrak{M}}$, удовлетворяющая условиям предыдущей теоремы, не имеет кручения тогда и только тогда, когда распределение $\mathfrak{M}$ интегрируемо.*

Замечание. *Построенная нами специальная линейная связность $\nabla^{\mathfrak{M}}$ существенно использовалась при задании структуры бесконечномерного многообразия, моделируемого на LF-пространствах, в группе автоморфизмов слоения (M,F) с трансверсальной линейной связностью* [3].

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2012 – 2013 годы” (проект № 14.B37.21.0361) и НИР по заданию Минобрнауки РФ (проект № 1.1907.2011).

ЛИТЕРАТУРА

1. Molino P. *Riemannian foliations.* – Progress in Math. Boston.: Birkhauser, 1988. – 339 p.

2. Lewis A. D. *Affine connections and distributions with applications to nonholonomic mechanics* // Rep. Math. Phys. – 1998. – V. 42. – P. 135–164.

3. Zhukova N. I., Dolgonosova A. Yu. *The automorphism groups of foliations with transverse linear connection* // Cent. Eur. J.

Math. – 2013. – V. 11(12). – P. 2076–2088. DOI: 10.2478/s11533-013-0307-8.

А. А. Евсеева

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
aleksandra25_10@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ ИГР

Игры издавна занимали одно из важных мест в жизни детей. Каждый школьник может рассказать свои собственные представления о тактике ведения игр от крестиков-ноликов и морского боя до шашек или шахмат. Но мало кто из них представляет, что именно математика объясняет: почему тот или иной шаг ведет к победе или проигрышу. На занятиях математического кружка очень полезно было бы научить ребят понимать и использовать математические методы поиска оптимальных стратегий в играх.

Игры, в которых участвуют два игрока, являются антагонистическими – выигрыш одного игрока означает проигрыш другого. Кроме того, игры также бывают с полной и неполной информацией. Примерами игр с полной информацией являются крестики-нолики, шашки или шахматы, а с неполной – морской бой, домино или карточные игры.

Для представления процесса любой игры можно использовать модель ориентированного графа или дерева, описывающего всевозможные ходы. В реальных играх деревья позиций разветвляются довольно широко, что делает поиск выигрышного хода довольно сложным. Однако если у игры существует своя определенная стратегия, то с использованием некоторых

математических законов можно попытаться "просчитать" ситуацию наперед.

Например, в основе домино лежат арифметические и цифровые законы. Морской бой обладает определенными геометрическими тонкостями. Крестики-нолики объединяют в себе и арифметические, и геометрические нюансы. Теории карточных игр и шахматам посвящено множество специализированной литературы, в которой описаны математические закономерности поиска оптимальных решений этих игр.

Помимо поиска выигрышных стратегий особый интерес вызывают математические задачи, связанные с данными играми. Полезно будет познакомить ребят с математическими этюдами, отражающими ту или иную математическую идею. Вот примеры подобных заданий:

1. Пусть в домино играют четверо, причем каждый сам за себя. Существует ли такой расклад, при котором первый игрок выигрывает, а второму и третьему не удается выложить ни одной кости? (Использование арифметических навыков.)

2. Можно ли покрыть костями домино квадрат 8×8, из которого вырезаны противоположные углы? (Используется идея "шахматного домино", т. е. раскраски доски в два цвета.)

3. Какое наименьшее число выстрелов достаточно произвести по доске карты морского боя 10×10, чтобы наверняка попасть в линкор? (Используется идея раскраски поля в 4 разных цвета.)

4. Докажите, что при правильной игре в крестики-нолики "пять в ряд" или вообще "n в ряд" – на бесконечной доске, крестикам при любом n гарантирована ничья. (Используется метод доказательства от противного.)

5. Расставьте на пустой шахматной доске восемь ферзей