Дискретная математика

том 24 выпуск 2 * 2012

УДК 519.17

О пересечении и симметрической разности семейств граничных классов для задач о раскраске и о хроматическом числе

© 2012 г. Д. С. Малышев

В работе исследуются семейства граничных классов для задач о вершинной k-раскраске и о хроматическом числе. Указано континуальное семейство классов графов, являющихся граничными одновременно для первой задачи при $k = 3$ и для второй. Для любого $k > 3$ выявлено континуальное семейство граничных классов для первой задачи, не являющихся граничными для второй. Для задачи о хроматическом числе найден граничный класс, не являющийся граничным для задачи о вершинной k-раскраске ни при каком k.

1. Введение

Данная работа является продолжением статей [1, 2], в которых для задач о раскраске исследовалась граница между «простыми» и «сложными» классами в решетке наследственных классов, то есть классов, замкнутых относительно удаления вершин. Каждый наследственный (и только наследственный) класс $\mathcal{X}$ определяется множеством своих запрещенных порожденных подграфов $\mathcal{Y}$, в этом случае принята запись $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{Y})$. Хорошо известно, что минимальное по включению множество $\mathcal{Y}$ с таким свойством существует, единственно и обозначается через $\mathrm{Forb}(\mathcal{X})$. Если $\mathrm{Forb}(\mathcal{X})$ конечно, то $\mathcal{X}$ называется конечно определенным.

Примерами конечно определенных классов являются такие классы, как множество всех графов, у которых ограничена сверху наибольшая степень вершин, или класс реберных графов. Вместе с тем, классы планарных и двудольных графов таким свойством не обладают.

Формализуем понятия «простого» и «сложного» класса. Пусть Π — какая-либо NP-полная задача на графах. Наследственный класс называется Π-простым, если задача Π для графов из этого класса полиномиально разрешима, и Π-сложным в противном случае. На протяжении данной работы предполагается, что $P \neq NP$, и это условие не включается явно в формулировки соответствующих утверждений.

Подход к выявлению границы, рассматриваемый в работах указанного цикла, основан на понятии граничного класса графов, введенного в [3] и уточненного в [4]. Значение этого понятия состоит в том, что любой конечно определенный класс графов является Π-сложным тогда и только тогда, когда он включает некоторый Π-граничный класс.

Класс $\mathcal{X}$ называется П-предельным, если существует такая бесконечная монотонно убывающая последовательность $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \ldots$ из П-сложных классов, что $\mathcal{X} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i$. Минимальный по включению П-предельный класс называется П-граничным.

В данной работе рассматриваются две задачи на графах: задача о вершинной k-раскраске (задача k-ВР) и задача о хроматическом числе (задача ХЧ). Напомним, что в первой из них для заданного графа G требуется определить, меньше ли хроматическое число графа G фиксированного натурального числа k. В задаче ХЧ заданы два параметра — граф G и натуральное число s, для которых требуется определить, меньше ли хроматическое число G числа s. Отметим, что ХЧ-простой класс — наследственный класс графов, для которого существует полиномиальный алгоритм проверки выполнения соответствующего неравенства, пригодный сразу для всех значений s.

Цель настоящей работы — изучение семейств граничных классов для задач k-ВР и ХЧ. В статье указывается континуальное семейство классов графов, являющихся одновременно 3-ВР-граничными и ХЧ-граничными. Конструктивным образом показывается, что при любом $k > 3$ существует континуальное множество k-ВР-граничных классов, ни один из которых не является ХЧ-граничным. Выявлен ХЧ-граничный класс, при любом k не являющийся k-ВР-граничным.

В работе приняты следующие обозначения и определения: $\chi(G)$ — хроматическое число графа G; $G_1 \circ G_2$ — результат умножения графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$, то есть граф $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup V_1 \times V_2)$; $\mathcal{D}$ — множество графов, являющихся реберными к графам, каждая компонента связности которых является деревом с не более чем тремя листьями; $\mathrm{co}(\mathcal{D})$ — множество дополнительных графов к графам из $\mathcal{D}$; $\mathrm{Colour}(k) = \{G\colon \chi(G) \leqslant k\}$; $\mathcal{X}^p$, $p \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, — множество порожденных подграфов графов множества $\{G \circ K_p, G \in \mathcal{X}\}$, $G \circ K_0 = G$; $\mathbb{B}_k$ — множество k-ВР-граничных классов; $\mathbb{B}$ — множество ХЧ-граничных классов.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{B}$ — П-предельный класс и существует такой конечно определенный класс $\mathcal{X}$, что $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$. Тогда для любого целого неотрицательного числа p класс $\mathcal{B}^p$ является пределом бесконечной монотонно убывающей последовательности* П*-сложных подклассов класса $\mathcal{X}^p$.*

Доказательство. Сначала докажем утверждение леммы для случая $p = 0$. Рассмотрим любую бесконечную монотонно убывающая последовательность $\{\mathcal{B}_i\}$ из П-сложных классов, сходящуюся к классу $\mathcal{B}$. Понятно, что для любого графа $G \in \mathrm{Forb}(\mathcal{X})$ существует такое натуральное число i_G, что для любого $i > i_G$ справедливо включение $\mathcal{B}_i \subseteq \mathrm{Free}(\{G\})$. Пусть i^* — наибольшее из чисел множества $\{i_G : G \in \mathrm{Forb}(\mathcal{X})\}$. Ясно, что члены последовательности $\{\mathcal{B}_i\}$, начиная с номера i^*, образуют сходящуюся к $\mathcal{B}$ бесконечную монотонно убывающую последовательность П-сложных частей класса $\mathcal{X}$.

Для доказательства леммы при $p \neq 0$ заметим, что $\mathcal{B}^p$ — предел последовательности $\{\mathcal{B}_i^p\}$, все члены которой, начиная с i^*-ого, являются подклассами $\mathcal{X}^p$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если $\mathcal{B} \in \mathbb{B}_3$ и для некоторого конечно определенного класса $\mathcal{X}$ справедливо включение $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X} \subseteq$* Colour(4)*, то $\mathcal{B} \in \mathbb{B}$.*

Доказательство. Поскольку при любом k в любом классе графов задача k-ВР полиномиально сводима к задаче ХЧ, то класс $\mathcal{B}$ — ХЧ-предельный. Покажем, что этот класс является ХЧ-граничным.

Предположим противное, тогда существует такой ХЧ-граничный класс, что $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$. Из доказательства леммы 1 следует, что в любой бесконечной монотонно убывающей последовательности ХЧ-сложных классов, сходящейся к классу $\mathcal{B}'$, имеется элемент, начиная с которого все классы — подклассы $\mathcal{X}$. Так как $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Colour}(4)$, то для любого $k \geqslant 4$ класс $\mathcal{X}$ является k-ВР-простым. Поскольку в классе всех графов задачи 1-ВР и 2-ВР полиномиально разрешимы, то в классе $\mathcal{X}$ задачи 3-ВР и ХЧ полиномиально эквивалентны. Поэтому класс $\mathcal{B}'$ — 3-ВР-предельный. Получаем противоречие с тем, что $\mathcal{B} \in \mathbb{B}_3$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любого* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}_k$ *справедливо включение* $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Colour}(k)$.

Доказательство. Предположим, что существует граф $G \in \mathcal{B} \setminus \mathrm{Colour}(k)$. Пусть $\mathcal{X}$ есть некоторый k-ВР-сложный надкласс класса $\mathcal{B}$. Тогда $G \in \mathcal{X}$. Рассмотрим класс $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \cap \mathrm{Free}(\{G\})$. Покажем, что $\mathcal{X}'$ является k-ВР-сложным.

Очевидно, что задача принадлежности любому из классов $\mathcal{X}'$ и $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}'$ для графов из $\mathcal{X}$ решается за полиномиальное время. Вместе с тем, хроматическое число любого графа из $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}'$ не меньше $k+1$, поэтому задача k-ВР для графов из этого класса решается за время $O(1)$. Таким образом, задача k-ВР для графов из класса $\mathcal{X}$ полиномиально сводится к той же задаче для графов из $\mathcal{X}'$. Поэтому $\mathcal{X}'$ — k-ВР-сложный граф.

Таким образом, сделанное предположение приводит к существованию бесконечной монотонно убывающая последовательность k-ВР-сложных подклассов класса $\mathrm{Free}(\{G\})$, имеющей своим пределом класс $\mathcal{B}$. Но тогда $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Free}(\{G\})$, что влечет противоречие. Лемма 3 доказана.

3. О некоторых граничных классах для задач о раскраске и о хроматическом числе

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{B} \in \mathbb{B}_k$, $k \geqslant 3$, *и для некоторого конечно определенного класса* $\mathcal{X}$ *справедливо включение*

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathrm{Colour}(k+1).$$

Тогда для любого натурального p *класс* $\mathcal{B}^p$ *принадлежит семейству* $\mathbb{B}_{k+p}$.

Доказательство. Поскольку класс $\mathcal{B}$ является k-ВР-предельным, то существует такая последовательность $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_2 \supseteq \ldots$, состоящая из k-ВР-сложных классов, что

$$\mathcal{B} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i.$$

Покажем, что любой класс последовательности $\{\mathcal{B}_i^p\}$ является $(k+p)$-ВР-сложным, откуда следует, что класс $\mathcal{B}^p$ является $(k+p)$-ВР-предельным.

Действительно, для произвольного графа G справедливо равенство

$$\chi(G \circ K_p) = \chi(G) + p.$$

Таким образом, неравенство $\chi(G \circ K_p) \leqslant p + k$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $\chi(G) \leqslant k$. Поэтому при любом i класс $\mathcal{B}_i^p$ является $(k+p)$-ВР-сложным.

Теперь докажем, что класс $\mathscr{B}^p$ является $(k+p)$-ВР-граничным. Предположим, что это не так. Тогда ввиду леммы 1 существует бесконечная монотонно убывающая последовательность $(k+p)$-сложных частей класса $\mathscr{X}^p$, сходящаяся к собственному подклассу класса $\mathscr{B}^p$. Назовем эту последовательность первой. Сформируем новую последовательность, которую назовем второй. Для каждого члена первой последовательности выберем все графы H, представимые в виде $G \circ K_p$. Понятно, что такое разложение графа H единственно (с точностью до изоморфизма) и что формирование графа G осуществимо за полиномиальное время. Очевидно, что все исключенные графы заведомо имеют хроматическое число, не превосходящее $k+p$. Поэтому порожденные подграфы графов G составляют k-ВР-сложный класс, являющийся членом второй последовательности. Очевидно, что вторая последовательность сходится к собственному подклассу класса $\mathscr{B}$. Получаем противоречие с его k-ВР-граничностью. Таким образом, $\mathscr{B}^p \in \mathcal{B}_{k+p}$. Теорема 1 доказана.

Теорема 1 позволяет установить континуальность множества $\mathcal{B}_k$ при любом $k \geqslant 4$. Для $k=3$ это сделано в работе [2], где указано континуальное семейство $\mathcal{F}$ 3-ВР-граничных подклассов класса $\mathrm{Deg}(4) \cap \mathrm{Free}(\{K_5\})$. Данный класс является конечно определенным, и из известной теоремы Брукса следует, что

$$\mathrm{Deg}(4) \cap \mathrm{Free}(\{K_5\}) \subseteq \mathrm{Colour}(4).$$

Поэтому из леммы 2 следует включение $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$, а из теоремы 1 следует, что при любом $k \geqslant 4$ множество $\mathcal{F}$ порождает в $\mathcal{B}_k$ континуальное подмножество. Таким образом, при любом $k \geqslant 4$ семейство $\mathcal{F}$ порождает континуальное множество k-ВР-граничных классов, каждый из которых не является ХЧ-граничным.

Вместе с тем, интересно было бы выяснить, существуют ли ХЧ-граничные классы, не являющиеся k-ВР-граничными ни при каком k. Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 2. *Класс* $\mathrm{co}(\mathscr{D})$ *принадлежит* $\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i=3}^{\infty} \mathcal{B}_i$.

Доказательство. Класс $\mathrm{co}(\mathscr{D})$ является ХЧ-граничным [5]. Покажем, что он не является s-ВР-граничным ни при каком s. Действительно, для любого s граф K_{s+1} принадлежит классу $\mathrm{co}(\mathscr{D})$ и не принадлежит классу $\mathrm{Colour}(s)$. Отсюда и из леммы 3 будет следовать, что $\mathrm{co}(\mathscr{D}) \notin \mathcal{B}_s$ для любого s. Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Малышев Д. С., О бесконечности множества граничных классов в задаче о реберной 3-раскраске. *Дискретный анализ и исследование операций* (2009) **16**, №1, 37–43.
2. Малышев Д. С., Континуальные множества граничных классов графов для задач о раскраске. *Дискретный анализ и исследование операций* (2009) **16**, №5, 41–51.
3. Alekseev V. E., On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem. *Discrete Appl. Math.* (2004) **132**, 17–26.
4. Алексеев В. Е., Малышев Д. С., Критерий граничности и его применения. *Дискретный анализ и исследование операций* (2008) **15**, №6, 3–10.
5. Малышев Д. С., *Исследование границ эффективной разрешимости в семействе наследственных классов графов*, Дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук, Нижний Новгород, 2009.

Статья поступила 19.01.2010.