Е.М.Громов

ПОСОБИЕ по математике

для подготовки к ЕГЭ

УДК 51(075)
ББК 22.1я72
Г87

Рецензент — профессор кафедры «Прикладная математика» НГТУ,
доктор физико-математических наук
профессор *А.А. Куркин*

ISBN 978-5-7598-0496-3
(Издательский дом ГУ ВШЭ)
ISBN 978-5-317-02256-3 (МАКС Пресс)

УДК 51(075)
ББК 22.1я72
Г87

Рецензент — профессор кафедры «Прикладная математика» НГТУ,
доктор физико-математических наук
профессор *А.А. Куркин*

ISBN 978-5-7598-0496-3
(Издательский дом ГУ ВШЭ)
ISBN 978-5-317-02256-3 (МАКС Пресс)

Г87 **Громов, Е. М.** Пособие по математике для подготовки к ЕГЭ [Текст] : учеб. пособие / Е. М. Громов ; Гос. ун-т — Высшая школа экономики. — М. : Изд. дом ГУ ВШЭ : МАКС Пресс, 2007. — 375, [1] с. — 1000 экз. — ISBN 978-5-7598-0496-3 (Изд. дом ГУ ВШЭ). — ISBN 978-5-317-02256-3 (МАКС Пресс)

Учебное пособие предназначено для подготовки к единому государственному экзамену по математике. По каждой из тем приведено решение типовых задач из частей А, Б и С экзаменационного задания и задачи для самостоятельного решения. Решения многих задач сопровождается иллюстративным материалом. Широко используется графический метод решения. Каждая из тем снабжена справочным материалом. В конце пособия приведены варианты для самостоятельного решения и ответы к ним.

Для учащихся 9—11-х классов средней школы.

УДК 51(075)
ББК 22.1я72

Учебное издание

Громов Евгений Михайлович

Пособие по математике для подготовки к ЕГЭ

Зав. редакцией *О.А. Шестопалова*
Редактор *М.К. Петросян*
Художественный редактор *А.М. Павлов*
Компьютерная верстка и графика: *М.А. Комарова*
Корректор *Балашова Н.А.*

Подписано в печать 17.11.2007. Формат 60×88 1/16
Усл. печ. л. 22,8. Уч.-изд. л. 15,05
Тираж 1000 экз. Заказ № 115. Изд. № 761

ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, д. 3
Тел./факс: (495) 772-95-71

Издано совместно с ООО «МАКС Пресс»
105066, г. Москва, Елоховский пр., д. 3, стр. 2.
Тел.: 939-3890, 939-3893. Тел./факс: 939-3891.

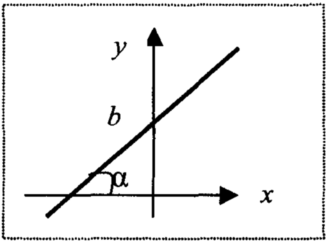
ISBN 978-5-7598-0496-3

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Уравнение прямой на плоскости: $y = kx + b$.

α *– угол между прямой и положительным направлением оси* ox, $\operatorname{tg}\alpha = k$.



Условие параллельности двух прямых: $y_1 = k_1x + b_1$ *и* $y_2 = k_2x + b_2$; $k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности двух прямых: $y_1 = k_1x + b_1$ *и* $y_2 = k_2x + b_2$; $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Прямая $y_1 = k_1x + b_1$ *выше прямой* $y_2 = k_2x + b_2$ *при всех* x *и* $\begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 > b_2 \end{cases}$.

---

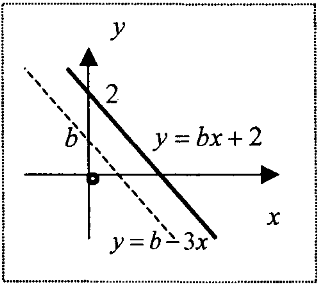
1. При каком значении параметра p прямая $y = \left(p^2 - p + 5\right) \cdot x + 3 - p$ проходит через начало координат?

$b = 0 \Rightarrow p = 3$.

Д.З. При каком значении параметра p прямая

$y = \left(p^2 - 2p + 5\right) \cdot x + 5 - p$ проходит через начало координат?

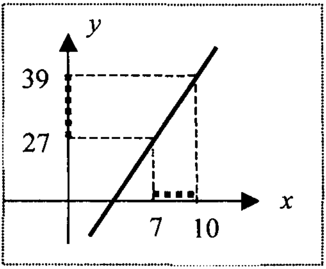
2. Найти все значения параметра b, при которых прямая $y = bx + 2$ целиком расположена выше прямой $y = b - 3x$.



$$\begin{cases} b = -3, \\ b < 2 \end{cases} \Rightarrow b = -3.$$

Д.З. Найти все значения параметра b, при которых прямая $y = bx + 4$ целиком расположена выше (ниже) прямой $y = b - 3x$.

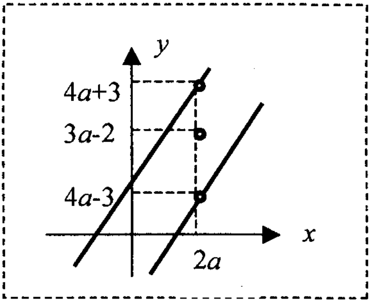
3. Найти множество значений функции $y = 4x - 1$ при $x \in [7;10]$.



$27 \le y \le 39$.

Д.З. Найти множество значений функции $y = 3x + 2$ при $x \in [4; 9]$.

4. При каких значениях параметра a точка $(2a; 3a - 2)$ лежит между прямыми $y = 2x - 3$ и $y = 2x + 3$?



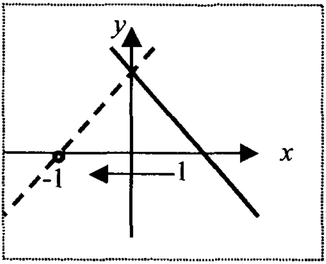
$4a - 3 < 3a - 2 < 4a + 3 \Rightarrow -1 < a < 1$.

Д.З. При каких значениях параметра a точка $(3a; 2a - 1)$ выше (ниже) прямой $y = 3x - 4$?

Д.З. При каких значениях параметра a точка $(2a; 3a-2)$ лежит между прямыми $y = 2x - 3$ и $y = 2x + 3$?

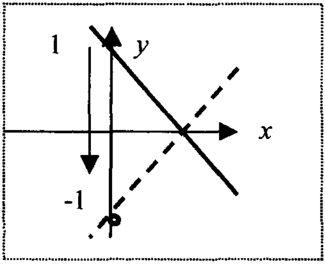
5. Составить уравнение прямой, которая симметрична прямой $x + y = 1$ относительно:

оси ординат,



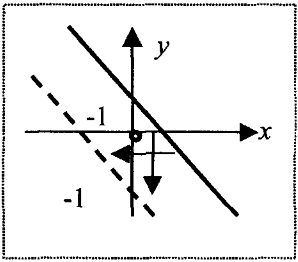
$x \to -x$

оси абсцисс,



$y \to -y$

начала координат.



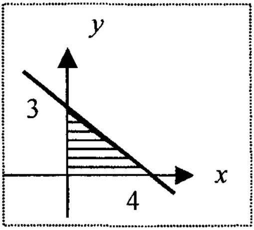
$x \to -x$, $y \to -y$

Ответ:

$$-x + y = 1,\ x - y = 1,\ -x - y = 1.$$

Д.З. Составить уравнение прямой, которая симметрична прямой $4x + 5y = 6$ относительно оси ординат.

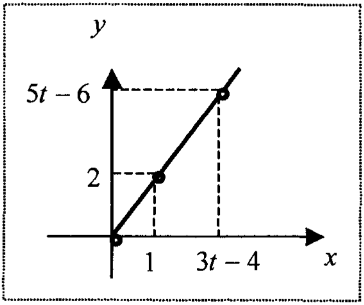
6. Найти площадь треугольника, отсекаемого прямой $4y + 3x = 12$ и координатными осями.



$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$.

Д.З. Найти площадь треугольника, отсекаемого прямой $5y + 8x = 20$ и координатными осями.

7. При каком значении параметра t точки $M_1(0;0)$, $M_2(1;2)$ и $M_3(3t-4;5t-6)$ лежат на одной прямой?



$\frac{2}{1} = \frac{5t-6}{3t-4} \Rightarrow 6t-8 = 5t-6 \Rightarrow t_0 = 2$.

Д.З. При каком значении параметра t точки $M_1(0;0)$, $M_2(2;3)$ и $M_2(4t-2;3t-1)$ лежат на одной прямой?

8. Найти значение параметра k, при котором прямые $3y + 2x = 1$ и $y = kx + 2$ параллельны.

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \\ y_2 = kx + 2 \end{array}\right. \Rightarrow k = -\frac{2}{3}.$$

Д.З. Найти значение параметра k, при котором прямые $4y + 3x = 2$ и $y = kx + 2$ лежат на одной прямой.

9. Найти сумму значений параметра a, при которых прямые $y = (a+1)x + 3 - a$ и $y = (a-4)x - 2a - 1$ перпендикулярны.

$$(a+1)(a-4) = -1 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = -1 \Rightarrow a^2 - 3a - 5 = 0 \Rightarrow 3.$$

Д.З. Найти произведение всех различных значений параметра p, при которых прямые

$$y(x) = \left(p^2 - p - 1\right)x + 1 \text{ и } y(x) = \left(p^2 - p - 3\right)x + 2$$

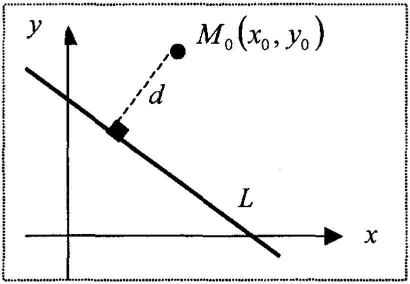
перпендикулярны.

Д.З. При каком значении параметра k прямая $y = kx$ образует угол, равный 15° с положительным направлением оси ox?

Общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$.

Нормальное уравнение прямой: $\dfrac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$.

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ *до прямой* $Ax + By + C = 0$:
$d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.



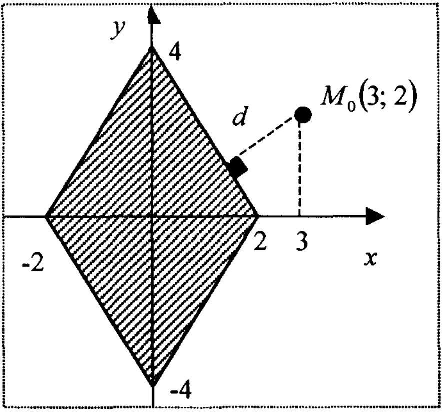
10. Найти расстояние от точки $M_0(6; -7)$ до прямой $3x + 4y + 5 = 0$.

Нормальное уравнение прямой

$$\frac{3x + 4y + 5}{5} = 0 \Rightarrow d = \frac{|3 \cdot 6 - 4 \cdot 7 + 5|}{5} = \frac{|-5|}{5} = 1.$$

Д.З. Найти расстояние от точки $M_0(-5; 7)$ до прямой $\sqrt{13} \cdot x - 6y + 7 = 0$.

11. Найти наименьшее расстояние от точки $M_0(3;\,2)$ до области $2|x|+|y|\le 4$.

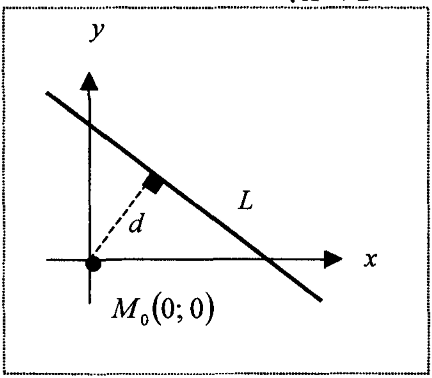


Общее уравнение прямой: $2x+y-4=0 \;\Rightarrow\; d=\dfrac{|2\cdot 3+2-4|}{\sqrt{5}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

Д.З. Найти наименьшее расстояние от точки $M_0(6;\,2)$ до области $3|x|+|y|\le 5$.

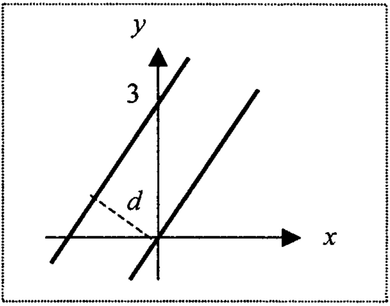
Расстояние от начала координат $M_0(0;\,0)$ до прямой

$$Ax+By+C=0:\; d=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$



12. Найти расстояние между прямыми

$$y = 2\sqrt{2} \cdot x \text{ и } y = 2\sqrt{2} \cdot x + 3 .$$



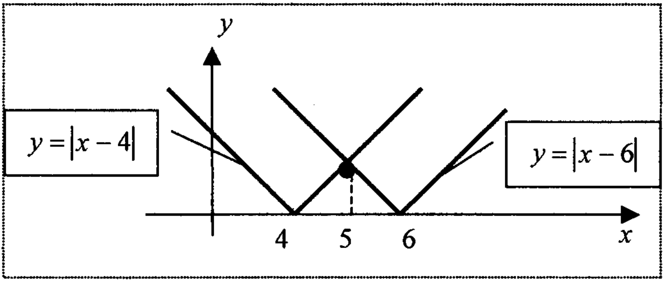
Общее уравнение: $y - 2\sqrt{2} \cdot x - 3 = 0$. Нормальное уравнение: $\dfrac{y - 2\sqrt{2} \cdot x - 3}{3} = 0$.

Расстояние от начала координат $M_0(0; 0)$ до прямой $d = 1$.

Д.З. Найти расстояние между прямыми

$$y = \sqrt{3} \cdot x \text{ и } y = \sqrt{3} \cdot x + 4 .$$

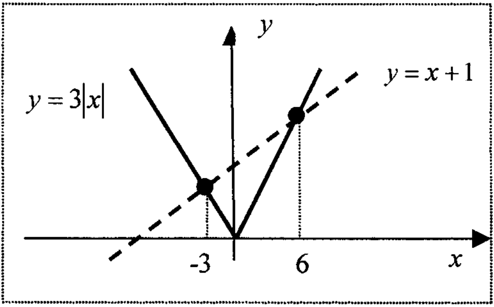
13. Решить уравнение $|x - 4| = |6 - x|$.



$x = 5$.

Д.З. Решить уравнения $|x - 3| = |5 - x|$; $|x - 2| = |x + 2|$.

14. Решить уравнение $3|x| = x + 12$.

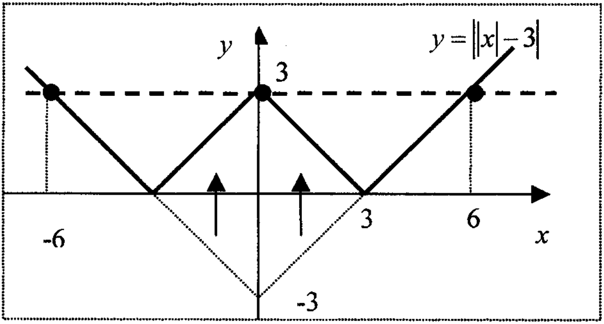


$x = -3;\ 6$.

Д.З. Решить уравнения $4|x| = x + 15$; $|x+2| - 1 + \dfrac{x}{2} = 0$.

15. Найти число различных решений уравнения $\big||x| - 3\big| = 3$.

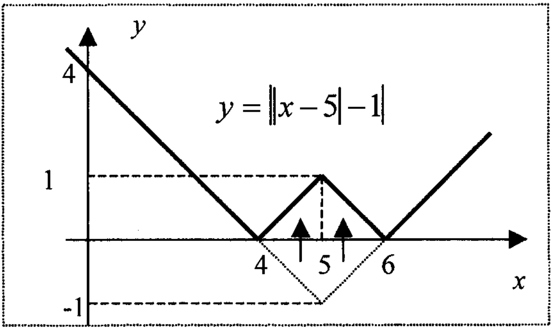
Графический метод: левая функция – $y_л = \big||x| - 3\big|$ (сплошная), правая функция – $y_п = 3$ (пунктирная).



3 решения.

Д.З. Найти число различных решений уравнений $\big||x| - 2\big| = 1$; $\big||x-1| - 3\big| = 1$.

16. Найти число различных решений системы $\begin{cases} y = \big||x-5| - 1\big| - 2, \\ 2x + 5y = 0. \end{cases}$



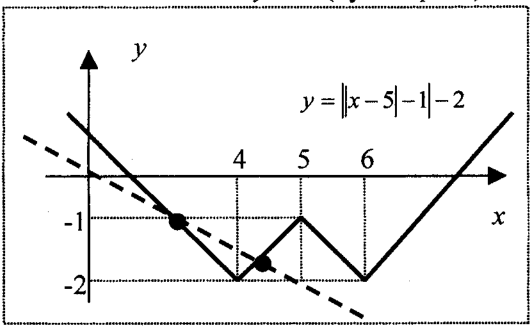
Графический метод:

графический образ верхнего уравнения –

$$y=||x-5|-1|-2 \text{ (сплошная)},$$

графический образ нижнего уравнения –

$$2x-5y=0 \text{ (пунктирная)}.$$



2 решения.

Д.З. Найти число различных решений системы

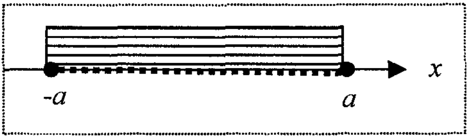
$$\begin{cases} y=||x-6|-1|-4, \\ 2x+3y=0. \end{cases}$$

Д.З. При каких значениях параметра p система

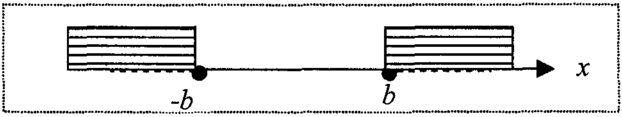
$$\begin{cases} y=||x-5|-1|-2, \\ x+y=p \end{cases}$$

имеет три решения?

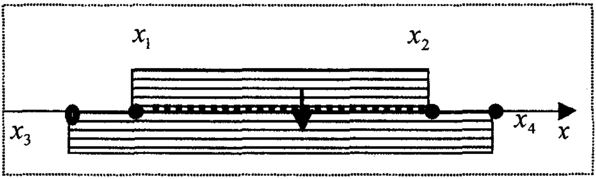
Графический образ линейного неравенства $|x| \le a$:



Графический образ линейного неравенства $|x| \ge b$:



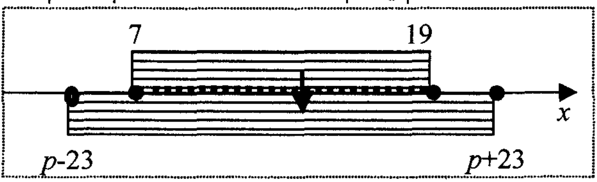
Все решения из $x_1 \le x \le x_2$ *являются решениями из* $x_3 \le x \le x_4$:



$$\begin{cases} x_3 \le x_1, \\ x_4 \ge x_2. \end{cases}$$

17. Найти все значения параметра p, при которых любое решение неравенства $|x-13| \le 6$ также является решением неравенства $|x-p| \le 23$.

$|x-13| \le 6 \Rightarrow 7 \le x \le 19$; $|x-p| \le 23 \Rightarrow p-23 \le x \le p+23$:



$$\begin{cases} p-23 \le 7, \\ p+23 \ge 19 \end{cases} \Rightarrow$$

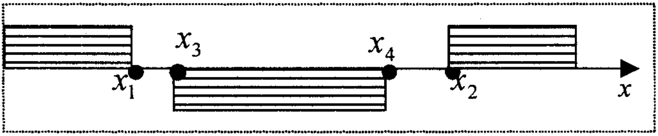
$\Rightarrow -4 \le p \le 30$.

Д.З. Найти все значения параметра p, при которых любое решение неравенства $|x-11| \le 7$ также является решением неравенства $|x-p| \le 21$.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых все числа $x \in [8;13]$ являются решением неравенства $|x-p| \le 7$.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых все решения неравенства $|x - p^2 - p| \le 16$ являются также решением неравенства $|x - p^2 - 4p| \le 49$.

Ни одно решение из $\left[\begin{array}{l} x \le x_1 \\ x \ge x_2 \end{array}\right.$ *не является решением из* $x_3 \le x \le x_4$:

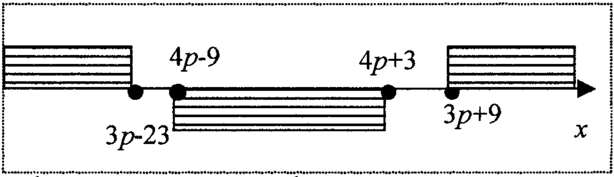


$$\begin{cases} x_1 < x_3, \\ x_2 > x_4. \end{cases}$$

18. Найти значения параметра p, при которых ни одно решение неравенства $|x-3p+7| \ge 16$ не является решением неравенства $|x-4p+3| \le 6$.

$$|x-3p+7| \ge 16 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-3p+7 \ge 16 \\ x-3p+7 \le -16 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 3p+9 \\ x \le 3p-23 \end{array}\right.;$$

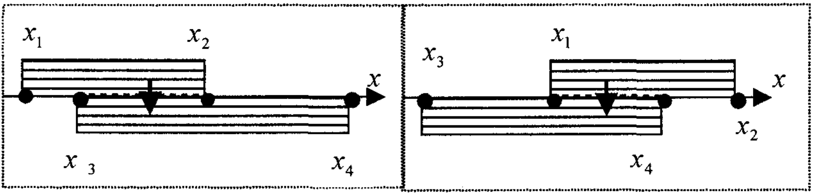
$$|x-4p+3| \le 6 \Rightarrow -6 \le x-4p+3 \le 6 \Rightarrow 4p-9 \le x \le 4p+3:$$



$$\begin{cases} 3p+9 > 4p+3, \\ 3p-23 < 4p-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p < 6, \\ p > -24 \end{cases} \Rightarrow -24 < p < 6.$$

Д.З. Найти количество различных целочисленных значений параметра p, при которых ни одно решение неравенства $|x-3p+4|\geq 17$ не является решением неравенства $|x-4p+6|\leq 8$.

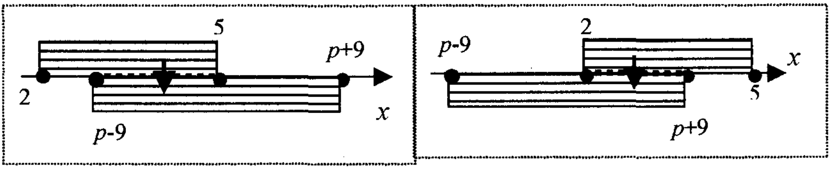
Хотя бы одно решение из $x_1 \leq x \leq x_2$ *является решением из* $x_3 \leq x \leq x_4$:



$$\begin{cases} x_2 \geq x_3, \\ x_4 \geq x_1. \end{cases}$$

19. Найти все значения параметра p, при которых хотя бы одно число $x \in [2;5]$ является решением неравенства $|x-p|\leq 9$.

$-9 \leq x-p \leq 9 \;\Rightarrow\; p-9 \leq x \leq p+9$:



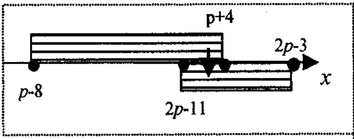
$p-9\leq 5$, $\quad$ $p+9\geq 2$,

$$\begin{cases} p-9\leq 5, \\ p+9\geq 2 \end{cases} \Rightarrow -7\leq p\leq 14.$$

Д.З. Найти значения параметра p, при которых хотя бы одно число $x\in[7;16]$ является решением неравенства $|x-p|\leq 13$.

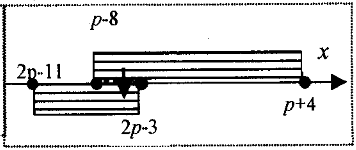
20. Найти количество различных целочисленных значений параметра p, при которых хотя бы одно решение неравенства $|x-p+2|\leq 6$ является решением неравенства $|x-2p+7|\leq 4$.

$p-8\le x\le p+4$:



$2p-11\le p+4$,

$2p-11\le x\le 2p-3$:



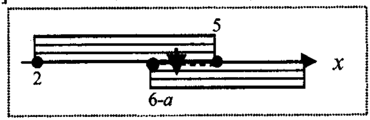
$p-8\le 2p-3$,

$$\begin{cases} p+4\ge 2p-11, \\ p-8\le 2p-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15\ge p, \\ -5\le p \end{cases} \Rightarrow -5\le p\le 15.$$

Д.З. Найти количество различных целочисленных значений параметра p, при которых хотя бы одно решение неравенства $|x-p+6|\le 9$ является решением неравенства $|x-2p+4|\le 3$.

21. Найти все значения параметра a, при которых хотя бы одно число $x\in[2;5]$ является решением неравенства $x+a\ge 6$.

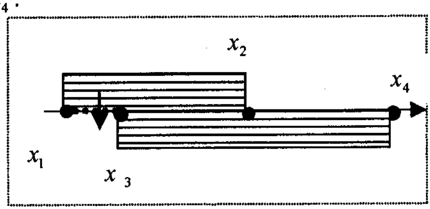
$x\ge 6-a \Rightarrow$



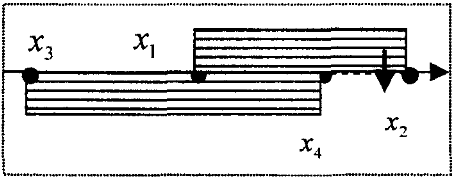
$6-a\le 5 \Rightarrow a\ge 1$.

Д.З. Найти значения параметра a, при которых хотя бы одно число $x\in[3;7]$ является решением неравенства $x-a\le 4$.

Хотя бы одно решение из $x_1\le x\le x_2$ *не является решением из* $x_3\le x\le x_4$:



$x_1<x_3$,



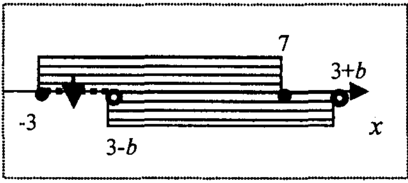
$x_2 > x_4$,

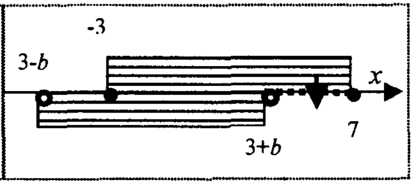
$$\left[\begin{array}{l} x_1 < x_3 \\ x_2 > x_4 \end{array}\right.$$

22. Найти значения параметра b, при которых хотя бы одно решение неравенства $|x-2| \le 5$ не является решением неравенства $|x-3| < b$.

$-3 \le x \le 7$:

$3 - b \le x \le 3 + b$:





$3 - b \ge -3 \Rightarrow b \le 6$,

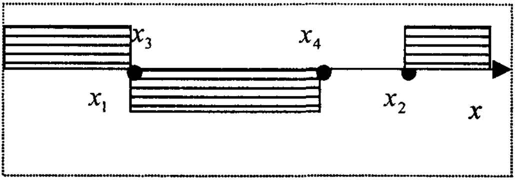
$3 + b \le 7 \Rightarrow b \le 4$,

$$\left[\begin{array}{l} b \le 6 \\ b \le 4 \end{array}\right. \Rightarrow b \le 6.$$

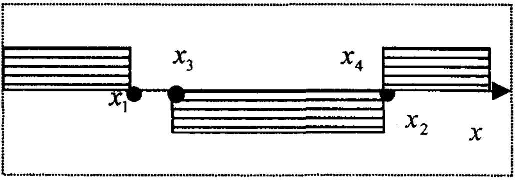
Д.З. Найти наибольшее значение параметра b, при котором хотя бы одно решение неравенства $|x-2| \le 5$ не является решением неравенства $|x-1| < b$.

Д.З. Найти значения параметра b, при которых хотя бы одно решение неравенства $|x| \le b$ не является решением неравенства $|x-12| < 23$.

Одно решение системы неравенств $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le x_1 \\ x \ge x_2 \end{array}\right., \\ x_3 \le x \le x_4 \end{cases}$:



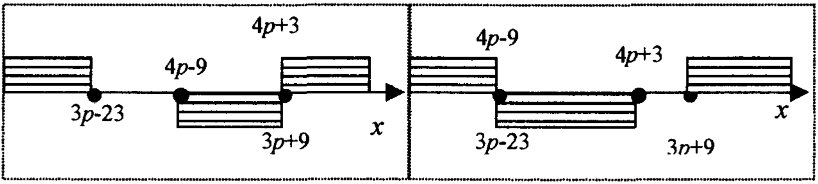
$$\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 > x_4. \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_4 = x_2, \\ x_3 > x_1. \end{cases}$$

23. Найти значения параметра p, при которых система неравенств $\begin{cases} |x-3p+7| \ge 16, \\ |x-4p+3| \le 6 \end{cases}$ имеет одно решение.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-3p+7 \ge 16 \\ x-3p+7 \le -16 \end{array}\right., \\ -6 \le x-4p+3 \le 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge 3p+9 \\ x \le 3p-23 \end{array}\right., \\ 4p-9 \le x \le 4p+3 \end{cases} :$$



$$\begin{cases} 4p+3 = 3p+9, \\ 3p-23 < 4p-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 6, \\ p > -14, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3p-23 = 4p-9, \\ 4p+3 < 3p+9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -14, \\ p < 6; \end{cases}$$

$p = 6, -14$.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых система неравенств $\begin{cases} |x-3p+4| \ge 17, \\ |x-4p+6| \le 8 \end{cases}$ имеет одно решение.

24. Найти значение параметра a, при котором длина решения неравенства $|4x-4a+4| \le a$ равна 9.

$$-a \le 4x-4a+4 \le a \;\Rightarrow\; 3a-4 \le 4x \le 5a-4 \;\Rightarrow\; \frac{3}{4}a-1 \le x \le \frac{5}{4}a-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; L=\frac{5a}{4}-\frac{3a}{4}=\frac{a}{2}=9 \;\Rightarrow\; a=18.$$

Д.З. Найти значение параметра a, при котором множество всех решений неравенства $|6x-4a-3| \le 2a$ представляет промежуток длиной 10.

Д.З. Длина решения неравенства $|3x-2006a| \le a$ равна 4. Найти значение параметра a.

Д.З. Длина интервала области определения функции $y=\sqrt{x-8+3a}+\sqrt{2-x}$ равна 9. Найти значение параметра a

Д.З. Решить систему неравенств $\begin{cases}|x-1| \ge 5, \\ |x-4| \le 8\end{cases}$.

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases}a_1 \cdot x+b_1 \cdot y=c_1, \\ a_2 \cdot x+b_2 \cdot y=c_2.\end{cases}$

Бесконечное число решений: $\begin{cases}\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}, \\ \dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}.\end{cases}$

Отсутствие решений: $\begin{cases}\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}, \\ \dfrac{b_1}{b_2}\ne\dfrac{c_1}{c_2}.\end{cases}$

25. При каких значениях m система $\begin{cases}mx+6y=3, \\ 3mx+2my=m\end{cases}$ имеет бесконечное число решений?

$$\begin{cases}\dfrac{m}{3m}=\dfrac{6}{2m},\\ \dfrac{6}{2m}=\dfrac{3}{m}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2m^2-18m=0,\\ 6m=6m\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m=0;9,\\ m-\textit{любое}\end{cases} \Rightarrow m=0;9.$$

Д.З. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases}6x^7+py^9=p-2,\\ 3x^7+4y^9=p-5\end{cases}$ имеет бесконечное число решений.

26. При каких значениях m система $\begin{cases}mx+2y=2,\\ 3mx+my=m+6\end{cases}$ не имеет решений?

$$\begin{cases}\dfrac{m}{3m}=\dfrac{2}{m},\\ \dfrac{2}{m}\neq\dfrac{2}{m+6}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2m^2-6m=0,\\ 2m+12\neq 2m\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m=0;3,\\ 12\neq 0\end{cases} \Rightarrow m=0;3.$$

Д.З. Найти значения параметра m, при которых система $\begin{cases}(p+1)x-(p+3)y=5,\\ x-(p+1)y=2\end{cases}$ не имеет решений.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Формулы сокращенного умножения:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$,

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

$A = \sqrt{a+b} - \sqrt{a-b} \Rightarrow A^2 = 2a - 2\sqrt{a^2 - b^2}$.

$A = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} - \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \Rightarrow A^2 = 2a - 2\sqrt{b^2} = 2(a - |b|)$.

---

1. Упростить $A = \sqrt{4x + 2\sqrt{4x^2 - 9y^2}} - \sqrt{4x - 2\sqrt{4x^2 - 9y^2}}$ при

$$-2x < 3y < 0.$$

Метод возведения в квадрат:

$$A^2 = 4x + 2\sqrt{4x^2 - 9y^2} -$$
$$-2\sqrt{\left(4x + 2\sqrt{4x^2 - 9y^2}\right)\cdot\left(4x - 2\sqrt{4x^2 - 9y^2}\right)} + 4x - 2\sqrt{4x^2 - 9y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = 8x - 2\sqrt{16x^2 - 4(4x^2 - 9y^2)} = 8x - 12\sqrt{y^2} = 8x - 12|y| = 8x + 12y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 2\sqrt{2x + 3y}.$$

Д.З. Вычислить $A = \sqrt{6x + 2\sqrt{9x^2 - 16y^2}} - \sqrt{6x - 2\sqrt{9x^2 - 16y^2}}$ при $x = 15$ и $y = 9$.

Д.З. Упростить $\dfrac{1}{\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}} + \dfrac{1}{\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}}$ при $1 < x < 2$.

Д.З. Вычислить $\sqrt{7 + \sqrt{24}} - \sqrt{7 - \sqrt{24}}$.

2. Решить уравнения $\sqrt{x} = \sqrt{x}$, $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

3. Найти разность наибольшего и наименьшего корней уравнения $\sqrt{x+1+4\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+1-4\sqrt{x-3}}=4$.

ОДЗ $x \geq 3$.

Метод возведения в квадрат:

$$\left(x+1+4\sqrt{x-3}\right)+\left(x+1-4\sqrt{x-3}\right)+$$
$$+2\sqrt{\left(x+1+4\sqrt{x-3}\right)\cdot\left(x+1-4\sqrt{x-3}\right)}=16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+\sqrt{x^2-14x+49}=7 \ \Rightarrow \ x+|x-7|=7.$$

1) $x \geq 7 \ \Rightarrow \ x=7$; 2) $x<7 \ \Rightarrow \ 7=7 \ \Rightarrow \ x<7$.

Ответ: $3 \leq x \leq 7$.

Д.З. Найти разность наибольшего и наименьшего корней уравнений

$$\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}=4;$$
$$\sqrt{2x+2+2\sqrt{2x+1}}+\sqrt{2x+2-2\sqrt{2x+1}}=2.$$

4. Вычислить $\dfrac{a^4-27ab^3}{a^2+3ab+9b^2}:\left(3-\dfrac{a}{b}\right)+b$ при

$$a=\sqrt{2}+1, b=2\sqrt{2}$$

$$\frac{a^4-27ab^3}{a^2+3ab+9b^2}:\left(3-\frac{a}{b}\right)+b=\frac{a\left(a^3-27b^3\right)}{a^2+3ab+9b^2}:\frac{3b-a}{b}+b=$$
$$=\frac{a(a-3b)\left(a^2+3ab+9b^2\right)}{\left(a^2+3ab+9b^2\right)}\cdot\frac{b}{(3b-a)}+b=-ab+b=b(1-a)=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4.$$

Д.З. Вычислить $\dfrac{ab\left(b^2-a^2\right)+a^4-b^4}{a^4+a^2b^2-3a^3b}\div\dfrac{b^2-a^2}{a^3b}$ при

$a=\sqrt{2}-1,\ b=\sqrt{2}+1$.

5. Вычислить $\left(\dfrac{x^3+27y^3}{3x+9y}-xy\right)\cdot\dfrac{1}{x^2-9y^2}$ при

$x=7+\sqrt{3},\ y=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7\sqrt{3}}$.

$$\left(\frac{(x+3y)\left(x^2-3xy+9y^2\right)}{3(x+3y)}-xy\right)\cdot\frac{1}{x^2-9y^2}=\frac{1}{3}\frac{\left(x^2-6xy+9y^2\right)}{x^2-9y^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{(x-3y)^2}{(x-3y)(x+3y)}=\frac{1}{3}\frac{(x-3y)}{(x+3y)}=\frac{1}{3}\frac{7+\sqrt{3}-1-\frac{\sqrt{3}}{7}}{7+\sqrt{3}+1+\frac{\sqrt{3}}{7}}=\frac{1}{3}\frac{6+\frac{6\sqrt{3}}{7}}{8+\frac{8\sqrt{3}}{7}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{8}=\frac{1}{4}.$$

Д.З. Вычислить $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}:\frac{x-y}{(x+y)^2-4xy}+4\sqrt{xy}$ при

$$x=8+2\sqrt{15},\ y=17-4\sqrt{15}.$$

Д.З. Вычислить $\frac{x\left[(x+y)^3+(x-y)^3\right]}{x^2-y^2}$ при $x=\sqrt{7}, y=\sqrt{3}$.

6. Вычислить $x^2+\frac{1}{x^2}$ при $x+\frac{1}{x}=5$.

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=25-2=23.$$

Д.З. Вычислить $x^3+\frac{1}{x^3}$ при $x+\frac{1}{x}=3$.

7. Вычислить $2a^3+3a^2+\frac{3}{a^2}-\frac{2}{a^3}$ при $a-\frac{1}{a}=3$.

$$2a^3+3a^2+\frac{3}{a^2}-\frac{2}{a^3}=2\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)+3\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=$$

$$=2\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a^2+1+\frac{1}{a^2}\right)+3\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=$$

$$=2\cdot3\left(a^2+\frac{1}{a^2}+1\right)+3\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=9\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+6=9\left(\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2\right)+6=105.$$

Д.З. Вычислить $3a^3+2a^2+\frac{18}{a^2}+\frac{81}{a^3}$, если $a+\frac{3}{a}=2$.

Д.З. Вычислить xy, если $x+y=8$ и $x^3+y^3=200$.

8. Вычислить $\left(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)$.

Сумма кубов:

$$\left(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)=\left(\sqrt[3]{7}\right)^3+\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=7+2=9.$$

Д.З. Вычислить

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\cdot\left(x+y-\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\cdot\left(x+y+\sqrt{xy}\right)$$

при $x=4$ и $y=17$.

9. Найти $f(277)$, если $f(x)=\dfrac{x^{4/3}-1}{x^{2/3}-1}-x^{2/3}$.

$$f(x)=\frac{x^{4/3}-1}{x^{2/3}-1}-x^{2/3}=\frac{\left(x^{2/3}-1\right)\cdot\left(x^{2/3}+1\right)}{x^{2/3}-1}-x^{2/3}=x^{2/3}+1-x^{2/3}=1;$$

$f(277)=1$.

Д.З. Найти $f(0{,}008)$, если $f(x)=\dfrac{x^{4/3}-1}{x+x^{1/3}}-x^{-1/3}$.

10. Найти x, если $\dfrac{(x-p)\left(x^2+xp+p^2\right)}{(x+p)\left(x^2-xp+p^2\right)}=\dfrac{19}{35}$ и $p=6$.

$$\frac{x^3-p^3}{x^3+p^3}=\frac{19}{35}\quad\Rightarrow\quad 35x^3-35p^3=19x^3+19p^3\quad\Rightarrow\quad 16x^3=54p^3\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x^3=27p^3\ \Rightarrow\ 2x=3p\ \Rightarrow\ x=\frac{3}{2}p=\frac{3\cdot 6}{2}=9.$$

Д.З. Найти x, если $\dfrac{(x-p)\left(x^2+xp+p^2\right)}{(x+p)\left(x^2-xp+p^2\right)}=\dfrac{7}{9}$ и $p=7$.

Д.З. Найти x, если $\dfrac{x^3+3x^2p+3xp^2+p^3}{x^3-3x^2p+3xp^2-p^3}=\dfrac{125}{8}$ и $p=9$.

Д.З. Найти $\operatorname{ctg} x$, если

$$\frac{(\sin x-\cos x)\left(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x\right)}{(\sin x+\cos x)\left(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x\right)}=\frac{19}{35}.$$

Д.З. Найти $\operatorname{tg} x$, если

$$\frac{\sin^3 x + 3\sin^2 x\cos x + 3\sin x\cos^2 x + \cos^3 x}{\sin^3 x - 3\sin^2 x\cos x + 3\sin x\cos^2 x - \cos^3 x} = \frac{1}{8}.$$

11. Решить уравнение $x^2 - 2x + 1 + x^4 - 4x^2 + 1 = 0$.

$$\left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(x^4 - 4x^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + \left(x^2 - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0, \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = \pm 1; \end{cases} \quad x = 1.$$

Д.З. Решить уравнение $x^2 - 6x + 9 + x^4 - 18x^2 + 81 = 0$.

3. КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Квадратное уравнение:

$$ax^2+bx+c=0 \;\Rightarrow\; x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Дискриминант квадратного уравнения: $D=b^2-4ac$.
Расстояние между корнями квадратного уравнения:

$$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{D}}{|a|}.$$

Четная формула корней квадратного уравнения:

$$ax^2+2bx+c=0:\; x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}.$$

Теорема Виета: $x^2+px+q=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases}$

1. Найти произведение всех различных корней уравнений $x^2+3x-5=0$; $x^2+3x+5=0$.

2. Найти сумму всех различных корней уравнения $3x^2-5x-7=0$.

Д.З. Найти сумму всех различных корней уравнений $x^2-12x+35=0$; $x^2-12x+37=0$; $3x^2-5x+7=0$.

3. Найти сумму всех различных корней уравнения

$$3x^2-12x+12=0.$$
$$x^2-4x+4=0 \;\Rightarrow\; x_1=x_2=2.$$

Д.З. Найти сумму всех различных корней уравнения $2x^2-4x+2=0$.

4. Найти расстояние между нулями функции

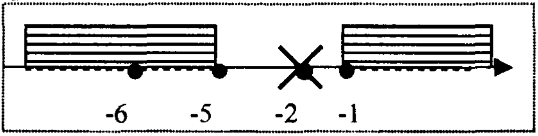
$$y=x^2+2\sqrt{6}\cdot x+5.$$
$$|x_1-x_2|=\sqrt{D}=\sqrt{24-20}=2.$$

Д.З. Найти расстояние между нулями функции

$$y = x^2 + \sqrt{21} \cdot x + 3.$$

5. Решить уравнение $\left(x^2+8x+12\right)\sqrt{x^2+6x+5}=0$.

ОДЗ $x^2+6x+5 \geq 0 \Rightarrow (x+1)(x+5) \geq 0 \Rightarrow$ Решение вне корней $\left[\begin{array}{l} x \geq -1 \\ x \leq -5 \end{array}\right.$.



$\left[\begin{array}{l} x^2+8x+12=0 \\ x^2+6x+5=0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2;\,-6 \\ x=-1;\,-5 \end{array}\right. \Rightarrow$ $x=-2$ – посторонний. *Ответ:* $x=-1;\,-5;\,-6$.

Д.З. Решить уравнение $\left(x^2+12x+27\right)\cdot\sqrt{x^2+7x+6}=0$.

6. Найти значение выражения $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}$, если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2-6x+3=0$.

Теорема Виета: $\begin{cases} x_1+x_2=6, \\ x_1x_2=3 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{6}{3}=2$.

Д.З. Найти значение выражения $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}$, если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2-627x+3=0$; $x^2-999x+9=0$.

7. x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2-923x+1=0$. Укажите остаток от деления на 5 натурального числа, равного значению выражения $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$.

Теорема Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 923, \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{\left(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2\right) - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = $$
$$= \frac{\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{(923)^2 - 2}{1} = \ldots 7.$$

Д.З. Найти остаток от деления на 5 выражения $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$, где x_1 и x_2 – корни уравнений $x^2 - 627x + 1 = 0$; $x^2 - 21x + 1 = 0$.

8. Найти сумму всех различных корней уравнения $(x-2)\left(x^2 - 5x + 6\right) = 0$.

$(x-2)(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow$ *Ответ:* 5.

Д.З. Найти сумму всех различных корней уравнения

$$(x-4)\left(x^2 - 6x + 8\right) = 0;\ \frac{3}{x^3} - \frac{36}{x^2} + \frac{4}{x} = 0;\ \frac{2}{x^3} - \frac{12}{x^2} + \frac{3}{x} = 0.$$

9. Найти $A = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}$, если x_1 – меньший корень, x_2 – больший корень уравнения $x^2 - 204x + 16 = 0$.

Теорема Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 204, \\ x_1 x_2 = 16. \end{cases}$

Метод возведения в квадрат:

$$A^2 = x_2 + x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} = 204 - 2 \cdot \sqrt{16} = 204 - 8 = 196,$$

$$\left[\begin{array}{l} A = 14 \\ A = -14 - \text{посторонний} \end{array}\right. \Rightarrow A = 14.$$

Д.З. Найти $A = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}$, если x_1 – меньший корень, x_2 – больший корень уравнения $x^2 - 67x + 49 = 0$.

10. Найти разность квадратов корней уравнения

$$x^2 - \left(\sqrt{7} + \sqrt{11}\right)x + \sqrt{77} = 0.$$

Теорема Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \sqrt{7} + \sqrt{11}, \\ x_1 x_2 = \sqrt{77} \end{cases} \Rightarrow x_1 = \sqrt{11}; x_2 = \sqrt{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 11 - 7 = 4.$

Д.З. Найти разность квадратов корней уравнения

$$x^2-\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)x+\sqrt{15}=0.$$

11. Решить уравнение $x+\dfrac{26}{x}=15$.

$x^2-15x+26=0 \Rightarrow$ Теорема Виета: $\begin{cases} x_1+x_2=15, \\ x_1x_2=26 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=13, \\ x_2=2. \end{array}\right.$

Д.З. Решить уравнения $x+\dfrac{6}{x}=5$; $x+\dfrac{12}{x}=8$.

12. Найти уравнение, корни которого в 2 раза больше корней уравнения $x^2-5x+1=0$.

Теорема Виета для исходного уравнения: $\begin{cases} x_1+x_2=5, \\ x_1\cdot x_2=1. \end{cases}$

Теорема Виета для искомого уравнения:

$$\begin{cases} \widetilde{x}_1+\widetilde{x}_2=2(x_1+x_2)=2\cdot 5=10, \\ \widetilde{x}_1\cdot\widetilde{x}_2=(2x_1)\cdot(2x_2)=4x_1\cdot x_2=4\cdot 1=4; \end{cases}$$

искомое уравнение $x^2-10x+4=0$.

Д.З. Найти уравнение, корни которого в 3 раза больше корней уравнения $x^2-5x+1=0$.

Д.З. Найти уравнение, корни которого в 4 раза больше корней уравнения $x^2-5x+1=0$.

13. Найти уравнение, корни которого на 2 больше корней уравнения $x^2-3x+1=0$.

Теорема Виета для исходного уравнения: $\begin{cases} x_1+x_2=3, \\ x_1\cdot x_2=1. \end{cases}$

Теорема Виета для искомого уравнения:

$$\begin{cases} \widetilde{x}_1+\widetilde{x}_2=(x_1+2)+(x_2+2)=(x_1+x_2)+4=7, \\ \widetilde{x}_1\cdot\widetilde{x}_2=(x_1+2)\cdot(x_2+2)=x_1\cdot x_2+2(x_1+x_2)+4=1+2\cdot 3+4=11; \end{cases}$$

искомое уравнение $x^2-7x+11=0$.

Д.З. Если корни уравнения $x^2-3x+1=0$ увеличить на 3, то по-

Д.З. Если корни уравнения $x^2-3x+1=0$ увеличить на 1, то получим уравнение… .

14. Если коэффициенты уравнения $x^2-7x+2=0$ изменить так, что каждый из корней увеличится на 2, то сумма квадратов корней изменится на величину, равную… .

$$\Delta=(x_1+2)^2+(x_2+2)^2-x_1^2-x_2^2=4x_1+4+4x_2+4=$$
$$=4(x_1+x_2)+8=4\cdot7+8=36.$$

Д.З. На сколько изменится сумма квадратов корней уравнения $x^2-9x+1=0$, если коэффициенты уравнения изменить так, что каждый из корней увеличится на 1?

15. Найти сумму квадратов корней уравнения $x^2+4x-2=0$.
Теорема Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-4, \\ x_1\cdot x_2=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &x_1^2+x_2^2=(x_1^2+x_2^2+2x_1\cdot x_2)-2x_1x_2= \\ &=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=16-2\cdot(-2)=20. \end{aligned}$$

Д.З. Найти сумму квадратов корней уравнений $x^2+6x-3=0$; $x^2+10x-2=0$.

Д.З. Найти сумму четвертых степеней корней уравнений $x^2+6x-3=0$; $x^2+10x-2=0$.

16. Найти сумму кубов корней уравнения $x^2+4x-2=0$.
Теорема Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-4, \\ x_1\cdot x_2=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1\cdot x_2+x_2^2)= \\ &=(x_1+x_2)\left[(x_1^2+x_2^2+2x_1\cdot x_2)-3x_1\cdot x_2\right]= \\ &=(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1\cdot x_2\right]= \\ &=-4\cdot(16-3\cdot(-2))=-4\cdot22=-88. \end{aligned}$$

Д.З. Найти сумму кубов корней уравнений $x^2+6x-3=0$; $x^2+10x-2=0$.

17. Если коэффициенты уравнения $x^2-9x+1=0$ изменить так, что каждый из корней увеличится на 3, то сумма кубов корней изменится на величину, равную… .

$$\Delta=(x_1+3)^3+(x_2+3)^3-x_1^3-x_2^3=9x_1^2+27x_1+27+9x_2^2+27x_2+27=$$
$$=9(x_1^2+x_2^2)+27(x_1+x_2)+54=$$
$$=9(x_1^2+x_2^2+2x_1x_2)-18x_1x_2+27(x_1+x_2)+54=$$
$$=9(x_1+x_2)^2-18x_1x_2+27(x_1+x_2)+54=1008.$$

Д.З. Если коэффициенты уравнения $x^2-7x+1=0$ изменить так, что каждый из корней увеличится на 2, то сумма кубов корней изменится на величину, равную… .

18. Найти приведенное квадратное уравнение, один из корней которого равен сумме, а второй – произведению корней уравнения $x^2+10x-3=0$.

Корни нового уравнения $\left[\begin{array}{l}\tilde{x}_1=-10\\ \tilde{x}_2=-3\end{array}\right.$.

Теорема Виета для искомого уравнения:

$$\begin{cases}\tilde{x}_1+\tilde{x}_2=-13,\\ \tilde{x}_1\cdot\tilde{x}_2=30\end{cases}\Rightarrow\ x^2+13x+30=0.$$

Д.З. Найти приведенное квадратное уравнение, один из корней которого равен сумме, а второй – произведению корней уравнения $x^2+12x-4=0$.

19. Найти наибольший корень уравнения $x^2-6x+8{,}84=0$.

$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-8{,}84}=3\pm\sqrt{0{,}16}=3\pm0{,}4\ \Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=3{,}4\\ x_2=2{,}6\end{array}\right.\Rightarrow\ x_1=3{,}4.$$

Д.З. Найти наибольший корень уравнения $x^2-2x+0{,}99=0$.

20. Решить систему $\begin{cases}(x-1)^2+(y^2-4)^2=0,\\ (x^2-1)^2+(y-2)^2=0.\end{cases}$

$$a^2+b^2=0\Rightarrow\begin{cases}a=0,\\ b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-1=0,\\ y^2-4=0,\\ x^2-1=0,\\ y-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1,\\ y=\pm2,\\ x=\pm1,\\ y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1,\\ y=2.\end{cases}$$

Д.З. Решить систему $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=0,\\ \sqrt{x^2-1}-\sqrt{y^2-4}=0.\end{cases}$

21. Решить систему $\begin{cases}\sqrt{x^2+2x-3}-|3y-1|=0,\\ \pi\sqrt{9y^2-6y+1}+\sqrt{x^2-4x+3}=0.\end{cases}$

Из второго уравнения

$$\begin{cases}9y^2-6y+1=0,\\ x^2-4x+3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(3y-1)^2=0,\\ (x-1)(x-3)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=\dfrac{1}{3},\\ x=1;3\end{cases}$$

система примет вид $\begin{cases}x^2+2x-3=0,\\ x=1;3,\\ y=\dfrac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1;-3,\\ x=1;3,\\ y=\dfrac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1,\\ y=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

Д.З. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-x-2}-|2y-1|=0,\\ \pi\sqrt{4y^2-4y+1}+\sqrt{x^2-5x+6}=0.\end{cases}$$

22. Найти значение параметра p, при котором система уравнений $\begin{cases}x+y=4,\\ x\cdot y=p\end{cases}$ имеет единственное решение.

Метод исключения:

$$y=\frac{p}{x} \Rightarrow x+\frac{p}{x}=4 \Rightarrow x^2-4x+p=0 \Rightarrow D=4-p=0 \Rightarrow p=4.$$

Д.З. Найти значение параметра p, при котором система уравнений $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{5y}=3,\\ \sqrt{5xy}=p\end{cases}$ имеет единственное решение.

Д.З. Найти $B=|y-x|$, если $\begin{cases}x+y=\sqrt{29},\\ x\cdot y=7.\end{cases}$

23. Найти сумму всех различных корней уравнения

$$x-7\sqrt{x}+3=0.$$

Замена: $t=\sqrt{x}\ge 0 \Rightarrow t^2-7t+3=0 \Rightarrow$ Теорема Виета:

$$\begin{cases} t_1+t_2=7, \\ t_1\cdot t_2=3. \end{cases}$$

$$x_1+x_2=t_1^2+t_2^2=\left(t_1^2+t_2^2+2t_1t_2\right)-2t_1t_2=\left(t_1+t_2\right)^2-2t_1t_2=43.$$

Д.З. Найти сумму всех различных корней уравнений

$$x-6\sqrt{x}+6=0;\ \sqrt[3]{x^2}-3\cdot\sqrt[3]{x}+2=0.$$

24. Найти произведение всех различных корней уравнения $x^4=2x^2+8$.

Замена: $t=x^2\ge 0 \Rightarrow t^2-2t-8=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-2 - \text{постороннее} \\ t_2=4 \end{array}\right.$,

возврат в исходную переменную:

$$x^2=4 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 2 \Rightarrow x_1\cdot x_2=-4.$$

Д.З. Найти произведение всех различных корней уравнения $x^4=8x^2+20$.

25. Найти произведение всех различных корней уравнения $\left(x^2+4x+1\right)\left(x^2+4x+4\right)=10$.

Замена:

$$t=x^2+4x+1 \Rightarrow t\cdot(t-3)=10 \Rightarrow t^2+3t-10=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-5 \\ t_2=2 \end{array}\right.;$$

возврат в исходную переменную:

1) $t_1=-5:\ x^2+4x+1=-5 \Rightarrow x^2+4x+6=0 \Rightarrow (D<0)!! \Rightarrow$ нет корней;

2) $t_2=2:\ x^2+4x+1=2 \Rightarrow x^2+4x-1=0 \Rightarrow (D>0) \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1x_2=-1$.

Д.З. Найти произведение всех различных корней уравнения $\left(x^2-4x\right)\left(x^2-4x+2\right)=15$.

Д.З. Найти произведение всех различных значений параметра p, при которых прямые

$$y(x)=\left(p^2-p-1\right)x+1 \text{ и } y(x)=\left(p^2-p-3\right)x+2$$

перпендикулярны.

26. Найти произведение всех различных корней уравнения $\left(x^2-8x+18\right)^2-6x^2+48x-100=0$.

Выделение одной структуры:

$$\left(x^2-8x+18\right)^2-6\left(x^2-8x+18\right)+8=0.$$

Замена: $t=x^2-8x+18 \Rightarrow t^2-6t+8=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=4 \\ t_2=2 \end{array}\right.$; возврат в исходную переменную:

$\left[\begin{array}{l} x^2-8x+14=0 \\ x^2-8x+16=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D_1>0 - \text{различные корни} \\ D_2=0 - \text{равные корни} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1x_2=14 \\ x_3=x_4=4 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1x_2x_3=14\cdot 4=56$.

Д.З. Найти произведение всех различных корней уравнения $\left(x^2-8x+17\right)^2-5x^2+40x-81=0$; $x^2+12x+10+\dfrac{4}{x^2+12x+5}=0$.

27. Найти произведение всех различных корней уравнения $\sqrt{x^2-472x+41}=\sqrt{x^2-472x+25}+2$.

Замена:

$$t=\sqrt{x^2-472x+25} \Rightarrow x^2-472x+41=t^2+16 \Rightarrow \sqrt{t^2+16}=t+2;$$

возведение в квадрат: $t^2+16=t^2+4t+4 \Rightarrow t=3$;
возврат в исходную переменную:

$$x^2-472x+25=9 \Rightarrow x^2-472x+16=0 \Rightarrow x_1x_2=16.$$

Д.З. Найти произведение всех различных корней уравнений

$$\sqrt{x^2-77x+145}=\sqrt{x^2-77x+82}+3;$$

$$\sqrt{x^2-172x+173}=\sqrt{x^2-172x+125}+2.$$

28. Найти произведение всех различных корней уравнения

$$x^2-8x+11=6\sqrt{x^2-8x+3}.$$

Замена:

$$t=\sqrt{x^2-8x+3}\ge 0 \Rightarrow t^2+8=6t \Rightarrow t^2-6t+8=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=2 \\ t_2=4 \end{array}\right.;$$

возврат в исходную переменную:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-8x+3}=2 \\ \sqrt{x^2-8x+3}=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x-1=0 \\ x^2-8x-13=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D_1>0 \\ D_2>0 \end{array}\right.,$$ все 4 корня различные $\Rightarrow$ $x_1x_2x_3x_4=13$.

Д.З. Найти произведение всех различных корней уравнения $x^2-4x+8=5\sqrt{x^2-4x+2}$; $x^2-7x+\sqrt{x^2-7x+8}=12$.

29. Решить уравнение $\dfrac{(9^x-9)(3^x-81)}{x-1}=0$.

ОДЗ $x\ne 1$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 9^x=9 \\ 3^x=81 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 9^x=9^1 \\ 3^x=3^4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1 \text{ – посторонний} \\ x_2=4 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow x=4$.

Д.З. Решить уравнение $\dfrac{(4^x-4)(2^x-32)}{x-1}=0$.

30. Решить уравнение $\dfrac{(\log_2 x-2)(\log_2 x-1)}{x-1}=0$.

ОДЗ $x\ne 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=2 \\ \log_2 x=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=4 \\ x_2=2 \end{array}\right.$.

Д.З. Решить уравнение $\dfrac{(\log_2 x-3)(\log_2 -1)}{x-2}=0$.

31. Найти сумму всех различных корней уравнения

$$\frac{(x^2-6x+8)(x^2-5x+4)}{x-1}=0.$$

ОДЗ $x\ne 1 \Rightarrow \dfrac{(x-2)(x-4)(x-1)(x-4)}{x-1}=0 \Rightarrow$ сумма всех различных корней равна 6.

Д.З. Найти сумму всех различных корней уравнений

$$\frac{(x^2-7x+6)(x^2-5x+4)}{x-4}=0;\quad \frac{(x^2-6x+5)(x^2-7x+10)}{x-2}=0;$$

$$\frac{(x^2-3x+2)(x^2-5x+6)}{x-3}=0.$$

32. Найти сумму всех различных корней уравнения

$$\sqrt{4^x-2^{x+8}+100}=4^x-2^{x+8}+70.$$

Замена: $t=\sqrt{4^x-2^{x+8}+100}\ge 0 \;\Rightarrow\; 4^x-2^{x+8}+70=t^2-30 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow t^2-t-30=0 \;\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-5 - \text{посторонний} \\ t_2=6 \end{array}\right.$;

возврат в исходную переменную:

$$\sqrt{4^x-2^{x+8}+100}=6 \;\Rightarrow\; 4^x-2^8\cdot 2^x+64=0;$$

замена: $z=2^x>0 \;\Rightarrow\; z^2-2^8\cdot z+64=0 \;\Rightarrow$ Теорема Виета:

$$\begin{cases} z_1+z_2=2^8, \\ z_1\cdot z_2=64; \end{cases}$$

при показательной замене сумма по x лежит в произведении по z:

$$z_1\cdot z_2=64 \;\Rightarrow\; 2^{x_1+x_2}=64=2^6 \;\Rightarrow\; x_1+x_2=6.$$

Д.З. Найти сумму всех различных корней уравнения

$$\sqrt{9^x-3^{x+4}+91}=9^x-3^{x+4}+35.$$

33. Найти сумму наибольшего и наименьшего положительных корней уравнения $(x^2-9)(x^2-14x+40)+80=0$.

Разложение на сомножители:

$$(x-3)(x+3)(x-4)(x-10)+80=0,$$

$$(1\cdot 2)(3\cdot 4)+80=0;$$

перегруппировка:

$$(1\cdot 3)(2\cdot 4)+80=0 \;\Rightarrow\; (x^2-7x+12)(x^2-7x-30)+80=0;$$

замена:

$$t = x^2 - 7x + 12 \Rightarrow t(t-42)+80=0 \Rightarrow t^2-42t+80=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 40 \\ t_2 = 2 \end{array}\right.;$$

возврат в исходную переменную:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-7x+12=40 \\ x^2-7x+12=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-7x-28=0 \\ x^2-7x+10=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49+4\cdot 28}}{2} \\ x_3=5,\ x_4=2 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{7+\sqrt{161}}{2}\approx\dfrac{7+12{,}5}{2}\approx 9{,}7 \\ x_2=\dfrac{7-\sqrt{161}}{2}\approx\dfrac{7-12{,}5}{2}<0 \\ x_3=5,\ x_4=2 \end{array}\right. \Rightarrow x_{\max}+x_{\min}\approx 9{,}7+2=11{,}7.$$

Д.З. Найти сумму наибольшего и наименьшего положительных корней уравнений

$$(x^2-4)(x^2-12x+32)=25;\ (x^2-1)(x^2-14x+48)=72.$$

34. Найти сумму всех различных корней уравнения $\sqrt{121+x}-\sqrt[3]{x}=11$.

Замена: $t=\sqrt[3]{x} \Rightarrow \sqrt{121+t^3}=t+11$;

$121+t^3=t^2+22t+121 \Rightarrow t^3-t^2-22t=0 \Rightarrow t(t^2-t-22)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2-t-22=0 \Rightarrow$ Теорема Виета: $\begin{cases} t_1+t_2=1, \\ t_1\cdot t_2=-22; \end{cases}$

возврат в исходную переменную:

$$x_1+x_2=t_1^3+t_2^3=(t_1+t_2)(t_1^2-t_1t_2+t_2^2)=(t_1+t_2)\left[(t_1^2+t_2^2+2t_1t_2)-3t_1t_2\right]=$$
$$=(t_1+t_2)\left[(t_1+t_2)^2-3t_1t_2\right]=1\cdot(1-3\cdot(-22))=67.$$

Д.З. Найти сумму всех различных корней уравнений $\sqrt{64+x}-\sqrt[3]{x}=8$; $\sqrt{4+\sqrt[4]{x^3}}-3\cdot\sqrt[4]{x}=2$.

35. Решить уравнение $x^2-|2x+3|-12=0$.

1) $x \ge -\dfrac{3}{2} \Rightarrow x^2-2x-15=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-3 \text{ – постороннее} \\ x_2=5 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2=5$;

2) $x<-\dfrac{3}{2} \Rightarrow x^2+2x-9=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_3=-1+\sqrt{10}>0 \text{ – постороннее} \\ x_4=-1-\sqrt{10}<0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow x_4=-1-\sqrt{10}$.

Д.З. Решить уравнения $x^2-|2x+5|-8=0$; $x^2-|2x+4|-12=0$.

36. Найти произведение всех различных корней уравнения $x^2+2|x|-15=0$.

Четное уравнение: замена $x \to -x$ не меняет вида уравнения.

При $x \ge 0$: $x^2+2x-15=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-5 \text{ – посторонний} \\ x_2=3 \end{array}\right. \Rightarrow x=3$.

Четное уравнение имеет четные корни: $x=\pm 3$. *Ответ:* -9.

Д.З. Найти произведение всех различных корней уравнений $x^2+3|x|-9=0$; $x^2+5|x|-14=0$.

Однородное квадратное уравнение $x^2+pxy+qy^2=0$.

Сведение к квадратному уравнению: $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+p\dfrac{x}{y}+q=0$,

замена: $t=\dfrac{x}{y} \Rightarrow t^2+pt+q=0$.

37. Найти отношение $\dfrac{x}{y}$ из уравнения $x^2-3xy+2y^2=0$.

Замена: $t=\dfrac{x}{y} \Rightarrow t^2-3t+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=2 \\ t_2=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{x}{y}\right)_1=2 \\ \left(\dfrac{x}{y}\right)_2=1 \end{array}\right.$.

Д.З. Найти отношение $\frac{x}{y}$ из уравнения $x^2-9xy+8y^2=0$.

Одно решение квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$: $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ D=0 \end{array}\right.$.

---

38. Найти сумму всех значений параметра p, при которых уравнение $(2p^2-88p+1)x^2-2(p-9)x+1=0$ имеет одно решение.

1) $a=0 \Rightarrow 2p^2-88p+1=0 \Rightarrow p^2-44p+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow p_1+p_2=44$;

2) $D=0 \Rightarrow D=(p-9)^2-2p^2+88p-1=0 \Rightarrow$ $D=p^2-18p+81-2p^2+88p-1=0 \Rightarrow p^2-70p+80=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (D>0) \Rightarrow p_3+p_4=70$.

Ответ: $p_1+p_2+p_3+p_4=114$.

Д.З. Найти сумму всех значений параметра p, при которых уравнение $(p^2-3p+2)x^2+2(4p+5)x+17=0$ имеет одно решение;

$$(p^2-4p)x^2+8x+4+\frac{12}{p}=0.$$

39. Найти значения параметра p, при которых уравнение $\frac{x^2-6px+8p^2}{x^2-16x+48}=0$ имеет один корень.

$$\frac{(x-2p)(x-4p)}{(x-12)(x-4)}=0 \Rightarrow \text{ОДЗ } x\neq 12;\, 4$$

1) $p=6 \Rightarrow \frac{(x-12)(x-24)}{(x-12)(x-4)}=0 \Rightarrow \frac{(x-24)}{(x-4)}=0 \Rightarrow x=24$ – 1 корень;

2) $p=2 \Rightarrow \frac{(x-4)(x-8)}{(x-12)(x-4)}=0 \Rightarrow \frac{(x-8)}{(x-12)}=0 \Rightarrow x=8$ – 1 корень;

3) $p=3 \Rightarrow \frac{(x-6)(x-12)}{(x-12)(x-4)}=0 \Rightarrow \frac{(x-6)}{(x-4)}=0 \Rightarrow x=6$ – 1 корень;

4) $p=1 \Rightarrow \frac{(x-2)(x-4)}{(x-12)(x-4)}=0 \Rightarrow \frac{(x-2)}{(x-12)}=0 \Rightarrow x=2$ – 1 корень;

5) $p=0 \Rightarrow \frac{x^2}{(x-12)(x-4)}=0 \Rightarrow x=0$ – 1 корень.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $\frac{x^2-5px+4p^2}{x^2-12x+32}=0$ имеет один корень.

40. Найти значения параметра p, при которых уравнение $\frac{(x-6)(x-p)}{x^2-7x+12}=0$ имеет один корень.

$$\frac{(x-6)(x-p)}{(x-4)(x-3)}=0 \Rightarrow \text{ОДЗ } x \neq 3;4$$

1) $p=6$ – 1 корень;

2) $p=3 \Rightarrow \frac{(x-6)(x-3)}{(x-4)(x-3)}=0 \Rightarrow \frac{(x-6)}{(x-4)}=0$ – 1 корень;

3) $p=4 \Rightarrow \frac{(x-6)(x-4)}{(x-4)(x-3)}=0 \Rightarrow \frac{(x-6)}{(x-3)}=0$ – 1 корень.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $\frac{(x-3)(x-p)}{x^2-6x+8}=0$ имеет один корень.

41. Найти значения параметра p, при которых уравнение $\frac{(x-2)(4^x-p)}{(x-1)(x-3)}=0$ имеет одно решение.

ОДЗ $x \neq 1;3$. Одно решение уравнения при $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p_1=4 \\ p_2=64 \end{array}\right.$.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $\frac{(x-2)(3^x-p)}{(x-1)(x-5)}=0$ имеет одно решение.

Одно решение квадратного уравнения с ОДЗ $\begin{cases} ax^2+bx+c=0, \\ x\neq 0: \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} 1)\ a=0 \\ 2)\ D=0. \\ 3)\ c=0 \end{array}\right.$$

42. Найти значения параметра p, при которых уравнение $(p-1)x+2(p-2)+\dfrac{(p-3)}{x}=0$ имеет одно решение.

Приведение к стандартному виду:

$$\begin{cases} (p-1)x^2+2(p-2)x+(p-3)=0, \\ x\neq 0: \end{cases}$$

1) $a=0 \;\Rightarrow\; p_1=1$;

2) $D=0 \;\Rightarrow\; D=(p-2)^2-(p-1)(p-3)=0 \;\Rightarrow$ $p^2-4p+4=p^2-3p-p+3 \;\Rightarrow\; 4=3$?? $\Rightarrow$ нет решений;

3) $c=0 \;\Rightarrow\; p_2=3 \;\Rightarrow\; x[(p-1)x+2(p-2)]=0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ – постороннее} \\ (p-1)x+2(p-2)=0 \end{array}\right. \Rightarrow\; x=-\dfrac{2(p-2)}{(p-1)}=1$ – 1 решение.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $(p-2)x+2(p-3)+\dfrac{p-4}{x}=0$ имеет одно решение.

Одно решение квадратного уравнения с ОДЗ $\begin{cases} at^2+bt+c=0, \\ t\geq 0: \end{cases}$

1) $\begin{cases} a=0, \\ t_0\geq 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} D=0, \\ t_0\geq 0 \end{cases}$; 3) $t_1\cdot t_2\leq 0\ \ (D>0)$.

43. Найти значения параметра p, при которых уравнение $(p-5)\cdot x-10\cdot\sqrt{x}+1=0$ имеет одно решение.

Замена: $t=\sqrt{x}\ge 0 \Rightarrow \begin{cases}(p-5)\cdot t^2-10\cdot t+1=0,\\ t\ge 0:\end{cases}$

1) $a=0 \Rightarrow p_1=5 \Rightarrow t_0=\dfrac{1}{10}\ge 0;$

2) $D=25-p+5=0 \Rightarrow p_1=30 \Rightarrow t_0=\dfrac{5}{30-5}=\dfrac{1}{5}\ge 0;$

3) $t^2-\dfrac{10}{p-5}\cdot t+\dfrac{1}{p-5}=0 \Rightarrow t_1\cdot t_2=\dfrac{1}{p-5}<0 \Rightarrow p<5.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}p\le 5\\ p=30\end{array}\right.$.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $(p-3)\cdot x-14\cdot\sqrt{x}+1=0$ имеет одно решение.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $(p-4)\cdot x^4-12\cdot x^2+1=0$ имеет два решения.

Одно решение квадратного уравнения с ОДЗ $\begin{cases}at^2+bt+c=0,\\ t>0:\end{cases}$

1) $\begin{cases}a=0,\\ t_0=-c/a>0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}D=0,\\ t_0>0;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}c=0,\\ t_0=-b/a>0;\end{cases}$ 4) $t_1\cdot t_2<0$.

44. Найти значения параметра p, при которых уравнение $(p-2)\cdot 5^x-2(p-1)+\dfrac{(p-4)}{5^x}=0$ имеет одно решение.

Замена: $t=5^x>0 \Rightarrow \begin{cases}(p-2)\cdot t^2-2(p-1)\cdot t+(p-4)=0,\\ t>0:\end{cases}$

1) $a=0 \Rightarrow p_1=2 \Rightarrow t_0=\dfrac{(p_1-4)}{p_1-1}=-2<0$ – постороннее решение;

2) $D=0 \Rightarrow D=(p-1)^2-(p-2)(p-4)=0 \Rightarrow p_2=3/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_0=\dfrac{(p_2-1)}{p_2-2}=-1<0$ – постороннее решение;

3) $c=0 \Rightarrow p=4 \Rightarrow t[(p-2)t-2(p-1)]=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \text{ – постороннее} \\ t=3 \end{array}\right. \Rightarrow$ 1 решение;

4) $t_1 \cdot t_2<0$: приведенная форма: $t^2-2\dfrac{(p-1)}{(p-2)}\cdot t+\dfrac{(p-4)}{(p-2)}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_1 \cdot t_2=\dfrac{p-4}{p-2}<0 \Rightarrow 2<p<4$. *Ответ:* $2<p\le 4$

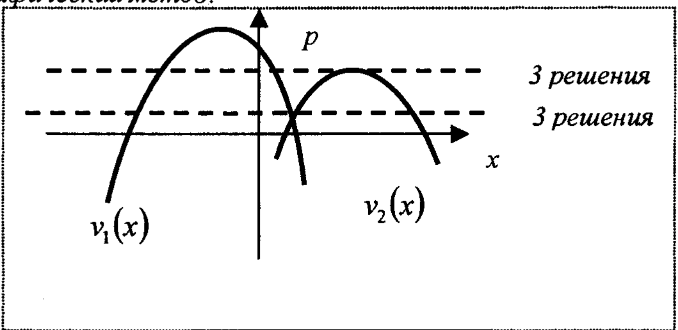
Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $(p-1)\cdot\sqrt{x}-2(p-2)+\dfrac{(p-4)}{\sqrt{x}}=0$ имеет одно решение.

Д.З. Найти сумму всех p, при которых уравнение $(p-1)x^2+2(p-2)+\dfrac{(p-3)}{x^2}=0$ имеет два решения.

Квадратное уравнение по параметру p:

$$(p-v_1(x))\cdot(p-v_2(x))=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=v_1(x) \\ p=v_2(x) \end{array}\right..$$

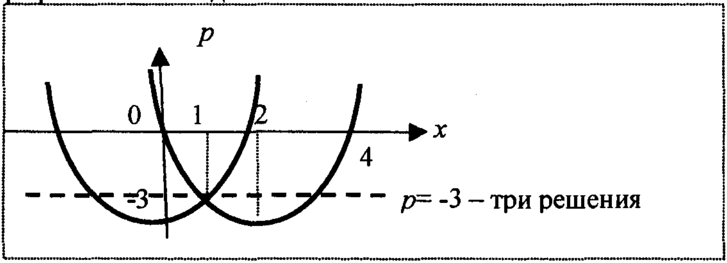
Графический метод:



45. Найти значения параметра p, при которых уравнение $(p-x^2+4)\cdot(p-x^2+4x)=0$ имеет 3 различных корня.

$$\left[\begin{array}{l} p-x^2+4=0 \\ p-x^2+4x=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=x^2-4 - \text{парабола усами вверх, } x_0=0 \\ p=x^2-4x - \text{парабола усами вверх, } x_0=2 \end{array}\right.$$

Графический метод:

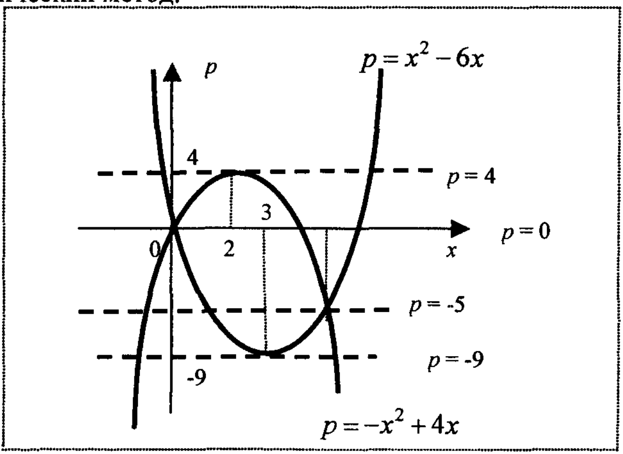


Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $(p-x^2+8)\cdot(p-x^2+8x)=0$ имеет 3 различных корня.

46. Найти значения параметра p, при которых уравнение $(p+x^2-4x)\cdot(p-x^2+6x)=0$ имеет 3 различных корня.

$$\left[\begin{array}{l} p+x^2-4x=0 \\ p-x^2+6x=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=-x^2+4x - \text{парабола усами вниз, } x_0=2 \\ p=x^2-6x - \text{парабола усами вверх, } x_0=3 \end{array}\right.$$

Графический метод:



$$-x^2+4x=x^2-6x \Rightarrow 2x^2-10x=0 \Rightarrow x=5 \Rightarrow p_0=25-30=-5.$$

Ответ: $p_0=-9;-5;\ 0;\ 4$.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $\left(p+x^2-6x\right)\cdot\left(p-x^2+8x\right)=0$ имеет 3 различных корня.

Квадратное уравнение по параметру $p^2+2p\cdot f(x)+g(x)=0$.

Корни уравнения $p_{1.2}=-f(x)\pm\sqrt{f^2(x)-g(x)}$.

Важный частный случай: под радикалом полный квадрат

$$p_{1.2}=-f(x)\pm\sqrt{w^2(x)}=-f(x)\pm|w(x)|=-f(x)\pm w(x);$$

$$\left[\begin{array}{l} p=-f(x)+w(x) \\ p=-f(x)-w(x) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=v_1(x) \\ p=v_2(x) \end{array}\right..$$

Квадрат трехчлена

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,$$

$$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc,$$

$$(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc.$$

---

47. Найти квадрат выражения x^2+x+1.

$$\left(x^2+x+1\right)^2=x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x=x^4+2x^3+3x^2+2x+1.$$

Д.З. Найти квадрат выражения x^2-2x+2.

48. Найти значения параметра p, при которых уравнение $p^2+2p\cdot\left(x^2+x+1\right)+\left(x^4+2x^3+2x^2+4x\right)=0$ имеет 3 различных корня.

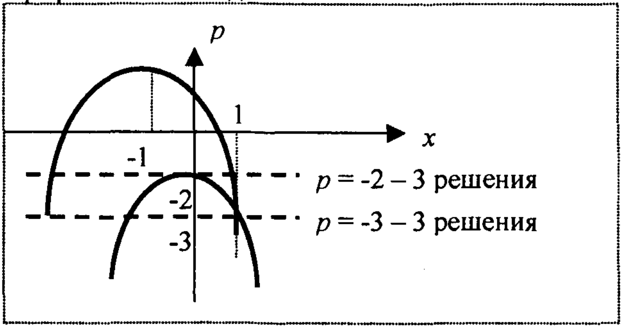
$D=f^2(x)-g(x)=$

$=x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x-x^4-2x^3-2x^2-4x=x^2-2x+1=(x-1)^2.$

$$p_{1,2}=-x^2-x-1\pm|x-1|=-x^2-x-1\pm(x-1) \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} p=-x^2-2-\text{парабола усами вниз}, x_0=0 \\ p=-x^2-2x-\text{парабола усами вниз}, x_0=-1 \end{array}\right..$$

Графический метод:



$p=-3;-2$.

Д.3. Найти значения параметра p, при которых уравнение $x^4+2x^3+2x^2(p+1)+x(2p+4)+p^2+2p=0$ имеет 3 различных корня.

49. Найти значения параметра p, при которых уравнение $x^4-10x^3+x^2(29+2p)-x(10p+20)+p^2+5p=0$ имеет 3 различных корня.

Квадратное уравнение по параметру p:

$$p^2+2p\cdot\left(x^2-5x+\frac{5}{2}\right)+\left(x^4-10x^3+29x^2-20x\right)=0.$$

Дискриминант:

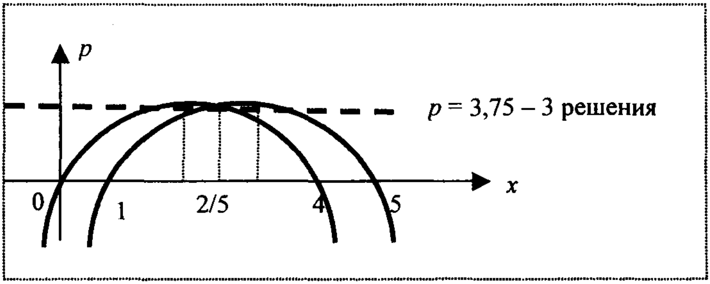
$$D=\left(x^2-5x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(x^4-10x^3+29x^2-20x\right)=$$

$$=\underline{x^4}+\overline{25x^2}+\frac{25}{4}\underline{\underline{-10x^3}}+\overline{5x^2}\,\overline{\overline{-25x}}\,\underline{-x^4}+\underline{\underline{10x^3}}\,\overline{-29x^2}+\overline{\overline{20x}}=$$

$$=x^2-5x+\frac{25}{4}=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2.$$

$$p_{1,2}=-x^2+5x-\frac{5}{2}\pm\left|x-\frac{5}{2}\right|=-x^2+5x-\frac{5}{2}\pm\left(x-\frac{5}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}p=-x^2+6x-5\\ p=-x^2+4x\end{array}\right..$$



$p = 3{,}75$.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $x^4 - 6x^3 + x^2(17-2p) + x(6p-26) + p^2 - 9p + 20 = 0$ имеет 3 различных корня;

$$x^4 - 10x^3 + x^2(31-2p) - x(10p-30) + p^2 - 15p = 0.$$

50. Найти значения параметра p, при которых уравнение $2x^{12} + 10x^8 - 2\sqrt{p}\cdot x^7 - 128x^6 + 25x^4 - 10\sqrt{p}\cdot x^3 + p\cdot x^2 + 4096 = 0$ имеет хотя бы один корень.

Квадратное уравнение по параметру p:

$$x^2\cdot p + 2\sqrt{p}\cdot\left(x^7 + 5x^3\right) + \left(2x^{12} + 10x^8 - 128x^6 + 25x^4 + 4096\right) = 0.$$

Дискриминант:

$$D = \left(x^7 + 5x^3\right)^2 - x^2\cdot\left(2x^{12} + 10x^8 - 128x^6 + 25x^4 + 4096\right) =$$

$$\underline{x^{14}} + \overline{10x^{10}} + \underline{\underline{25x^6}} \underline{-2x^{14}} \overline{-10x^{10}} + \overline{\overline{128x^8}} \underline{\underline{-25x^6}} - 4096x^2 = \qquad \Rightarrow$$

$$-x^{14} + 126x^8 - 4096x^2 = -x^2\left(x^{12} - 126x^6 + 4096\right) = -x^2\left(x^6 - 2^6\right)^2 \geq 0$$

$$D = x^2\left(x^6 - 2^6\right)^2 \leq 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.;$$

1) $x = 0 \;\Rightarrow\; 4096 = 0$?? $\Rightarrow$ постороннее,

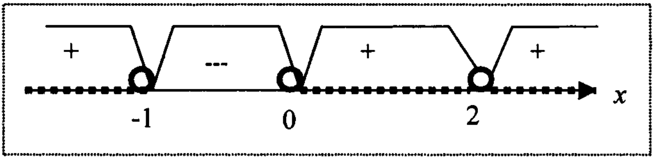
2) $x = \pm 2:\; \sqrt{p} = \dfrac{-\left(x^7 + 5x^3\right)}{x^2} = -\left(x^5 + 5x\right) = -x\cdot\left(x^4 + 5\right) \geq 0 \;\Rightarrow\; x = -2$

$\Rightarrow\; \sqrt{p} = 2\cdot\left(2^4 + 5\right) = 2\cdot 21 = 42 \;\Rightarrow\; p = (42)^2.$

Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $2x^8 + 16x^6 - 2\sqrt{p}\cdot x^5 - 46x^4 - 16\sqrt{p}\cdot x^3 + p\cdot x^2 + 81 = 0$ имеет хотя бы один корень.

4. МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

1. Решить неравенство $x(x+1)(x-2)^2>0$.

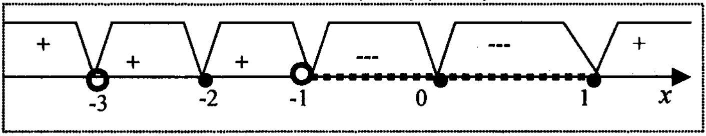


$$\left[\begin{array}{l} x>2, \\ 0<x<2, \\ x<-1. \end{array}\right.$$

Д.З. Решить неравенства

$$x^2(x-1)(x+2)^4\le 0\,;\ \left(x^4-1\right)(2-5x)>0\,.$$

2. Решить неравенство $\dfrac{x^2(x-1)(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^2}\le 0$.



$-1<x\le 1$.

Д.З. Решить неравенства

$$\frac{\left(x^2-x-12\right)\left(x^2-10x+24\right)}{x^2-6x+5}\le 0\,;\ \frac{\left(x^2-3x-18\right)\left(x^2-4x+3\right)}{\left(x^2-8x+7\right)}\le 0\,.$$

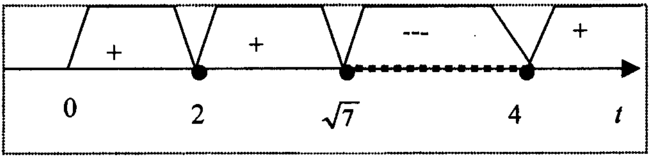
3. Решить неравенство $\left(x^2-11x+28\right)\left(x-6\sqrt{x}+8\right)\le 0$.

ОДЗ $x\ge 0\ \Rightarrow$ замена: $t=\sqrt{x}\ge 0\ \Rightarrow\ \left(t^4-11t^2+28\right)\left(t^2-6t+8\right)\le 0\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\left(t^2-7\right)\left(t^2-4\right)(t-2)(t-4)\le 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(t-\sqrt{7}\right)\left(t+\sqrt{7}\right)(t-2)(t+2)(t-2)(t-4)\le 0\ \Rightarrow$$

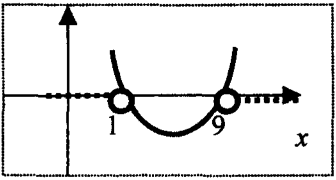
$$\Rightarrow\left(t+\sqrt{7}\right)>0\ \ (t+2)>0\ \Rightarrow\ \left(t-\sqrt{7}\right)(t-2)^2(t-4)\le 0\ \Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{7}\le t\le 4 \\ t=2\end{array}\right.;$$



возврат в исходную переменную: $\left[\begin{array}{l} 7 \le x \le 16 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

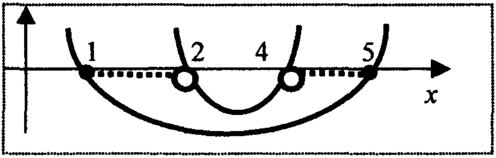
4. Решить неравенство $x^2 - 10x + 9 > 0$.

Корни уравнения $\left[\begin{array}{l} x_1 = 9 \\ x_2 = 1 \end{array}\right.$. Решение вне корней $\left[\begin{array}{l} x > 9 \\ x < 1 \end{array}\right.$.



Д.З. Решить неравенство $x^2 - 11x + 10 \le 0$.

5. Решить систему неравенств $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0, \\ x^2 - 5x + 6 \le 0. \end{cases}$



$\left[\begin{array}{l} 1 \le x < 2 \\ 4 < x \le 5 \end{array}\right.$.

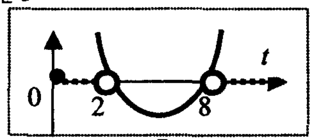
Д.З. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 - 7x + 10 \le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2(x-1)(x+2)^4 > 0, \\ (x+1)(x+3)^2 \le 0. \end{cases}$$

6. Решить неравенство $x^4 - 10x^2 + 16 > 0$.

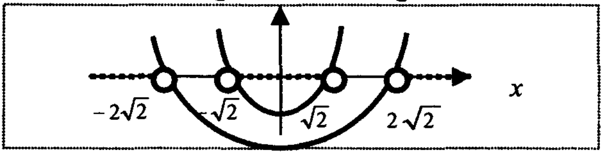
Замена: $t = x^2 \ge 0 \Rightarrow t^2 - 10t + 16 > 0$.

Корни уравнения $\left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = 8 \end{array}\right.$. Решение вне корней $\left[\begin{array}{l} 0 \le t < 2 \\ t > 8 \end{array}\right. \Rightarrow$



возврат в исходную переменную: $\left[\begin{array}{l} 0 \le x^2 < 2 \\ x^2 > 8 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2 < 0 \\ x^2 - 8 > 0 \end{array}\right. \Rightarrow$

корни уравнений $\left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{2} \\ x=\pm 2\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{решение между корнями } \pm\sqrt{2} \\ \text{решение вне корней } \pm 2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

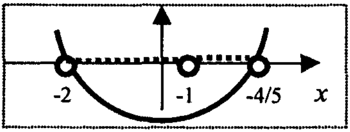


$$\left[\begin{array}{l} -\sqrt{2}<x<\sqrt{2} \\ x>2\sqrt{2} \\ x<-2\sqrt{2} \end{array}\right. .$$

Д.З. Решить неравенство $x^4-10x^2+9>0$.

7. Решить неравенство $\left|\dfrac{2x+1}{x+1}\right|>3$.

ОДЗ $x\neq -1$. Метод возведения в квадрат: $(2x+1)^2>9(x+1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (2x+1)^2-9(x+1)^2>0 \quad \Rightarrow \quad (2x+1-3x-3)(2x+1+3x+3)>0 \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow (-x-2)\,(5x+4)>0 \Rightarrow (x+2)(5x+4)<0 \Rightarrow$



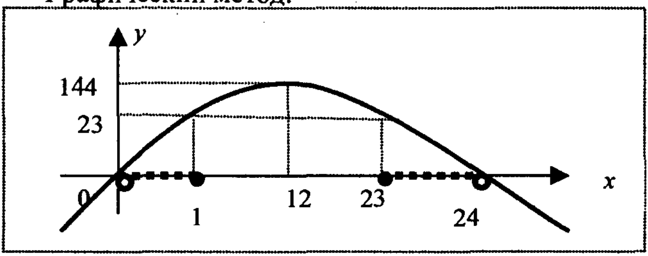
решение между корнями $\left[\begin{array}{l} -2<x<-1 \\ -1<x<-\dfrac{4}{5} \end{array}\right.$.

Д.З. Решить неравенства $\left|\dfrac{x+2}{x+4}\right|<1$; $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|>1$.

8. Решить неравенство $0<x\cdot(24-x)\leq 23$

$$\begin{cases} x\cdot(24-x)>0, \\ x\cdot(24-x)\leq 23. \end{cases}$$

Графический метод:



$$\left[\begin{array}{l} 0<x\leq 1 \\ 23\leq x<24 \end{array}\right. .$$

Д.З. Решить неравенство $0 < x \cdot (13 - x) \le 12$.

9. Решить неравенство $x - 5\sqrt{x} + 6 \le 0$.

Замена: $t = \sqrt{x} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 5t + 6 \le 0, \\ t \ge 0. \end{cases}$

Корни уравнения $\left[\begin{array}{l} t_1 = 3 \\ t_2 = 2 \end{array}\right.$. Решение между корнями $2 \le t \le 3$;

возврат в исходную переменную: $2 \le \sqrt{x} \le 3 \Rightarrow 4 \le x \le 9$.

Д.З. Решить неравенство $x - 8\sqrt{x} + 12 \ge 0$; $x - 7\sqrt{x} + 12 > 0$.

10. Решить неравенство $x^2 + 28x < 11\sqrt{x^3}$.

ОДЗ $x \ge 0 \Rightarrow x \cdot \left(x - 11\sqrt{x} + 28\right) < 0 \Rightarrow x - 11\sqrt{x} + 28 < 0$.

Замена: $t = \sqrt{x} \ge 0 \Rightarrow t^2 - 11 \cdot t + 28 < 0 \Rightarrow$ корни уравнения $\left[\begin{array}{l} t_1 = 4 \\ t_2 = 7 \end{array}\right.$.

Решение между корнями $4 < t < 7$.

Возврат в исходную переменную: $4 < \sqrt{x} < 7 \Rightarrow 16 < x < 49$.

Д.З. Решить неравенство $x^2 + 40x \le 13\sqrt{x^3}$; $x^2 + 15x < 8\sqrt{x^3}$.

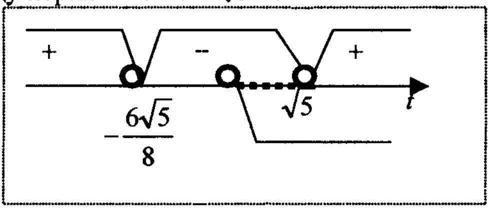
11. Решить неравенство $4\sqrt{x} - \dfrac{15}{\sqrt{x}} < \sqrt{5}$.

ОДЗ $x > 0 \Rightarrow 4x - \sqrt{5} \cdot \sqrt{x} - 15 < 0 \Rightarrow$ замена: $t = \sqrt{x} > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4t^2 - \sqrt{5} \cdot t - 15 < 0$.

Корни уравнения

$$t_{1,2} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{5 + 15 \cdot 16}}{8} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{5} \cdot 7}{8} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -\dfrac{6\sqrt{5}}{8} \\ t_2 = \sqrt{5} \end{array}\right..$$

Решение между корнями $0 < t < \sqrt{5} \Rightarrow$



Возврат в исходную переменную: $0 < x < 5$.

Д.З. Решить неравенства $3\sqrt{x} - \frac{14}{\sqrt{x}} < \sqrt{7}$; $4\sqrt{x} - \frac{9}{\sqrt{x}} < \sqrt{3}$.

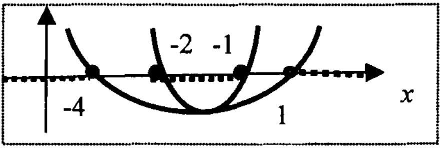
12. Решить неравенство $\left(x^2 + 3x + 1\right)\left(x^2 + 3x - 3\right) \geq 5$.

Замена: $t = x^2 + 3x + 1 \quad \Rightarrow \quad t(t-4) \geq 5 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 4t - 5 \geq 0 \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq -1 \\ t \geq 5 \end{array}\right.$.

Возврат в исходную переменную:

1) $t \geq 5 \;\Rightarrow\; x^2 + 3x + 1 \geq 5 \;\Rightarrow\; x^2 + 3x - 4 \geq 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} x \leq -4 \\ x \geq 1 \end{array}\right.$;

2) $t \leq -1 \;\Rightarrow\; x^2 + 3x + 1 \leq -1 \;\Rightarrow\; x^2 + 3x + 2 \leq 0 \;\Rightarrow\; -2 \leq x \leq -1$.



Объединение двух случаев:
$\left[\begin{array}{l} x \leq -4 \\ -2 \leq x \leq -1. \\ x \geq 1 \end{array}\right.$

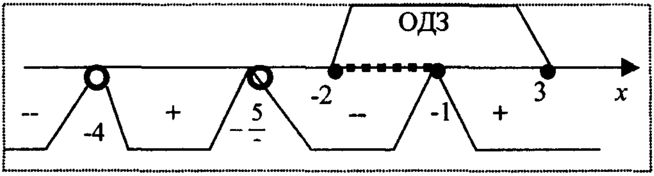
Д.З. Решить неравенство $\left(x^2 - 2x - 5\right)\left(x^2 - 2x - 6\right) \geq 6$.

13. Решить неравенство $\frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{2x + 5} \geq \frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{x + 4}$.

ОДЗ $6 + x - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 6 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)(x-3) \leq 0 \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow -2 \leq x \leq 3$;

$\frac{1}{2x+5} \geq \frac{1}{x+4} \quad \Rightarrow \quad \frac{x + 4 - 2x - 5}{(2x+5)(x+4)} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-x-1}{(2x+5)(x+4)} \geq 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x+1}{(2x+5)(x+4)} \leq 0$.



$$\left[\begin{array}{l}-2 \le x \le -1 \\ x = 3\end{array}\right..$$

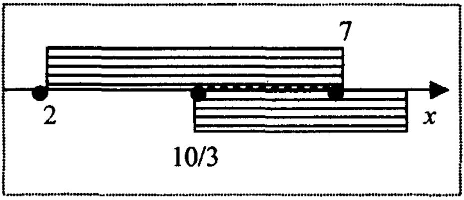
Д.З. Решить неравенства

$$\frac{\sqrt{10-3x-x^2}}{x-1} \ge \frac{\sqrt{10-3x-x^2}}{x+4}; \quad \frac{\sqrt{12+x-x^2}}{2+x} \ge 0.$$

14. Решить неравенство $(3x-10)\cdot\sqrt{9x-x^2-14} \ge 0$.

$$\begin{cases}9x-x^2-14 \ge 0, \\ 3x-10 \ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-9x+14 \le 0, \\ x \ge \dfrac{10}{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x-2)(x-7) \le 0, \\ x \ge \dfrac{10}{3}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2 \le x \le 7, \\ x \ge \dfrac{10}{3}\end{cases} \Rightarrow$$



$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{10}{3} \le x \le 7 \\ x = 2\end{array}\right..$$

Д.З. Решить неравенства

$$(2-x)\cdot\sqrt{x-x^2+6} \le 0; \ (3-x)\sqrt{x^2-x-2} > 0.$$

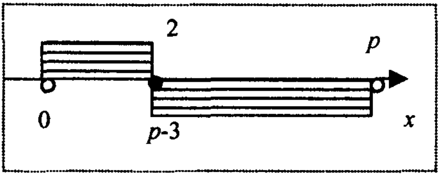
Д.З. Найти ОДЗ функции

$$y=\sqrt{-x+3\sqrt{x}+4}; \ y=\sqrt{(x^2-1)(x-3)(x-5)}.$$

Д.З. Сколько целых чисел содержится в области определения функции $y=\sqrt{-x^2-10x-24}$?

Д.З. Найти все значения параметра a, при которых область определения функции $y=\sqrt{5a-7-x}+\sqrt{x-3}$ – пустое множество.

15. Найти сумму значений параметра p, при которых система $\begin{cases} 0 < x \le 2, \\ 0 < p - x \le 3 \end{cases}$ имеет одно решение.

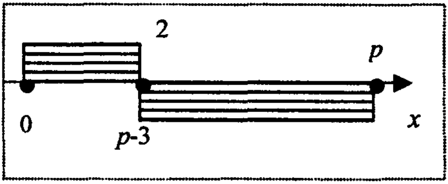
$\begin{cases} 0 < x \le 2, \\ p - 3 \le p - x < p \end{cases} \Rightarrow$ 

$\Rightarrow\ p = 5$.

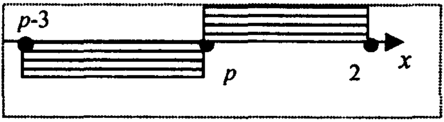
Д.З. Найти сумму значений параметра p, при которых система $\begin{cases} 0 < x \le 5, \\ 0 < p - x \le 7 \end{cases}$ имеет одно решение.

16. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le p - x \le 3 \end{cases}$ имеет одно решение.

$\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ p - 3 \le x \le p. \end{cases}$

1. 

$\Rightarrow \begin{cases} p - 3 = 2, \\ p \ge 2 \end{cases} \Rightarrow\ p = 5$;

2. 

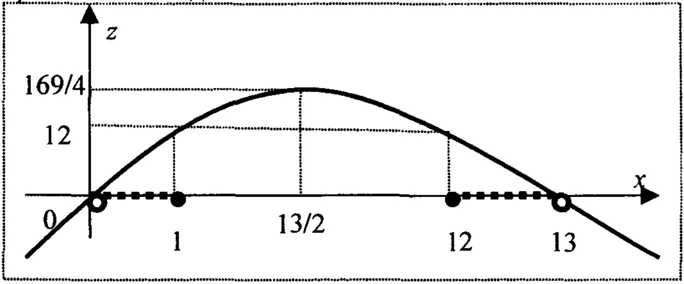
$\Rightarrow \begin{cases} p = 0, \\ p - 3 \le 0 \end{cases} \Rightarrow\ p = 0$.

Д.З. Найти сумму всех различных значений p, при которых система $\begin{cases} 2 \le x \le 5, \\ 1 \le p - x \le 7 \end{cases}$ имеет одно решение.

17. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} 0 < x \cdot (13 - x) \le 12, \\ 0 < (x - p)(4 - x + p) \le 3 \end{cases}$ имеет одно решение.

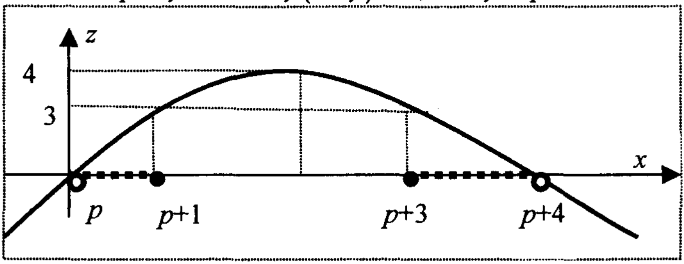
1) $0 < x\cdot(13-x) \le 12$;

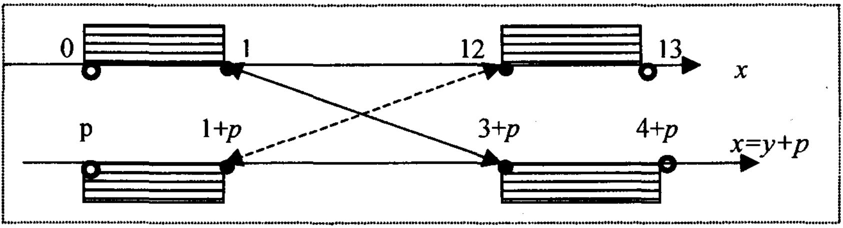
Графический метод:



2) $0<(x-p)(4-x+p)\le 3$.

Замена: $x-p=y \Rightarrow 0<y(4-y)\le 3$; $x=y+p$.





1) $3+p_1=1 \Rightarrow p_1=-2$; 2) $1+p_2=12 \Rightarrow p_2=11$.

Д.З. Найти сумму всех различных значений p, при которых система $\begin{cases}0<x(24-x)\le 23,\\ 0<(x-p)(9-x+p)\le 8\end{cases}$ имеет одно решение.

18. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases}x^2+8px+15p^2\le 0,\\ (x-288)^2\ge(21p)^2\end{cases}$ имеет одно решение.

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x}{p}+5\right)\left(\dfrac{x}{p}+3\right)\le 0,\\ (x-(288-21p))\cdot(x-(288+21p))\ge 0\end{cases} \Rightarrow$$

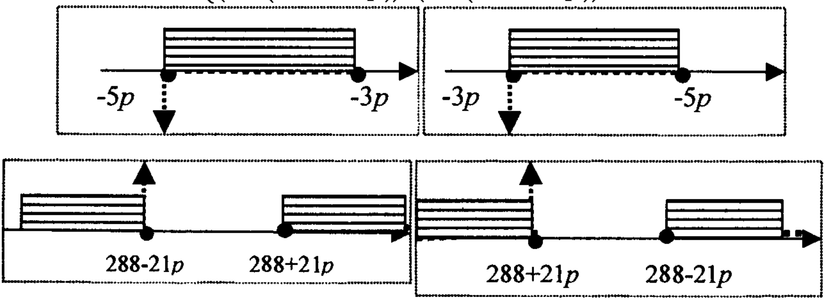
$$\Rightarrow \begin{cases}-5\le \dfrac{x}{p}\le -3,\\ (x-(288-21p))\cdot(x-(288+21p))\ge 0.\end{cases}$$

1) $p>0$:

$$\begin{cases}-5p\le x\le -3p,\\ (x-(288-21p))\cdot(x-(288+21p))\ge 0\end{cases};$$

2) $p<0$:

$$\begin{cases}-3p\le x\le -5p,\\ (x-(288+21p))\cdot(x-(288-21p))\ge 0\end{cases}$$

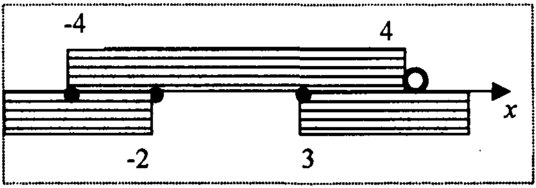


$$288-21p_1=-5p_1 \Rightarrow p_1=18; \quad 288+21p_2=-3p_2 \Rightarrow p_2=-12.$$

Д.З. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases}x^2+12px+35p^2\le 0,\\ (x-240)^2\ge (19p)^2\end{cases}$ имеет одно решение.

19. Найти ОДЗ функции $y=\sqrt{\dfrac{x^2-x-6}{\arccos^2\dfrac{x}{4}}}$.

$$\begin{cases}x^2-x-6\ge 0,\\ -4\le x<4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ x\le -2\end{array}\right.,\\ -4\le x<4\end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3 \le x < 4 \\ -4 \le x \le -2 \end{array}\right..$$

Д.З. Найти ОДЗ функции $y = \sqrt{\dfrac{\arcsin^2\left(\dfrac{x}{2} - 5\right)}{-x^2 + 17x - 70}}$.

20. Решить уравнение $\sqrt{x} = \sqrt{x}$.

ОДЗ $x \ge 0$ $\Rightarrow$ 0=0 $\Rightarrow$ Ответ: ОДЗ !!! $x \ge 0$.

Д.З. Решить уравнения

$$\sqrt{\frac{x}{x-1}} = \sqrt{\frac{x}{x-1}}\,;\; \sqrt{\frac{(x-4)(x+2)}{x-1}} = \sqrt{\frac{(x-4)(x+2)}{x-1}}.$$

21. Решить уравнение $x - 5 = \sqrt{x+7}$.

ОДЗ $\begin{cases} x \ge -4 - \text{ОДЗ радикала}, \\ x \ge 5 - \text{условие возведения в квадрат} \end{cases} \Rightarrow x \ge 5.$

Возведение в квадрат: $x^2 - 10x + 25 = x + 7 \Rightarrow x^2 - 11x + 18 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 - \text{посторонний} \\ x = 9 \end{array}\right. \Rightarrow x = 9.$$

Д.З. Решить уравнения $\sqrt{5x-15} - \sqrt{x+1} = 2$; $x - 3 = \sqrt{x+5}$.

22. Решить уравнение $\sqrt{x + 1 + 4\sqrt{x-3}} + \sqrt{x + 1 - 4\sqrt{x-3}} = 4$.

ОДЗ $x \ge 3$. Метод возведения в квадрат:

$$\left(x+1+4\sqrt{x-3}\right) + \left(x+1-4\sqrt{x-3}\right) +$$

$$+2\sqrt{\left(x+1+4\sqrt{x-3}\right)\cdot\left(x+1-4\sqrt{x-3}\right)} = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{x^2 - 14x + 49} = 7 \Rightarrow x + |x - 7| = 7.$$

1) $x \ge 7 \Rightarrow x = 7$; 2) $x < 7 \Rightarrow$ 7=7 $\Rightarrow x < 7$.

Ответ: $3 \le x \le 7$.

Д.З. Решить уравнения $\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}=4$; $\sqrt{2x+2+2\sqrt{2x+1}}+\sqrt{2x+2-2\sqrt{2x+1}}=2$.

23. Решить неравенство $\sqrt{x+2}<x$.

ОДЗ $x\ge -2$.

1) условие возведения в квадрат $x\ge 0$:

$$x+2<x^2 \Rightarrow x^2-x-2>0 \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>2\\ x<-1\end{array}\right.,\\ x\ge -2,\\ x\ge 0\end{cases} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>2\\ x<-1\end{array}\right. \Rightarrow x>2;\\ x\ge 0\end{cases}$$

2) (без возведения в квадрат) $\begin{cases}x<0,\\ x\ge -2;\end{cases}$

логический анализ неравенства $\sqrt{}$ < отрицательного числа: нет решений.

Ответ: $x>2$.

Д.З. Решить неравенства $\sqrt{6x-x^2-5}\le x-1$; $\sqrt{x+2}<x+1$.

24. Решить неравенство $\sqrt{x+2}>x$.

ОДЗ $x\ge -2$.

1) Условие возведения в квадрат $x\ge 0$:

$$x+2>x^2 \Rightarrow x^2-x-2<0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=2\\ x_2=-1\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}-1<x<2,\\ x\ge -2,\\ x\ge 0\end{cases} \Rightarrow 0\le x<2;$$

2) (без возведения в квадрат) $\begin{cases}x<0,\\ x\ge -2;\end{cases}$

логический анализ неравенства $\sqrt{}$ > отрицательного числа:

весь интервал анализа $-2\le x<0$ является решением.

Ответ: $\left[\begin{array}{l}0\le x<2\\ -2\le x<0\end{array}\right. \Rightarrow -2\le x<2$.

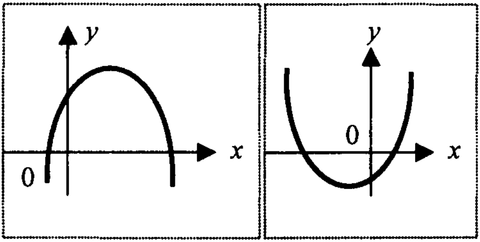
Д.З. Решить неравенства

$$\sqrt{x+4}\le 3;\ \sqrt{2x+1}\le\sqrt{x+4}+1;\ \sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x.$$

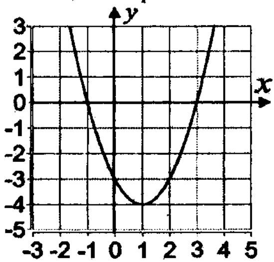
5. ПАРАБОЛА

$$y = ax^2 + bx + c, \quad \textit{вершина параболы}: x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

1. Определить знаки параметров a, b, c для параболы $y = ax^2 + bx + c$.

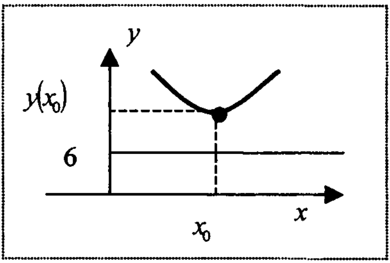


2. Указать график функции, изображенный на рисунке



1) $y = x^2 - 2x - 3$; 2) $y = x^2 + 2x - 3$; 3) $y = x^2 - 4x - 3$; 4) $y = -x^2 + 4x - 3$; 5) $y = x^2 - 3x - 3$.

3. Найти значения a, при которых парабола $y = x^2 + 2ax - 5a$ выше прямой $y = 6$.



$y(x_0) > 6 \Rightarrow x_0 = -a \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 - 2a^2 - 5a > 6 \Rightarrow a^2 + 5a + 6 < 0 \Rightarrow -3 < a < -2$.

Д.З. Найти значения параметра a, при которых парабола $y = x^2 + 2ax + 3a$ выше прямой $y = 2$.

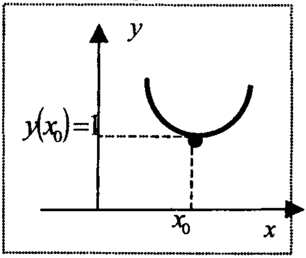
Д.З. Найти все значения параметра p, при которых парабола $y = -x^2 + 2px$ ниже прямой $y = 4$.

4. Найти все значения параметра p, при которых наибольшее значение функции $y = -x^2 + 2px$ больше 9.

$$x_0 = p:\ y(p) > 9 \Rightarrow -p^2 + 2p^2 > 9 \Rightarrow p^2 > 9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p > 3 \\ p < -3 \end{array}\right..$$

Д.З. Найти все значения параметра p, при которых наибольшее значение функции $y = -x^2 + 4x + p$ больше 7.

5. При каком положительном значении параметра p наименьшее значение трехчлена $x^2 + px + p$ равно 1?



$$x_0 = -\frac{p}{2}:\ y\left(-\frac{p}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} - p = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{p^2}{4} - p = 1 \Rightarrow p^2 + 4p - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} p_1 = -2 - 2\sqrt{2} < 0 - \text{постороннее} \\ p_2 = -2 + 2\sqrt{2} > 0 \end{array}\right. \Rightarrow p = -2 + 2\sqrt{2}.$$

Д.З. При каком значении параметра p наименьшее значение трехчлена $x^2 + px - p$ равно 1?

6. Найти наибольшее значение функции $y = \sqrt{-x^2 + 9x - 8}$.

Под радикалом парабола усами вниз. Вершина параболы $x_0 = \dfrac{9}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{\max} = y\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{7}{2}.$$

Д.З. Найти наибольшее значение функции $y=\sqrt{-x^2+6x-8}$.

7. Найти наименьшее положительное значение функции $y=\dfrac{2}{-x^2+4x-3}$.

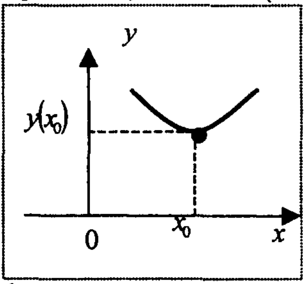
Минимум функции y в точке максимума знаменателя $x_0=2 \Rightarrow$ $\Rightarrow y_{\min}=y(2)=2$.

Д.З. Найти наименьшее положительное значение функции $y=\dfrac{4}{-x^2+6x-5}$.

Д.З. Найти наибольшее значение функции $y=\dfrac{2}{x^2+4x+7}$; $y=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+6x+10}}$.

8. Найти значения параметра a, при которых вершина параболы $y=x^2-6x+2ax+a+3$ лежит в I четверти.

Стандартный вид параболы: $y=x^2-2x(3-a)+a+3$.



$$\begin{cases} x_0>0, \\ y(x_0)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=3-a>0, \\ y(x_0)=(3-a)^2-2(3-a)^2+a+3>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a<3, \\ -(3-a)^2+a+3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<3, \\ -9+6a-a^2+a+3>0 \end{cases} \Rightarrow$$

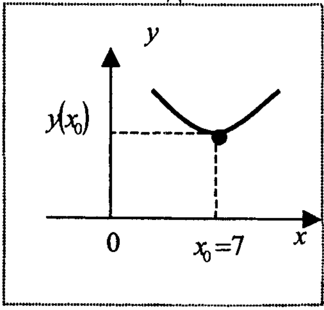
$$\Rightarrow \begin{cases} a<3, \\ a^2-7a+6<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<3, \\ 1<a<6 \end{cases} \Rightarrow 1<a<3.$$

Д.З. Найти значения параметра a, при которых вершина параболы $y=(3a-1)x^2+2ax+a$ лежит во II четверти.

9. При каком значении параметра p функция

$$f(x) = px^2 + \left(4p^2 - 8\right)x + 11$$

в точке $x = 7$ достигает минимума?



Минимум у параболы усами вверх при $p > 0$.

Вершина параболы: $x_0 = \dfrac{-4p^2 + 8}{2p} = 7 \quad \Rightarrow \quad -2p^2 + 4 = 7p \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow 2p^2 + 7p - 4 = 0$;

$$p_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{-7 \pm 9}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p_1 = -4 < 0 - \text{постороннее} \\ p_2 = \dfrac{1}{2} > 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow p = \dfrac{1}{2}$.

Д.З. При каком значении параметра p функция $f(x) = px^2 + \left(4p^2 - 8\right)x + 21$ в точке $x = 7$ достигает максимума?

10. При каком значении параметра a сумма квадратов корней $x^2 + ax - 1 - a = 0$ будет наименьшей?

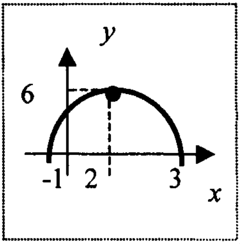
$$f = x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2\right) - 2x_1x_2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 =$$
$$= a^2 - 2(-1 - a) = a^2 + 2a + 2.$$

Парабола усами вверх. Минимум в вершине параболы: $a_0 = -1$.

Д.З. При каком значении параметра a сумма квадратов корней $x^2 - 2ax + 2a^2 - 1 = 0$ будет наименьшей?

11. Найти множество значений функции $y = (2x + 2)(3 - x)$.

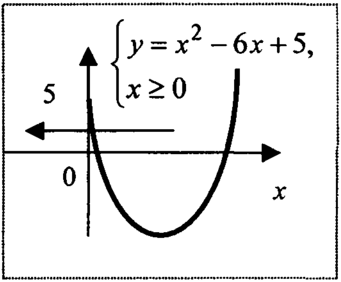
Парабола усами вниз. Нули параболы $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow \quad x_0 = 2 \quad \Rightarrow$



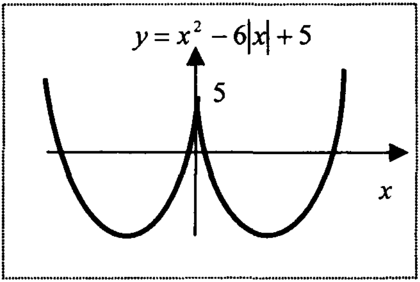
$y_{\max} = y(2) = 6 \;\Rightarrow\; y \le 6$.

Д.З. Найти множество значений функции $y = (2x+4)(x-4)$; $y = (2x+3)(5-2x)$.

12. Построить график функции $y = x^2 - 6\cdot|x| + 5$.



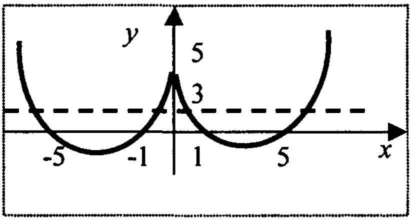
$\Rightarrow$



Д.З. Построить график функции $y = x^2 - 7\cdot|x| + 10$.

13. Сколько решений имеет уравнение $x^2 - 6\cdot|x| + 5 = 3$?

Графический метод: левая функция – $y_л = x^2 - 6\cdot|x| + 5 = 3$ (сплошная); правая функция – $y_п = 3$ (пунктирная).

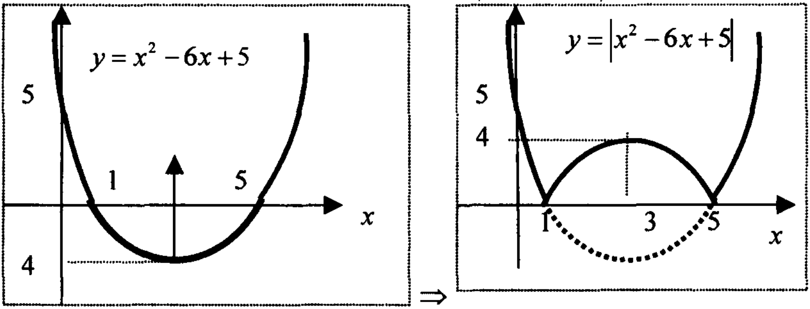


4 решения.

Д.З. Найти число различных решений уравнения

$$x^2 - 7\cdot|x| + 10 = 6.$$

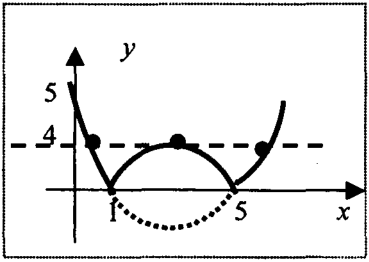
14. Построить график функции $y = \left| x^2 - 6x + 5 \right|$.



Д.З. Построить график функции $y = \left| x^2 - 8x + 15 \right|$.

15. Сколько решений имеет уравнение $\left| x^2 - 6x + 5 \right| = 4$?

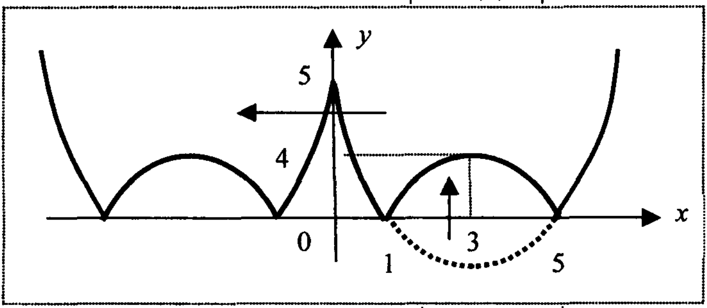
Графический метод: левая функция – $y_л = \left| x^2 - 6 \cdot x + 5 \right|$ (сплошная); правая функция – $y_п = 4$ (пунктирная).



3 решения.

Д.З. Сколько решений имеет уравнение $\left| x^2 - 8x + 15 \right| = 3$?

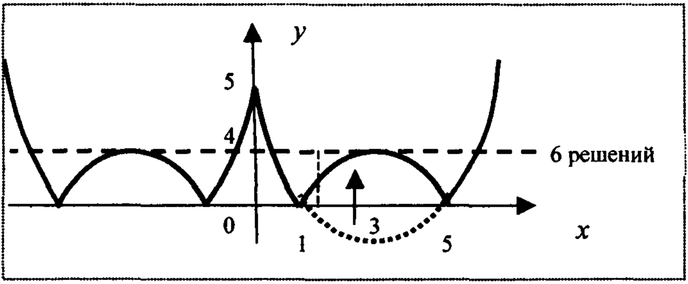
16. Построить график функции $y = \left| x^2 - 6|x| + 5 \right|$.



Д.З. Построить график функции $y = \left| x^2 - 9|x| + 18 \right|$.

17. Найти число решений уравнения $\left|x^2-6|x|+5\right|=4$.

Графический метод: левая функция – $y_л=\left|x^2-6\cdot|x|+5\right|$ (сплошная); правая функция – $y_п=4$ (пунктирная).

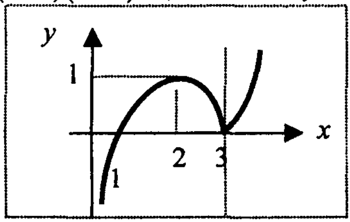


6 решений.

Д.З. Найти число решений уравнения $\left|x^2-9|x|+18\right|=6$.

18. Построить график функции $y=(x-1)\cdot|x-3|$.

1) $x\ge 3 \Rightarrow y=(x-1)(x-3)$; 2) $x<3 \Rightarrow y=-(x-1)(x-3)$.

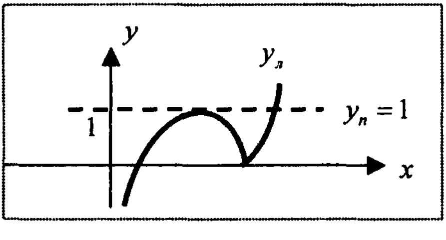


Д.З. Построить график функции

$$y=(x-3)\cdot|x-1|;\ y=(x-1)\cdot|x-2|;\ y=(x-2)\cdot|x-1|.$$

19. Сколько решений имеет уравнение $(x-1)\cdot|x-3|=1$?

Графический метод: левая функция – $y_л=(x-2)\cdot|x-1|$ (сплошная); правая функция – $y_п=1$ (пунктирная).



2 решения.

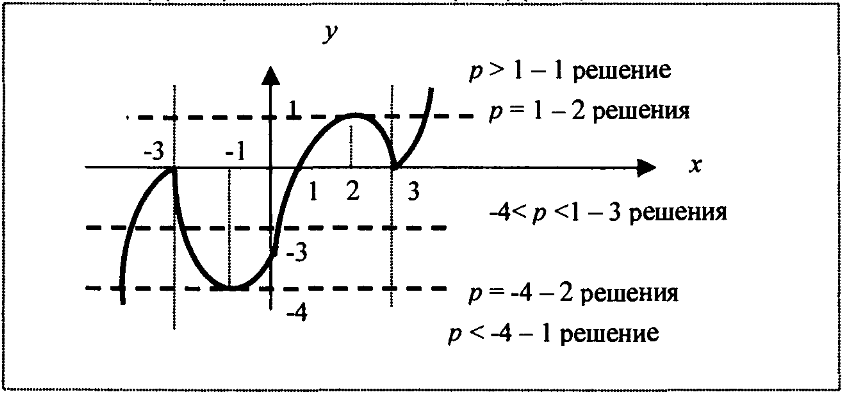
Д.З. Сколько решений имеет уравнение $(x-4)\cdot|x-2|=3$?

20. Построить график функции $y=(x-1)\cdot\left||x|-3\right|$.

Графический метод:

1) $x\ge 0 \Rightarrow y=(x-1)\cdot|x-3|$; $x\ge 3 \Rightarrow y=(x-1)(x-3)$; или $0\le x<3 \Rightarrow y=-(x-1)(x-3)$;

2) $x<0 \Rightarrow y=(x-1)\cdot|-x-3|=(x-1)\cdot|x+3|$; $-3\le x<0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y=(x-1)(x+3)$; $x<-3 \Rightarrow y=-(x-1)(x+3)$.



21. Исследовать уравнение $(x-1)\cdot\left||x|-3\right|=p$ на число решений в зависимости от параметра p.

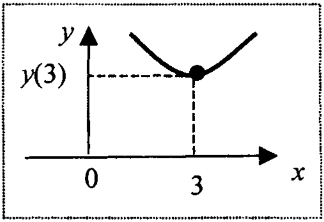
Графический метод: левая функция – $y_л=(x-1)\cdot\left||x|-3\right|$ (из предыдущей задачи); правая функция – $y_п=p$.

Д.З. Найти число решений уравнения $(|x|-1)|x-3|=1$.

Д.З. Исследовать уравнение $(x-2)\cdot\left|4-|x|\right|=p$ на число решений в зависимости от параметра p.

22. Найти наименьшее значение функции $y=x-6\sqrt{x}+12$.

Замена: $t=\sqrt{x}\ge 0 \Rightarrow y=t^2-6t+12$. Вершина параболы: $t_0=3>0$.



$y_{\min} = y(3) = 9 - 6 \cdot 3 + 12 = 3$.

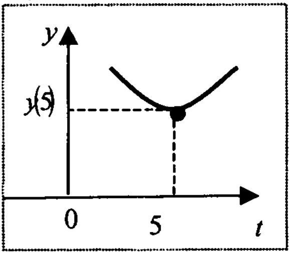
Д.З. Найти наименьшее значение функции

$$y = x^4 - 4x^2 + 7;\ y = x - 8\sqrt{x-2} + 18;\ \sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x} - 8\right) + 19;$$
$$y = \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x - 6) + 11;\ y = \operatorname{arctg} x \cdot (\operatorname{arctg} x - 2) + 5.$$

23. Найти наименьшее значение функции

$$y = x^2 + 5x - 10\sqrt{x^2 + 5x} + 26.$$

Замена: $t = \sqrt{x^2 + 5x} \ge 0 \Rightarrow x^2 + 5x = t^2 \Rightarrow y = t^2 - 10t + 26$.



Вершина параболы: $t_0 = 5 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_{\min} = y(5) = 25 - 50 + 26 = 1$.

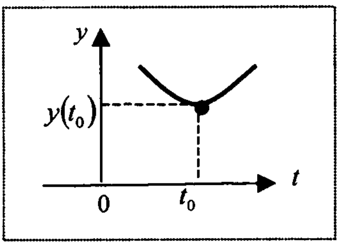
Д.З. Найти наименьшее значение функции

$$y = 2\sqrt{\log_2 x - 3} - \log_2 x - 5;\ y = -2\sqrt{\log_2 x - 3} - \log_2 x - 4.$$

24. Найти наименьшее значение функции

$$y = 25^x - 2\sqrt{\log_3 4}\cdot 5^x + \log_3 324.$$

Замена: $t = 5^x > 0 \Rightarrow y = t^2 - 2\sqrt{\log_3 4}\cdot t + \log_3 324$.



Вершина параболы $t_0 = \sqrt{\log_3 4} > 0$

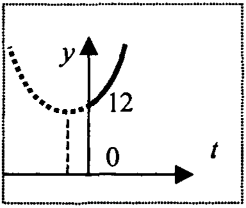
$y(t_0) = \log_3 4 - 2\cdot\log_3 4 + \log_3 324 = \log_3 324 - \log_3 4 = \log_3 81 = 4$.

Д.З. Найти наименьшее значение функции

$$y = 4^x - 2\sqrt{\log_3 32}\cdot 2^x + \log_3 96\,;\ y = 64^x + 8^{x+2} + 2004\,.$$

25. Найти наименьшее значение функции $y = x + 6\sqrt{x} + 12$.

Замена: $t = \sqrt{x} \ge 0 \quad\Rightarrow\quad y = t^2 + 6t + 12$. Вершина параболы: $t_0 = -3 < 0$;



вершина вне допустимых значений $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow y_{\min} = y(0) = 12$.

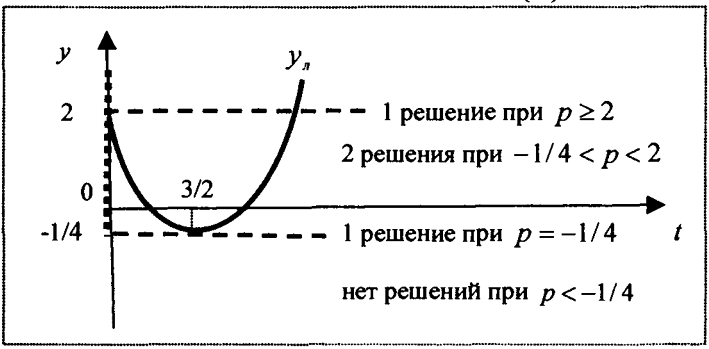
Д.З. Найти наименьшее значение функции $y = \sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 8\right) + 19$; $y = x^4 + 6x^2 + 12$.

26. Найти значения параметра p, при которых уравнение $4^x - 3\cdot 2^x + 2 = p$ имеет одно решение.

Замена: $t = 2^x > 0 \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 3\cdot t + 2 = p, \\ t > 0. \end{cases}$

Графический метод: $y_л = t^2 - 3\cdot t + 2$.

Вершина параболы: $t_0 = \dfrac{3}{2} \Rightarrow y_{\min} = y\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$.

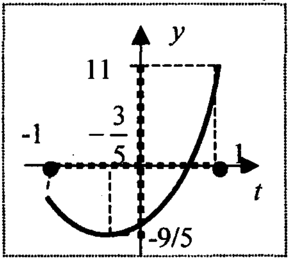


$$\left[\begin{array}{l} p = -\dfrac{1}{4}. \\ p \ge 2 \end{array}\right.$$

Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $25^x - 2 \cdot 5^x + 10 = p$ имеет одно решение; $x - 3 \cdot \sqrt{x} + 11 = p$; $9^x - 3 \cdot 3^x + 11 = p$.

27. Найти множество значений функции $y = 5\sin^2 x + 6\sin x$.

Замена: $t = \sin x \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \cdot t^2 + 6t, \\ -1 \le t \le 1. \end{cases}$ Вершина параболы: $t_0 = -\frac{3}{5}$.



$y_{\min} = y\left(-\frac{3}{5}\right) = 5 \cdot \frac{9}{25} - 6 \cdot \frac{3}{5} = -\frac{9}{5}$;

$y_{\max} = y(1) = 11 \Rightarrow -\frac{9}{5} \le y \le 11$.

Д.З. Найти множество значений функции $y = 2\sin^2 x - 6\cos x$; $y = \sin^2 x + 3\sin x$.

28. Найти значения параметра p, при которых уравнение $5 \cdot \sin^2 x + 6\sin x = p$ имеет хотя бы одно решение.

Графический метод: левая функция – $y_л = 5\sin^2 x + 6\sin x$; правая функция – $y_п = p$.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $2 \cdot \sin^2 x - 6\cos x = p$ имеет хотя бы одно решение.

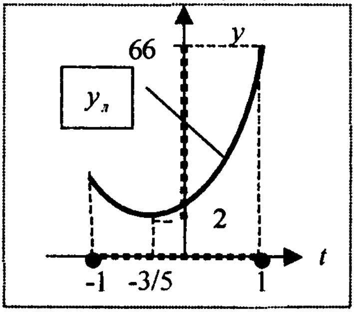
29. Найти значения параметра p, при которых уравнение $25\sin^2 x + 30\sin x + 11 = p$ имеет по крайней мере один корень.

Замена: $t = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 25 \cdot t^2 + 30 \cdot t + 11 = p, \\ -1 \le t \le t. \end{cases}$

Графический метод: левая функция – $y_л = 25 \cdot t^2 + 30 \cdot t + 11$.

Вершина параболы

$$t_0 = -\frac{3}{5} \Rightarrow y_{\min} = y\left(-\frac{3}{5}\right) = 2,\ y_{\max} = y(1) = 66.$$



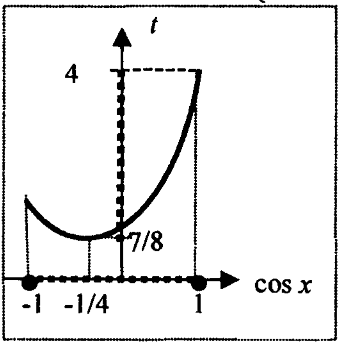
$2 \le p \le 66$.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравненне $9\cos^2 x + 12\cos x + 8 = p$ имеет по крайней мере один корень; $9\sin^2 x - 6\sin x + 2 = p$.

30. Найти область изменения функции

$$y = \left(2\cos^2 x + \cos x + 1\right)^2 - 2\left(2\cos^2 x + \cos x + 1\right) + 2.$$

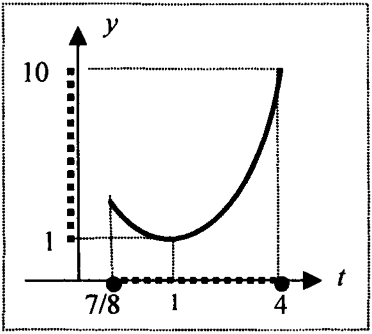
1. Внутренняя функция. Замена: $\begin{cases} t = 2\cos^2 x + \cos x + 1, \\ -1 \le \cos x \le 1. \end{cases}$



$\frac{7}{8} \le t \le 4$;

2. Внешняя функция $\begin{cases} y = t^2 - 2t + 2, \\ \frac{7}{8} \le t \le 4 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Вершина параболы

$t_0 = 1$.



$1 \le y \le 10$.

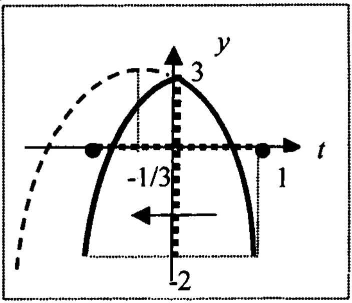
Д.З. Найти область изменения функции

$$y = \left(\sin^2 x + \sin x + 1\right)^2 - 2\left(\sin^2 x + \sin x + 1\right) + 2.$$

31. Найти разность наибольшего и наименьшего значений функции $y = 3\sin^2 x - 2\sqrt{\cos^2 x}$.

Выход на одну функцию: $y = 3 - 3\cos^2 x - 2\left|\cos x\right|$; замена: $t = \cos x \;\Rightarrow\; \begin{cases} y = -3\cdot t^2 - 2|t| + 3, \\ -1 \le t \le 1. \end{cases}$.

$$t \ge 0 \;\Rightarrow\; y = -3\cdot t^2 - 2t + 3 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; t_0 = -\dfrac{1}{3} < 0 \;\Rightarrow$ 

$y_{\min} = y(1) = -2$, $y_{\max} = y(0) = 3$, $y_{\max} - y_{\min} = 5$.

Д.З. Найти разность наибольшего и наименьшего значений функции $y = 3\cos^2 x + 7\sqrt{\sin^2 x}$; $y = -3\sin^2 x - 5\sqrt{\cos^2 x}$.

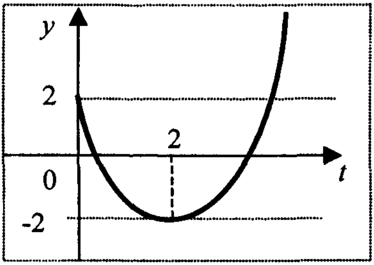
Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $2\sin^2 x + 9\sqrt{\sin^2 x} = p$ имеет хотя бы одно решение.

32. При каких значениях параметра p уравнение $x^4 - 4 \cdot x^2 + 2 = p$ имеет два корня?

Замена: $t = x^2 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 4 \cdot t + 2 = p, \\ t \geq 0. \end{cases}$

Один положительный корень по t соответствует двум корням по x.

Графический метод: левая функция – $y_л = t^2 - 4 \cdot t + 2$; правая функция – $y_п = p$.



$\left[\begin{array}{l} p = -2 \\ p > 2 \end{array}\right.$.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $x^4 - 6 \cdot x^2 + 5 = p$ имеет два решения.

33. Найти наименьшее значение функции $f = x^2 + y^2$ при условии $2x + y = 4$.

$y = 4 - 2x \Rightarrow f = x^2 + (4 - 2x)^2 = x^2 + 16 - 16x + 4x^2 = 5x^2 - 16x + 16$;

парабола усами вверх; вершина $x_0 = \dfrac{8}{5} \Rightarrow f_{\min} = f\left(\dfrac{8}{5}\right) = \dfrac{36}{5}$.

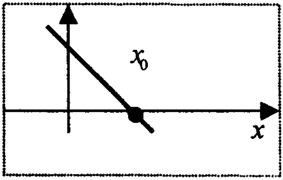
Д.З. Найти наименьшее значение функции $f = x^2 + y^2$ при условии $3x + 5y = 7$.

34. Найти наибольшее значение функции $f = x \cdot y$ при условии $x + y = 2$.

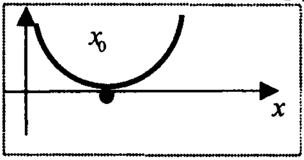
$y = 2 - x \Rightarrow f = x \cdot (2 - x)$ – парабола усами вниз; вершина: $x_0 = 1$; $f_{\max} = f(1) = 1$.

Д.З. Найти наибольшее значение функции $f = x \cdot y$ при условии $2x + 3y = 5$.

35. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $(p-5)\cdot x^2-10\cdot x+1=0$ имеет одно решение.

1) $a=0$ 

$p_1=5$;

2) $D=0$ 

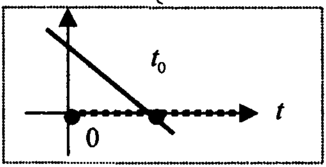
$D=25-p_2+5=0 \;\Rightarrow\; p_2=30$.

Д.З. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $(p-3)\cdot x^2-14\cdot x+1=0$ имеет одно решение;

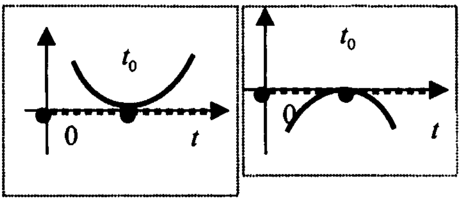
$$(p-5)\cdot\sqrt[3]{x^2}-12\cdot\sqrt[3]{x}+1=0.$$

36. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $(p-5)\cdot x-10\cdot\sqrt{x}+1=0$ имеет одно решение.

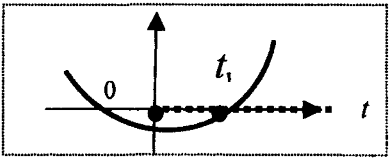
Замена: $t=\sqrt{x}\ge 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases}(p-5)\cdot t^2-10\cdot t+1=0,\\ t\ge 0.\end{cases}$

1) $\begin{cases}a=0,\\ t_0\ge 0\end{cases}$ 

$p_1=5,\ t_0=\dfrac{1}{10}$;

2) $\begin{cases}D=0,\\ t_0\ge 0\end{cases}$ 

$D=25-(p-5)=0 \;\Rightarrow\; p_2=30,\ t_0=\dfrac{5}{p_2-5}=\dfrac{1}{5}$;

3) $t_1 \cdot t_2 < 0$ 

$-\frac{10}{p-5} \cdot t + \frac{1}{p-5} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p < 5$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} p \le 5 \\ p = 30 \end{array}\right.$.

Д.З. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $(p-3) \cdot x - 14 \cdot \sqrt{x} + 1 = 0$ имеет одно решение.

37. При каких значениях параметра p уравнение

$(p-5) \cdot x^4 - 10 \cdot x^2 + 1 = 0$ имеет два корня?

Замена: $t = x^2 \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} (p-5) \cdot t^2 - 10 \cdot t + 1 = 0, \\ t \ge 0. \end{cases}$

Одно положительное решение по t соответствует двум решениям по x.

(Далее задача 36).

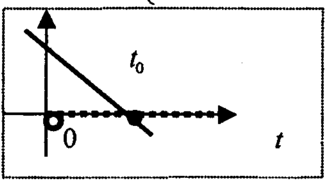
Д.З. При каких значениях параметра p уравнение

$(p-3) \cdot x^4 - 14 \cdot x^2 + 1 = 0$ имеет одно решение?

38. При каких значениях параметра p уравнение

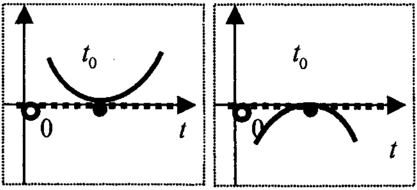
$(p-4) \cdot 4^x - 6 \cdot 2^x + 1 = 0$ имеет одно решение?

Замена: $t = 2^x > 0 \Rightarrow \begin{cases} (p-4) \cdot t^2 - 6 \cdot t + 1 = 0, \\ t > 0. \end{cases}$

1) $\begin{cases} a = 0, \\ t_0 > 0 \end{cases}$ 

$p = 4$, $t_0 = \frac{1}{6}$;

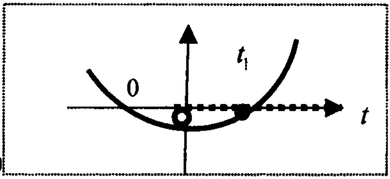
2) $\begin{cases} D=0 \\ t_0>0 \end{cases}$



$D=9-(p-4)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p=13$, $t_0=\dfrac{1}{3}$;

3) $t_1 \cdot t_2<0$

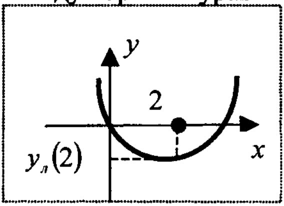


$p<4$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} p \le 4 \\ p=13 \end{array}\right.$.

Д.З. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $(p-3)\cdot 9^x-7\cdot 3^x+1=0$ имеет одно решение.

39. При каких значениях параметра a число $x=2$ расположено между корнями уравнения $x^2-2ax+a^2-a=0$?



$y_л(x)=x^2-2ax+a^2-a \quad \Rightarrow \quad y_л(2)<0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow 4-4a+a^2-a<0 \Rightarrow a^2-5a+4<0 \Rightarrow 1<a<4$.

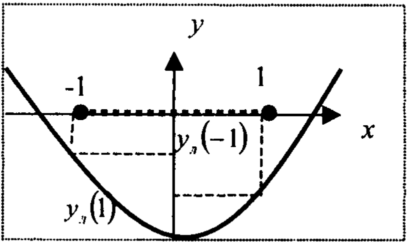
Д.З. При каких значениях параметра p число $x=10$ расположено между корнями уравнения $x^2-(4p+11)x+(p+4)(3p+7)=0$?

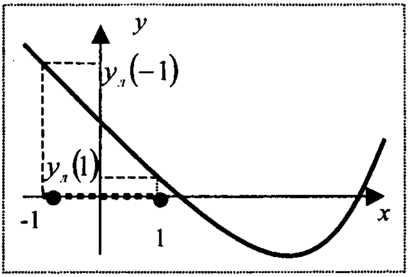
Д.З. При каких значениях параметра p число $x=10$ расположено между корнями уравнения $x^2-(3p+6)x+(p+3)(2p+3)=0$?

40. Найти все значения параметра p, при которых оба корня уравнения $x^2-px-2=0$ расположены вне интервала $-1 \le x \le 1$.

Графический метод: левая функция – $y_л(x)=x^2-p\cdot x-2$.

$y_л(-1)\cdot y_л(1)>0$:





$(1+p-2)(1-p+2)>0 \;\Rightarrow\; (p-1)(3-p)>0 \;\Rightarrow\; (p-1)(p-3)<0 \;\Rightarrow$
$\Rightarrow 1<p<3$.

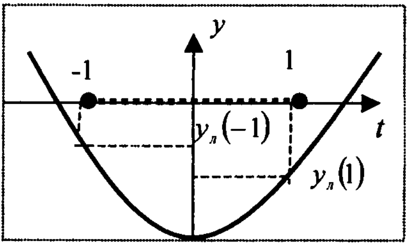
Д.3. Найти все значения параметра p, при которых оба корня уравнения $x^2-2px-3=0$ расположены вне интервала $-1\le x\le 1$.

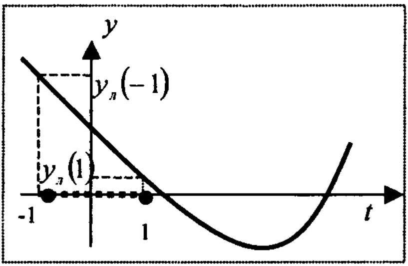
41. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\sin^2 x+p\sin x-2=0$ не имеет решений.

Замена: $t=\sin x \;\Rightarrow\; \begin{cases} t^2+pt-2=0, \\ -1\le t\le 1. \end{cases}$

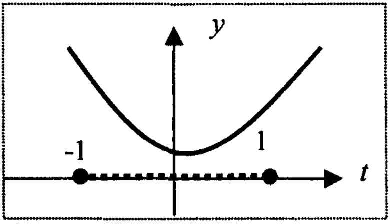
Графический метод: левая функция – $y_л(t)=t^2+pt-2$.

1) $y_л(-1)\cdot y_л(1)>0$:





$(1-p-2)(1+p-2)>0 \;\Rightarrow\; (1+p)(p-1)<0 \;\Rightarrow\; -1<p<1$;



2) $D<0$ $\quad D=p^2+8<0 \Rightarrow \varnothing$.

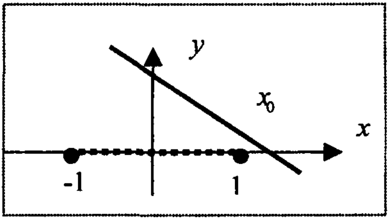
Ответ: $-1<p<1$.

Д.З. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\sin^2 x+p\sin x-3=0$ не имеет решений.

42. При каких значениях параметра p уравнение $(p-4)\cdot x^2-2p\cdot x+6=0$ не имеет решений при $-1\le x\le 1$?

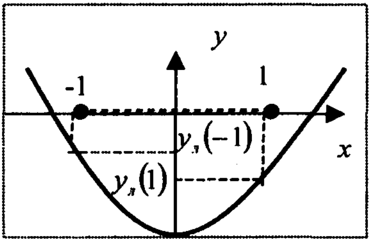
Графический метод: левая функция –

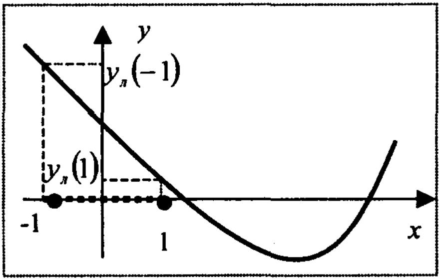
$$y_л=(p-4)\cdot x^2-2p\cdot x+6.$$



1) $\begin{cases} a=0 \\ |x_0|>1 \end{cases}$ $\quad p_1=4,\ x_0=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4};$

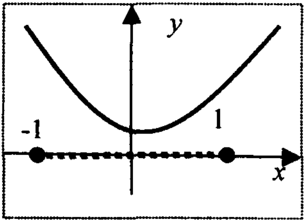
2) $y_л(-1)\cdot y_л(1)>0$:





$$(p-4+2p+6)(p-4-2p+6)>0 \Rightarrow (3p+2)(2-p)>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3p+2)(p-2)<0 \Rightarrow -\frac{2}{3}<p<2.$$



3) $D<0$ $\qquad D=p^2-6(p-4)<0 \Rightarrow$
$\Rightarrow p^2-6p+24<0 \Rightarrow \varnothing$.

Ответ: $-\dfrac{2}{3}<p<2$.

Д.З. При каких значениях параметра p уравнение $(p-5)\cdot x^2-4p\cdot x+4=0$ не имеет решений при $-1\le x\le 1$?

43. При каких значениях параметра p уравнение $(p-4)\cdot\sin^2 x-2p\cdot\sin x+6=0$ не имеет решений?

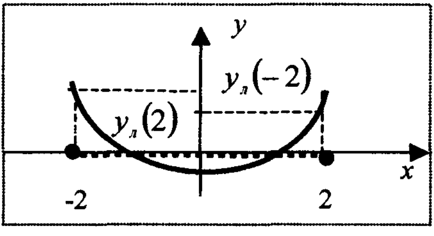
Замена: $t=\sin x \Rightarrow \begin{cases}(p-4)\cdot t^2-2pt+6=0,\\ -1\le t\le 1\end{cases}$ (далее предыдущая задача) $\Rightarrow -\dfrac{2}{3}<p<2$.

Д.З. При каких значениях параметра p уравнение $(p-5)\cdot\sin^2 x-4p\cdot\sin x+4=0$ не имеет решений?

44. Найти все значения параметра b, при которых оба корня уравнения $x^2-2bx+1=0$ не превосходят по модулю двух.

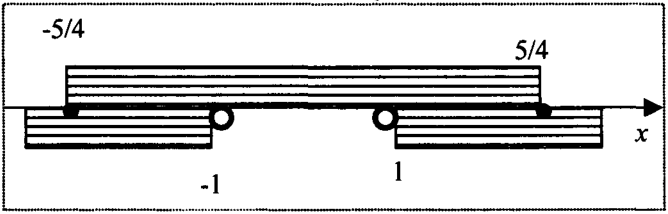
$|x_{1,2}|\le 2$.

Графический метод: левая функция – $y_л(x)=x^2-2bx+1$.



$$\begin{cases} y_л(-2)\ge 0, \\ y_л(2)\ge 0, \\ -2\le x_0\le 2, \\ D>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4+4b+1\ge 0, \\ 4-4b+1\ge 0, \\ -2\le b\le 2, \\ b^2-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b\ge -\dfrac{5}{4}, \\ b\le \dfrac{5}{4}, \\ -2\le b\le 2, \\ b^2-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{5}{4}\le b\le \dfrac{5}{4}, \\ -2\le b\le 2, \\ \left[\begin{array}{l} b>1 \\ b<-1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{5}{4}\le b\le \dfrac{5}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} b>1 \\ b<-1 \end{array}\right. \end{cases}$$

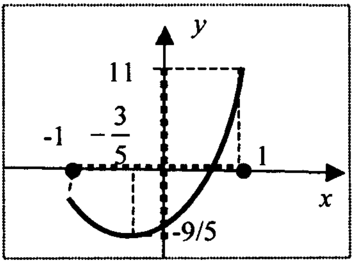


$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{5}{4}\le b<-1 \\ 1<b\le \dfrac{5}{4} \end{array}\right. .$$

Д.3. Найти все значения параметра b, при которых оба корня уравнения $x^2+2bx-4=0$ не превосходят по модулю 1.

45. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $5\cdot x^2+6x=p$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $-1\le x\le 1$.

Графический метод: левая функция – $y_л=5x^2+6x$, правая функция – $y_п=p$.



$y_{\min}=y\left(-\dfrac{3}{5}\right)=-\dfrac{9}{5};\ y_{\max}=y(1)=11\ \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{9}{5}\le p\le 11.$

Д.З. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $2\cdot x^2-6x=p$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $-1\le x\le 1$.

46. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $5\cdot\sin^2 x+6\sin x=p$ имеет хотя бы одно решение.

Замена: $t=\sin x \Rightarrow \begin{cases}5\cdot t^2+6t=p,\\ -1\le t\le 1.\end{cases}$

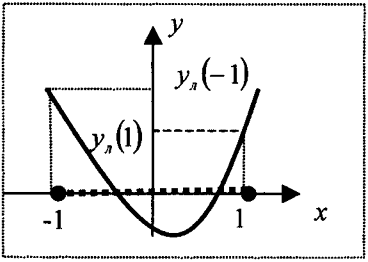
Графический метод: левая функция – $y_л=5x^2+6x$, правая функция – $y_п=p$.

Далее из предыдущей задачи.

Д.З. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $2\cdot\cos^2 x-6\cos x=p$ имеет хотя бы одно решение; $\sin^2 x+\sin x+1=p$.

47. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $x^2-px-2=0$ имеет хотя бы одно решение при $-1\le x\le 1$.

Графический метод: левая функция – $y_л(x)=x^2-p\cdot x-2$.

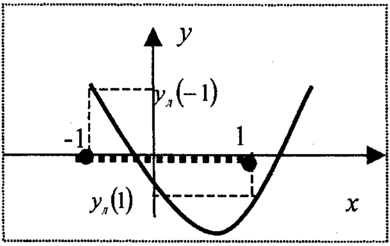


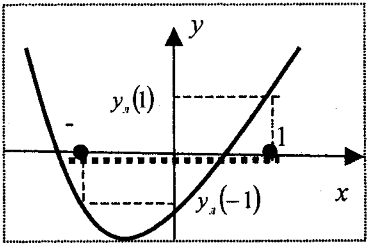
1) $\begin{cases}D\ge 0,\\ y_л(-1)\cdot y_л(1)\ge 0,\\ |x_0|\le 1\end{cases}$

$$\begin{cases}p^2+8\ge 0,\\ (1+p-2)(1-p+2)\ge 0,\\ \left|\dfrac{p}{2}\right|\le 1\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}(p-1)(3-p)\ge 0,\\ |p|\le 2\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}(p-1)(p-3)\le 0,\\ |p|\le 2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}1\le p\le 3,\\ -2\le p\le 2\end{cases}.\Rightarrow\ 1\le p\le 2;$$

2) $y_л(-1)\cdot y_л(1)\le 0$:





$(1+p-2)(1-p+2)\le 0 \;\Rightarrow\; (p-1)(3-p)\le 0 \;\Rightarrow\; (p-1)(p-3)\ge 0 \;\Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} p\le 1 \\ p\ge 3 \end{array}\right.$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} p\le 2 \\ p\ge 3 \end{array}\right.$.

Д.З. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $x^2-2px-2=0$ имеет хотя бы одно решение при $-1\le x\le 1$.

48. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\sin^2 x - p\cdot\sin x - 2 = 0$ имеет хотя бы одно решение.

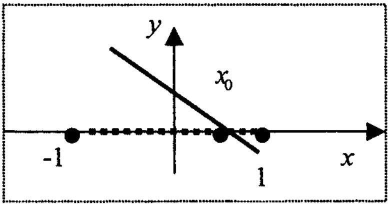
Замена: $t=\sin x \Rightarrow \begin{cases} t^2-p\cdot t-2=0, \\ -1\le t\le 1. \end{cases}$ Далее см. предыдущую задачу.

Д.З. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\sin^2 x - 2p\sin x - 2 = 0$ имеет хотя бы одно решение.

49. При каких значениях параметра p уравнение $(4-p)\cdot x^2-2\cdot x+1=0$ имеет хотя бы одно решение при $-1\le x\le 1$?

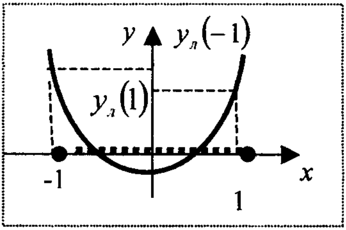
Графический метод: левая функция – $y_л=(4-p)t^2-2\cdot t+1$.

1) $\begin{cases} a=0, \\ |x_0|\le 1 \end{cases}$



$p_1=4$, $x_0=\dfrac{1}{2}$;

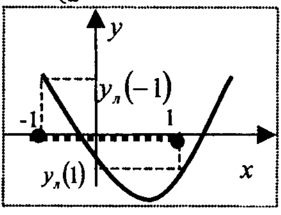
2) $\begin{cases} D \geq 0, \\ y_л(-1)\cdot y_л(1) \geq 0, \\ -1 \leq x_B \leq 1 \end{cases} \Rightarrow$

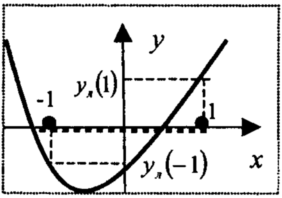


$$\Rightarrow \begin{cases} p \geq 3, \\ (4-p+2+1)(4-p-2+1) \geq 0, \\ \left|\dfrac{1}{4-p}\right| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 3, \\ (7-p)(3-p) \geq 0, \\ |p-4| \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p \geq 3, \\ (p-7)(p-3) \geq 0, \\ |p-4| \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 3, \\ \left[\begin{array}{l} p \geq 7 \\ p \leq 3 \end{array}\right., \\ \left[\begin{array}{l} p \geq 5 \\ p \leq 3 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \ p \geq 7;$$

3) $y_л(-1)\cdot y_л(1) < 0$





$(7-p)(3-p) \leq 0 \Rightarrow (p-7)(p-3) \leq 0 \Rightarrow 3 \leq p \leq 7$.

Ответ: $p \geq 3$.

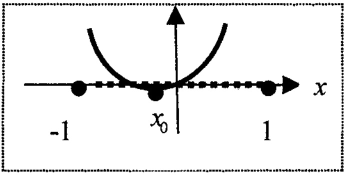
Д.З. При каких значениях параметра p уравнение $(6-p)\cdot x^2 - 8\cdot x + 1 = 0$ имеет хотя бы одно решение при $-1 \leq x \leq 1$?

50. При каких значениях параметра p уравнение $(4-p)\cdot \sin^2 x - 2\cdot \sin x + 1 = 0$ имеет хотя бы одно решение?

Замена: $t = \sin x \;\Rightarrow\; \begin{cases}(4-p)\cdot t^2 - 2\cdot t + 1 = 0,\\ -1 \le t \le 1.\end{cases}$ Далее из предыдущей задачи.

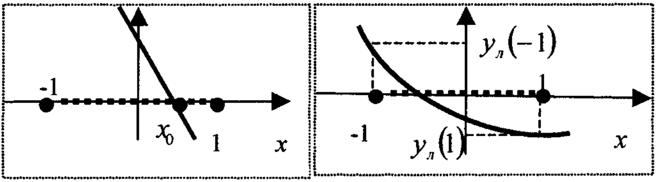
Д.З. При каких значениях параметра p уравнение $(6-p)\cdot\sin^2 x - 8\cdot\sin x + 1 = 0$ имеет хотя бы одно решение?

51. При каких значениях параметра p уравнение $(p-4)\cdot x^2 - 6\cdot x + 1 = 0$ имеет одно решение при $-1 \le x \le 1$?



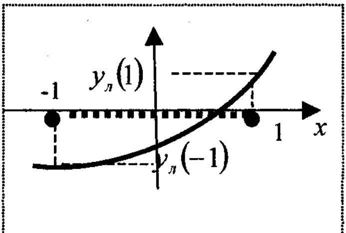
1) $\begin{cases}D = 0,\\ |x_0| \le 1\end{cases}$ $D = 9 - (p-3) = 0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow p_1 = 12 \;\Rightarrow\; x_0 = \dfrac{3}{p_1 - 4} = \dfrac{3}{8} \;\Rightarrow\; -1 \le x_0 \le 1;$



2) $\begin{cases}a = 0,\\ |x_0| \le 1\end{cases}$

$p_2 = 4 \;\Rightarrow\; x_0 = 1/6 \;\Rightarrow\; -1 \le x_0 \le 1;$



3) $y_л(-1)\cdot y_л(1) \le 0$

$(p-4+6+1)\cdot(p-4-6+1) \le 0 \;\Rightarrow\; (p+3)\cdot(p-9) \le 0 \;\Rightarrow\; -3 \le p \le 9.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}-3 \le p \le 9\\ p = 12\end{array}\right.$.

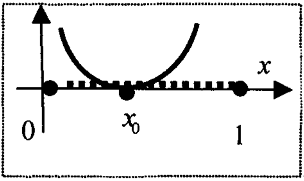
Д.З. При каких значениях параметра p уравнение $(p-3)\cdot x^2 - 4\cdot x + 1 = 0$ имеет одно решение при $-1 \le x \le 1$?

52. При каких значениях параметра p уравнение $(p-4)\cdot\left(\frac{2\arcsin x}{\pi}\right)^2-6\cdot\left(\frac{2\arcsin x}{\pi}\right)+1=0$ имеет одно решение?

Замена: $t=\frac{2\arcsin x}{\pi} \Rightarrow \begin{cases}(p-4)\cdot t^2-6\cdot t+1=0,\\ -1\le t\le 1.\end{cases}$ Далее из предыдущей задачи.

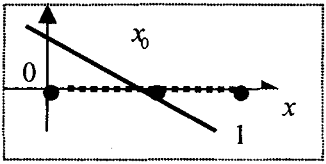
Д.З. При каких значениях параметра p уравнение $(p-3)\cdot\left(\frac{2\arcsin x}{\pi}\right)^2-4\cdot\left(\frac{2\arcsin x}{\pi}\right)+1=0$ имеет одно решение?

53. При каких значениях параметра p уравнение $(p-4)\cdot x^2-6\cdot x+1=0$ имеет одно решение при $0\le x\le 1$?



1) $\begin{cases}D=0,\\ |x_0|\le 1\end{cases}$ $D=9-(p-3)=0 \;\Rightarrow\; p_1=12 \Rightarrow$

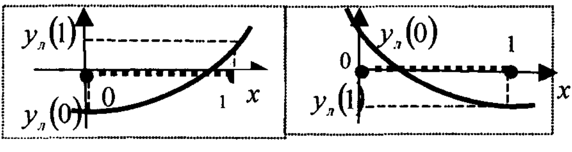
$\Rightarrow\; x_0=\frac{3}{p_1-4}=\frac{3}{8}$; $0\le x_0\le 1$;



2) $\begin{cases}a=0,\\ |x_0|\le 1\end{cases}$ $p_2=4 \;\Rightarrow\; x_0=1/6 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow 0\le x_0\le 1$;

3) $y_л(-1)\cdot y_л(1)\le 0$



$p-9\le 0 \;\Rightarrow\; p\le 9$. *Ответ:* $\left[\begin{array}{l}p\le 9\\ p=12\end{array}\right.$.

Д.З. При каких значениях параметра p уравнение $(p-3)\cdot x^2-4\cdot x+1=0$ имеет одно решение при $0\le x\le 1$; $(p-6)\cdot x^2-8\cdot x+1=0$?

54. При каких значениях параметра p уравнение

$$(p-4)\cdot\left(\frac{\arccos x}{\pi}\right)^2-6\cdot\left(\frac{\arccos x}{\pi}\right)+1=0$$

имеет одно решение?

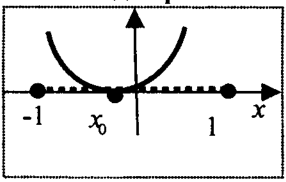
Замена: $t=\dfrac{\arccos x}{\pi}\ \Rightarrow\ \begin{cases}(p-4)\cdot t^2-6\cdot t+1=0,\\ 0\le t\le 1\end{cases}$. Далее из предыдущей задачи.

Д.З. При каких значениях параметра p уравнение

$$(p-3)\cdot\left(\frac{\arccos x}{\pi}\right)^2-4\cdot\left(\frac{\arccos x}{\pi}\right)+1=0$$

имеет одно решение?

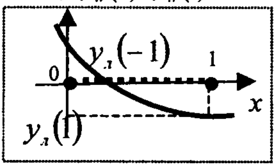
55. При каких значениях параметра p уравнение $x^2-2x(p+2)+p^2=0$ имеет одно решение при $0\le x\le 1$?

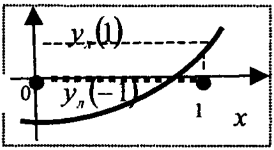


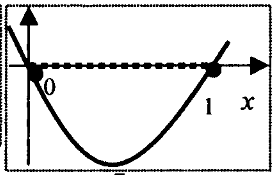
1) $\begin{cases}D=0,\\ 0\le x_0\le 1\end{cases}$ $D=(p+2)^2-p^2=0\Rightarrow$

$\Rightarrow p_1=-1\ \Rightarrow\ x_0=1;\ 0\le x_0\le 1;$

2) $y_л(0)\cdot y_л(1)\le 0$:







$p^2\cdot\left(1-2(p+2)+p^2\right)\le 0\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}(p+1)^2-4\le 0\\ p=0\end{array}\right.\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}|p+1|\le 2\\ p=0\end{array}\right.\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-2\le p+1\le 2\\ p=0\end{array}\right.$.

Ответ: $-3\le p\le 1$.

Д.З. При каких значениях параметра p уравнение $x^2 - 2x(p+2) + p^2 = 0$ имеет одно решение на отрезке $0 \le x \le 4$?

56. При каких значениях параметра p уравнение $4\sin(\arcsin x) = (x-p)^2$ имеет одно решение?

ОДЗ $-1 \le x \le 1 \Rightarrow \begin{cases} 4x = (x-p)^2, \\ -1 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = (x-p)^2, \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2px + p^2 - 4x = 0, \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x(p+2) + p^2 = 0, \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow -3 \le p \le 1.$

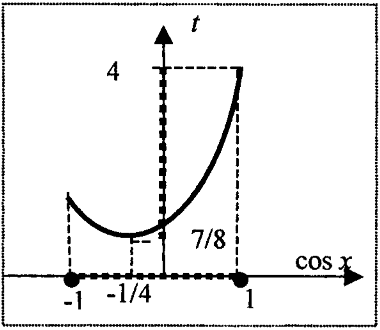
Д.З. При каких значениях параметра p уравнение $16\sin\left(\arcsin\dfrac{x}{4}\right) = (x-p)^2$ имеет одно решение?

57. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $(2\cos^2 x + \cos x + 1)^2 - 2(2\cos^2 x + \cos x + 1) + 2 = p$ имеет хотя бы одно решение.

Графический метод:

внутренняя функция:

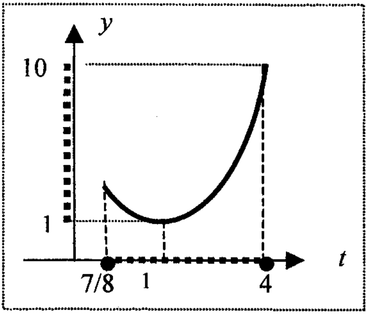
$\begin{cases} t = 2\cos^2 x + \cos x + 1, \\ -1 \le \cos x \le 1 \end{cases}$



$\dfrac{7}{8} \le t \le 4;$

внешняя функция: $\begin{cases} t^2 - 2t + 2 = p, \\ \dfrac{7}{8} \le t \le 4 \end{cases} \Rightarrow$

графический метод: левая функция – $y_л = t^2 - 2t + 2$, правая функция – $y_п = p$.



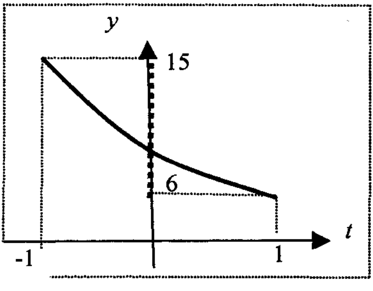
$1 \le p \le 10$.

Д.З. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\left(\sin^2 x+\sin x+1\right)^2-2\left(\sin^2 x+\sin x+1\right)+2=p$ имеет хотя бы одно решение.

58. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\dfrac{60}{3\sin x+7}=p$ имеет хотя бы одно решение.

Замена: $t=\sin x \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{60}{3t+7}=p,\\ -1\le t\le 1.\end{cases}$

Графический метод: левая функция – $y_л=\dfrac{60}{3t+7}$; правая функция – $y_п=p$.



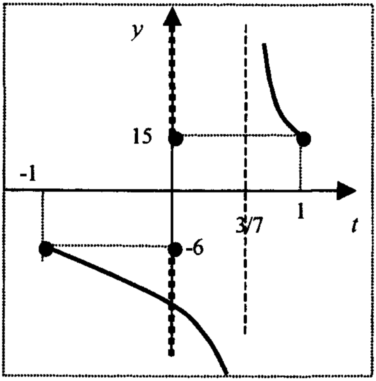
$y(-1)=15,\ y(1)=6 \Rightarrow 6\le p\le 15$.

Д.З. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\dfrac{60}{2\cos^5 x+7}=p$ имеет хотя бы одно решение.

59. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\dfrac{60}{7\sin^3 x-3}=p$ не имеет решений.

Замена: $t=\sin^3 x \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{60}{7t-3}=p, \\ -1\le t\le 1. \end{cases}$

Графический метод: левая функция – $y_л=\dfrac{60}{7t-3}$; правая функция – $y_п=p$.



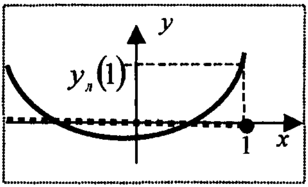
$y(-1)=-6,\ y(1)=15 \Rightarrow -6<p<15$.

Д.З. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\dfrac{60}{8\cos^7 x-2}=p$ не имеет решений.

60. Найти все значения параметра a, при которых оба корня уравнения $x^2+2ax+a^2-a=0$ меньше 1.

Графический метод: левая функция – $y_л(x)=x^2+2ax+a^2-a$.

$\begin{cases} D>0, \\ y_л(1)>0, \\ x_0<1 \end{cases}$



$\begin{cases} a^2-a^2+a>0, \\ 1+2a+a^2-a>0, \\ -a<1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a>0, \\ a^2+a+1>0, \\ a>-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0, \\ a - \text{любое}, \\ a>-1. \end{cases} \Rightarrow a>0$

Д.З. При каких значениях параметра b уравнение $x^2+2(b-2)x+b^2-10b+12=0$ имеет два различных корня, меньших 2?

Д.З. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $ax^2+2x+a^2=0$ отрицательны?

Д.З. При каком наибольшем целом значении m оба корня уравнения $x^2+2mx+m^2-14=0$ больше (-1)?

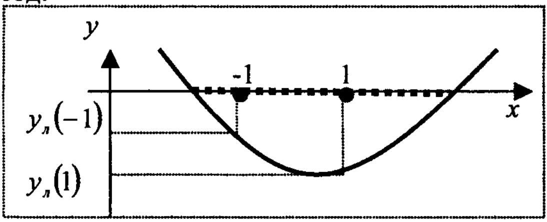
Д.З. При каких значениях параметра a уравнение $x^2-2(a+1)x+a^2-2a+4=0$ имеет два различных корня, больших 1?

Д.З. При каких значениях параметра a уравнение $x^2-2(a+2)x+a^2-3a+29/4=0$ имеет два различных корня, больших 2?

61. Найти все значения параметра p, при которых решение неравенства $x^2-px-9\le 0$ содержит интервал $[-1;1]$.

Графический метод:

$$\begin{cases} y_л(-1)\le 0, \\ y_л(1)\le 0 \end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \begin{cases} 1+p-9\le 0, \\ 1-p-9\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p\le 8, \\ p\ge -8 \end{cases} \Rightarrow -8\le p\le 8.$$

Д.З. Найти все значения параметра p, при которых решение неравенства $x^2-p^2x-(p-1)\le 0$ содержит интервал $[-1;1]$.

6. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Преобразование (упрощение) показательных выражений

Основные свойства:

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c};\ \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c};\ \frac{1}{a^c} = a^{-c};\ a^b = \frac{1}{a^{-b}};\ \left(a^b\right)^c = a^{b\cdot c};\ \sqrt[n]{a^b} = a^{\frac{b}{n}}.$$

1. Вычислить $\dfrac{2^3 \cdot \sqrt{2^5}}{\sqrt[4]{2}}$.

$$\frac{2^3 \cdot \sqrt{2^5}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{2^3 \cdot 2^{\frac{5}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}} = 2^{3+\frac{5}{2}-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{12+10-1}{4}} = 2^{\frac{21}{4}}.$$

2. Решить уравнение $x \cdot 2^3 = 6^4$.

$$x = \frac{6^4}{2^3} = \frac{3^4 \cdot 2^4}{2^3} = 3^4 \cdot 2 = 81 \cdot 2.$$

Д.З. Решить уравнение $x \cdot 4^3 = 12^4$.

3. Вычислить $\sqrt[11]{\sqrt[7]{\sqrt[5]{27}}}$.

$$\sqrt[11]{\sqrt[7]{\sqrt[5]{27}}} = \left(\left(27^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{7}}\right)^{\frac{1}{11}} = 27^{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{11}} = 3^{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{11}}.$$

Д.З. Вычислить $\sqrt[7]{\sqrt[6]{\sqrt[4]{125}}}$.

4. Вычислить $12 \cdot \left(\log_3 \sqrt[11]{\sqrt[7]{\sqrt[5]{27}}}\right)^{-1}$.

$$12 \cdot \left(\log_3 \sqrt[11]{\sqrt[7]{\sqrt[5]{27}}}\right)^{-1} = \frac{12}{\log_3 \sqrt[11]{\sqrt[7]{\sqrt[5]{27}}}} = \frac{12}{\log_3 3^{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{11}}} = \frac{12 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{3} = 1540.$$

Д.З. Вычислить $3 \cdot \left(\log_{125} \sqrt[7]{\sqrt[6]{\sqrt[4]{125}}}\right)^{-1}$.

5. Решить уравнение $5^x = 125$.

$$5^x = 5^3 \Rightarrow x = 3.$$

Д.З. Решить уравнение $3^x = 81$; $3^{\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^{2x-5,5}$.

6. Решить уравнение $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 42$.

$6 \cdot 3^x - \frac{4}{3} \cdot 3^x = 42 \Rightarrow \frac{14}{3} \cdot 3^x = 42 \Rightarrow 3^x = 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2$.

Д.З. Решить уравнение $3 \cdot 5^{x+1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 19$.

7. Решить уравнение $3^x + 3^{3-x} = 28$.

$3^x + \frac{27}{3^x} = 28$. Замена: $t = 3^x > 0 \Rightarrow t + \frac{27}{t} = 28 \Rightarrow t^2 - 28t + 27 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 27 \\ t_2 = 1 \end{array}\right.$. Возврат в исходную переменную: $\left[\begin{array}{l} 3^{x_1} = 27 = 3^3 \\ 3^{x_2} = 1 = 3^0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \end{array}\right.$.

Д.З. Решить уравнение $3^x + 81 \cdot 3^{-x} = 18$; $2^x + 32 \cdot 2^{-x} = 18$.

8. Найти сумму всех различных корней уравнения $(9^x - 3^x - 2)(9^x - 3^x - 10) + 16 = 0$.

Замена: $t = 9^x - 3^x - 2 \Rightarrow t(t-8) + 16 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 16 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow t = 4$.

Возврат в исходную переменную: $3^{2x} - 3^x - 2 = 4$.

Замена: $z = 3^x > 0 \Rightarrow z^2 - z - 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 3 \\ z_2 = -2 - \text{посторонний} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^x = 3^1 \Rightarrow x_1 = 1$.

Д.З. Найти сумму всех различных корней уравнений $(4^x - 5 \cdot 2^x + 1)(4^x - 5 \cdot 2^x + 7) + 9 = 0$;
$(25^x - 3 \cdot 2^x - 1)(25^x - 3 \cdot 2^x - 7) + 9 = 0$.

9. Решить уравнение $4^x + 10^x = 2 \cdot 25^x$.

$2^{2x} + 2^x \cdot 5^x = 2 \cdot 5^{2x} \times \frac{1}{5^{2x}} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 2 = 0$.

Замена: $t = \left(\frac{2}{5}\right)^x > 0 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -2 - \text{постороннее} \\ t_2 = 1 \end{array}\right.$

Возврат в исходную переменную: $\left(\frac{2}{5}\right)^x = 1 = \left(\frac{2}{5}\right)^0 \Rightarrow x = 0$.

Д.З. Решить уравнение $9^x + 3\cdot 15^x = 4\cdot 25^x$; $2\cdot 6^x + 4^x = 3\cdot 9^x$.

10. Найти отношение наибольшего корня уравнения $169^x - 12\cdot 26^x + 32\cdot 4^x = 0$ к наименьшему.

$$13^{2x} - 12\cdot 2^x\cdot 13^x + 32\cdot 2^{2x} = 0 \ \times\frac{1}{2^{2x}} \Rightarrow \left(\frac{13}{2}\right)^{2x} - 12\cdot\left(\frac{13}{2}\right)^x + 32 = 0.$$

Замена: $t = \left(\frac{13}{2}\right)^x > 0 \Rightarrow t^2 - 12t + 32 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 4 \\ t_2 = 8 \end{array}\right.$.

Возврат в исходную переменную:

$$\left(\frac{13}{2}\right)^{x_1} = 4 = \left(\frac{13}{2}\right)^{\log_{\frac{13}{2}} 4} \Rightarrow x_1 = \log_{\frac{13}{2}} 4;$$

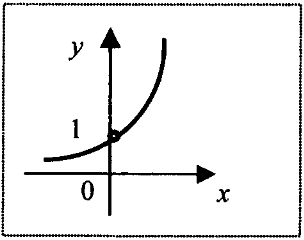
$$\left(\frac{13}{2}\right)^{x_2} = 8 = \left(\frac{13}{2}\right)^{\log_{\frac{13}{2}} 8} \Rightarrow x_2 = \log_{\frac{13}{2}} 8;$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\log_{\frac{13}{2}} 8}{\log_{\frac{13}{2}} 4} = \frac{\log_{\frac{13}{2}} 2^3}{\log_{\frac{13}{2}} 2^2} = \frac{3\log_{\frac{13}{2}} 2}{2\log_{\frac{13}{2}} 2} = \frac{3}{2}.$$

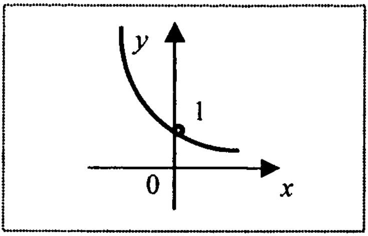
Д.З. Найти отношение наибольшего корня уравнения $121^x - 10\cdot 33^x + 16\cdot 9^x = 0$ к наименьшему; $81^x - 18\cdot 36^x + 32\cdot 16^x = 0$.

График показательной функции $y = a^x$

$a > 1$ – возрастающая



$a < 1$ – убывающая



11. Решить неравенство $\left(\frac{3}{8}\right)^{-x} \geq 7\frac{1}{9}$.

$$7\frac{1}{9}=\frac{64}{9}=\left(\frac{8}{3}\right)^{2}=\left(\frac{3}{8}\right)^{-2} \Rightarrow \left(\frac{3}{8}\right)^{-x} \geq \left(\frac{3}{8}\right)^{-2};$$

основание показательной функции меньше 1: $\left\{\frac{3}{8}<1\right\} \Rightarrow -x \leq -2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \geq 2$.

Д.З. Решить неравенство $\left(\frac{4}{5}\right)^{-x} \leq 1\frac{9}{16}$; $\left(\frac{5}{8}\right)^{-x} \geq 2\frac{14}{25}$.

12. Решить неравенство $\left(\frac{\sqrt{23}}{5}\right)^{x^2-5} > (0.92)^{2x}$.

$$0{,}92=\frac{92}{100}=\frac{46}{50}=\frac{23}{25}=\left(\frac{\sqrt{23}}{5}\right)^{2} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{23}}{5}\right)^{x^2-5} > \left(\frac{\sqrt{23}}{5}\right)^{4x};$$

основание показательной функции меньше 1: $\left\{\frac{\sqrt{23}}{5}<1\right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2-5<4x \Rightarrow x^2-4x-5<0$. Корни уравнения $\left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=5 \end{array}\right.$. Решение между корнями $\Rightarrow -1<x<5$.

Д.З. Решить неравенства

$$\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^{x^2-5} < (0.96)^{2x};\quad \left(\frac{\sqrt{22}}{5}\right)^{x^2-3} < (0.88)^{2x}.$$

13. Решить неравенство $2^x+32\cdot 2^{-x} \leq 18$.

Замена: $t=2^x>0 \Rightarrow t+\frac{32}{t} \leq 18 \Rightarrow t^2-18\cdot t+32 \leq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2 \leq t \leq 16$.

Возврат в исходную переменную: $2 \leq 2^x \leq 16 \Rightarrow 2^1 \leq 2^x \leq 2^4 \Rightarrow$ $\Rightarrow 1 \leq x \leq 4$.

Д.З. Решить неравенства

$$2^{2x}-33\cdot 2^x+32 \leq 0;\ 3^{2x}-12\cdot 3^x+27 \leq 0.$$

14. Найти длину решения неравенства $49^x - 10\cdot 21^x + 21\cdot 9^x \le 0$.

Формируем приведенное квадратичное неравенство: $\left(\frac{7}{3}\right)^{2x} - 10\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^x + 21 \le 0$.

Замена: $t = \left(\frac{7}{3}\right)^x > 0 \Rightarrow t^2 - 10\cdot t + 21 \le 0 \Rightarrow 3 \le t \le 7$.

Возврат в исходную переменную: $\left(\frac{7}{3}\right)^{\log_{\left(\frac{7}{3}\right)}3} \le \left(\frac{7}{3}\right)^x \le \left(\frac{7}{3}\right)^{\log_{\left(\frac{7}{3}\right)}7} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\left(\frac{7}{3}\right)}3 \le x \le \log_{\left(\frac{7}{3}\right)}7$.

Длина решения $L = \log_{\left(\frac{7}{3}\right)}7 - \log_{\left(\frac{7}{3}\right)}3 = \log_{\left(\frac{7}{3}\right)}\left(\frac{7}{3}\right) = 1$.

Д.З. Найти длину решения неравенств $36^x - 10\cdot 18^x + 16\cdot 9^x \le 0$; $9^x - 11\cdot 6^x + 18\cdot 4^x \le 0$.

7. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Преобразование (упрощение) логарифмических выражений

Основные свойства логарифмов

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a x} \equiv x$

$$\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c,\ \log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c,$$

$$\log_a b^c = c\cdot\log_a b,\ \log_{a^c} b=\frac{1}{c}\cdot\log_a b,\ \log_a b=\frac{1}{\log_b a},$$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},\ b=\log_a a^b,\ \log_a 1=0,\ \log_a a=1.$$

1. Вычислить $9^{\log_{81} 625}$.

$$9^{\log_{9^2} 625}=9^{\frac{1}{2}\log_9 625}=9^{\log_9\sqrt{625}}=\sqrt{625}=25.$$

Д.З. Вычислить $27^{\log_{81} 16}$; $8^{\log_{64} 81}$.

2. Вычислить $\log_3\left(2^{\log_{4\sqrt{2}} 3\sqrt{3}}\right)$.

$$\log_3\left(2^{\log_{2^{5/2}} 3^{3/2}}\right)=\log_3\left(2^{\frac{2}{5}\log_2 3^{\frac{3}{2}}}\right)=\log_3\left(2^{\log_2 3^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5}}}\right)=\log_3\left(3^{\frac{3}{5}}\right)=\frac{3}{5}.$$

Д.З. Вычислить $\log_3\left(2^{\log_{4\sqrt{2}} 3\sqrt{3}}\right)$; $\log_5\left(11^{2\log_{121} 125}\right)$; $\sqrt{3}^{\left(\log_3 4+\log_{\sqrt[4]{3}}\sqrt{2}\right)}$.

3. Вычислить $(\log_2 81)\cdot(\log_3 25)\cdot(\log_5 16)$.

$$(\log_2 81)\cdot(\log_3 25)\cdot(\log_5 16)=\left(\log_2 3^4\right)\cdot\left(\log_3 5^2\right)\cdot\left(\log_5 2^4\right)=$$

$$=4\cdot 2\cdot 4\cdot(\log_2 3)\cdot(\log_3 5)\cdot(\log_5 2)=32\cdot\frac{1}{\log_3 2}\cdot(\log_3 5)\cdot\frac{\log_3 2}{\log_3 5}=32.$$

Д.З. Вычислить $(\log_2 9)\cdot(\log_3 121)\cdot(\log_{11} 32)$.

4. Вычислить $\left(\log_{27}\left(2^8\right)+\log_3\left(4^8\right)+\log_{81}\left(8^8\right)\right)\log_4 27$.

$$\left(\log_{27}\left(2^8\right)+\log_3\left(4^8\right)+\log_{27}\left(8^8\right)\right)\log_4 27=$$
$$=\left(\log_{3^3}\left(2^8\right)+\log_3\left(2^{16}\right)+\log_{3^4}\left(2^{24}\right)\right)\log_{2^2} 3^3=$$
$$=\left(\frac{8}{3}\log_3 2+16\log_3 2+\frac{24}{4}\log_3 2\right)\cdot\frac{3}{2}\log_2 3=$$
$$=\left(\frac{8}{3}+16+6\right)\cdot\frac{3}{2}\log_3 2\cdot\log_2 3=37.$$

Д.З. **Вычислить** $\left(\log_{16} 27+\log_8 9+\log_4 3\right)\log_9 4$.

5. **Вычислить** $\dfrac{\log_3 25+\log_9 625}{\log_{81} 125-\log_{27} 5}$.

$$\frac{\log_3 25+\log_{3^2}(25)^2}{\log_{3^4} 5^3-\log_{3^3} 5}=\frac{\log_3 25+\log_3 25}{\frac{3}{4}\log_3 5-\frac{1}{3}\log_3 5}=\frac{4\log_3 5}{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)\log_3 5}=4\cdot\frac{12}{9-4}=\frac{48}{5}.$$

Д.З. **Вычислить** $\dfrac{\log_3 2+\log_3 8}{4\log_3 2-\log_{\sqrt[3]{3}} 2}$.

6. **Вычислить** $\dfrac{\log_9 8+\log_3 32}{\log_9 7+\log_3 49}\cdot\log_2 49$.

$$\frac{\log_9 8+\log_3 32}{\log_9 7+\log_3 49}\cdot\log_2 49=\frac{\frac{1}{2}\log_3 2^3+\log_3 2^5}{\frac{1}{2}\log_3 7+\log_3 7^2}\cdot\log_2 7^2=$$
$$=\frac{\left(\frac{3}{2}+5\right)\log_3 2}{\left(\frac{1}{2}+2\right)\log_3 7}\cdot 2\log_2 7=\frac{13}{5}\cdot 2\cdot\frac{\log_3 2}{\log_3 7}\cdot\log_2 7=\frac{26}{5}.$$

Д.З. **Вычислить** $\dfrac{\log_7 8}{\log_{81} 32}\cdot\log_{27} 49$.

7. **Вычислить** $\dfrac{\left(\log_3 63\right)\cdot\left(\log_{1/7} 3\right)}{\log_3 63+\dfrac{1}{\log_{1/7} 3}}$.

$$\frac{(\log_3 63)\cdot(\log_{1/7}3)}{\log_3 63+\frac{1}{\log_{1/7}3}}=\frac{\frac{1}{\log_3 63}\cdot\frac{-1}{\log_3 7}}{\frac{1}{\log_3 63}-\frac{1}{\log_3 7}}=$$

$$=-\frac{\frac{1}{\log_3 63}\cdot\frac{1}{\log_3 7}}{\frac{\log_3 7-\log_3 63}{\log_3 63\cdot\log_3 7}}=\frac{1}{\log_3 63-\log_3 7}=\frac{1}{\log_3 9}=\frac{1}{2}.$$

Д.З. Вычислить $\frac{\log_{162}3\cdot\log_{\frac{1}{2}}3}{\log_{162}3+\log_{\frac{1}{2}}3}$; $\frac{\log_{160}2\cdot\log_{\frac{1}{5}}2}{\log_{160}2+\log_{\frac{1}{5}}2}$.

8. Вычислить $\frac{6\log_3 48-3\log_3(\log_{\sqrt{2}}64-\log_5 125)}{\log_{\sqrt{3}}8}$.

$$\frac{6\log_3 48-3\log_3(2\log_2 64-3)}{2\log_3 8}=\frac{6\log_3 48-6}{2\log_3 8}=\frac{6(\log_3 48-1)}{2\log_3 8}=$$

$$=3\frac{(\log_3 48-\log_3 3)}{\log_3 8}=3\frac{\log_3 16}{\log_3 8}=3\frac{\log_3 2^4}{\log_3 2^3}=4.$$

Д.З. Вычислить $\frac{4\log_7 6-2\log_{49}9}{\log_{\sqrt{7}}(\log_2 16\cdot\log_3 27)}$.

9. Решить уравнение $x\cdot\log_2 8=\log_2 5$.

$$x=\frac{\log_2 5}{\log_2 8}=\log_8 5\approx 0{,}5.$$

Д.З. Решить уравнения

$$x\cdot 2^{\log_{\sqrt{2}}3}=7^{\log_{\sqrt{7}}5};\ x\cdot 6^{\log_{\sqrt{6}}7}=11^{\log_{\sqrt{11}}13}.$$

10. Решить уравнение $5^x=3$.

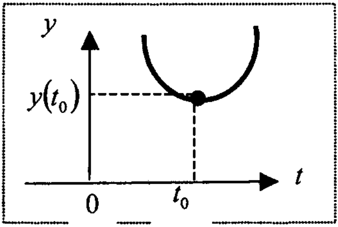
$5^x=5^{\log_5 3}\ \Rightarrow\ x=\log_5 3$.

Д.З. Решить уравнение $3^x=5$.

11. Найти наименьшее значение функции

$$y=25^x-2\sqrt{\log_3 4}\cdot 5^x+\log_3 324.$$

Замена: $t = 5^x > 0 \Rightarrow y = t^2 - 2\sqrt{\log_3 4} \cdot t + \log_3 324$.



Вершина параболы: $t_0 = \sqrt{\log_3 4} > 0$

$y(t_0) = \log_3 4 - 2 \cdot \log_3 4 + \log_3 324 = \log_3 324 - \log_3 4 = \log_3 81 = 4$.

Д.З. Найти наименьшее значение функции

$$y = 4^x - 2\sqrt{\log_3 32} \cdot 2^x + \log_3 96; \; y = 64^x + 8^{x+2} + 2004.$$

12. При каких значениях параметра p система $\begin{cases} \log_5(x^3) + \log_8(y^p) = p + 1, \\ \log_5(x^{12}) + \log_8(y^4) = 7p + 1 \end{cases}$ имеет бесконечное число решений?

$\begin{cases} 3\log_5(x) + p\log_8(y) = p + 1, \\ 12\log_5(x) + 4\log_8(y) = 7p + 1. \end{cases}$ Замена: $\begin{cases} \tilde{x} = \log_5(x), \\ \tilde{y} = \log_8(y) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3\tilde{x} + p\tilde{y} = p + 1, \\ 12\tilde{x} + 4\tilde{y} = 7p + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{12} = \dfrac{p}{4}, \\ \dfrac{3}{12} = \dfrac{p+1}{7p+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 1, \\ 7p + 1 = 4p + 4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} p = 1, \\ p = 1 \end{cases} \Rightarrow p = 1$.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} 3^{2x + \log_3 p} + \log_2(y^{-5}) = 4p + 1, \\ 3^{2x} + \log_2(y^{p-6}) = 2p + 3 \end{cases}$ имеет бесконечное число решений.

13. Решить уравнение $\log_{36}(16^x) = \log_{36} 8$.

$16^x = 8 \Rightarrow 2^{4x} = 2^3 \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = \dfrac{3}{4}$.

Д.З. Решить уравнение $\log_{81}(8^x) = \log_{81} 16$; $\log_{625}(27^x) = \log_{625} 81$.

14. Решить уравнение $\log_2 x = 3$.

$x = 2^3 = 8$.

Д.З. Решить уравнение $\log_3(x)=2$.

15. Решить уравнение $\log_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} x=-2$.

ОДЗ $x>0 \Rightarrow \log_{2^{-1/2}} x=-2 \Rightarrow -2\cdot\log_2 x=-2 \Rightarrow \log_2 x=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=2$.

Д.З. Решить уравнение $\log_{1/5} x=-1$.

16. Решить уравнение $\log_2(x-7)+\log_2(x-9)=3$.

ОДЗ $\begin{cases} x>7 \\ x>9 \end{cases} \Rightarrow \quad x>9 \quad \Rightarrow \quad \log_2[(x-7)\cdot(x-9)]=\log_2 8 \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-7)(x-9)=8$;

$$x^2-16t+63=8 \Rightarrow x^2-16t+55=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=5-\text{постороннее} \\ x_2=11 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow x=11$.

17. Решить уравнение $\log_9 x+\log_3\left(\sqrt{x}-6\right)=3$.

ОДЗ $\begin{cases} x>0, \\ \sqrt{x}>6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ x>36 \end{cases} \Rightarrow x>36$.

$$\log_{3^2} x+\log_3\left(\sqrt{x}-6\right)=3 \Rightarrow \frac{1}{2}\log_3 x+\log_3\left(\sqrt{x}-6\right)=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3\sqrt{x}+\log_3\left(\sqrt{x}-6\right)=3 \Rightarrow \log_3\left(\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-6\right)\right)=3=\log_3 27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-6\right)=27;$$

замена: $t=\sqrt{x}>6 \Rightarrow t^2-6t-27=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-3-\text{постороннее} \\ t_2=9 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow t=9$.

Возврат в исходную переменную: $\sqrt{x}=9 \Rightarrow x=81$.

Д.З. Решить уравнение $\log_4 x+\log_2\left(\sqrt{x}-4\right)=2$.

18. Решить уравнение $\log_2\left(x^2-4x-12\right)=1$.

ОДЗ $\quad x^2-4x-12>0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_2=6 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>6 \end{array}\right. \quad \Rightarrow$

$\log_2\left(x^2-4x-12\right)=\log_2 2 \Rightarrow x^2-4x-12=2 \Rightarrow x^2-4x-14=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{1,2}=2\pm\sqrt{18} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=2+\sqrt{18} \\ x_2=2-\sqrt{18} \end{array}\right.$.

Д.З. Решить уравнение $\log_6\left(x^2-6x-27\right)=2$; $\log_3\left(x^2-6x\right)=3$.

19. Решить уравнение $\left(\log_2 x\right)^2-8\cdot\log_2 x+15=0$.

Замена: $t=\log_2 x \Rightarrow t^2-8t+15=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=5 \\ t_2=3 \end{array}\right.$.

Возврат в исходную переменную: $\left[\begin{array}{l} \log_2\left(x_1\right)=5 \\ \log_2\left(x_2\right)=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=2^5 \\ x_2=2^3 \end{array}\right.$.

Д.З. Решить уравнение $\left(\log_2 x\right)^2-7\cdot\log_2 x+10=0$.

20. Найти произведение всех различных корней уравнения $\left(\left(\log_{0,125} x\right)^2+\log_{0,125} x-2\right)\left(\left(\log_{0,125} x\right)^2+\log_{0,125} x-10\right)+16=0$.

Замена: $t=\left(\log_{0,125} x\right)^2+\log_{0,125} x-2 \Rightarrow t(t-8)+16=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow t^2-8t+16=0 \Rightarrow t=4$.

Возврат в исходную переменную: $\left(\log_{0,125} x\right)^2+\log_{0,125} x-2=4$.

Замена: $z=\log_{0,125} x \Rightarrow z^2+z-6=0 \Rightarrow$ Теорема Виета:
$\begin{cases} z_1+z_2=-1, \\ z_1 z_2=-6. \end{cases}$

При логарифмической замене произведение по x лежит в сумме по z: $z_1+z_2=\log_{\frac{1}{8}} x_1+\log_{\frac{1}{8}} x_2=-1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{8}}\left(x_1 x_2\right)=-1 \Rightarrow$
$\Rightarrow -\log_8\left(x_1 x_2\right)=-1 \Rightarrow \log_8\left(x_1 x_2\right)=1 \Rightarrow x_1 x_2=8$.

Д.З. Найти произведение всех различных корней уравнения $\left(\left(\log_3 x\right)^2-4\log_3 x+5\right)\left(\left(\log_3 x\right)^2-4\log_3 x+1\right)+4=0$.

21. Найти значения параметра p, при которых уравнение $\log_x 2^{p^2-5p+6}+\log_2 x=2(p-3)$ имеет одно решение.

ОДЗ $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1 \end{cases}$. Выход на одно основание:
$\left(p^2-5p+6\right)\cdot\dfrac{1}{\log_2 x}+\log_2 x=2(p-3)$.

Замена: $t=\log_2 x \Rightarrow \left(p^2-5p+6\right)\cdot\dfrac{1}{t}+t=2(p-3) \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} t^2-2(p-3)t+\left(p^2-5p+6\right)=0, \\ t\neq 0. \end{cases}$

Одно решение при $\left[\begin{array}{l} D=0 \\ c=0 \end{array}\right.$:

1) $D=0 \Rightarrow D=p^2-6p+9-p^2+5p-6=0 \Rightarrow p_1=3$ – посторонний;

2) $c=0 \Rightarrow p^2-5p+6=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p_2=2 \\ p_3=3 - \text{посторонний} \end{array}\right.$.

Д.З. Найти сумму всех различных значений p, при которых уравнение $\log_x 3^{p^2-6p+8}+\log_3 x=2(p-4)$ имеет одно решение.

22. Решить уравнение $\log_x(12x-1)=1+2\cdot\log_{(12x-1)} x$.

ОДЗ $\begin{cases} x>\dfrac{1}{12}, \\ x\neq 1 \end{cases}$. Выход на одно основание:

$$\log_x(12x-1)=1+\frac{2}{\log_x(12x-1)}.$$

Замена: $t=\log_x(12x-1) \Rightarrow t=1+\dfrac{2}{t} \Rightarrow t^2-t-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=2 \\ t_2=-1 \end{array}\right.$.

Возврат в исходную переменную:

$t_1=2$: $\log_x(12x-1)=2=\log_x x^2 \Rightarrow 12x-1=x^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2-12x+1=0 \Rightarrow x_{1,2}=6\pm\sqrt{35}$;

$t_2=-1$: $\log_x(12x-1)=-1=\log_x \dfrac{1}{x} \Rightarrow 12x-1=\dfrac{1}{x} \Rightarrow$
$\Rightarrow 12x^2-x-1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+48}}{24}=\dfrac{1\pm 7}{24} \Rightarrow x_0=\dfrac{1}{3}$.

Д.З. Решить уравнения $\log_x(45x+4)=1+2\cdot\log_{(45x+4)} x$; $\log_x(20x-1)=1+2\cdot\log_{(20x-1)} x$.

23. Решить уравнение

$$\log_7(12x-1)\cdot\log_x(12x-1)=\log_7(12x-1)+\log_7(x^2).$$

ОДЗ $\begin{cases} x>\dfrac{1}{12}, \\ x\neq 1. \end{cases}$ Выход на одно основание:

$$\log_x(12x-1)=1+\frac{2\cdot\log_7(x)}{\log_7(12x-1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\log_7(x)}{\log_7(12x-1)}=\log_{(12x-1)}x=\frac{1}{\log_x(12x-1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\log_x(12x-1)=1+\frac{2}{\log_x(12x-1)}.$$

Замена: $t=\log_x(12x-1)\ \Rightarrow\ t^2-t-2=0\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}t_1=2\\ t_2=-1\end{array}\right.$.

Возврат в исходную переменную: $\left[\begin{array}{l}\log_x(12x-1)=2=\log_x x^2\\ \log_x(12x-1)=-1=\log_x\dfrac{1}{x}\end{array}\right.\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}12x-1=x^2\\ 12x-1=\dfrac{1}{x}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-12x+1=0\\ 12x^2-x-1=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=6+\sqrt{35}\\ x_2=6-\sqrt{35}>1/12\\ x_3=\dfrac{1}{3}\\ x_4=-\dfrac{1}{4}-\text{постороннее}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=6+\sqrt{35}\\ x_2=6-\sqrt{35}\\ x_3=\dfrac{1}{3}\end{array}\right..$$

Д.З. Решить уравнения

$$\log_{11}(20x-1)\cdot\log_x(20x-1)=\log_{11}(20x-1)+\log_{11}(x^2);$$

$$\log_8(45x+4)\cdot\log_x(45x+4)=\log_8(45x+4)+\log_8(x^2).$$

Однородные логарифмические уравнения

$$\log_a^2 f(x)+p\cdot\log_a f(x)\cdot\log_a g(x)+q\cdot\log_a^2 g(x)=0$$

ОДЗ $\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ a>0, \\ a\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{\log_a f(x)}{\log_a g(x)}\right)^2 + p\dfrac{\log_a f(x)}{\log_a g(x)} + q = 0$.

Замена: $t = \dfrac{\log_a f(x)}{\log_a g(x)} = \log_{g(x)} f(x) \Rightarrow t^2 + p\cdot t + q = 0$.

24. Решить уравнение

$$\log_7^2(x-1) - \log_7(x)\cdot\log_7(x-1) - 2\log_7^2(x) = 0.$$

ОДЗ $\begin{cases} x>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Rightarrow x>1 \Rightarrow \left(\dfrac{\log_7(x-1)}{\log_7(x)}\right)^2 - \dfrac{\log_7(x-1)}{\log_7(x)} - 2 = 0$.

Замена: $t = \dfrac{\log_7(x-1)}{\log_7(x)} = \log_x(x-1) \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = -1 \end{array}\right.$.

Возврат в исходную переменную:

$$\left[\begin{array}{l} \log_x(x-1) = 2 = \log_x x^2 \\ \log_x(x-1) = -1 = \log_x \dfrac{1}{x} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 = x^2 \\ x-1 = \dfrac{1}{x} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x + 1 = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} D<0 \\ x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} - \text{постороннее} \end{array}\right. \Rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Д.З. Решить уравнения

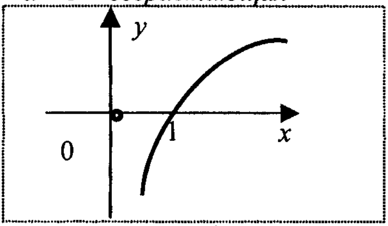
$$\log_{13}^2(2x-1) - \log_{13}(x)\cdot\log_{13}(2x-1) - 2\log_{13}^2(x) = 0;$$

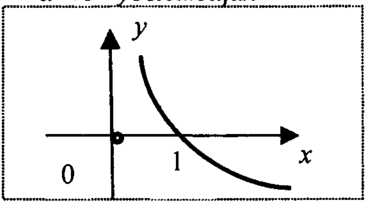
$$\log_7^2(31-x)^2 - \frac{5}{2}\log_7(31-x)\cdot\log_7(x-1)^2 - \log_7^2(x-1)^2 = 0.$$

ОДЗ логарифмической функции $y = \log_a x$: $\begin{cases} x>0, \\ a>0, \\ a\neq 1 \end{cases}$

График логарифмической функции $y = \log_a x$:

$a > 1$ – *возрастающая* $\qquad$ $a < 1$ – *убывающая*





Решение логарифмических неравенств:

$$\begin{cases}\log_a x > \log_a b,\\ a > 1\end{cases} \Rightarrow x > b;\ \begin{cases}\log_a x > \log_a b,\\ a < 1\end{cases} \Rightarrow x < b.$$

25. Решить неравенство $\log_3 15x \geq 3$.

ОДЗ $x > 0 \Rightarrow \log_3 15x \geq 3 = \log_3 27 \Rightarrow 15x \geq 27 \Rightarrow x \geq \dfrac{27}{15} = \dfrac{9}{5}$.

Д.З. Решить неравенства $\log_4 20x \leq 2$; $\log_{0,25} x > -2$; $\log_{\left(\frac{1}{5}\right)} x > -1$.

26. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{11+x^2}}(12x - 24) > -1$.

$$\text{ОДЗ } 12x - 24 > 0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow \log_{\left(11+x^2\right)^{-1}}(12x-24) > -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\log_{\left(11+x^2\right)}(12x-24) > -1;\ \log_{\left(11+x^2\right)}(12x-24) < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\left(11+x^2\right)}(12x-24) < \log_{\left(11+x^2\right)}\left(11+x^2\right);$$

основание логарифма больше 1 $\Rightarrow$ $12x - 24 < 11 + x^2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 12x + 35 > 0$. Корни $\left[\begin{array}{l} x = 7\\ x = 5\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x > 7\\ x < 5\end{array}\right.\\ x > 2\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > 7\\ 2 < x < 5\end{array}\right.$.

Д.З. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{\left(15+x^2\right)}}(6x - 12) < -1$.

27. Решить неравенство $\log_{\left(x^2-8x+21\right)} 6 \geq 1$.

ОДЗ $x^2 - 8x + 21 > 0 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow x$ – любое;

$\log_{(x^2-8x+21)} 6 \ge \log_{(x^2-8x+21)}(x^2-8x+21)$.

Основание: $y = x^2 - 8x + 21$ – парабола усами вверх, вершина $x_0 = 4$,

$y_{\min} = y(4) = 16 - 32 + 21 = 5 > 1 \Rightarrow$ основание логарифма больше $1 \Rightarrow 6 \ge x^2 - 8x + 21 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 \le 0 \Rightarrow 3 \le x \le 5$.

Д.З. Решить неравенства $\log_{(x^2-4x+12)} 5 \le 1$; $\log_{(x^2-2x+9)} 7 \ge 1$.

28. Решить неравенство $\log_2 (x-7)^2 < 4$.

ОДЗ $(x-7)^2 > 0 \Rightarrow x \ne 7$; $\log_2 (x-7)^2 < \log_2 16 \Rightarrow (x-7)^2 < 16 \Rightarrow$ $\Rightarrow |x-7| < 4 \Rightarrow -4 < x - 7 < 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3 < x < 7 \\ 7 < x < 11 \end{array}\right.$.

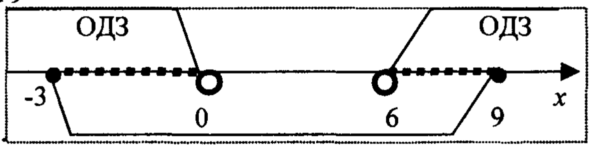
Д.З. Решить неравенства $\log_2 (x-7)^4 < 4$; $\log_2 (x-7)^3 < 3$.

29. Решить неравенство $\log_3 (x^2 - 6x) \le 3$.

ОДЗ $x^2 - 6x > 0 \Rightarrow x(x-6) > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 6 \end{array}\right.$;

$\log_3 (x^2 - 6x) \le \log_3 27 \Rightarrow x^2 - 6x \le 27 \Rightarrow (x+3)(x-9) \le 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow -3 \le x \le 9 \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} -3 \le x < 0 \\ 6 < x \le 9 \end{array}\right.$



Д.З. Решить неравенства

$$\log_6 (x^2 - 6x - 27) \le 2;\ \log_{15} (x^2 - 8x + 15) \le 1.$$

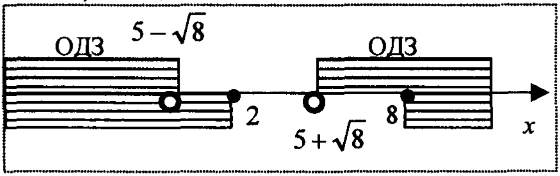
30. Решить неравенство $\log_2 (x^2 - 10x + 17) \ge 0$.

ОДЗ $x^2 - 10x + 17 > 0$. Корни $\left[\begin{array}{l} x_1 = 5 + \sqrt{8} \\ x_2 = 5 - \sqrt{8} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ вне корней

$\left[\begin{array}{l} x > 5 + \sqrt{8} \\ x < 5 - \sqrt{8} \end{array}\right.$;

$\log_2\left(x^2-10x+17\right)\geq\log_2 1 \;\Rightarrow\; x^2-10x+17\geq 1 \;\Rightarrow\; x^2-10x+16\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 8 \\ x\leq 2 \end{array}\right.$



$\left[\begin{array}{l} x\geq 8 \\ x<5-\sqrt{8} \end{array}\right.$.

Д.З. Решить неравенство $\log_3\left(x^2-8x+12\right)\geq 0$.

31. Решить неравенство $\log_4 x+\log_2\left(\sqrt{x}-4\right)<2$.

ОДЗ $x>16 \;\Rightarrow\; \log_{2^2} x+\log_2\left(\sqrt{x}-4\right)<2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\log_2 x+\log_2\left(\sqrt{x}-4\right)<2 \Rightarrow \log_2\sqrt{x}+\log_2\left(\sqrt{x}-4\right)<2 \;\Rightarrow$

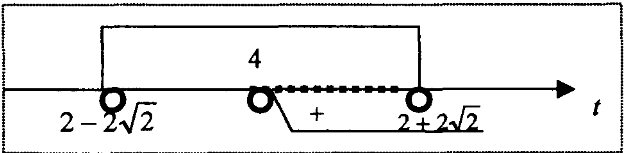
$\Rightarrow \log_2\left(\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}-4\right)\right)<\log_2 4 \;\Rightarrow\; \sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}-4\right)<4$.

Замена: $t=\sqrt{x}>4 \;\Rightarrow\; t\cdot\left(t-4\right)<4 \;\Rightarrow\; t^2-4t-4<0$.

Корни уравнения $\left[\begin{array}{l} t_1=2+2\sqrt{2} \\ t_2=2-2\sqrt{2} \end{array}\right.$. Решение между корнями

$\begin{cases} 2-2\sqrt{2}<t<2+2\sqrt{2} \\ t>4 \end{cases} \Rightarrow$

$4<t<2+2\sqrt{2}$



Возврат в исходную переменную: $4<\sqrt{x}<2+2\sqrt{2} \;\Rightarrow$
$\Rightarrow 16<x<4+8\sqrt{2}+8$; $16<x<12+8\sqrt{2}$.

Д.З. Решить неравенства

$\log_9 x+\log_3\left(\sqrt{x}-6\right)<3$; $\log_2\left(x+2\right)+\log_2\left(x-3\right)\leq 3$.

32. Решить неравенство $\left|\log_2 x\right|\leq\left|\log_x 2\right|$.

ОДЗ $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1; \end{cases}$ выход на одно основание: $\left|\log_2 x\right|\leq\left|\dfrac{1}{\log_2 x}\right|$;

метод возведения в квадрат: $\log^2{}_2 x \le \dfrac{1}{\log^2{}_2 x} \Rightarrow \log^4{}_2 x \le 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log^2{}_2 x \le 1 \quad \Rightarrow (\log_2 x - 1)(\log_2 x + 1) \le 0 \quad \Rightarrow \quad -1 \le \log_2 x \le 1 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 \dfrac{1}{2} \le \log_2 x \le \log_2 2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} \le x \le 2, \\ x \ne 1. \end{cases}$

Д.З. Решить неравенство $|\log_3 x| \ge |\log_x 3|$.

33. Решить неравенство $\log_{4x} 2 < \log_{0,25x} 4$.

ОДЗ $\begin{cases} x > 0, \\ x \ne 4 \\ x \ne \dfrac{1}{4}; \end{cases}$. $\log_{4x} 2 < 2\log_{0,25} 2$,

выход на одно основание:

$$\frac{1}{\log_2 4x} < \frac{2}{\log_2 \dfrac{x}{4}} \Rightarrow \frac{1}{2 + \log_2 x} < \frac{2}{\log_2 x - 2}.$$

Замена: $t = \log_2 x \Rightarrow \dfrac{1}{2+t} < \dfrac{2}{t-2} \Rightarrow \dfrac{1}{2+t} - \dfrac{2}{t-2} < 0$. Далее метод интервалов.

Д.З. Решить неравенство $\log_{4x} 4 > \log_{0,25x} 2$.

34. Решить неравенство $(\log_2 x)^2 - 8\log_2 x + 15 \le 0$.

ОДЗ $x > 0$; замена: $t = \log_2 x \Rightarrow t^2 - 8t + 15 \le 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 3, \\ t_2 = 5 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \le t \le 5$.

Возврат в исходную переменную: $\log_2 8 = 3 \le \log_2 x \le 5 = \log_2 32 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8 \le x \le 32$.

Д.З. Решить неравенство $(\log_2 x)^2 - 12\log_2 x + 32 \le 0$.

35. Решить неравенство

$$\log_7^2(x-1) - \log_7(x) \cdot \log_7(x-1) - 2\log_7^2(x) \le 0.$$

ОДЗ $\begin{cases} x > 0, \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1$. $\left(\dfrac{\log_7(x-1)}{\log_7(x)}\right)^2 - \dfrac{\log_7(x-1)}{\log_7(x)} - 2 \le 0 \Rightarrow$

замена: $t=\dfrac{\log_7(x-1)}{\log_7(x)}=\log_x(x-1)\ \Rightarrow\ t^2-t-2\le 0 \Rightarrow\ -1\le t\le 2$.

Возврат в исходную переменную:

$$-1\le \log_x(x-1)\le 2\ \Rightarrow\ \log_x\frac{1}{x}\le \log_x(x-1)\le \log_x x^2\ \Rightarrow\ \frac{1}{x}\le x-1\le x^2;$$

$$\begin{cases} x-1\ge \dfrac{1}{x}, \\ x-1\le x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x-1\ge 0, \\ x^2-x+1\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D<0 \Rightarrow x - \text{любое}, \\ \left[\begin{array}{l} x\ge \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x\le \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow\ x\ge \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Д.З. Решить неравенства

$$\log_{13}^2(2x-1)-\log_{13}(x)\cdot \log_{13}(2x-1)-2\log_{13}^2(x)\le 0;$$

$$\log_7^2(31-x)^2-\frac{5}{2}\log_7(31-x)\cdot \log_7(x-1)^2-\log_7^2(x-1)^2\ge 0.$$

36. Найти все значения параметра p, при которых система $\begin{cases} \log_{12}(x(13-x))\le 1, \\ \log_3((x-p)(4-x+p))\le 1 \end{cases}$ имеет одно решение.

$\begin{cases} 0<x(13-x)\le 12, \\ 0<(x-p)(4-x+p)\le 3 \end{cases}$. Далее см. задачу 17 из раздела «Метод интервалов».

Д.З. Решить систему неравенств $\begin{cases} \log_{12}(x(13-x))\le 1, \\ \log_6((x-p)(7-x+p))\le 1. \end{cases}$

37. Найти область изменения функции $y=\log_3(x^2+27)$:

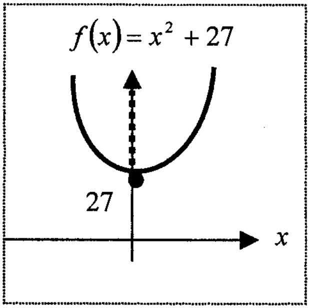
а) внутренняя функция – парабола усами вверх: $f(x)=x^2+27$:

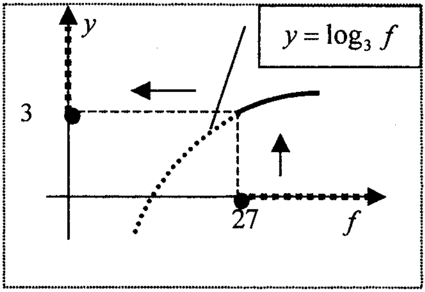
$$f_{\min}=f(x_0)=27,\ f(x)\ge 27;$$

б) внешняя функция – логарифмическая по основанию больше 1 (возрастающая):

$$y=\log_3 f\ge \log_3 27=3$$

а) внутренняя функция б) внешняя функция





$y \geq 3$.

Д.З. Найти область изменения функции $y = \log_3(4x - x^2 - 1)$; $y = \log_{81}(8x - x^2 - 13)$; $y = \log_{32}(6x - x^2 - 7)$; $y = \log_2(x^2 + 16)$.

38. Найти область изменения функции $y = \log_{(x^2+27)} 3$;

$$y = \log_{(x^2+27)} 3 = \frac{1}{\log_3(x^2 + 27)}. \Rightarrow \log_3(x^2 + 27) \geq 3.$$

Замена: $z = \log_3(x^2 + 27) \Rightarrow y = \dfrac{1}{z}$. Область изменения функции $z = \log_3(x^2 + 27)$ из предыдущей задачи: $z \geq 3 \Rightarrow 0 < y \leq \dfrac{1}{3}$.

Д.З. Найти область изменения функции $y = \log_{(4x-x^2-1)} 3$; $y = \log_{(8x-x^2-13)} 81$.

39. Найти множество значений функции $y = \log_{(4x-x^2-1)} 3$.

Переход на «хорошее» основание: $y = \dfrac{1}{\log_3(4x - x^2 - 1)}$.

Проанализируем знаменатель $z = \log_3(4x - x^2 - 1)$:

а) внутренняя функция – парабола усами вниз

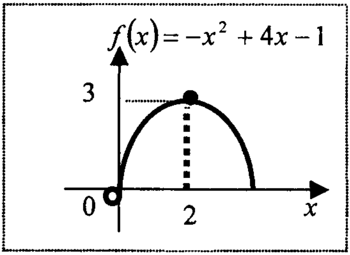
$$f(x) = -x^2 + 4x - 1:$$

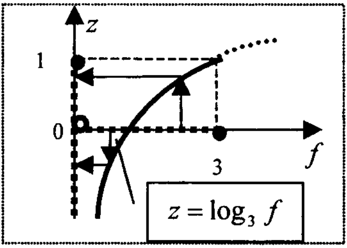
вершина $x_0 = 2 \Rightarrow f_{\max} = f(2) = 3 \Rightarrow 0 < f(x) \leq 3$;

б) внешняя функция – логарифмическая по основанию больше 1 (возрастающая):

$$z = \log_3 f \leq \log_3 3 = 1, z \neq 0.$$

а) внутренняя функция б) внешняя функция





$$\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{z} \geq 1 \\ y < 0 \end{array}\right. .$$

Д.З. Найти область изменения функции $y = \log_{(8x-x^2-13)} 81$; $y = \log_3 3^{4x-x^2-1}$.

40. Найти область изменения функции $y = \log_{0.5} \sqrt{3 - 2x - x^2}$:

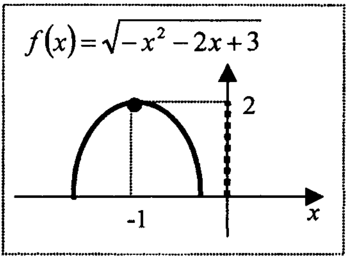
а) внутренняя функция – $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$ (парабола усами вниз):

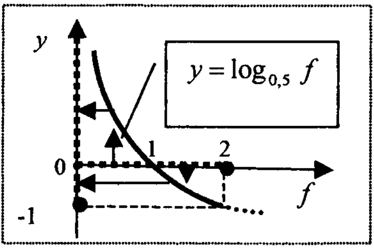
$$f_{\max} = f(-1) = \sqrt{-1 + 2 + 3} = 2 \Rightarrow f(x) \leq 2;$$

б) внешняя функция – логарифмическая по основанию меньше 1 (убывающая):

$$y = \log_{0,5} f \geq \log_{0,5} 2 = -1.$$

а) внутренняя функция б) внешняя функция





$y \geq -1$.

Д.З. Найти область изменения функции $y = \log_{\frac{1}{5}} \left(x^2 + 8x + 21\right)$; $y = \log_{0,5} \left((0,5)^{-x}\right)$.

41. Найти область изменения функции

$$y(x) = \log_2 \left(-9^x + 10 \cdot 3^x - 9\right):$$

а) внутренняя функция – $f(x) = -9^x + 10 \cdot 3^x - 9$ (парабола усами вниз);

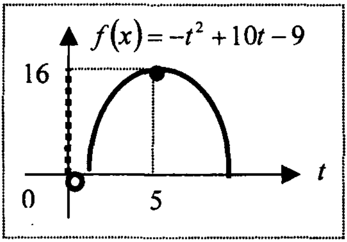
замена $t = 3^x > 0 \Rightarrow f(x) = -t^2 + 10 \cdot t - 9$, $t_0 = 5 > 0$;

$$f_{\max} = f(t_0) = -25 + 50 - 9 = 16 \Rightarrow 0 < f(t) \le 16;$$

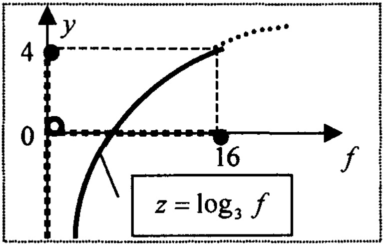
б) внешняя функция – логарифмическая по основанию больше 1 (возрастающая):

$$y = \log_2 f \le \log_2 16 = 4.$$

а) внутренняя функция



б) внешняя функция



$y \le 4$.

Д.З. Найти область изменения функции

$$y(x) = \log_3\left(-49^x + 8 \cdot 7^x + 11\right).$$

42. Найти область изменения функции $y = 2^{x^2 - 4x + 6}$:

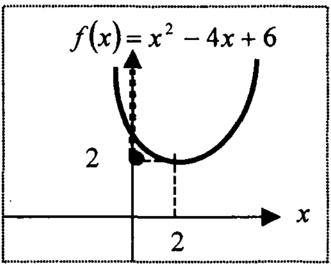
а) внутренняя функция – $f(x) = x^2 - 4x + 6$ (парабола усами вверх):

$$f_{\min} = f(2) = 4 - 8 + 6 = 2 \Rightarrow f(x) \ge 2;$$

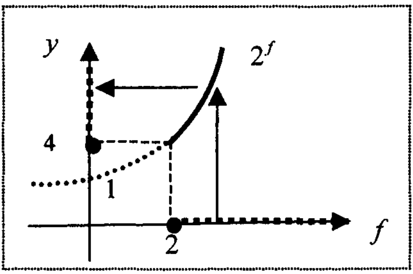
б) внешняя функция – показательная по основанию больше 1 (возрастающая):

$$y = 2^f \ge 2^2 = 4.$$

а) внутренняя функция



б) внешняя функция



$y \ge 4$.

Д.З. Найти область изменения функции $y=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{x^2-4x}$;
$y=\operatorname{arcctg}\sqrt{2x-x^2}$.

43. Найти область изменения функции $y=2^{\sin^2 x-2\sin x+3}$:

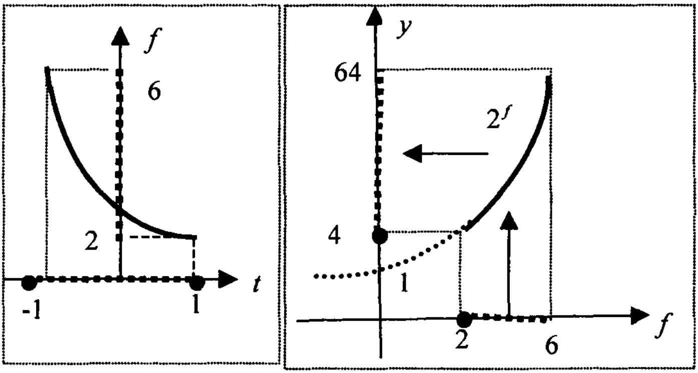
а) внутренняя функция – $f(x)=\sin^2 x-2\cdot\sin x+3$;

замена: $t=\sin x$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} f(x)=t^2-2\cdot t+3, \\ -1\le t\le 1 \end{cases}$ – кусок параболы усами вниз, $t_0=1$; $f_{\min}=f(t_0)=1-2+3=2$, $f_{\max}=f(-1)=1+2+3=6$, $2\le f(t)\le 16$;

б) внешняя функция – показательная по основанию больше 1 (возрастающая):

$$y=2^f.$$

а) внутренняя функция б) внешняя функция



$4\le y\le 64$.

Д.З. Найти множество значений параметра p, при которых уравнение $2^{\cos^2 x-\cos x+2}=p$ имеет хотя бы одно решение.

Сложнопоказательные уравнения $a^x\cdot b^{\left(-\frac{1}{x}\right)}=c$

Метод логарифмирования: $\log_a\left(a^x\cdot b^{\left(-\frac{1}{x}\right)}\right)=\log_a c$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x-\frac{1}{x}\log_a b=\log_a c \;\Rightarrow\; x^2-(\log_a c)\cdot x-\log_a b=0.$$

Теорема Виета: $\begin{cases} x_1+x_2=\log_a c,\\ x_1\cdot x_2=-\log_a b.\end{cases}$

44. Решить уравнение $x^{\log_5 x}=x^5$.

Метод логарифмирования:

$$\log^2{}_5 x=5\log_5 x \quad\Rightarrow\quad (\log_5 x)(\log_5 x-5)=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\log_5 x=5\\ \log_5 x=0\end{array}\right. \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=5^5\\ x_2=1\end{array}\right..$$

Д.З. Решить уравнение $x^{\log_7 x}=x^7$.

45. Решить уравнение $\left(\frac{x}{5}\right)^{\log_5 x}=x^4$.

ОДЗ $x>0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^{\log_5 x}}{5^{\log_5 x}}=x^4 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^{\log_5 x}}{x}=x^4 \;\Rightarrow\; x^{\log_5 x}=x^5$;

метод логарифмирования:

$$\log^2{}_5 x=5\log_5 x \quad\Rightarrow\quad (\log_5 x)(\log_5 x-5)=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\log_5 x=5\\ \log_5 x=0\end{array}\right. \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=5^5\\ x_2=1\end{array}\right..$$

Д.З. Решить уравнения $\left(\frac{x}{3}\right)^{\log_3 x}=x^2$; $\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x}{3\sqrt{3}}\right)}=\sqrt{27}$.

46. Решить уравнение $x^{\log_2(2-x)}=(2-x)^{(\log_2 x)}$.

ОДЗ $\begin{cases} x>0,\\ 2-x>0\end{cases} \Rightarrow\; 0<x<2$.

Метод логарифмирования: $\log_2 x^{(2-x)}=\log_2(2-x)^{(\log_2 x)} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow (\log_2(2-x))\cdot\log_2 x=(\log_2 x)\cdot\log_2(2-x) \;\Rightarrow$ тождество

Решением является ОДЗ $\Rightarrow\; 0<x<2$.

Д.З. Решить уравнение $(3x-1)^{\log_2(2-x)}=(2-x)^{(\log_2(3x-1))}$.

47. Найти сумму корней уравнения $7^x \cdot 61^{\left(-\frac{1}{x}\right)} = 37$.

Метод логарифмирования: $\log_7\left(7^x \cdot 61^{-\frac{1}{x}}\right) = \log_7 37 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_7\left(7^x\right) + \log_7\left(61^{-\frac{1}{x}}\right) = \log_7 37 \quad \Rightarrow \quad x - \frac{1}{x}\log_7 61 = \log_7 37 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - x\log_7 37 - \log_7 61 = 0 \ \Rightarrow$ Теорема Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \log_7 37, \\ x_1 x_2 = -\log_7 61 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = \log_7 37$.

Д.З. Найти сумму корней уравнений $4^x \cdot 17^{\left(-\frac{1}{x}\right)} = 73$; $2^x \cdot 19^{\left(-\frac{1}{x}\right)} = 117$.

48. Найти сумму корней уравнений $2^x \cdot 32000000^{-\frac{1}{x}} = 20$;

$2^x \cdot \left(2^5 \cdot 10^6\right)^{-\frac{1}{x}} = 20$.

Метод логарифмирования: $\log_2\left(2^x \cdot \left(2^5 \cdot 10^6\right)^{-\frac{1}{x}}\right) = \log_2(2 \cdot 10) \quad \Rightarrow$

$x - \frac{1}{x}(5 + 6\log_2 10) = 1 + \log_2 10 \Rightarrow \ x^2 - x \cdot (1 + \log_2 10) - (5 + 6\log_2 10) = 0$;

Теорема Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + \log_2 10, \\ x_1 \cdot x_2 = -5 - 6\log_2 10 \end{cases} \Rightarrow \ x_1 + x_2 = 1 + \log_2 10$.

Д.З. Найти сумму корней уравнения $3^x \cdot 8100000^{-\frac{1}{x}} = 30$.

49. Найти сумму корней уравнения $3^{\left(6^x\right)} \cdot 85^{\left(6^{-x}\right)} = 28356$.

Замена: $6^x = t > 0 \ \Rightarrow \ 3^t \cdot 85^{\frac{1}{t}} = 28356$.

Метод логарифмирования ($\log_3$): $t + \frac{1}{t}\log_3 85 = \log_3(28356) \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2 - t \cdot \log_3(28356) + \log_3 85 = 0$. Теорема Виета:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = \log_3(28356), \\ t_1 \cdot t_2 = \log_3 85. \end{cases}$$

При показательной замене сумма по x лежит в произведении по t:

$$t_1 \cdot t_2 = 6^{x_1+x_2} = \log_3 85 \Rightarrow x_1 + x_2 = \log_6(\log_3 85).$$

Д.З. Найти сумму корней уравнений $2^{(5^x)} \cdot 51^{(5^{-x})} = 37651$; $5^{(7^x)} \cdot 41^{(7^{-x})} = 737651$.

50. Найти произведение корней уравнения $(0{,}1 \cdot x)^{\lg x} = 1000x$.

ОДЗ $x > 0$. Метод логарифмирования: $(\lg x)(-1 + \lg x) = 3 + \lg x$.

Замена: $t = \lg x \Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow$ Теорема Виета $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2, \\ t_1 \cdot t_2 = -3. \end{cases}$

При логарифмической замене произведение по x лежит в сумме по t:

$$t_1 + t_2 = \lg x_1 + \lg x_2 = \lg(x_1 \cdot x_2) = 2 = \lg 100 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 100.$$

Д.З. Найти произведение корней уравнений $(0{,}5 \cdot x)^{\log_2 x} = 8x$; $(3 \cdot x)^{\log_3 x} = 81x$.

51. Найти произведение всех корней уравнения

$$9^{\log_2 x} = 243 \cdot 5^{\log_x 2}.$$

ОДЗ $x > 0$. Замена: $t = \log_2 x \Rightarrow 9^t = 243 \cdot 5^{\frac{1}{t}}$.

Метод логарифмирования:

$$2 \cdot t = 5 + \frac{1}{t}\log_3 5 \Rightarrow t^2 - \frac{5}{2}t - \frac{1}{2}\log_3 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Теорема Виета:} \begin{cases} t_1 + t_2 = \dfrac{5}{2}, \\ t_1 t_2 = -\dfrac{1}{2}\log_3 5. \end{cases}$$

При логарифмической замене произведение по x лежит в сумме по t:

$$t_1 + t_2 = \log_2 x_1 + \log_2 x_2 = \log_2(x_1 \cdot x_2) = \frac{5}{2} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 2^{5/2} = \sqrt{32}.$$

Д.З. Найти произведение корней уравнений $9^{\log_5 x} = 243 \cdot 15^{\log_x 5}$; $49^{\log_3 x} = 343 \cdot 27432^{\log_x 3}$.

52. Найти произведение всех различных корней уравнения $x^{\log_2 3} = 27 \cdot 7^{\log_x 2}$.

Выход на одно основание: $x^{\log_2 3} = 27 \cdot 7^{\frac{1}{\log_2 x}}$.

Метод логарифмирования: $\log_2\left(x^{\log_2 3}\right) = \log_2\left(27 \cdot 7^{\frac{1}{\log_2 x}}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 3 \cdot \log_2 x = \log_2 27 + \dfrac{1}{\log_2 x}\log_2 7$.

Замена: $t = \log_2 x \quad \Rightarrow \quad \log_2 3 \cdot t^2 - t \cdot \log_2 27 - \log_2 7 = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2 - t \cdot \dfrac{\log_2 27}{\log_2 3} - \dfrac{\log_2 7}{\log_2 3} = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 3 \cdot t - \log_3 7 = 0 \quad \Rightarrow$ Теорема

Виета: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 3, \\ t_1 \cdot t_2 = -\log_3 7. \end{cases}$

При логарифмической замене произведение по x лежит в сумме по t:

$t_1 + t_2 = \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = \log_3(x_1 x_2) = 3 \Rightarrow x_1 x_2 = 27$.

Д.З. Найти произведение корней уравнений $x^{\log_2 3} = 81 \cdot 11^{\log_x 2}$, $x^{\log_2 3} = 9 \cdot 13^{\log_x 2}$.

53. Найти произведение всех различных корней уравнения $(\log_{16} x)^{\log_2(\log_{16} x)} = 16$.

ОДЗ $\log_{16} x > 0 \Rightarrow x > 1$.

Метод логарифмирования: $\log_2(\log_{16} x)^{\log_2(\log_{16} x)} = \log_2 16 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log_2(\log_{16} x))^2 = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(\log_{16} x) = 2 = \log_2 4 \\ \log_2(\log_{16} x) = -2 = \log_2 \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{16} x_1 = 4 \\ \log_{16} x_2 = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 16^4 \\ x_2 = \sqrt[4]{16} = 2 \end{array}\right.$.

Д.З. Найти произведение корней уравнения $(\log_9 x)^{\log_3(\log_9 x)} = 9$.

54. Найти произведение всех различных корней уравнения $10 \cdot 3^{\left(\log_3^2 x\right)} = x^3 + x^{\log_3 x}$.

Преобразование левой части: $3^{\left(\log_3^2 x\right)} = \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = x^{\log_3 x} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 \cdot x^{\log_3 x} = x^3$.

Метод логарифмирования:

$$\log_3\left(9\cdot x^{\log_3 x}\right)=\log_3 x^3 \Rightarrow 2+\left(\log_3 x\right)^2=3\cdot\log_3 x.$$

Замена: $t=\log_3 x \Rightarrow$ $t^2-3t+2=0$ $\Rightarrow$ Теорема Виета: $\begin{cases} t_1+t_2=3, \\ t_1\cdot t_2=2 \end{cases}$.

При логарифмической замене произведение по x лежит в сумме по t:

$$t_1+t_2=\log_3 x_1+\log_3 x_2=\log_3\left(x_1x_2\right)=3 \Rightarrow x_1x_2=27.$$

Д.З. Найти произведение корней уравнения

$$26\cdot 5^{\left(\log_5^2 x\right)}=x^3+x^{\log_5 x}.$$

55. S – сумма наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения $2^{(\operatorname{tg} x)}\cdot 32000000^{(-\operatorname{ctg} x)}=20$. Найти число $T=\operatorname{tg} S$.

Замена:

$$t=\operatorname{tg} x \Rightarrow T=\operatorname{tg} S=tg\left(x_1+x_2\right)=\frac{\operatorname{tg} x_1+\operatorname{tg} x_2}{1-\left(\operatorname{tg} x_1\right)\left(\operatorname{tg} x_2\right)}=\frac{t_1+t_2}{1-t_1\cdot t_2}.$$

$$2^t\cdot\left(2^5\cdot 10^6\right)^{-\frac{1}{t}}=20.$$

Метод логарифмирования: $\log_2\left(2^t\cdot\left(2^5\cdot 10^6\right)^{-\frac{1}{t}}\right)=\log_2\left(2\cdot 10\right) \Rightarrow$

$$t-\frac{1}{t}\left(5+6\log_2 10\right)=1+\log_2 10 \Rightarrow t^2-t\left(1+\log_2 10\right)-\left(5+6\log_2 10\right)=0;$$

Теорема Виета:

$$\begin{cases} t_1+t_2=1+\log_2 10, \\ t_1\cdot t_2=-5-6\log_2 10 \end{cases} \Rightarrow T=\frac{t_1+t_2}{1-t_1\cdot t_2}=\frac{1+\log_2 10}{1+5+\log_2 10}=\frac{1}{6}.$$

Д.З. Найти тангенс суммы наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения

$$3^{(\operatorname{tg} x)}\cdot 8100000^{(-\operatorname{ctg} x)}=30.$$

56. Решить неравенство $\left(\log_{16} x\right)^{\log_2\left(\log_{16} x\right)}\le 16$.

ОДЗ $\log_{16} x>0=\log_{16} 1 \Rightarrow x>1$.

Метод логарифмирования:

$$[\log_2(\log_{16} x)]^2 \le 4 \Rightarrow -2 \le \log_2(\log_{16} x) \le 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 \frac{1}{4} \le \log_2(\log_{16} x) \le \log_2 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \le \log_{16} x \le 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{16} \sqrt[4]{16} \le \log_{16} x \le \log_{16} 16^4 \Rightarrow 2 \le x \le 16^4.$$

Д.З. Решить неравенство $(\log_9 x)^{\log_3(\log_9 x)} \le 9$.

57. Решить неравенство $10 \cdot 3^{\left(\log_3^2 x\right)} \le x^3 + x^{\log_3 x}$.

Преобразование левой части: $3^{\left(\log_3^2 x\right)} = \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = x^{\log_3 x} \Rightarrow$
$\Rightarrow 9 \cdot x^{\log_3 x} \le x^3$.

Метод логарифмирования:

$$\log_3\left(9 \cdot x^{\log_3 x}\right) \le \log_3 x^3 \Rightarrow 2 + (\log_3 x)^2 \le 3 \cdot \log_3 x;$$

замена: $t = \log_3 x \Rightarrow t^2 - 3t + 2 \le 0 \Rightarrow 1 \le t \le 2$.

Возврат в исходную переменную: $\log_3 3 = 1 \le \log_3 x \le 2 = \log_3 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3 \le x \le 9$.

Д.З. Решить неравенство $5 \cdot 2^{\left(\log_2^2 x\right)} \le x^3 + x^{\log_3 x}$.

58. Решить неравенство

$$5 \cdot 2^{\left[(\log_2(\log_2 x))^2\right]} \le (\log_2 x)^3 + (\log_2 x)^{\log_2(\log_2 x)}.$$

Преобразование левой части:

$$5 \cdot 2^{\left[(\log_2(\log_2 x))^2\right]} = 5 \cdot \left(2^{\log_2(\log_2 x)}\right)^{\log_2(\log_2 x)} = 5 \cdot (\log_2 x)^{\log_2(\log_2 x)};$$

$$4 \cdot (\log_2 x)^{\log_2(\log_2 x)} \le (\log_2 x)^3.$$

Логарифмируем: $2 + \log_2^2(\log_2 x) \le 3 \cdot \log_2(\log_2 x)$.

Замена: $t = \log_2(\log_2 x) \Rightarrow t^2 - 3t + 2 \le 0 \Rightarrow 1 \le t \le 2$.

Возврат в исходную переменную:
$1 \le \log_2(\log_2 x) \le 2 \Rightarrow \log_2 2 \le \log_2(\log_2 x) \le \log_2 4 \Rightarrow 2 \le \log_2 x \le 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_2 4 \le \log_2 x \le \log_2 16 \Rightarrow 4 \le x \le 16.$$

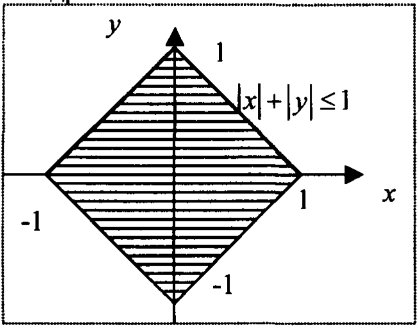
Д.З. Решить неравенство

$$9 \cdot 2^{\left[(\log_2(\log_2 x))^2\right]} \le (\log_2 x)^4 + (\log_2 x)^{\log_2(\log_2 x)}.$$

8. ПЛОЩАДИ ФИГУР

1. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет неравенству $|x|+|y|\le 1$.

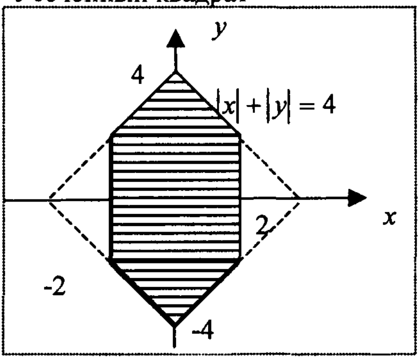
Квадрат



$S=\frac{1}{2}\cdot 4=2$.

2. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases}|x|+|y|\le 4,\\ |x|\le 2.\end{cases}$

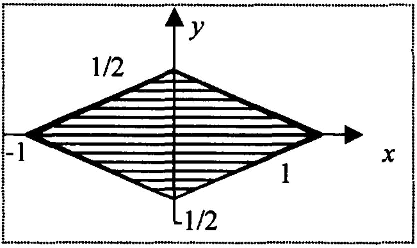
Усеченный квадрат



$S=\left(\frac{2+4}{2}\cdot 2\right)\cdot 4=24$.

3. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет неравенству $|x|+2|y|\le 1$.

Ромб

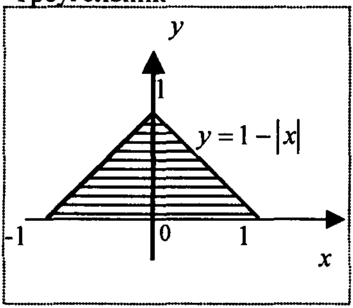


$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 1.$$

Д.3. Найти площадь фигуры $\begin{cases} |x| + |y| \le 4, \\ |y| \le 2; \end{cases}$ $\begin{cases} |x| + |y| \le 3, \\ |x| \le 1. \end{cases}$

4. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет неравенствам $0 \le y \le 1 - |x|$.

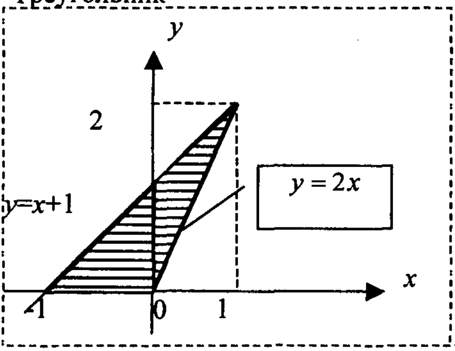
Треугольник



$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

5. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет неравенствам $x + |x| \le y \le x + 1$.

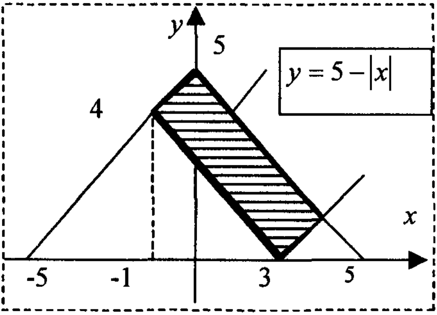
Треугольник



$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

6. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет неравенствам $|x-3| \le y \le 5-|x|$.

Прямоугольник



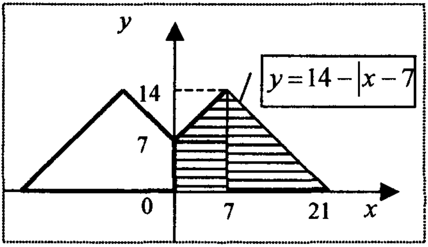
$$S=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 5-\frac{1}{2}\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4=8.$$

Д.З. Найти площадь фигуры $\begin{cases} 0\le y\le 6-|x|, \\ y\ge x; \end{cases}$ $x+|x|\le y\le x+2$.

Д.З. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=|x-2|$ и $y=4-|x|$.

7. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет неравенствам $0\le y\le 14-\big||x|-7\big|$.

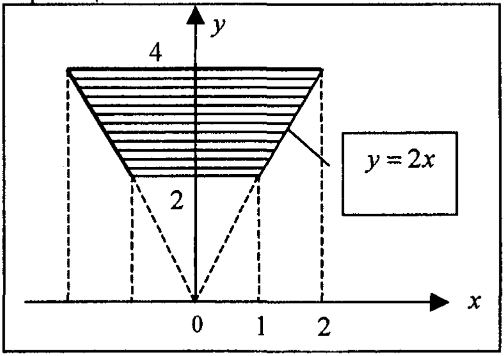
Кратер (Треугольник + Трапеция)



$$S=\left(\frac{7+14}{2}\cdot 7+\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 14\right)\cdot 2=343.$$

8. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет неравенствам $|x-1|+|x+1|\le y\le 4$.

Трапеция



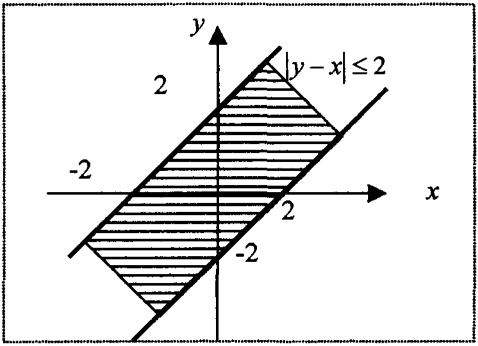
$S = \frac{2+4}{2} \cdot 2 = 6$.

Д.З. Найти площадь фигуры $|y| \le 2 - \big||x|-1\big|$; $\begin{cases} y + 2|x+3| \le 6, \\ 3y \ge 2|x+3| - 6. \end{cases}$

9. Найти графический образ неравенства $|y - x| \le 2$.

$-2 \le y - x \le 2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} y \le x + 2, \\ y \ge x - 2. \end{cases}$

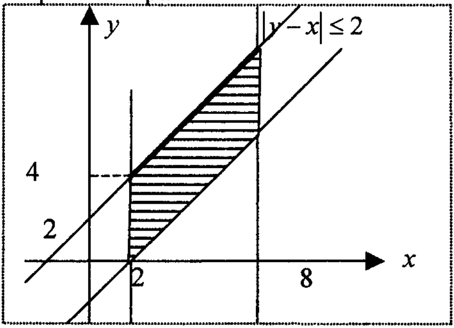
Наклонная полоса



10. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} |y - x| \le 2, \\ x^2 - 10x + 16 \le 0. \end{cases}$

$\begin{cases} -2 \le y - x \le 2, \\ (x-2)(x-8) \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 \le y \le x + 2, \\ 2 \le x \le 8. \end{cases}$

Параллелограмм

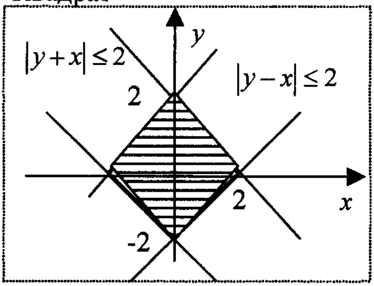


$S = 4\cdot 6 = 24$.

11. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases}|y-x|\le 2,\\ |y+x|\le 2.\end{cases}$

$$\begin{cases}-2\le y-x\le 2,\\ -2\le y+x\le 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-2\le y\le x+2,\\ -x-2\le y\le -x+2.\end{cases}$$

Квадрат



$S = 4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 8$.

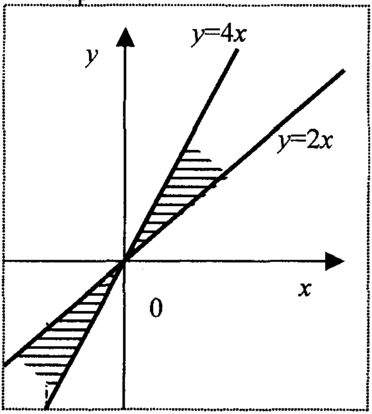
Д.З. Найти площадь фигуры

$$\begin{cases}|y-x|\le 2,\\ y^2-8x+12\le 0;\end{cases} \quad \begin{cases}x^2+y^2\le 4+2xy,\\ x^2+y^2\le 4-2xy.\end{cases}$$

12. Найти геометрическое место точек, удовлетворяющих неравенству $y^2-6xy+8x^2\le 0$.

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2-6\frac{y}{x}+8\le 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{x}-2\right)\left(\frac{y}{x}-4\right)\le 0.$$

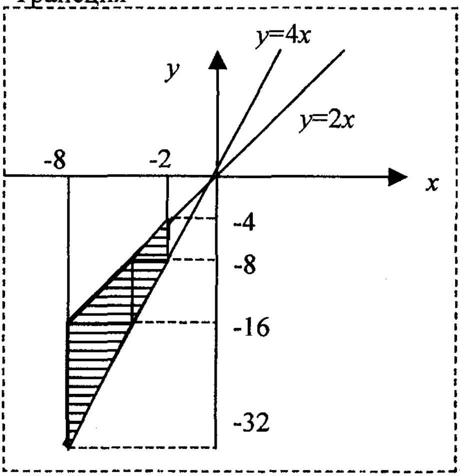
Сектор



13.Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} y^2 - 6xy + 8x^2 \le 0, \\ x^2 + 10x + 16 \le 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2 \le \dfrac{y}{x} \le 4 \\ -8 \le x \le -2. \end{cases}$$

Трапеция

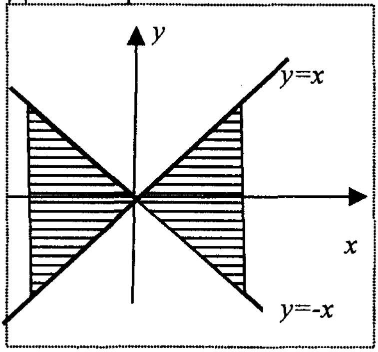


$$S = \frac{16+4}{2} \cdot 6 = 60.$$

14. Найти геометрическое место точек, удовлетворяющих неравенству $y^2 - x^2 \le 0$.

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 \le 1 \Rightarrow -1 \le \frac{y}{x} \le 1.$$

Два сектора

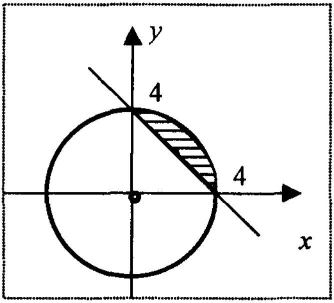


Д.З. Найти площадь фигуры

$$\begin{cases} y^2 + xy - 6x^2 \le 0, \\ x^2 + 10x + 16 \le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 - \dfrac{4}{\sqrt{3}}xy + x^2 \le 0, \\ x^2 + y^2 \le 1. \end{cases}$$

15. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 16, \\ x + y \ge 4. \end{cases}$

Сегмент

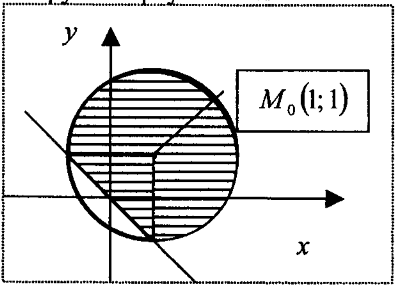


$$S = \frac{1}{4}\pi \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 4\pi - 8.$$

16. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 2(x + y + 1), \\ x + y \ge 0. \end{cases}$

Приведение к каноническому виду: $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 4, \\ x + y \ge 0. \end{cases}$

¾ круга + треугольник

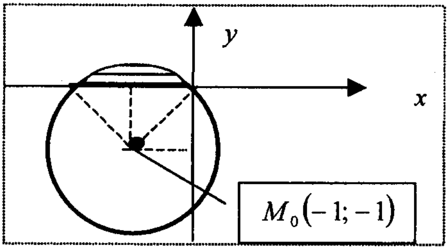


$S = \frac{3}{4}\pi \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 3\pi + 2$.

17. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y \le 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$

Приведение к каноническому виду: $\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 \le 2, \\ y \ge 0. \end{cases}$

Сегмент



$S = \frac{1}{4}\pi \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\pi}{2} - 1$.

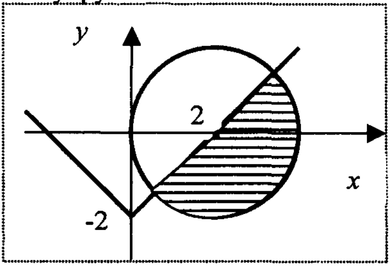
Д.З. Найти площадь фигуры

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1, \\ |x| + |y| \ge 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \le 2(x + y + 1), \\ x + y \le 0. \end{cases}$$

18. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4x, \\ y \le |x| - 2. \end{cases}$

Приведение к каноническому виду: $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 \le 4, \\ y \le |x| - 2. \end{cases}$

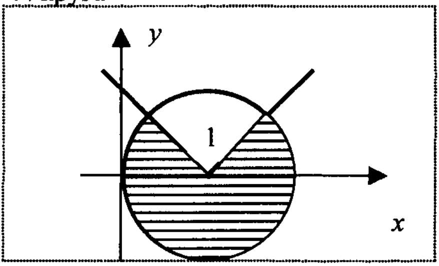
Полукруг



$S = \frac{1}{2}\pi \cdot 4 = 2\pi$.

19. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 2x, \\ y \le |x-1|. \end{cases}$

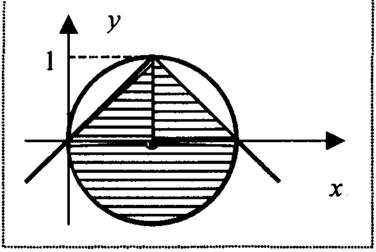
¾ круга



$S = \frac{3}{4}\pi$.

20. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 2x, \\ y \le 1 - |x-1|. \end{cases}$

Полукруг + треугольник



$S = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{\pi}{2} + 1$.

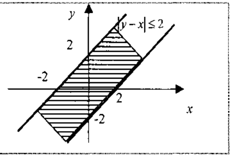
Д.З. Найти площадь фигуры

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y\le 0, \\ y\le 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2\le 2x, \\ y\le 2-|x-2|. \end{cases}$$

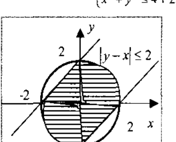
21. Найти геометрическое место точек, удовлетворяющих неравенству $x^2+y^2\le 4+2xy$.

$$x^2-2xy+y^2\le 4 \Rightarrow (x-y)^2\le 4 \Rightarrow |x-y|\le 2.$$

Наклонная полоса



22. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} x^2+y^2\le 4, \\ x^2+y^2\le 4+2xy. \end{cases}$

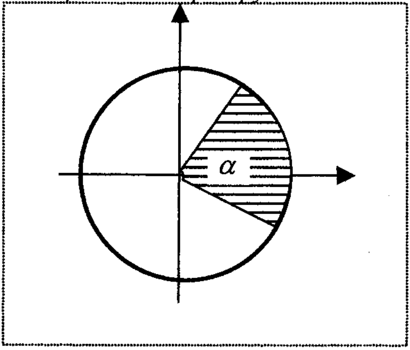


$$S=2\cdot\frac{1}{4}4\pi+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2\pi+4.$$

Д.З. Найти площадь фигуры

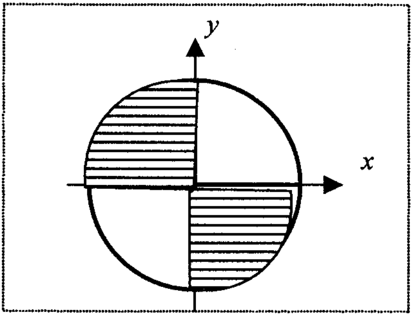
$$\begin{cases} x^2+y^2\le 36, \\ x^2+y^2\le 36+2xy; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2\le 16, \\ x^2+y^2\le 16-2xy. \end{cases}$$

Площадь сектора круга



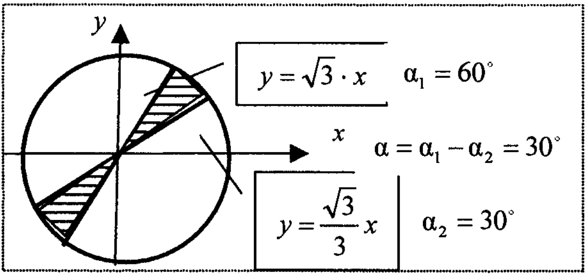
$$S = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{\alpha}{360}.$$

23. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} xy \le 0, \\ x^2 + y^2 \le 1. \end{cases}$



$$S = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{2}.$$

24. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} y^2 - \dfrac{4}{\sqrt{3}}xy + x^2 \le 0, \\ x^2 + y^2 \le 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \left(\dfrac{y}{x} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \left(\dfrac{y}{x} - \sqrt{3}\right) \le 0, \\ x^2 + y^2 \le 1. \end{cases}$



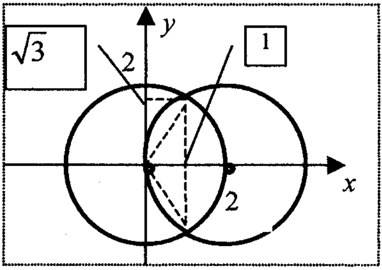
$$S=\pi R^2\cdot\frac{\alpha}{360}\cdot 2=\frac{\pi}{6}.$$

Д.З. Найти площадь фигуры $\begin{cases} y^2-x^2\le 0, \\ x^2+y^2\le 1; \end{cases}$ $\begin{cases} y^2-3x^2\le 0, \\ x^2+y^2\le 1. \end{cases}$

25. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} x^2+y^2\le 4, \\ x^2+y^2\le 4x. \end{cases}$

Каноническая форма: $\begin{cases} x^2+y^2\le 4, \\ (x-2)^2+y^2\le 4. \end{cases}$

Два сегмента



$$S=\left(4\pi\frac{120}{360}-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\right)\cdot 2=\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}.$$

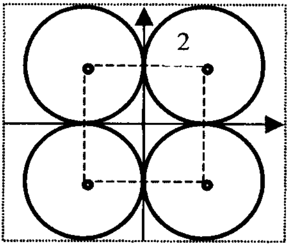
26. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} x^2+y^2\le 8y, \\ x^2+y^2\le 8x. \end{cases}$

Каноническая форма: $\begin{cases} x^2+(y-4)^2\ge 16, \\ (x-4)^2+y^2\le 16. \end{cases}$

Четыре касающиеся окружности

$x^2+y^2+4=4|x|+4|y|$;

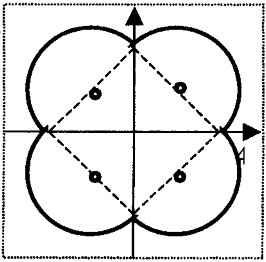
$(|x|-2)^2+(|y|-2)^2=4$



Четыре пересекающиеся окружности

$x^2+y^2=4|x|+4|y|$;

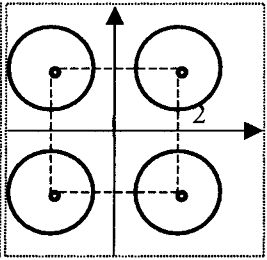
$(|x|-2)^2+(|y|-2)^2=8$



Четыре непересекающиеся окружности

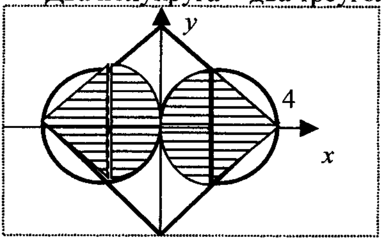
$x^2+y^2+7=4|x|+4|y|$;

$(|x|-2)^2+(|y|-2)^2=1$



28. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} x^2+y^2\le 4|x|, \\ |x|+|y|\le 4. \end{cases}$

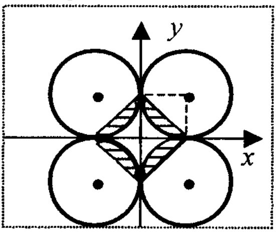
Два полукруга + два треугольника



$$S=\left(4\pi\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\right)\cdot 2=2\pi+4.$$

29. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} x^2+y^2+4\le 4|x|+4|y|, \\ |x|+|y|\le 2. \end{cases}$

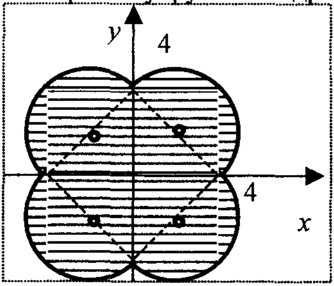
Четыре сегмента



$$S=\left(4\pi\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right)\cdot 4=4\pi-8.$$

30. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет неравенству $x^2 + y^2 \le 4|x| + 4|y|$.

Четыре полукруга + квадрат



$$S = \left(8\pi \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\right) \cdot 4 = 16\pi + 32.$$

Д.З. Найти площадь фигуры

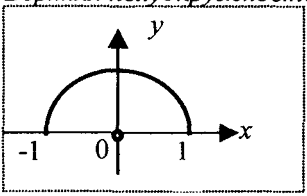
$$x^2 + y^2 \le 4|x| + 4; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + 4 \ge 4|x| + 4|y|, \\ |x| + |y| \le 2. \end{cases}$$

Уравнение полуокружности с центром в начале координат

$y = \sqrt{1 - x^2}$;

$\begin{cases} y \ge 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

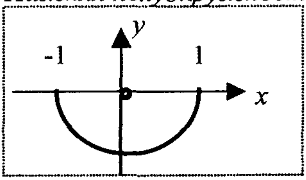
Верхняя полуокружность



$y = -\sqrt{1 - x^2}$;

$\begin{cases} y \le 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

Нижняя полуокружность

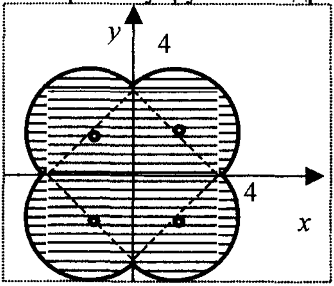


---

31. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} y \le \sqrt{1 - x^2}, \\ x + y \ge 0. \end{cases}$

30. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет неравенству $x^2 + y^2 \le 4|x| + 4|y|$.

Четыре полукруга + квадрат



$$S = \left(8\pi \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\right) \cdot 4 = 16\pi + 32.$$

Д.З. Найти площадь фигуры

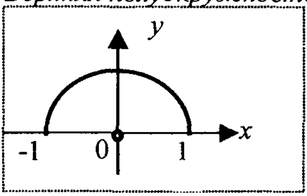
$$x^2 + y^2 \le 4|x| + 4; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + 4 \ge 4|x| + 4|y|, \\ |x| + |y| \le 2. \end{cases}$$

Уравнение полуокружности с центром в начале координат

$y = \sqrt{1 - x^2}$;

$$\begin{cases} y \ge 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

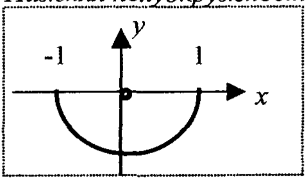
Верхняя полуокружность



$y = -\sqrt{1 - x^2}$;

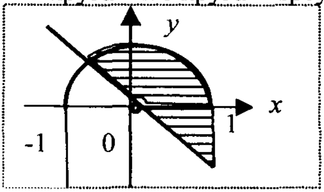
$$\begin{cases} y \le 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Нижняя полуокружность



31. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} y \le \sqrt{1 - x^2}, \\ x + y \ge 0. \end{cases}$

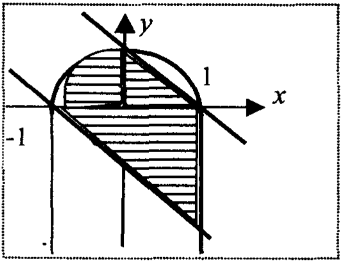
1/4 круга +1/8 круга + треугольник



$$S=\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}=\frac{3\pi}{8}+\frac{1}{2}.$$

32. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} y\le\sqrt{1-x^2}, \\ x^2+y^2\le 2xy+1. \end{cases}$

1/4 круга +малый и большой треугольники



$$S=\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}.$$

Д.З. Найти площадь фигуры $\begin{cases} y\le\sqrt{16-x^2}, \\ x^2+y^2\le 2xy+16. \end{cases}$

Д.З. Исследовать на число решений в зависимости от параметра

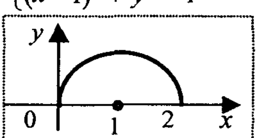
$$\begin{cases} y=\sqrt{4-x^2}, \\ y=|x-a|. \end{cases}$$

Уравнение полуокружности со смещенным центром

Верхняя полуокружность

$$y=\sqrt{2x-x^2}$$

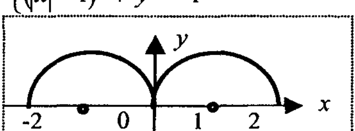
$$\begin{cases} y\ge 0, \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$$



Две верхних полуокружности

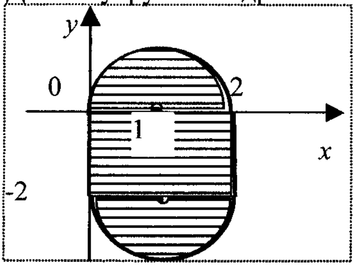
$$y=\sqrt{2|x|-x^2}$$

$$\begin{cases} y\ge 0, \\ (|x|-1)^2+y^2=1 \end{cases}$$



33. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} y \le \sqrt{2x - x^2}, \\ y \ge -2 - \sqrt{2x - x^2}. \end{cases}$

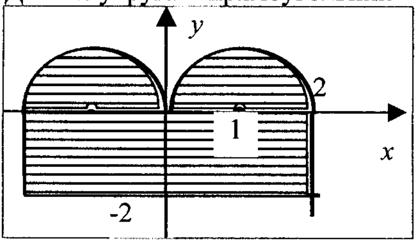
Два полукруга +квадрат



$S = \pi + 4$.

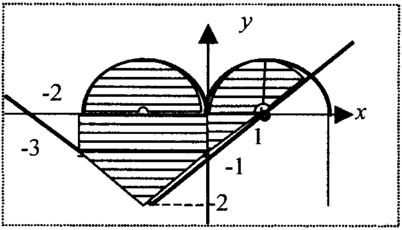
34. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} y \le \sqrt{2|x| - x^2}, \\ y \ge -2. \end{cases}$

Два полукруга + прямоугольник



$S = \pi + 8$.

35. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} y \le \sqrt{2|x| - x^2}, \\ y \ge |x+1| - 2. \end{cases}$



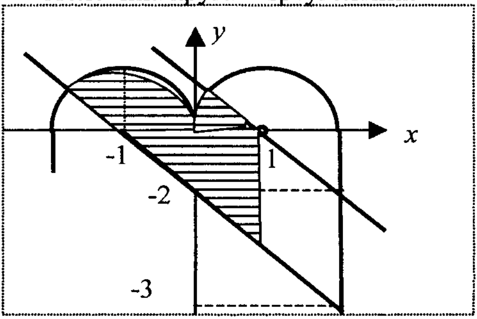
$S = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} = \frac{7\pi}{8} + 7$.

Д.3. Найти площадь фигуры $-2 \le y \le \sqrt{4x - x^2}$; $\begin{cases} y \le \sqrt{8|x| - x^2}, \\ y \ge |x| - 4; \end{cases}$

$\begin{cases} y \le \sqrt{8|x| - x^2}, \\ y \ge |x - 4| - 4. \end{cases}$

36. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} y \le \sqrt{2|x| - x^2}, \\ x^2 + y^2 \le 2xy + 1. \end{cases}$

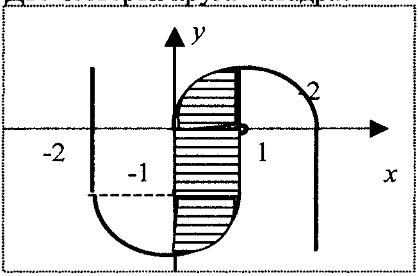
Половина круга + треугольник



$$S = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + 4.$$

37. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} y \le \sqrt{2x - x^2}, \\ y \ge -1 - \sqrt{1 - x^2}. \end{cases}$

Две четверти круга +квадрат

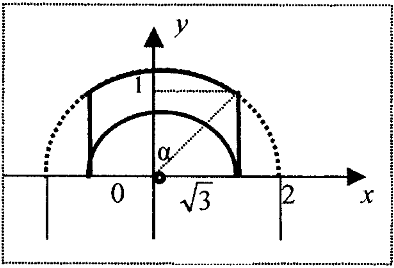


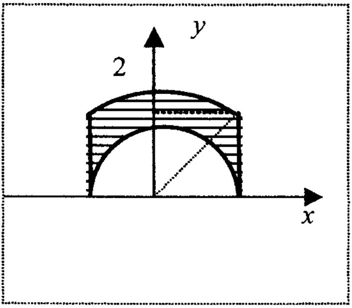
$$S = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi + 1 = \frac{\pi}{2} + 1.$$

Д.З. Найти площадь фигуры $-\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{2|x|-x^2}$; $\begin{cases} y \le 3+\sqrt{4x-x^2}, \\ y \ge 3-\sqrt{4-x^2}. \end{cases}$

38. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе неравенств $\sqrt{3-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$.

ОДЗ $\begin{cases} |x| \le \sqrt{3} \\ |x| \le 2 \end{cases} \Rightarrow |x| \le \sqrt{3}$;





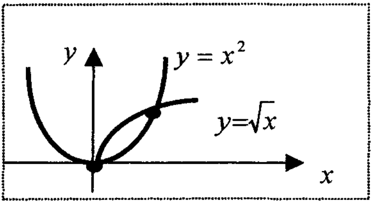
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\pi \cdot \frac{1}{12}\right) \cdot 2 + \left(4\pi \cdot \frac{1}{6} - 3\pi \cdot \frac{1}{6}\right) \cdot 2 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}.$$

Д.З. Найти площадь фигуры $-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$.

9. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД

1. Найти число решений системы $\begin{cases} y = x^2, \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$

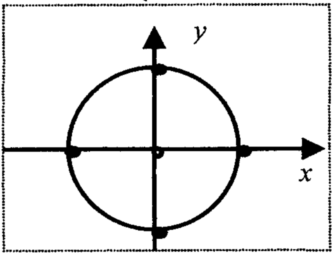


2 решения.

Д.З. Найти число решений системы $\begin{cases} y = x^2, \\ y = \sqrt{|x|}; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2, \\ y = \sqrt[3]{x}; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^4, \\ y = x^2. \end{cases}$

2. Найти число решений системы $\begin{cases} x \cdot y = 0, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y - \text{любое} \end{cases} - \text{ось } oy, \\ \begin{cases} y = 0, \\ x - \text{любое} \end{cases} - \text{ось } ox, \end{array}\right. \\ x^2 + y^2 = 2 - \text{окружность}. \end{cases}$$

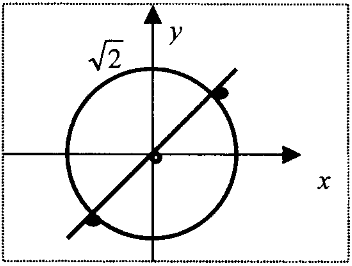


4 решения.

Д.З. Найти число решений системы $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-y)^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$

3. Найти число решений системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - \text{прямая}, \\ x^2 + y^2 = 2 - \text{окружность}. \end{cases}$$

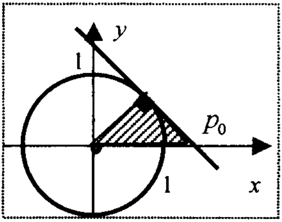


2 решения.

Д.З. Найти число решений системы $\begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = |x|. \end{cases}$

4. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = p \end{cases}$ имеет одно решение.

Режим касания:



Теорема Пифагора: $1 + 1 = p^2{}_0 \Rightarrow p_0 = \pm\sqrt{2}$.

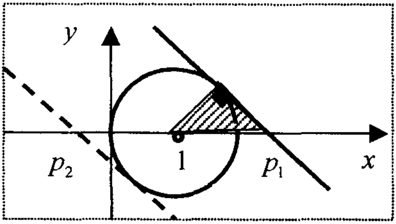
Д.З. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ \dfrac{x + y}{p} = 1 \end{cases}$ имеет одно решение.

5. Исследовать систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ x + y = p \end{cases}$ на число решений в зависимости от параметра p.

Выделение полного квадрата:

$$\begin{cases} (x^2 - 2x + 1) + y^2 = 1, \\ x + y = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 - \text{окружность}, \\ x + y = p - \text{прямая}. \end{cases}$$

Режим касания:



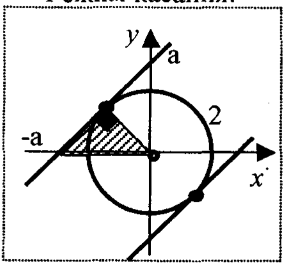
Теорема Пифагора: $1+1=(p-1)^2$ $\Rightarrow p_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$ – 1 решение, $1-\sqrt{2}<p<1+\sqrt{2}$ – 2 решения, $\left[\begin{array}{l} p>1+\sqrt{2} \\ p<1-\sqrt{2} \end{array}\right.$ – нет решений.

Д.З. Исследовать на число решений систему $\begin{cases} x^2+y^2=2y, \\ x+y=p; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=2x+2y, \\ x+y=p. \end{cases}$

6. Исследовать систему $\begin{cases} x^2+y^2=2xy+a^2, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ на число решений в зависимости от параметра a.

$\begin{cases} (x-y)^2=a^2, \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |y-x|=a, \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x\pm a \text{ – две паралельных,} \\ x^2+y^2=4 \text{ – окружность.} \end{cases}$

Режим касания:



Теорема Пифагора: $4+4=a^2{}_0 \Rightarrow a_0=\pm 2\sqrt{2}$ – 2 решения.

$|a|>2\sqrt{2}$ – нет решений, $0<|a|<2\sqrt{2}$ – 4 решения, $a=0$ – 2 решения.

Д.З. Найти число решений системы $\begin{cases} x^2+y^2=2+2xy, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2=2xy+1, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$.

Д.З. Исследовать систему на число решений $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}=2, \\ |x+y|=b; \end{cases}$

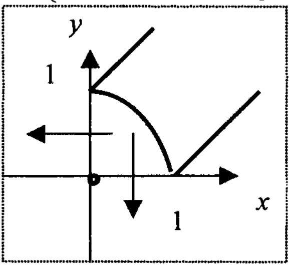
$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}=b, \\ |x+y|=2. \end{cases}$

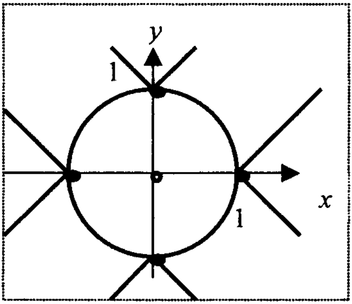
7. Найти число решений системы $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ \big||x|-|y|\big|=1. \end{cases}$

Двойная симметрия системы: замена $\begin{cases} x\to -x \\ y\to -y \end{cases}$ не меняет ее вида.

В 1 квадранте $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ |x-y|=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y-x=\pm 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 - \text{четверть окружности,} \\ y=x\pm 1 - \text{два паралельных отрезка.} \end{cases}$

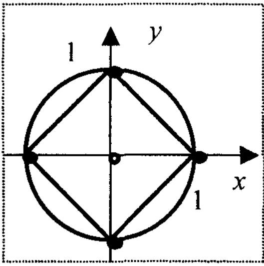


$\Rightarrow$ 

4 решения.

Д.З. Найти число решений системы $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ \big||x|-|y|\big|=1. \end{cases}$

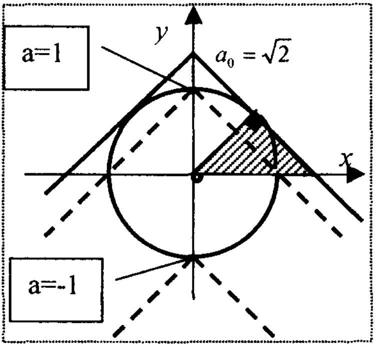
8. Найти число решений системы $\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$



$\begin{cases} |x|+|y|=1 - \text{квадрат}, \\ x^2+y^2=1 - \text{окружность} \end{cases}$ 4 решения.

Д.З. Исследовать систему $\begin{cases} |x|+|y|=p, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ на число решений в зависимости от параметра.

9. Исследовать систему $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ |x|+y=a \end{cases}$ на число решений.



$\begin{cases} x^2+y^2=1 - \text{окружность}, \\ y=a-|x| - \text{галка усами вниз} \end{cases} \Rightarrow$

Режим касания: $1+1=a^2{}_0 \Rightarrow a_0=\sqrt{2}$ – 2 решения.

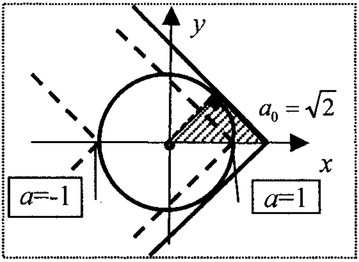
$a>\sqrt{2}$ – нет решений, $1<a<\sqrt{2}$ – 4 решения, $a=1$ – 3 решения,

$-1<a<1$ – 2 решения, $a=-1$ – 1 решение, $a<-1$ – нет решений.

Д.З. Исследовать систему $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ |x|+y=4 \end{cases}$ на число решений.

10. Исследовать систему $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ |y|+x=a \end{cases}$ на число решений.

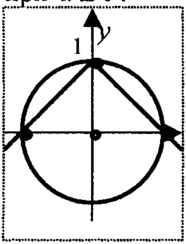
$x=a-|y|$ – подвижная галка усами влево:

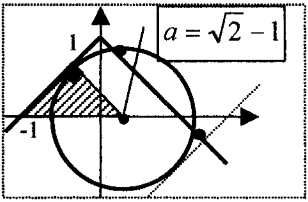


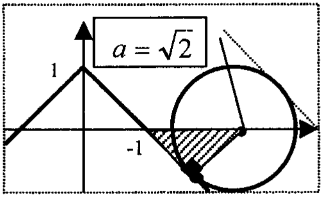
Режим касания: $1+1=a^2{}_0 \Rightarrow a_0=\sqrt{2}$.

Д.З. Исследовать систему $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ |y|+x=1 \end{cases}$ на число решений.

11. Исследовать систему $\begin{cases} (x-a)^2+y^2=1, \\ |x|+y=1 \end{cases}$ на число решений при $a \geq 0$.







$a=0$ – 3 решения; $a=\sqrt{2}-1$ – 3 решения; $a=\sqrt{2}+1$ – 1 решение;

1-й режим касания: $1+1=(a_0+1)^2 \Rightarrow a_0=-1+\sqrt{2}$;

2-й режим касания: $1+1=(a_0-1)^2 \Rightarrow a_0=1+\sqrt{2}$.

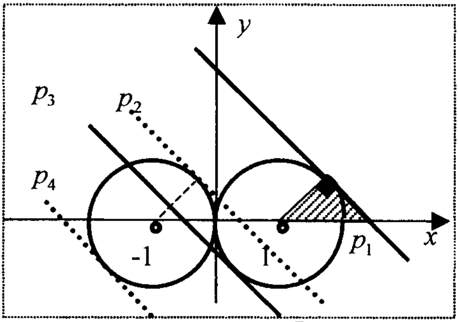
Д.З. Исследовать на число решений систему $\begin{cases} x^2+(y-a)^2=1, \\ |x|+y=1; \end{cases}$

$\begin{cases} y=|x|, \\ x^2+(y-b)^2=4. \end{cases}$

12. Исследовать систему $\begin{cases} x^2+y^2=2|x|, \\ x+y=p \end{cases}$ на число решений.

$$\begin{cases}\left(x^2-2|x|+1\right)+y^2=1,\\ x+y=p\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left(|x|-1\right)^2+y^2=1 - \text{две касающиеся окружности},\\ x+y=p - \text{прямая}.\end{cases}$$



Режим касания $p_{1,3}:\ 1+1=\left(p_{1,3}-1\right)^2\ \Rightarrow\left[\begin{array}{l}p_1=1+\sqrt{2} - 1\ \text{решение}\\ p_3=1-\sqrt{2} - 3\ \text{решения}\end{array}\right.$.

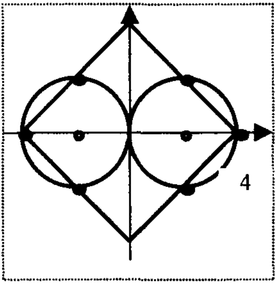
Режим касания $p_{2,4}:\ 1+1=\left(p_{2,4}+1\right)^2\ \Rightarrow\left[\begin{array}{l}p_2=-1+\sqrt{2} - 3\ \text{решения}\\ p_4=-1-\sqrt{2} - 1\ \text{решение}\end{array}\right.$.

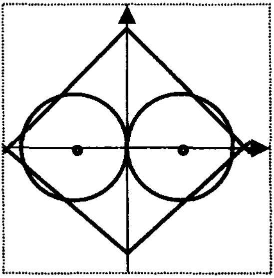
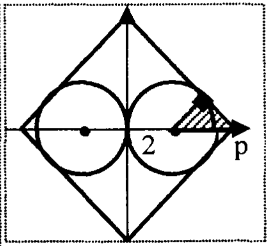
Д.З. Исследовать на число решений систему $\begin{cases}x^2+y^2=2|y|,\\ x+y=p;\end{cases}$

$\begin{cases}x^2+y^2+1=2|x|+2|y|,\\ x+y=p.\end{cases}$

13. Исследовать систему на число решений $\begin{cases}x^2+y^2=4|x|,\\ |x|+|y|=p;\end{cases}$

$$\begin{cases}\left(|x|-2\right)^2+y^2=4 - \text{две касающиеся окружности},\\ |x|+|y|=p - \text{квадрат}.\end{cases}$$



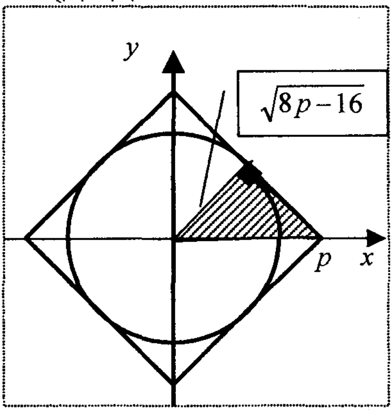



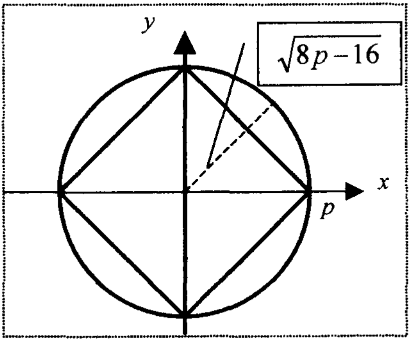
$p = 4$ – 3 решения; $4 < p < 2 + 2\sqrt{2}$ – 8 решений; $p_0 = 2 + 2\sqrt{2}$ – 4 решения.

Д.З. Исследовать систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4|y|, \\ |x| + |y| = p \end{cases}$ на число решений.

14. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 + 16 = 8|x| + 8|y|, \\ |x| + |y| = p \end{cases}$ имеет 4 решения.

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8p - 16 \text{ – окружность}, \\ |x| + |y| = p \text{ – квадрат}. \end{cases}$



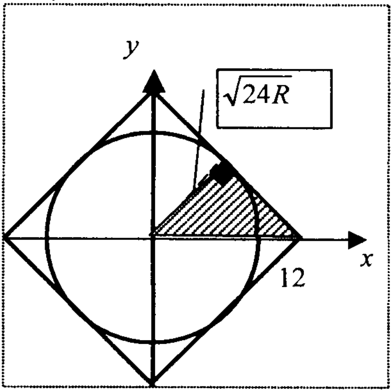


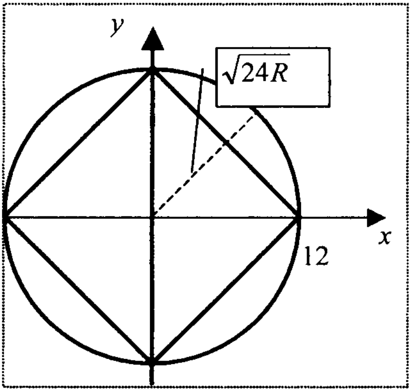
$p^2 = 2(8p - 16) \Rightarrow p = 8 \pm \sqrt{32}$, $\qquad p = \sqrt{8p - 16} \Rightarrow p = 4$.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4 = 4|x| + 4|y|, \\ |x| + |y| = p \end{cases}$ имеет 4 решения.

15. Найти значения параметра R, при которых система $\begin{cases} x^2+y^2=2R|x|+2R|y|, \\ |x|+|y|=12 \end{cases}$ имеет 4 различных решения.

$$\begin{cases} x^2+y^2=24R - \text{окружность}, \\ |x|+|y|=12 - \text{квадрат} \end{cases}.$$





Пифагор: $24R_1+24R_1=144 \Rightarrow R_1=3$, $\sqrt{24R_2}=12 \Rightarrow R_2=6$.

Д.З. Найти значения параметра R, при которых система $\begin{cases} x^2+y^2=2R|x|+2R|y|, \\ |x|+|y|=16 \end{cases}$ имеет 8 решений.

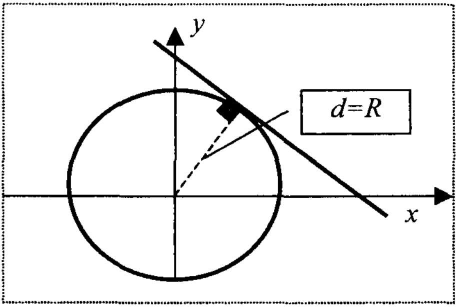
Касание окружности и прямой с углом наклона $\neq 45^0$

Общее уравнение прямой: $Ax+By+C=0$.

Нормальное уравнение прямой: $\dfrac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$.

Расстояние от начала координат $M_0(0,0)$ *до прямой* $Ax+By+C=0$: $d=\dfrac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Режим касания окружности и прямой:



$d = R$ – *1 решение,* $d < R$ – *2 решения,* $d > R$ – *нет решений.*

16. Исследовать систему на число решений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ \sqrt{18} \cdot x + \dfrac{y}{\sqrt{6}} = p. \end{cases}$

Общее уравнение прямой: $\sqrt{18 \cdot 6} \cdot x + y - \sqrt{6} \cdot p = 0$.

Режим касания: $d = \dfrac{\sqrt{6} \cdot |p_0|}{\sqrt{18 \cdot 6 + 1}} = \sqrt{6} \Rightarrow |p_0| = \sqrt{18 \cdot 6 + 1} = \sqrt{109}$.

$|p| = \sqrt{109}$ – 1 решение, $|p| < \sqrt{109}$ – 2 решения, $|p| > \sqrt{109}$ – нет решений.

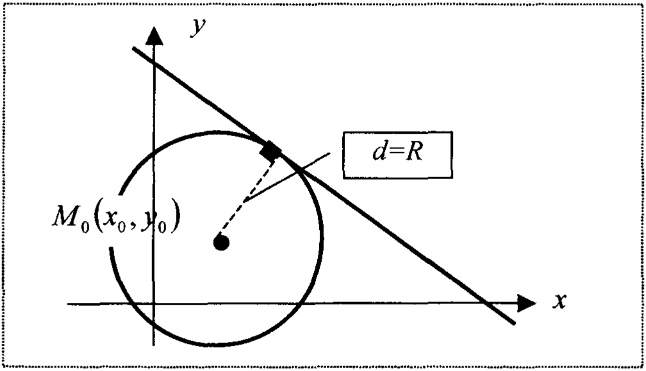
Д.З. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ \sqrt{24} \cdot x + \dfrac{y}{\sqrt{3}} = p \end{cases}$ имеет одно решение.

17. Найти значения параметра R, при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ 3 \cdot x + \dfrac{y}{\sqrt{7}} = 56\sqrt{7} \end{cases}$ имеет одно решение.

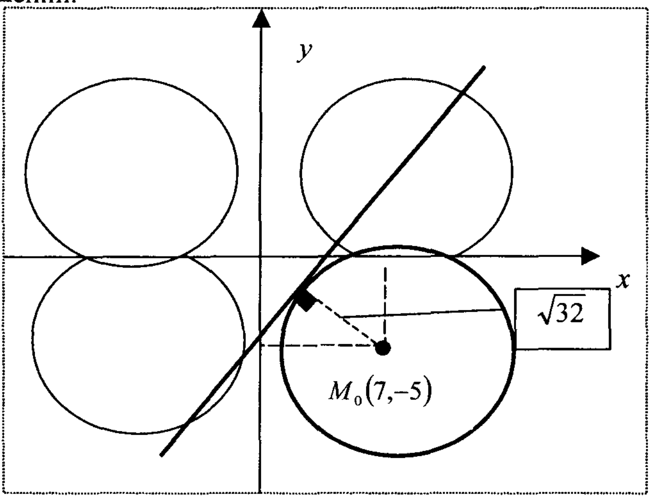
$3\sqrt{7} \cdot x + y - 56 \cdot 7 = 0 \Rightarrow d = \dfrac{56 \cdot 7}{\sqrt{9 \cdot 7 + 1}} = |R_0| \Rightarrow |R_0| = \dfrac{56 \cdot 7}{64} = 49.$

Д.З. Найти значения параметра R, при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ \sqrt{15} \cdot x + \dfrac{y}{\sqrt{8}} = 66\sqrt{2} \end{cases}$ имеет одно решение.

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ *до прямой* $Ax + By + C = 0$:
$d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.



18. Найти наименьшее положительное значение параметра p, при котором система $\begin{cases} \big||y| - 5\big| = \sqrt{32 - (|x| - 7)^2}, \\ y = x - p \end{cases}$ имеет пять различных решений.



Касание окружности $(y + 5)^2 + (x - 7)^2 = 32$ и прямой $y = x - p$:

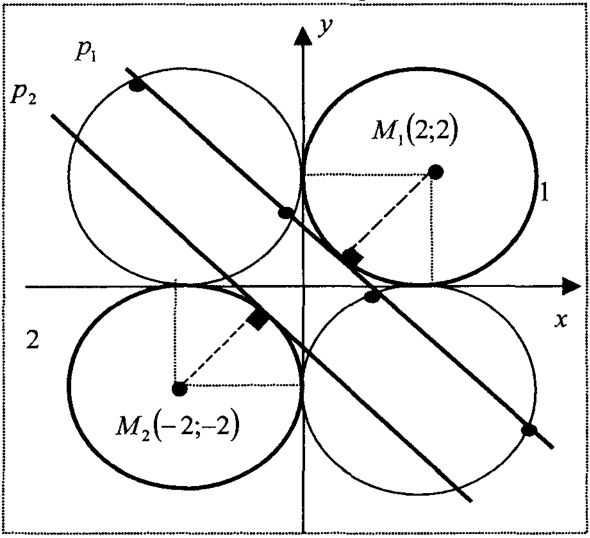
$\frac{y-x+p}{\sqrt{2}}=0 \Rightarrow d=\frac{|-5-7+p_0|}{\sqrt{2}}=\sqrt{32} \Rightarrow |p_0-12|=8 \Rightarrow p_0=12\pm 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow p_0=4$.

Д.3. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} \left||y|-5\right|=\sqrt{32-\left(|x|-7\right)^2}, \\ y=x-p \end{cases}$ имеет три различных решения.

19. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} x^2+y^2+4=4|x|+4|y|, \\ x+y=p \end{cases}$ имеет 5 решений.

Приведение к каноническому виду: $\begin{cases} \left(|x|-2\right)^2+\left(|y|-2\right)^2=4, \\ x+y=p. \end{cases}$



1) касание окружности $(y-2)^2+(x-2)^2=4$ и прямой $y+x-p=0$:

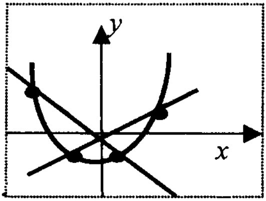
$$d=\frac{|2+2-p_1|}{\sqrt{2}}=2 \Rightarrow |4-p_1|=2\sqrt{2} \Rightarrow p_1=-4+2\sqrt{2};$$

2) касание окружности $(y+2)^2+(x+2)^2=4$ и прямой $y+x-p=0$:

$$d=\frac{|-2-2-p_2|}{\sqrt{2}}=2 \;\Rightarrow\; |-4-p_2|=2\sqrt{2} \;\Rightarrow\; p_2=4-2\sqrt{2}.$$

Д.З. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} x^2+y^2+2=2|x|+2|y|, \\ x+y=p \end{cases}$ имеет 4 решения.

20. Найти число решений системы $\begin{cases} x^2=y^2, \\ y=x^2-1. \end{cases}$



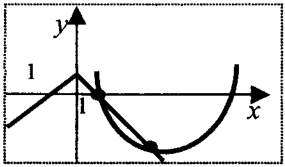
$\begin{cases} (x-y)(x+y)=0, \\ y=x^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\pm x - \text{две прямые}, \\ y=x^2-1 - \text{парабола} \end{cases}$

4 решения.

Д.З. Найти число решений системы $\begin{cases} (x-y)^2=1, \\ y=x^2-1; \end{cases}$ $\begin{cases} xy=0, \\ y=x^2-1. \end{cases}$

21. Найти число решений системы $\begin{cases} y=x^2-6x+5, \\ |x|+y=1. \end{cases}$

$\begin{cases} y=(x-1)(x-5) - \text{парабола усами вверх}, \\ y=1-|x| - \text{галка усами вниз} \end{cases} \Rightarrow$



2 решения

Д.З. Найти число решений системы

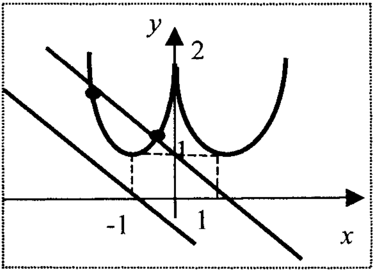
$$\begin{cases} y=x^2-5x+4, \\ x+|y|=1; \end{cases} \quad \begin{cases} y=x^2-0,75, \\ |x|+|y|=1. \end{cases}$$

22. Найти число решений системы $\begin{cases} y=x^2-2|x|+2, \\ (x+y)^2=1. \end{cases}$

$\begin{cases} y=x^2-2|x|+2 - \text{модульная парабола}, \\ y=-x\pm 1 - \text{две паралельных прямых}. \end{cases}$

При $x > 0 \Rightarrow y = x^2 - 2x + 2$ парабола усами вверх.

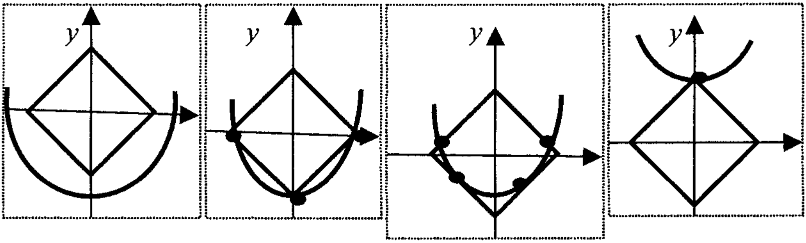
Вершина параболы $x_0 = 1 \Rightarrow y(1) = 1 \Rightarrow$



2 решения.

Д.З. Найти число решений системы $\begin{cases} y = x^2 - 6|x| + 5, \\ (x-y)^2 = 1. \end{cases}$

23. Исследовать на число решений в зависимости от параметра $\begin{cases} y = x^2 - p, \\ |x| + |y| = 1. \end{cases}$



$p < 1$ $\quad p = 1$ $\quad p = p_0$ (режим касания) $\quad p = -1$

Касание параболы и прямой:

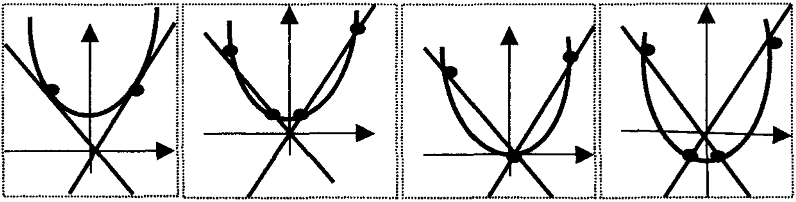
$$x^2 - p_0 = x - 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - (p_0 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 1 + 4(p_0 - 1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{3}{4}.$$

Д.З. Исследовать на число решений систему $\begin{cases} y = x^2 - p, \\ |x| - y = 1; \end{cases}$

$\begin{cases} y = x^2 - p, \\ |y| - x = 1. \end{cases}$

24. Исследовать систему $\begin{cases} |y| = |x|, \\ y = x^2 + p \end{cases}$ на число решений.



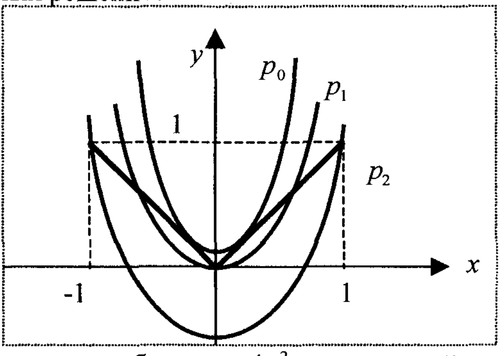
$p = p_0$ (режим касания) $0 < p < p_0$ $p=0$ $p<0$

Режим касания: $x^2 + p = x \Rightarrow x^2 - x + p = 0 \;\Rightarrow\; D = 1 - 4p_0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\; p_0 = \dfrac{1}{4}$.

Д.З. Исследовать систему $\begin{cases} |y| = |x| + p, \\ y = x^2 \end{cases}$ на число решений.

25. При каких значениях параметра p система $\begin{cases} y = |x| \le 1, \\ y + p = 4x^2 \end{cases}$ имеет два различных решения?



$p = p_0$: Касание параболы $y = 4x^2 - p$ и прямой $y = x$.

$4x^2 - p = x \;\Rightarrow\; 4x^2 - x - p = 0 \;\Rightarrow\; D = 1 + 17p_0 = 0 \;\Rightarrow\; p_0 = -\dfrac{1}{17}$.

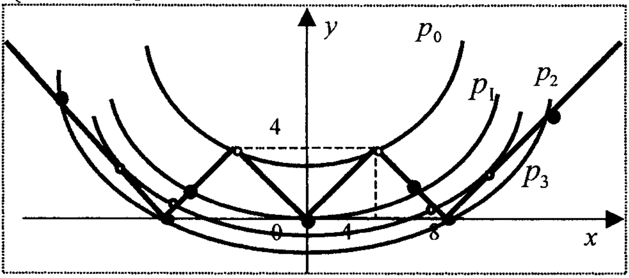
p_1: Прохождение параболы $y = 4x^2 - p$ через начало координат $(0;\,0) \;\Rightarrow\; p_1 = 0$.

p_2: Прохождение параболы $y = 4x^2 - p$ через точку $(1;1) \;\Rightarrow$ $\Rightarrow 1 = 4 - p_2 \;\Rightarrow\; p_2 = 3$.

Два решения при $\left[\begin{array}{l} p_0 \\ p_1 < p \le p_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p_0 = -\dfrac{1}{17}. \\ 0 < p \le 3 \end{array}\right.$

Д.3. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} y = |x|, \\ |x| \le 3, \\ 4y + p = 4x^2 \end{cases}$ имеет два решения.

26. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} y = \left|\left||x| - 4\right| - 4\right|, \\ y = \dfrac{x^2}{24} + \dfrac{p}{3} \end{cases}$ имеет 4 различных решения.



$$\left[\begin{array}{l} p_1 < p < p_0 \\ p = p_2 \\ p = p_3 \end{array}\right. .$$

p_0: Прохождение параболы $y = \dfrac{x^2}{24} + \dfrac{p}{3}$ через точку $\begin{cases} x = 4, \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 = \dfrac{16}{24} + \dfrac{p_0}{3} \Rightarrow p_0 = 10$.

p_1: Прохождение параболы $y = \dfrac{x^2}{24} + \dfrac{p}{3}$ через точку $x = 0,\ y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ p_1 = 0$.

p_2: Режим касания параболы $y = \dfrac{x^2}{24} + \dfrac{p}{3}$ и прямой $y = x - 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{24} + \dfrac{p}{3} = x - 8 \Rightarrow x^2 - 24x + 8p + 24 \cdot 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow D = 12^2 - 8p_2 - 24 \cdot 8 = 0 \Rightarrow\ p_2 = -6$.

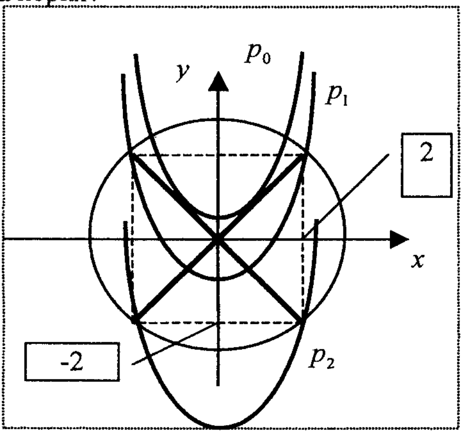
p_3: Прохождение параболы $y = \dfrac{x^2}{24} + \dfrac{p}{3}$ через точку $\begin{cases} x = 8, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = \dfrac{64}{24} + \dfrac{p_3}{3} \Rightarrow\ p_3 = -8$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} 0 < p < 10 \\ p = -6 \\ p = -8 \end{array}\right.$.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} y = \left|\left||x|-4\right|-4\right|, \\ y = \dfrac{x^2}{24} + \dfrac{p}{3} \end{cases}$ имеет 6 различных решений.

27. При каких значениях параметра p система $\begin{cases} |y| = |x|, \\ x^2 + y^2 \le 8, \\ 4y + p = 4x^2 \end{cases}$ имеет два корня?



$\left[\begin{array}{l} p = p_0 \\ p_1 < p \le p_2 \end{array}\right.$.

$p = p_0$: Касание параболы $y = x^2 - \dfrac{p}{4}$ и прямой $y = x$.

$x^2 - \dfrac{p}{4} = x \Rightarrow 4x^2 - 4x - p = 0 \Rightarrow D = 4 + 4p_0 = 0 \Rightarrow p_0 = -1$.

p_1: Прохождение параболы $y = x^2 - \dfrac{p}{4}$ через точку $(2; 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 = 4 - \dfrac{p_1}{4} \Rightarrow p_1 = 8$.

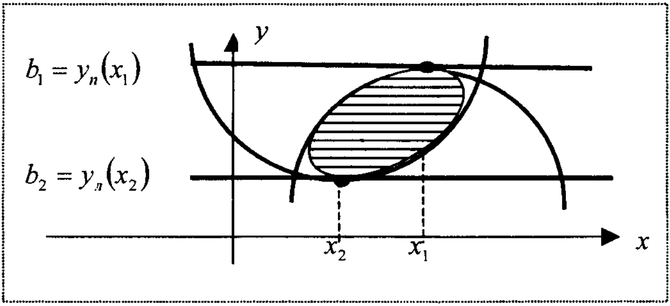
p_2: Прохождение параболы $y = x^2 - \frac{p}{4}$ через точку $(2; -2) \Rightarrow$

$\Rightarrow -2 = 4 - \frac{p_2}{4} \Rightarrow p_2 = 24$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} 8 < p \le 24 \\ p = -1 \end{array}\right.$.

Д.З. При каких значениях параметра p система $\begin{cases} y^3 - x^2 y = 0, \\ x^2 + y^2 \le 162, \\ 4y + p = 4x^2 \end{cases}$ имеет два различных решения?

28. Найти значения параметра b, при которых система $\begin{cases} x^2 - 2x - 18 \le y \le -x^2 + 4x + 24, \\ y = b \end{cases}$ имеет одно решение.

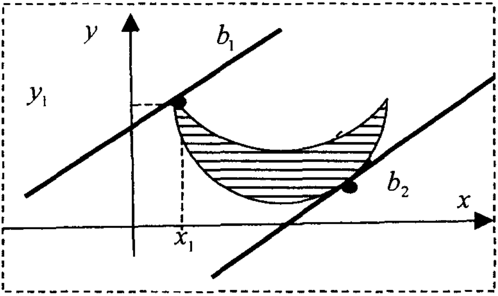


$x_1 = 2$: вершина параболы усами вниз $\Rightarrow$
$\Rightarrow b_1 = y_n(x_1) = -4 + 16 + 24 = 36$.

$x_2 = 1$: вершина параболы усами вверх $\Rightarrow$
$\Rightarrow b_2 = y_л(x_2) = 1 - 2 - 18 = -19$.

Д.З. Найти значения параметра b, при которых система $\begin{cases} x^2 - 4x - 10 \le y \le -x^2 + 2x + 20, \\ y = b \end{cases}$ имеет одно решение.

29. Найти значения b, при которых система $\begin{cases} 2x^2 - 19x + 38 \le y \le x^2 - 9x + 29, \\ y = x + b \end{cases}$ имеет не меньше одного и не более трех решений.



$b_1 = y_1 - x_1$ – прохождение прямой через левую точку пересечения парабол:

$$2x^2 - 19x + 38 = x^2 - 9x + 29 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 9 - \text{постороннее} \end{array} \right.;$$

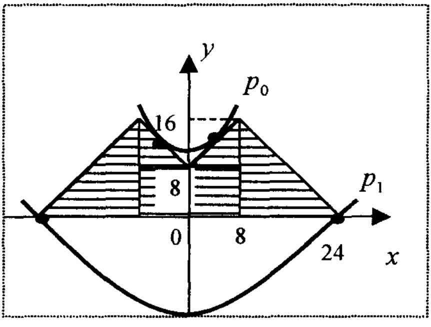
$y_1 = y(1) = 1 - 9 + 29 = 21 \Rightarrow b_1 = 21 - 1 = 20$.

b_2: касание «крутой» параболы $y = 2x^2 - 19x + 38$ и прямой $y = x + b$:

$2x^2 - 19x + 38 = x + b \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 20x - (b - 38) = 0 \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow D = 100 + 2(b_2 - 38) = 0 \Rightarrow b_2 = -12$.

Д.З. Найти значения параметра b, при которых система $\begin{cases} 2x^2 - 23x + 71 \le y \le x^2 - 11x + 39, \\ y = x + b \end{cases}$ имеет одно решение.

30. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} 0 \le y \le 16 - \left||x| - 8\right|, \\ 4y = 4x^2 - p \end{cases}$ имеет два решения.



p_0: Режим касания $y = x^2 - \frac{p}{4}$ и $y = x + 8$ $\Rightarrow$ $x^2 - \frac{p}{4} = x + 8$ $\Rightarrow x^2 - x - \left(\frac{p}{4} + 8\right) = 0 \Rightarrow D = 1 + p + 32 = 0 \Rightarrow p_0 = -32$.

p_1: Прохождение параболы $y = x^2 - \frac{p}{4}$ через точку $x = 24$, $y = 0 \Rightarrow p_1 = 4 \cdot (24)^2$.

Д.З. Найти сумму всех значений параметра p, при которых система $\begin{cases} x + |x| \le y \le x + 1, \\ 4y = 4x^2 - p \end{cases}$ имеет одно решение.

31. Найти число решений системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - \text{окружность}, \\ y = x^2 + 2x - 3 - \text{парабола}. \end{cases}$

Нули параболы $x = -3; 1$. Один из нулей параболы $x = 1$ совпадает с крайней правой точкой окружности $\Rightarrow$ парабола «проткнет» окружность:

2 решения.

Д.З. Найти число решений системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = x^2 - 6x + 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$

32. Найти число решений системы

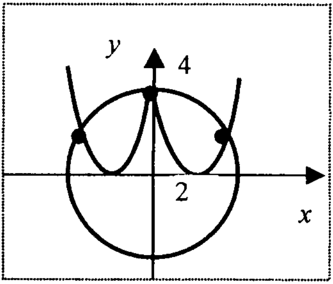
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2007 - \text{окружность}, \\ y = x^2 - 2007 - \text{парабола}. \end{cases}$$

Нули параболы совпадают с крайней левой и правой точками окружности $\Rightarrow$ парабола «проткнет» окружность:

4 решения.

Д.З. Найти число решений системы $\begin{cases} x^2+y^2=2007, \\ y=x^2-\sqrt{2007}. \end{cases}$

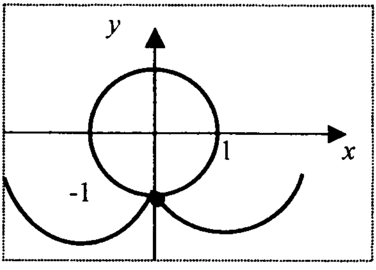
33. Найти число решений системы $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ y=x^2-4|x|+4. \end{cases}$



3 решения.

Д.З. Найти число решений системы $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y=x^2-6|x|+5. \end{cases}$

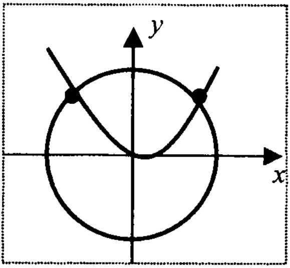
34. Найти число решений системы $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y=x^2-2|x|-1. \end{cases}$



1 решение.

Д.З. Найти число решений системы $\begin{cases} y = x^2 - 2|x| + 2, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$

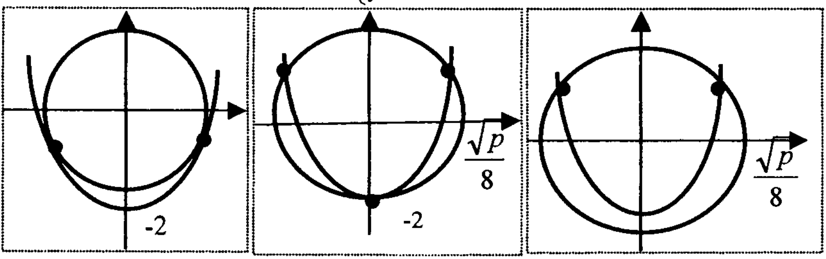
35.Найти число решений системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2007, \\ y = x^2. \end{cases}$



2 решения.

Д.З. Найти число решений системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2007, \\ y = 2007 - x^2. \end{cases}$

36. Исследовать систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{p}{64}, \\ y = 4x^2 - 2 \end{cases}$ на число решений.



$p = p_0$ (режим касания) $\quad p = p_1 = 64 \cdot 4 \quad p > 64 \cdot 4$

Режим касания параболы и окружности:

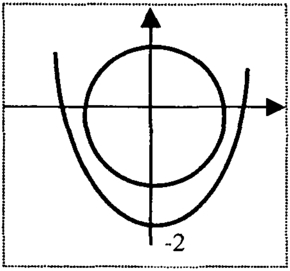
$$x^2 + 16x^4 - 16x^2 + 4 - \frac{p}{64} = 0 \Rightarrow 16x^4 - 15x^2 - \left(\frac{p}{64} - 4\right) = 0;$$

$$D = 0 \Rightarrow D = 15^2 + 4 \cdot 16 \cdot \left(\frac{p_0}{64} - 4\right) = 0 \Rightarrow$$

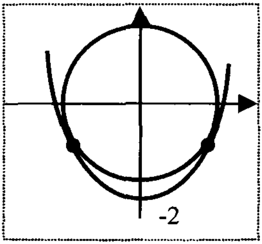
$$\Rightarrow p_0 = 16^2 - 15^2 = (16 - 15)(16 + 15) = 31.$$

Д.З. Исследовать систему $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ x^2 + y^2 = p \end{cases}$ на число решений.

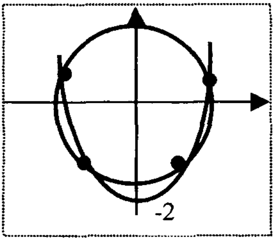
37. Исследовать систему $\begin{cases} y = x^2 - p, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ на число решений.



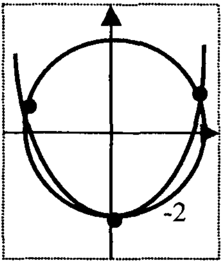
$p < p_0$



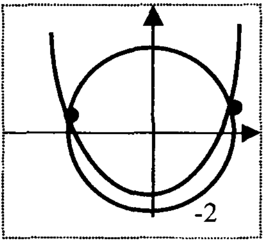
$p = p_0$ (режим касания)



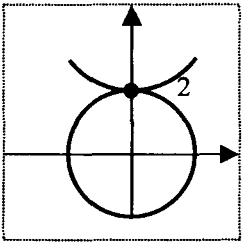
$p_0 < p < -2$



$p = -2$



$-2 < p < 2$



$p = 2$

Режим касания:

$$x^2 + x^4 - 2px^2 + p^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^4 - x^2(2p-1) + p^2 - 4 = 0 \Rightarrow$$

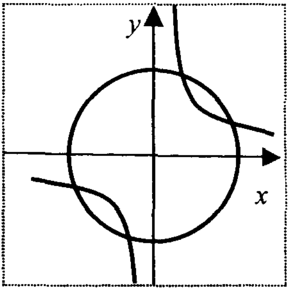
2 решения при $D = 0 \Rightarrow D = 4p^2 - 4p + 1 - 4p^2 + 16 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p_0 = \dfrac{17}{4}$.

Д.З. Исследовать на число решений систему $\begin{cases} (x-p)^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = px^2 - 5. \end{cases}$

38. Найти число решений системы $\begin{cases} xy = 1, \\ x^2 + y^2 = 2008. \end{cases}$



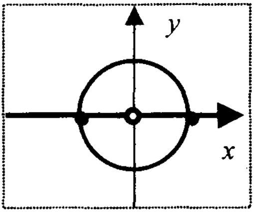
4 решения.

Д.З. Найти число решений системы $\begin{cases} |xy| = 1, \\ x^2 + y^2 = 2008; \end{cases}$ $\begin{cases} |x|\, y = 1, \\ x^2 + y^2 = 2008. \end{cases}$

39. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = \dfrac{p}{x} \end{cases}$ имеет два различных решения.

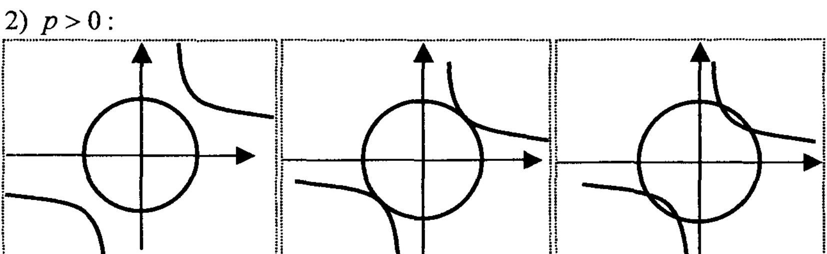
ОДЗ $x \neq 0$.

1) $p = 0$: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 - \text{окружность}, \\ y = 0 - \text{ось } ox; \end{cases}$



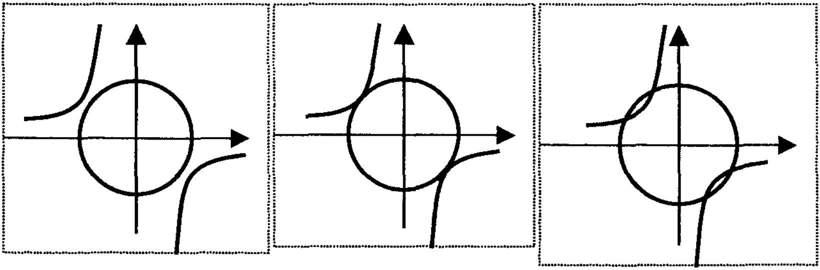
2 решения.

2) $p > 0$:



$p > p_0$ $\quad$ $p = p_0$ (режим касания) $\quad$ $p < p_0$

3. $p<0$:



$p>p_0$ $\qquad$ $p=p_0$ (режим касания) $\qquad$ $p<p_0$

Режим касания гиперболы и окружности: метод постановки $y=\dfrac{p}{x}\Rightarrow x^2+y^2=2$.

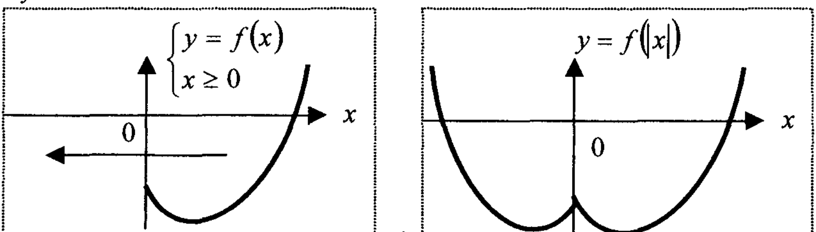
$$x^2+\frac{p^2}{x^2}=2 \Rightarrow x^4-2x^2+p^2=0 \Rightarrow D=1-p_0{}^2=0 \Rightarrow p_0=\pm 1.$$

Ответ: $p_0=0;\pm 1$.

Д.3. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y=\dfrac{p}{x-1} \end{cases}$ имеет одно решение.

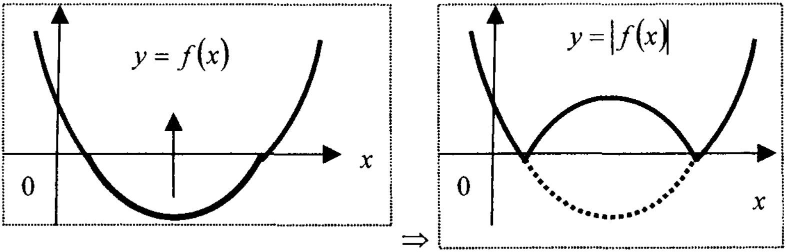
Построение графика функции $y=f(|x|)$

Зеркальное отражение графика $\begin{cases} y=f(x) \\ x\geq 0 \end{cases}$ *относительно оси* oy.

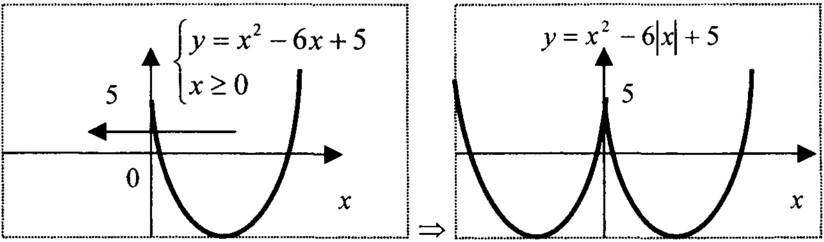


Построение графика функции $y=|f(x)|$.

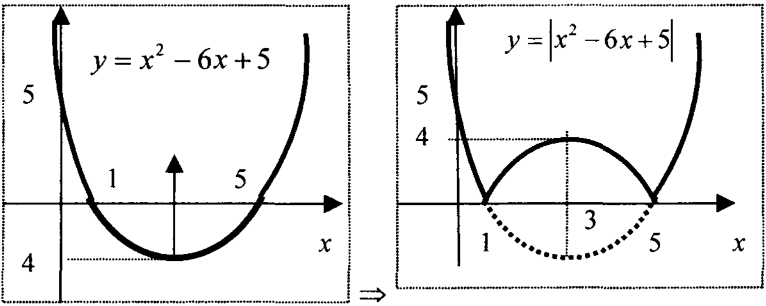
График функции $y=f(x)\leq 0$ *(ниже оси* ox*) переводим выше оси*



40. Построить график функции $y = x^2 - 6|x| + 5$.



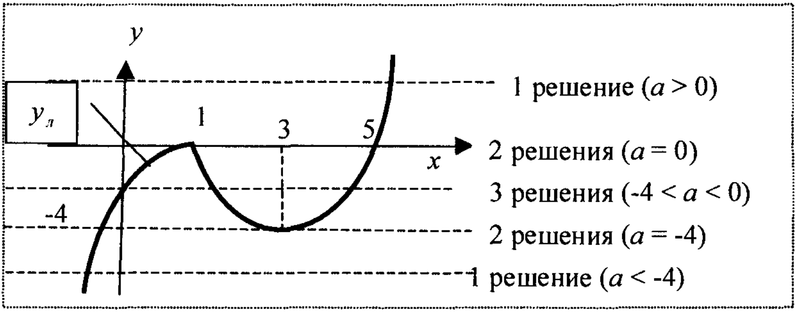
41. Построить график функции $y = \left|x^2 - 6x + 5\right|$.



42. Исследовать уравнение $|x-1|\cdot(x-5) = a$ на число решений в зависимости от параметра.

Построение левой функции: $y_л = |x-1|\cdot(x-5)$:

1) $x \ge 1 \Rightarrow y_л = (x-1)\cdot(x-5)$; 2) $x < 1 \Rightarrow y_л = -(x-1)\cdot(x-5)$.



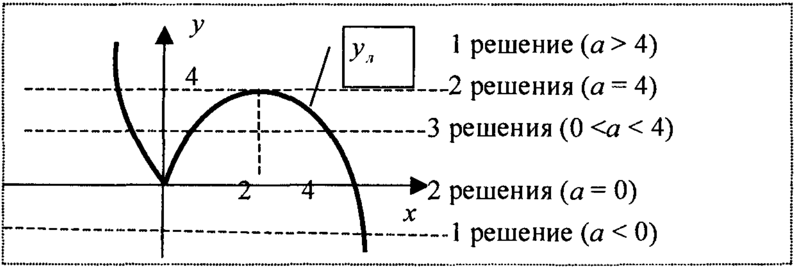
Д.З. Исследовать уравнение $|x-2|\cdot(x-4)=a$ на число решений в зависимости от параметра.

Д.З. Найти число решений уравнения $(x-3)\cdot|x-1|=1$; $|x-1|\cdot(x-5)=-3$.

43. Исследовать уравнение $x\cdot(4-|x|)=a$ на число решений в зависимости от параметра.

Построение левой функции: $y_л = x\cdot(4-|x|)$:

1) $x \geq 0 \Rightarrow y_л = x\cdot(4-x)$; 2) $x<0 \Rightarrow y_л = x\cdot(4+x)$.

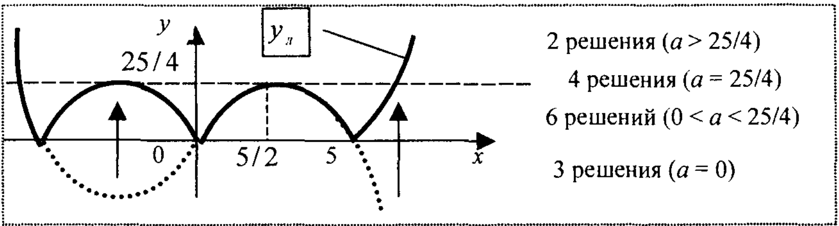


Д.З. Найти число решений уравнения $(x-3)\cdot|x|=1$; $|x-2|\cdot x=1$.

44. Исследовать уравнение $|x\cdot(5-|x|)|=a$ на число решений в зависимости от параметра.

Построение левой функции: $y_л = |x\cdot(5-|x|)|$.

$y = x\cdot(5-|x|)$: 1) $x \geq 0 \Rightarrow y_л = x\cdot(5-x)$; 2) $x<0 \Rightarrow y_л = x\cdot(5+x)$.



Д.З. Исследовать на число решений $\left|x\cdot\left(3-|x|\right)\right|=a$; $\left|x\cdot\left(4-|x|\right)\right|=a$.

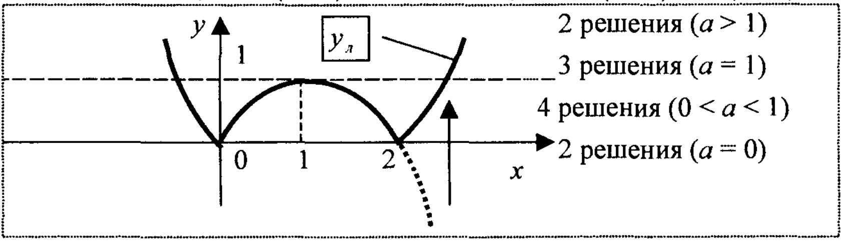
Д.З. Сколько различных корней имеет уравнение $\left|x\cdot\left(6-|x|\right)\right|=9$?

45. Исследовать уравнение $\left||x|\cdot(2-x)\right|=a$ на число решений в зависимости от параметра.

Построение левой функции: $y_л=\left||x|\cdot(2-x)\right|$.

$y=|x|\cdot(2-x)$:

1). $x\ge 0 \Rightarrow y=x\cdot(2-x)$; 2) $x<0 \Rightarrow y=-x\cdot(2-x)=x\cdot(x-2)$.



Д.З. Исследовать на число решений $\left||x|\cdot(4-x)\right|=a$.

Д.З. Найти число решений уравнения $\left||x|\cdot(3-x)\right|=1$.

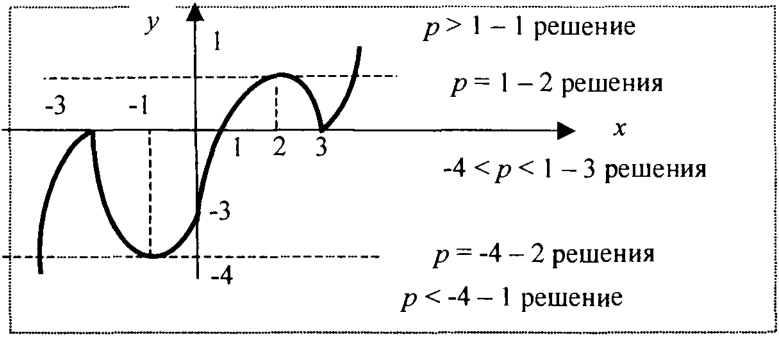
46. Исследовать уравнение $(x-1)\cdot\left||x|-3\right|=p$ на число решений.

Графический метод: левая функция – $y_л=(x-1)\cdot\left||x|-3\right|$; правая функция – $y_п=p$.

Анализ левой функции:

1) $x\ge 0 \Rightarrow y=(x-1)\cdot|x-3|$, $x\ge 3 \Rightarrow y=(x-1)(x-3)$, $0\le x<3 \Rightarrow y=-(x-1)(x-3)$;

2) $x<0 \Rightarrow y=(x-1)\cdot|x+3|$, $-3\le x<0 \Rightarrow y=(x-1)(x+3)$, $x<-3 \Rightarrow y=-(x-1)(x+3)$.



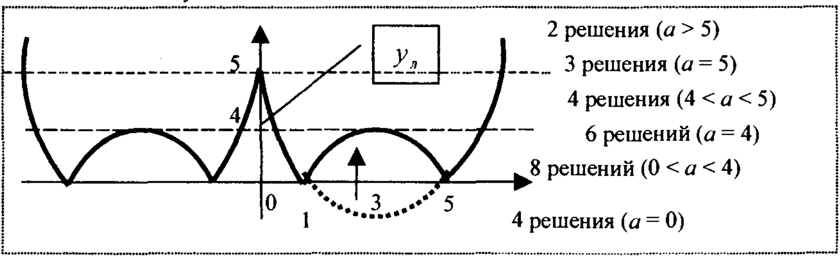
Д.З. Исследовать на число решений $(x-2)\cdot\left|4-|x|\right| = p$.

47. Исследовать уравнение $\left|x^2-6|x|+5\right| = a$ на число решений в зависимости от параметра.

Левая функция: $y_л = \left|x^2-6|x|+5\right|$.

Построение функции под знаком модуля: $y = x^2-6|x|+5$:

1) $x \ge 0 \Rightarrow y = x^2-6x+5$; 2) $x<0$: зеркальное отражение относительно оси oy.

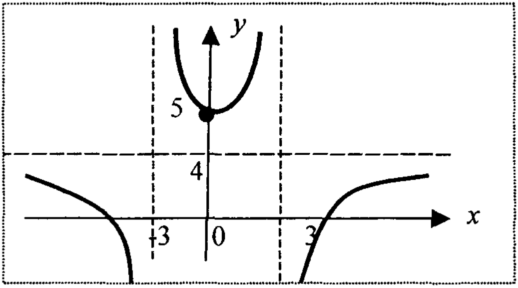


Д.З. Исследовать уравнение $\left|x^2-8|x|+7\right| = a$ на число решений в зависимости от параметра.

Д.З. Сколько различных корней имеет уравнение

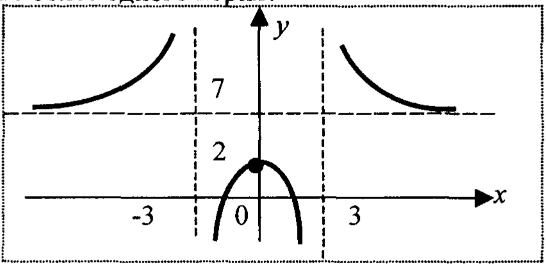
$$\left|x^2-6|x|+5\right| = 1;\ \left|x^2-8|x|+7\right| = 1\,?$$

48. При каких значениях параметра p уравнение $\dfrac{4|x|-15}{|x|-3} = p$ не имеет корней?



$4 \le p < 5$.

49. При каких значениях параметра p уравнение $\dfrac{7|x|-6}{|x|-3} = p$ имеет не более одного корня?



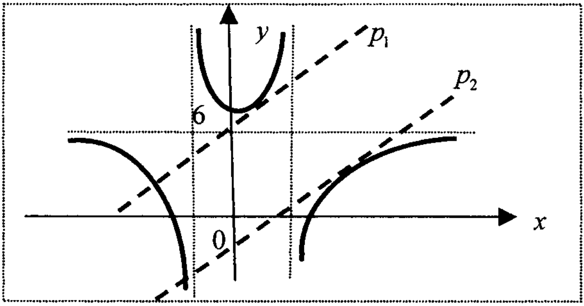
$2 \le p \le 7$.

Д.З. При каких значениях параметра p уравнение $\dfrac{4|x|-24}{|x|-4} = p$ имеет один корень?

Д.З. При каких значениях параметра p уравнение $\dfrac{5|x|-6}{|x|-2} = p$ имеет не более одного корня?

50. Найти значения параметра p, при которых уравнение $\dfrac{4|x|-24}{|x|-4} = x + p$ имеет два решения.

Графический метод: $y_л = \dfrac{4|x|-24}{|x|-4}$ (сплошная), $y_п = x + p$ (пунктирная).



$p = p_{1,2}$: режим касания гиперболы и прямой при $x > 0$,

$$\frac{4x-24}{x-4} = x + p \Rightarrow 4x - 24 = (x+p)(x-4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 24 = x^2 - 4x + px - 4p \Rightarrow x^2 - x(8-p) - (4p-24) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = (8-p)^2 + 4(4p-24) = 0 \Rightarrow p^2 - 16p + 64 + 16p - 96 = 0 \Rightarrow$$

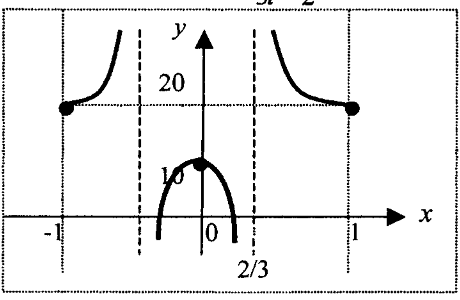
$$\Rightarrow p^2 = 96 - 64 = 32 \Rightarrow p_{1,2} = \pm\sqrt{32}.$$

Д.З. Исследовать уравнение $\frac{3|x|-12}{|x|-3} = x + p$ на число решений в зависимости от параметра.

51. Найти значения параметра p, при которых уравнение $\frac{40|\sin x|-20}{3|\sin x|-2} = p$ не имеет решений.

Замена: $t = \sin x \Rightarrow \begin{cases} \frac{40\cdot|t|-20}{3\cdot|t|-2} = p, \\ -1 \le t \le 1. \end{cases}$

Графический метод: $y_л = \frac{40t-20}{3t-2}$ (сплошная), $y_п = p$.



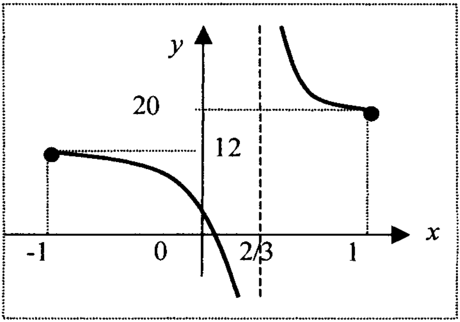
$10 < p < 20.$

Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $\dfrac{75|\sin x|-5}{6|\sin x|-1}=p$ не имеет решений.

52. Найти значения параметра p, при которых уравнение $\dfrac{40\sin^3-20}{3\sin^3 x-2}=p$ не имеет решений.

Замена: $t=\sin^3 x \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{40\cdot t-20}{3\cdot t-2}=p,\\ -1\le t\le 1.\end{cases}$

Графический метод: $y_л=\dfrac{40t-20}{3t-2}$ (сплошная), $y_п=p$.

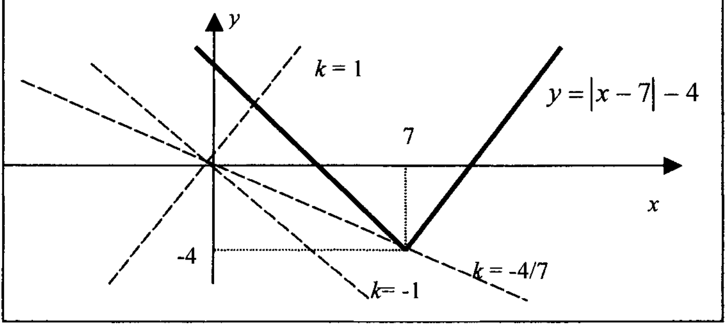


$12<p<20$.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $\dfrac{75\sin^3 x-5}{6\sin^3 x-1}=p$ не имеет решений.

53. Исследовать уравнение $|x-7|-4=kx$ на число решений в зависимости от параметра k.

Графический метод:

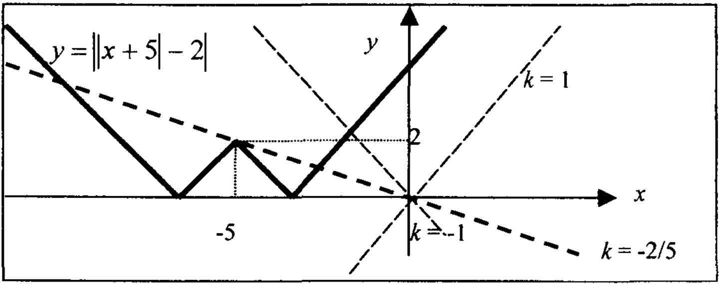


$k \geq 1$ – 1 решение, $-\frac{4}{7} < k < 1$ – 2 решения, $k = -\frac{4}{7}$ – 1 решение, $-1 \leq k < -\frac{4}{7}$ – нет решений, $k < -1$ – 1 решение.

Д.З. Исследовать на число решений уравнение $|x-3|+1 = kx$; $|x-4|+2 = kx$.

54. При каком значении параметра k уравнение $\left|\sqrt{x^2+10x+25}-2\right| = kx$ имеет три различных корня?

$\sqrt{x^2+10x+25} = |x+5| \Rightarrow \left||x+5|-2\right| = kx$.



$k = -2/5$

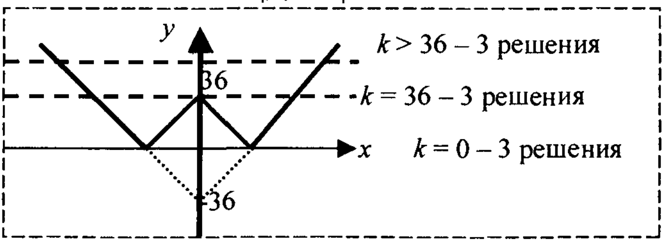
Д.З. При каком значении параметра k уравнение $\left|\sqrt{x^2+4x+4}-3\right| = kx+2$ имеет три различных корня;

$$\left|\sqrt{x^2+6x+9}-1\right| = kx\ ?$$

55. Найти значения параметра k, при которых уравнение $x \cdot \left||x|-36\right| = kx$ имеет три различных решения.

$$x \cdot \left(\left||x|-36\right|-k\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 - \text{ось } oy \\ \left||x|-36\right| = k \end{array}\right..$$

Графический метод: $y_л = \left||x|-36\right|$ (сплошная), $y_п = k$ (пунктирная).



Д.З. Найти значения параметра k, при которых уравнение $|x|\cdot\big||x|-9\big|=kx$ имеет 3 различных решения.

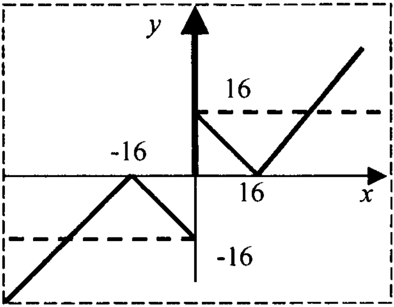
56. Исследовать на число решений уравнение $|x|\cdot\big||x|-16\big|=kx$.

При $x\ge 0 \Rightarrow x\cdot|x-16|-kx=0 \Rightarrow x\cdot\left(|x-16|-k\right)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ |x-16|=k \end{array}\right..$$

При $x<0 \Rightarrow -x\cdot|-x-16|-kx=0 \Rightarrow x\cdot\left(|-x-16|+k\right)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -|x+16|=k$.

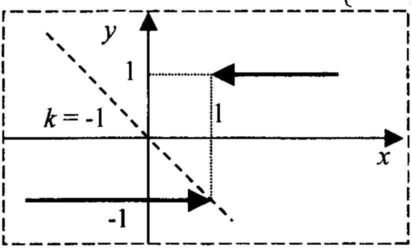


$0\le k<16$ – 3 решения, $k\ge 16$ – 2 решения, $k<0$ – 2 решения.

Д.З. Исследовать на число решений уравнение $|x|\cdot|x-8|=kx$.

57. Исследовать на число решений уравнение $\dfrac{|x-1|}{x-1}=kx$.

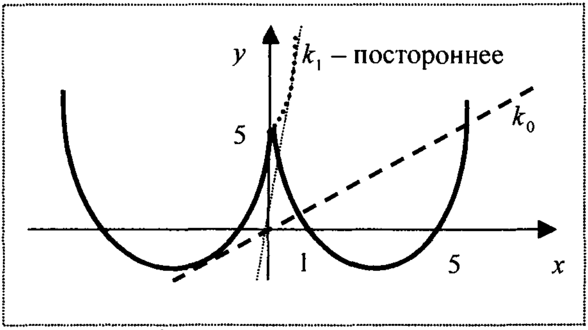
Левая функция: $y_л=\dfrac{|x-1|}{x-1}=\begin{cases}+1 \text{ при } x>1,\\ -1 \text{ при } x<1\end{cases}$ (сплошная).



$$\left[\begin{array}{l} k\le -1 \ -1 \text{ решение} \\ -1<k\le 0 - \text{нет решений} \\ 0<k<1-2 \text{ решения} \\ k\ge 1-1 \text{ решение} \end{array}\right..$$

Д.З. Исследовать на число решений уравнение $x\cdot\dfrac{|x-1|}{x-1}=k|x|$.

58. Найти наибольшее значение параметра k, при котором уравнение $x^2 - 6|x| + 5 = kx$ имеет три различных корня.



Касание параболы $\begin{cases} y = x^2 + 6x + 5, \\ x < 0 \end{cases}$ и прямой $y = kx$:

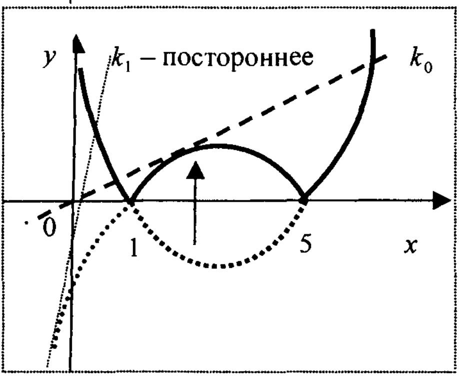
$$x^2 + 6x + 5 = kx \Rightarrow x^2 - (k-6)x + 5 = 0 \Rightarrow D = (k-6)^2 - 20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 6 + \sqrt{20} - \text{постороннее} \\ k = 6 - \sqrt{20} \end{array} \right.$$

Ответ: $k_0 = 6 - \sqrt{20}$.

Д.З. Найти наибольшее значение параметра k, при котором уравнение $x^2 - 7|x| + 10 = kx$ имеет три различных корня.

59. Найти наибольшее значение параметра k, при котором уравнение $|x^2 - 6x + 5| = kx$ имеет три различных корня.



Касание прямой $y = kx$ с параболой $\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 5, \\ 1 \le x \le 5: \end{cases}$

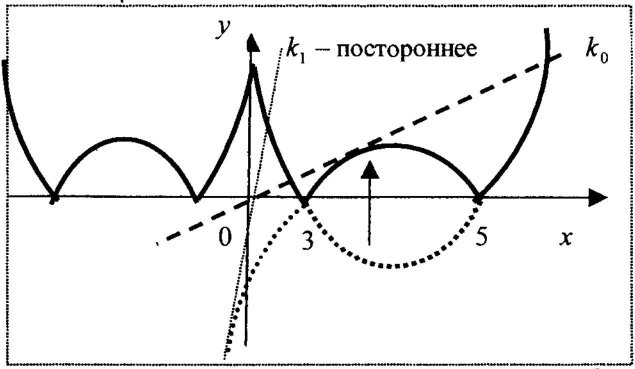
$-x^2 + 6x - 5 = kx \;\Rightarrow\; x^2 - (6-k)x + 5 = 0 \;\Rightarrow\; D = (k-6)^2 - 20 = 0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 6 + \sqrt{20} - \text{постороннее} \\ k = 6 - \sqrt{20} \end{array} \right.$.

Ответ: $k_0 = 6 - \sqrt{20}$.

Д.З. Найти наибольшее значение параметра k, при котором уравнение $|x^2 - 7x + 10| = kx$ имеет три различных корня.

60. Найти наибольшее значение k, при котором уравнение $\left|x^2 - 8|x| + 15\right| = kx$ имеет три различных корня.



Касание прямой $y = kx$ с параболой $\begin{cases} y = -x^2 + 8x - 15, \\ 3 \le x \le 5: \end{cases}$

$-x^2 + 8x - 15 = kx \;\Rightarrow\; x^2 - (8-k)x + 15 = 0 \;\Rightarrow\; D = (k-8)^2 - 60 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 8 + \sqrt{60} - \text{постороннее} \\ k = 8 - \sqrt{60} \end{array} \right.$.

Ответ: $k_0 = 8 - \sqrt{60}$.

Д.З. Найти наибольшее значение параметра k, при котором уравнение $\left|x^2 - 11|x| + 18\right| = kx$ имеет три различных корня.

Одна общая точка графиков функций $y = kx + d$ *и* $y = ax^2 + mx + n$:

$kx+d=ax^2+mx+n \Rightarrow ax^2+bx+c=0$.

Одно решение при $\left[\begin{array}{l} D=0 \\ a=0 \end{array}\right.$.

61. Найти сумму всех различных значений параметра p, при которых графики функций $y=(p-3)x^2+4x+1$ и $y=2px+2$ имеют одну общую точку.

$(p-3)x^2+4x+1=2px+2 \Rightarrow (p-3)x^2+2x(2-p)-1=0$.

Одно решение квадратного уравнения без ОДЗ:

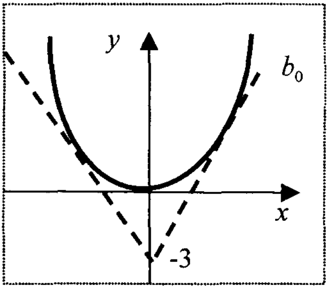
1) $a=0 \Rightarrow p_1=3$;

2) $D=0 \Rightarrow D=4-4p+p^2+p-3=0 \Rightarrow p^2-3p+1=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow p_2+p_3=3$.

Ответ: 6.

Д.З. Найти сумму всех различных значений параметра p, при которых графики функций $y=(p-4)x^2+4x+1$ и $y=2px+2$ имеют одну общую точку.

62. При каком значении параметра b парабола $y=7x^2$ и функция $y=2\sqrt{b}\cdot|x|-3$ имеют две общих точки?



Касание параболы $y=7x^2$ и прямой $y=2\sqrt{b}\cdot x-3$:
$7x^2=2\sqrt{b}\cdot x-3 \Rightarrow 7x^2-2\sqrt{b}\cdot x+3=0 \Rightarrow D=b-21=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow b_0=21$.

Д.З. При каком значении параметра b парабола $y=x^2$ и функция $y=|x|-b$ имеют две общих точки?

Одна общая точка графиков функций $-\dfrac{c}{x}$ *и* $ax+d$ *:*

$ax+b=-\dfrac{c}{x} \Rightarrow \begin{cases} ax^2+bx+c=0, \\ x\neq 0. \end{cases}$ *Одно решение при* $\left[\begin{array}{l} D=0 \\ a=0 \\ c=0 \end{array}\right.$.

63. Найти сумму всех различных значений параметра p, при которых графики функций $y=256-\dfrac{p-8}{x}$ и $y=(p-4)x$ имеют единственную общую точку.

$$\text{ОДЗ } x\neq 0 \Rightarrow 256-\frac{p-8}{x}=(p-4)x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (p-4)x^2-256x+(p-8)=0, \\ x\neq 0. \end{cases}$$

1) $D=0$: $D=(128)^2-(p-4)(p-8)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p^2-8p-4p+32-(128)^2=0 \Rightarrow p^2-12p+32-(128)^2=0\,(D>0) \Rightarrow$

$\Rightarrow\ p_1+p_2=12$;

2) $a=0 \Rightarrow\ p_3=4$;

3) $c=0 \Rightarrow\ p_4=8$.

Ответ: $p_1+p_2+p_3+p_4=12+4+8=24$.

Д.З. Найти сумму всех различных значений параметра p, при которых графики функций $y=324-\dfrac{p-9}{x}$ и $y=(p-7)x$ имеют единственную общую точку.

64. Найти сумму всех различных значений параметра p, при которых графики функций $y=16-\dfrac{p-8}{x-2}$ и $y=(p-4)x$ имеют единственную общую точку.

ОДЗ $x\neq 2 \Rightarrow 16-\dfrac{p-8}{x-2}=(p-4)x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(x-2)(p-4)-16(x-2)+(p-8)=0, \\ x\neq 2. \end{cases}$$

1) $a=0 \Rightarrow\ p_1=4$;

2) $c=0 \Rightarrow p_2=8 \Rightarrow (x-2)((p-4)x-16)=0 \Rightarrow$

$(x-2)(4x-16)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2-\text{постороннее} \end{array}\right.;$

3) $D=0 \Rightarrow (p-4)x^2-2x(p+4)+(p+24)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow D=(p+4)^2-(p-4)(p+24)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p^2+8p+16-p^2-24p+4p+96=0 \Rightarrow -12p+108=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p=\dfrac{108}{12}=\dfrac{54}{6}=9 \Rightarrow p_3=9$.

Ответ: $p_1+p_2+p_3=4+8+9=21$.

Д.З. Найти сумму всех различных значений параметра p, при которых графики функций $y=8-\dfrac{p-1}{x-1}$ и $y=(p-2)x$ имеют единственную общую точку.

65. Найти произведение всех различных значений параметра p, при которых гипербола $y=\dfrac{-5}{x}$ и прямая $y=(p^2-5p+6)x+2(2p-1)$ имеют единственную общую точку.

$(p^2-5p+6)x+2(2p-1)=\dfrac{-5}{x} \Rightarrow \begin{cases} (p^2-5p+6)x^2+2(2p-1)x+5=0, \\ x\neq 0. \end{cases}$

1) $a=0 \Rightarrow p^2-5p+6=0 \Rightarrow (D>0) \Rightarrow p_1 \cdot p_2=6$;

2) $D=0 \Rightarrow D=4p^2-4p+1-5p^2+25p-30=0 \Rightarrow$

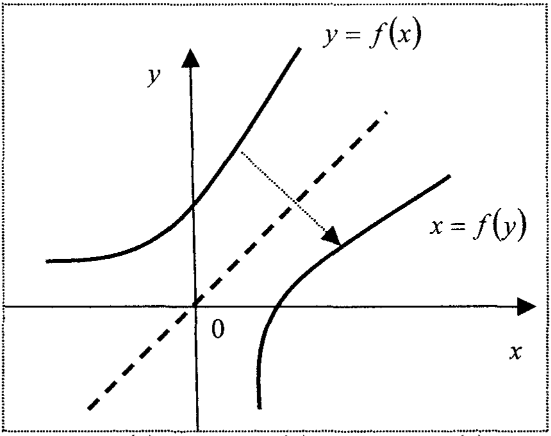
$\Rightarrow -p^2+21p-29=0 \Rightarrow p^2-21p+29=0 \Rightarrow (D>0) \Rightarrow p_3 \cdot p_4=29$;

3) $c=5\neq 0$.

Ответ: $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4=6\cdot 29$.

Д.З. Найти произведение всех различных значений параметра p, при которых гипербола $y=\dfrac{-26}{x}$ и прямая $y=(p^2-8p+12)x+2(5p-1)$ имеют единственную общую точку.

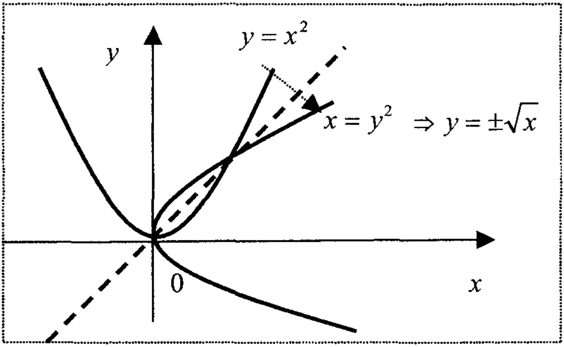
Функция, симметричная относительно прямой $y=x$



$$y = f(x) \Rightarrow x = f(y) \Rightarrow y = f^{-1}(x).$$

Найти функцию, симметричную $y = x^2$ относительно $y = x$.

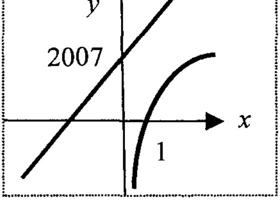
$y = x^2 \Rightarrow x = y^2$.



$y = \pm\sqrt{x}$.

Д.З. Найти функцию, симметричную $y = \log_2 x$ относительно $y = x$.

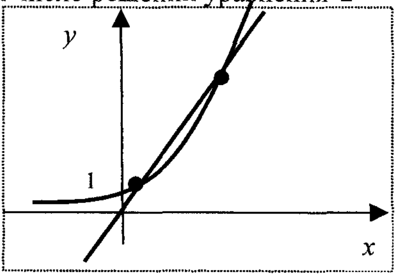
66. Найти число решений уравнения $\log_2 x = 2007 + x$.



Нет решений.

Д.З. Найти число решений уравнений $\log_2 x = x - 2007$; $\log_2 x = 2007x$.

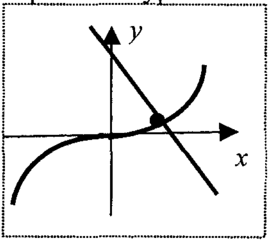
67. Найти число решений уравнения $2^x = 2007x$.



2 решения.

Д.З. Найти число решений уравнений $2007 \cdot 2^x = x$; $2^x = 2007 + x$; $2^x = 2007 - x$; $2^x = x - 2007$.

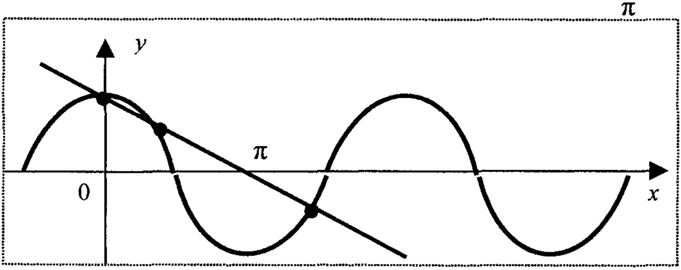
68. Найти число решений уравнения $x^3 = 2007 - x$.



1 решение.

Д.З. Найти число решений уравнений $x^3 = 2007 + x$; $x^3 = x - 2007$; $x^3 = 2007x$; $2007x^3 = x$.

69. Найти число решений уравнения $\cos x = 1 - \dfrac{x}{\pi}$.



3 решения.

Д.З. Найти число решений уравнений $\cos x = 1 - \dfrac{x}{3\pi}$; $\sin x = 1 - \dfrac{8x}{3\pi}$; $\sin x = \dfrac{2x}{5\pi}$.

10. ПРОЦЕНТЫ

Увеличение числа a на $x\%$: $a\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)$.

Уменьшение числа a на $x\%$: $a\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)$.

1. Стиральная машина, стоившая 10000 рублей, стала дороже на 13%. Через год она стала дешевле на 23%. Найти её окончательную стоимость.

$$10000\cdot\left(1+\frac{13}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{23}{100}\right)=10000\cdot\frac{113}{100}\cdot\frac{77}{100}=113\cdot 77\,.$$

Д.З. Стиральная машина, стоившая 10000, стала дороже на 17%. Через год она стала дешевле на 12%. Найти её окончательную стоимость.

Д.З. Цену товара повысили на 60%, затем понизили на 59%. На сколько процентов конечная цена отличается от начальной?

Д.З. Цену товара повысили на 30%, затем понизили на 20%. На сколько процентов конечная цена отличается от начальной?

На сколько процентов число x больше (меньше) числа y?

$$\frac{x-y}{y}100\% \Rightarrow \left[\begin{array}{l} >0 - x \text{ больше } y \\ <0 - x \text{ меньше } y \end{array}\right. .$$

2. На сколько процентов число 0,5 меньше числа 0,75?

$$\frac{0{,}5-0{,}75}{0{,}75}100\%=-\frac{25}{75}100\%=-\frac{100}{3}=-33,(3)\%\,.$$

3. На сколько процентов число 0,75 больше числа 0,5?

$$\frac{0{,}75-0{,}50}{0{,}50}100\%=\frac{25}{50}100\%=50\%\,.$$

4. Старший преподаватель зарабатывает на 25 % меньше, чем доцент. На сколько процентов больше, чем старший преподаватель, зарабатывает доцент?

$$C = 0{,}75 \cdot D \;\Rightarrow\; D = \frac{C}{0{,}75} \;\Rightarrow$$

$$\frac{D-C}{C} = \frac{\frac{C}{0{,}75} - C}{C} 100\% = \frac{1-0{,}75}{0{,}75} 100\% = \frac{100}{3}\% = 33{,}(3)\%.$$

Д.З. Старший преподаватель зарабатывает на 20% меньше, чем доцент. На сколько процентов больше, чем старший преподаватель, зарабатывает доцент?

5. Ротвейлеры, составляющие 30% числа всех собак в вольере, получают 60% корма, остальное получают таксы. На сколько процентов один ротвейлер получает корма больше, чем одна такса?

Число ротвейлеров $0{,}3$, число такс $0{,}7$.

Один ротвейлер получает корма R, одна такса получает корма T.

$$\frac{R-T}{T} 100\% = ?$$

Все ротвейлеры получают корма $R \cdot 0{,}3 = 0{,}6 \;\Rightarrow\; R = 2$.

Все таксы получают корма $T \cdot 0{,}7 = 0{,}4 \;\Rightarrow\; T = \frac{4}{7}$.

$$\frac{R-T}{T} 100\% = \frac{2 - \frac{4}{7}}{\frac{4}{7}} 100\% = \frac{14-4}{4} 100\% = 250\%.$$

Д.З. Ротвейлеры, составляющие 48% числа всех собак в вольере, получают 75% корма, остальное получают таксы. На сколько процентов один ротвейлер получает корма больше, чем одна такса?

6. Доллар по отношению к рублю стал дешевле на 18%. Сколько однодолларовых купюр можно теперь купить на ту же сумму в рублях, которой прежде хватало на покупку ровно 328 долларов?

$$D = \frac{R}{0{,}82} = \frac{328}{0{,}82} = \frac{328}{82} \cdot 100 = 400.$$

Д.З. Доллар по отношению к рублю стал дешевле на 16%. Сколько однодолларовых купюр можно теперь купить на ту же сумму в рублях, которой прежде хватало на покупку ровно 252 долларов?

7. Билл добавил в копилку 24 у.е., в результате чего сумма в копилке возросла на $33,(3)\%$. Сколько у.е. нужно добавить в копилку, чтобы сумма в результате второго вклада возросла еще на $33,(3)\%$?

1. $x+24=x\left(1+\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \frac{x}{3}=24 \Rightarrow x=72$;

2. $96+y=96\left(1+\frac{1}{3}\right) \Rightarrow y=\frac{96}{3}=32$.

8. Перекупщик купил колбасу с истекшим сроком реализации со скидкой 60% от номинальной цены и продал ее, получив прибыль в размере 30%. С какой скидкой от номинальной цены была продана колбаса?

Затраты при покупке составляют $0{,}4$;прибыль в 30% от 0,4 при продаже соответствует $0{,}4\cdot 1{,}3=0{,}52 \Rightarrow$ скидка 48%.

Д.З. Перекупщик купил колбасу с истекшим сроком реализации со скидкой 80% от номинальной цены и продал ее, получив прибыль в размере 70%. С какой скидкой от номинальной цены была продана колбаса?

Д.З. Билл купил автомобиль со скидкой 40% от рыночной цены и продал ее, получив прибыль в размере 30%. С какой скидкой от рыночной цены был продан автомобиль?

9. За 5 лет Билл стал старше на 20%. Найти возраст Билла.

B – возраст Билла 5 лет назад.

$B+5=1{,}2\cdot B \Rightarrow 0{,}2\cdot B=5 \Rightarrow B=25 \Rightarrow$ Ответ: 30.

Д.З. 13 лет назад Джек был на 25% старше Билла, а сейчас от на 12% старше Билла. Найти разницу возрастов Джека и Билла.

Д.З. Высота сосны на 25% выше, чем у ёлки. Если каждое из деревьев подрастет на 18 метров, то высота сосны будет на 10% больше, чем у елки. Найти первоначальную высоту ёлки.

10. В декабре завод выполнил 160% месячного плана, а в январе дал продукции на 60% меньше, чем в декабре. Найти процент недовыполнения месячного плана в январе.

$$1{,}6\cdot 0{,}6=(1+0{,}6)\cdot(1-0{,}6)=1-0{,}36 \Rightarrow 36\%.$$

Д.З. В декабре завод выполнил 110% месячного плана, а в январе дал продукции на 10% меньше, чем в декабре. Найти процент недовыполнения месячного плана в январе.

Д.З. В январе завод перевыполнил месячный план на 1/11, а в феврале дал продукции на 1/10 больше, чем в январе. На сколько процентов завод перевыполнил месячный план в феврале?

11. Курс доллара по отношению рублю растет ежеквартально на 25%, а курс рубля по отношению евро за этот же период падает на

20%. На сколько процентов изменится курс доллара по отношению к евро за квартал?

В конце квартала $\begin{cases} D = 1{,}25 \cdot R \\ R = 0{,}8 \cdot E \end{cases} \Rightarrow D = 1{,}25 \cdot 0{,}8 \cdot E = 1 \cdot E \Rightarrow$ на 0%.

Д.З. Курс доллара по отношению рублю растет ежеквартально на 1/5, а курс рубля по отношению евро за этот же период падает на 1/6. На сколько процентов изменится курс доллара по отношению к евро за квартал?

Д.З. Курс доллара по отношению рублю растет ежеквартально на 1/10, а курс рубля по отношению евро за этот же период падает на 1/11. На сколько процентов изменится курс доллара по отношению к евро за квартал?

12. Затраты на покупку бананов возросли на 56%, а цена килограмма бананов возросла на 20%. На сколько процентов возрос вес купленных бананов?

Затраты = (цена за 1 кг) × (вес).

$$1{,}56 = 1{,}2 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) \Rightarrow 0{,}36 = \frac{1{,}2 \cdot x}{100} \Rightarrow x = \frac{36}{1{,}2} = 30\% .$$

Д.З. Затраты на покупку яблок возросли на 68%, а цена килограмма яблок возросла на 20%. На сколько процентов возрос вес купленных яблок?

Д.З. Раньше на некоторую сумму денег можно было купить 49 кг конфет, а теперь за те же деньги можно купить 50 кг конфет. На сколько процентов изменилась цена килограмма конфет?

Д.З. Просрочив платеж, квартиросъемщик был вынужден заплатить еще и пени в размере 20% от суммы платежа. Вместе эти расходы составили 336 руб. Найти исходную сумму платежа.

13. Расход на аренду помещения составляет 70% общих расходов фирмы. Если стоимость аренды уменьшить в 6 раз при прочих равных условиях, то после этого расход на аренду помещения составит от общих расходов фирмы

Первоначальные расходы $1 = 0{,}7 + 0{,}3$.

Новая аренда $\frac{0{,}7}{6}$, новые прочие $0{,}3$, новые суммарные расходы $\frac{0{,}7}{6} + 0{,}3$.

Доля новой аренды в новых суммарных расходах:

$$\frac{\frac{0,7}{6}}{\frac{0,7}{6}+0,3}\cdot 100\% = \frac{7}{7+18}\cdot 100\% = \frac{7}{25}\cdot 100 = 28\%.$$

Д.З. Расход на аренду помещения составляет 90% общих расходов фирмы. Если стоимость аренды уменьшить в 6 раз при прочих равных условиях, то после этого расход на аренду помещения составит от общих расходов фирмы…

14. Раньше накладные расходы составляли 30% общих расходов. Накладные расходы возросли на 110%, а прочие возросли на 60%, и теперь накладные расходы составляют от общих расходов…%

Первоначальные расходы $1 = 0,3 + 0,7$.

Новые накладные $0,3 \cdot 2,1$, новые прочие $0,7 \cdot 1,6$.

Новые суммарные расходы $0,3 \cdot 2,1 + 0,7 \cdot 1,6$.

Доля новых накладных в новых суммарных расходах:

$$\frac{0,3\cdot 2,1}{0,3\cdot 2,1+0,7\cdot 1,6}\cdot 100\% = \frac{3\cdot 21}{3\cdot 21+7\cdot 16}\cdot 100\% = \frac{9}{25}100\% = 36\%.$$

Д.З. Раньше накладные расходы фирмы составляли 30% от общих расходов. Накладные расходы выросли на 40%, а прочие выросли на 90%. Сколько процентов составляют накладные расходы от общих?

Д.З. Если накладные расходы фирмы уменьшить в 2 раза, а прочие расходы увеличить в 8 раз, то общие расходы увеличатся в 6 раз. На сколько процентов первоначально прочие расходы были больше накладных?

Д.З. Накладные расходы составляют 25% общих расходов фирмы. Если накладные расходы увеличить в 12 раз, то после этого накладные расходы будут составлять от общих расходов x %.

Капитализация вклада

Размер вклада в конце года при полугодовой ставке в $x\%$: $a\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)^2$.

Размер вклада в конце года при квартальной ставке в $x\%$: $a\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)^4$.

Размер вклада в конце года при месячной ставке в $x\%$: $a\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)^{12}$.

15. В начале года Петя положил 1 млн руб. в банк А, начисляющий 0,4% каждые 4 месяца, а Вася положил 1 млн руб. в банк В, начисляющий 0,6% каждые 6 месяцев. Проценты прибавляются к вкладу и участвуют в последующем приросте (капитализируются). Найти разницу их вкладов в конце года.

Вклад Пети в конце года $10^6\left(1+\frac{4}{10^3}\right)^3$. Вклад Васи в конце года $10^6\left(1+\frac{6}{10^3}\right)^2$.

$$\Delta=10^6\left(\left(1+\frac{4}{10^3}\right)^3-\left(1+\frac{6}{10^3}\right)^2\right)=$$

$$=10^6\left(1+\frac{12}{10^3}+\frac{48}{10^6}+\frac{64}{10^9}-1-\frac{12}{10^3}-\frac{36}{10^6}\right)=10^6\left(\frac{48}{10^6}+\frac{64}{10^9}-\frac{36}{10^6}\right)=12+\frac{64}{10^3}.$$

Д.З. В начале года Петя положил 1 млн руб. в банк А, начисляющий 0,2% каждые 4 месяца, а Вася положил 1 млн руб. в банк В, начисляющий 0,3% каждые 6 месяцев. Проценты прибавляются к вкладу и участвуют в последующем приросте (капитализируются). Найти разницу их вкладов в конце года.

Д.З. В течение года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и тоже число процентов. Найти это число, если в начале года завод выпускал ежемесячно 600 деталей, а в конце года 726.

Размер вклада через n лет при капитализации и годовой ставке пополнения в $x\%$: $a\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)^n$.

16. В начале первого года в банк был внесен вклад величиной в 100 у.е., процентная ставка составляет 40% в год, доход по вкладу начисляется в конце каждого года и прибавляется к вкладу. На сколько у.е. возрастет величина вклада за второй год хранения, если годовая процентная ставка за этот период не менялась?

$$\Delta = 100\left(1+\frac{40}{100}\right)^2 - 100\left(1+\frac{40}{100}\right)^1 =$$

$$= 100\left(1+\frac{40}{100}\right)\left(1+\frac{40}{100}-1\right) = 100\cdot\frac{14}{10}\cdot\frac{4}{10} = 14\cdot 4 = 56.$$

17. В начале первого года в банк был внесен вклад величиной в 1000 у.е., процентная ставка составляет 30% в год, доход по вкладу начисляется в конце каждого года и прибавляется к вкладу. На сколько у.е. возрастет величина вклада за третий год хранения, если годовая процентная ставка за этот период не менялась?

$$\Delta = 1000\left(1+\frac{30}{100}\right)^3 - 1000\left(1+\frac{30}{100}\right)^2 = 1000\left(1+\frac{30}{100}\right)^2\left(1+\frac{30}{100}-1\right) =$$

$$= 1000\cdot\left(\frac{13}{10}\right)^2\cdot\frac{3}{10} = (13)^2\cdot 3.$$

Д.З. В начале первого года в банк был внесен вклад величиной в 10000 у.е., процентная ставка составляет 20% в год, доход по вкладу начисляется в конце каждого года и прибавляется к вкладу. На сколько у.е. возрастет величина вклада за четвертый год хранения, если годовая процентная ставка за этот период не менялась?

Д.З. В начале первого года в банк был внесен вклад величиной в 100000 у.е., процентная ставка составляет 40% в год, доход по вкладу начисляется в конце каждого года и прибавляется к вкладу. На сколько у.е. возрастет величина вклада за пятый год хранения, если годовая процентная ставка за этот период не менялась?

18. При условии ежегодного начисления дохода сумма вклада в банке за 2-й год хранения увеличилась на 36 руб., а за 4-й год – на 81 руб. На сколько рублей увеличился доход за 1-й год?

$$\begin{cases} \Delta_2 = a\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 - a\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right) = 36, \\ \Delta_4 = a\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)^4 - a\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)^3 = 81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(\frac{x}{100}\right) = 36, \\ a\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)^3\left(\frac{x}{100}\right) = 81 \end{cases};$$

обозначение $\frac{x}{100} = y \Rightarrow \begin{cases} a\cdot(1+y)y = 36, \\ a\cdot(1+y)^3 y = 81 \end{cases}$;

$$(1+y)^2 = \frac{81}{36} \Rightarrow 1+y = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 50\%.$$

Д.З. При условии ежегодного начисления дохода сумма вклада в банке за 2-й год хранения увеличилась на 25 руб., а за 4-й год – на 64 руб. На сколько рублей увеличился доход за 1-й год?

Д.З. При условии ежегодного начисления дохода сумма вклада в начале 1-го года была равна 192 руб., а в начале 3-го года была равна 432. Чему равна сумма вклада в начале 4-го года?

19. Сумма вклада в банке после 1-го года хранения равнялась 48 у.е., а после 3-ого года хранения – 108 у.е. На сколько у.е. увеличился вклад за 2-й год хранения, если процентная ставка не менялась, доход начисляется в конце каждого года и прибавляется к сумме вклада?

$$\Delta_2 = a\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 - a\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right) = ? \quad \begin{cases} a\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right) = 48, & (1) \\ a\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)^3 = 108 & (2) \end{cases} \Rightarrow \frac{(2)}{(1)} \Rightarrow$$

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 = \frac{108}{48} = \frac{54}{24} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} \Rightarrow \quad 1+\frac{x}{100} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{100} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$a = \frac{48}{\left(1+\frac{x}{100}\right)} = \frac{48\cdot 2}{3} = 32.$$

$$\Delta_2 = a\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 - a\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right) = a\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}-1\right) =$$

$$= a\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)\frac{x}{100} = 24$$

Д.З. Билл положил 200 у.е. в банк 1 января 2000 года. Доход по вкладу в банке начисляется один раз в год 31 декабря и прибавляется к вкладу. Раз в два года, начиная с 2002 года, 1 января, Билл снимает со счета 138 у.е. для уплаты аренды. Какова наименьшая годовая процентная ставка, при которой остаток средств на вкладе не будет уменьшаться?

Д.3. Какая сумма была положена на счет в банке, если при ставке по вкладам равной 10%, она за 4 года увеличилась на 9282 рубля?

Размер вклада через n лет при годовой ставке выемки в $x\%$: $a\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)^n$.

20. В начале 2001 года Петя положил 1 млн руб. в сейф и брал из него 9% суммы каждые 3 года, а Вася положил 1 млн руб. в другой сейф и брал из него 6% суммы каждые 2 года. Найти разницу содержимого сейфов в конце 2006 года.

Вклад Пети в конце 2006: $10^6\left(1-\frac{9}{10^2}\right)^2$. Вклад Васи в конце 2006: $10^6\left(1-\frac{6}{10^2}\right)^6$.

Разница вкладов:

$$\Delta=10^6\left(\left(1-\frac{6}{10^2}\right)^3-\left(1-\frac{9}{10^2}\right)^2\right)=10^6\left(1-\frac{18}{10^2}+\frac{108}{10^4}-\frac{216}{10^6}-1+\frac{18}{10^2}-\frac{81}{10^4}\right)=$$

$$=10^6\left(\frac{27}{10^4}-\frac{216}{10^6}\right)=2700-216=2484.$$

Д.3. В начале 2000 года Петя положил 100 млн руб. в сейф и брал из него 12% суммы каждые 4 года, а Вася положил 100 млн руб. в другой сейф и брал из него 6% суммы каждые 2 года. Найти разницу содержимого сейфов в конце 2008 года.

21. В начале 2001 года Петя положил 1 млн руб. в сейф и берет из него $m\%$ суммы каждый год. При каком значении m в начале 2009 года он возьмёт из сейфа максимальную сумму?

Размер 8-й выемки (через 8 лет):

$$y=\frac{m}{100}\cdot 10^6\left(1-\frac{m}{100}\right)^7=x(1-x)^7.$$

$$y'=(1-x)^7-7x(1-x)^6=(1-x)^7\cdot(1-8x)=0\ \Rightarrow\ x=\frac{m}{100}=\frac{1}{8}\ \Rightarrow$$

$$m=\frac{100}{8}=12{,}5\%.$$

Д.З. В начале 1968 года Петя положил 1 млн руб. в сейф и брал из него $m\%$ суммы каждый год. При каком значении m в начале 1993 года он взял сейфа максимальную сумму?

22. Число 2,56 дважды увеличивали на одно и тоже число процентов, а затем дважды уменьшали на это же число процентов. В результате получилось число 2,25. На сколько процентов увеличивали, а затем уменьшали это число?

$$25{,}6\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)^2\left(1-\frac{x}{100}\right)^2=22{,}5\ \Rightarrow\ \left(1-\left(\frac{x}{100}\right)^2\right)^2=\frac{22{,}5}{25{,}6}=\frac{225}{256};$$

$$1-\left(\frac{x}{100}\right)^2=\sqrt{\frac{225}{256}}=\frac{15}{16}\ \Rightarrow\ \left(\frac{x}{100}\right)^2=\frac{1}{16}\ \Rightarrow\ \frac{x}{100}=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ x=25\%.$$

Д.З. Число 19,6 дважды увеличивали на одно и тоже число процентов, а затем дважды уменьшали на это же число процентов. В результате получилось число 16,9. На сколько процентов увеличивали, а затем уменьшали это число?

Д.З. Число 51,2 трижды увеличивали на одно и тоже число процентов, а затем трижды уменьшали на это же число процентов. В результате получилось число 21,6. На сколько процентов увеличивали, а затем уменьшали это число?

23. Условия размещения вклада в паевом фонде таковы, что первые 4 года вклад уменьшается на $3x\%$ в год, последующие 5 лет вклад увеличивается на $6x\%$ в год, причем величину x Вы можете выбирать сами. При каком значении x через 9 лет прирост вклада будет наибольшим?

Размер вклада через 9 лет: $y=a\left(1-\frac{3x}{10^2}\right)^4\cdot\left(1+\frac{6x}{10^2}\right)^5$.

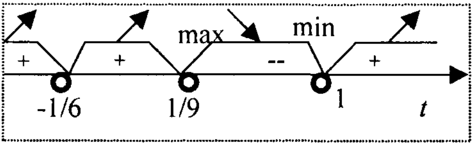
Обозначение $\frac{x}{100}=t\ \Rightarrow\ y=a\cdot(1-3t)^4\cdot(1+6t)^5$.

Исследование на экстремум:

$$y'=a\cdot\left[-12(1-3t)^3\cdot(1+6t)^5+30(1-3t)^4\cdot(1+6t)^4\right];$$

$$y'=6a\cdot(1-3t)^3(1+6t)^4\left[-2\cdot(1+6t)+5(1-3t)\cdot\right]=$$

$$=6a\cdot(1-3t)^3(1+6t)^4[3-3t]=3\cdot18a\cdot(1-3t)^3(1+6t)^4(1-9t).$$



$$t_0 = \frac{1}{9} \Rightarrow x_0 = \frac{100}{9} = 11,(1)\%.$$

Д.З. Условия размещения вклада в паевом фонде таковы, что первые 3 года вклад уменьшается на $4x\%$ в год, последующие 6 лет вклад увеличивается на $5x\%$ в год, причем величину x Вы можете выбирать сами. При каком значении x через 9 лет прирост вклада будет наибольшим?

24. При смешивании первого раствора с концентрацией 40% и второго раствора с концентрацией 48% получился раствор с концентрацией 42%. Найти отношение количества первого раствора к количеству второго.

x – количество 1-го раствора, y – количество 2-го раствора, $\frac{x}{y} = ?$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 0{,}4x + 0{,}48y = 0{,}42 \end{cases} \Rightarrow 0{,}4x + 0{,}48(1-x) = 0{,}42 \Rightarrow -0{,}08x = -0{,}06$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{1}.$$

Д.З. При смешивании первого раствора с концентрацией 50% и второго раствора с концентрацией 70% получился раствор с концентрацией 68%. Найти отношение количества первого раствора к количеству второго.

Д.З. На фирме A 30% сотрудников – менеджеры, на фирме B менеджеров 70%. После слияния образовалась фирма C, 60% персонала которой – менеджеры. Найти долю бывших сотрудников фирмы A среди сотрудников фирмы C.

25. В растворе X содержится 20% вещества A и 50% вещества B, в растворе Y 30% A и 20% B. В результате смешивания получился раствор T, содержащий 25% A. Найти содержание вещества B в растворе T.

$$\begin{cases} X + Y = 1, \\ 0{,}2X + 0{,}3Y = 0{,}25 \text{ – содержание } A \text{ в смеси,} \\ f = 0{,}5 \cdot X + 0{,}2 \cdot Y \text{ – содержание } B \text{ в смеси} \end{cases} \text{Найти } f.$$

$$Y = 1 - X \Rightarrow \begin{cases} 0.1X = 0{,}05 \\ f = 0{,}7 + 0{,}3X \end{cases} \Rightarrow X = 0{,}5 \Rightarrow f = 0{,}7 + 0{,}15 = 0{,}85.$$

Д.3. В растворе X содержится 10% вещества A и 30% вещества B, в растворе Y 20% A и 30% B. В результате смешивания получился раствор T, содержащий 30% вещества A. Найти содержание вещества B в растворе T.

26. В растворе X содержится 20% вещества A и 50% вещества B, в растворе Y 30% A и 20% B, в растворе Z – 60% A и 10% B. В результате смешивания получился раствор T, содержащий 40% A. Найти наименьшее и наибольшее возможное содержание вещества B в растворе T.

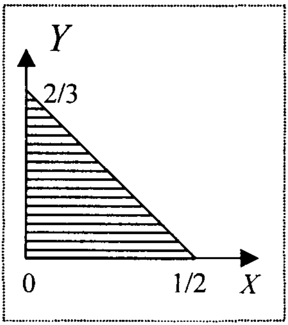
$$\begin{cases} X+Y+Z=1, \\ 0{,}2X+0{,}3Y+0{,}6Z=0{,}4 - \text{содержание } A \text{ в смеси } T, \\ f=0{,}5\cdot X+0{,}2\cdot Y+0{,}1\cdot Z - \text{содержание } B \text{ в смеси } T \end{cases}.$$

Найти наименьшее и наибольшее значения f.

$$Z=1-X-Y \Rightarrow \begin{cases} 0{,}4X+0{,}3Y=0{,}2 \\ f=0{,}1+0{,}4X+0{,}1Y \end{cases};$$

$$Y=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}X \Rightarrow$$

$$f=0{,}1+0{,}4X+0{,}1\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{3}X\right)=\frac{1}{10}\left(1+\left(4+\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\right)X\right)=\frac{1}{10}\left(1+\frac{10}{3}X\right);$$



$0 \le X \le \frac{1}{2}$. $f_{min}=f(X=0)=\frac{1}{10}$,

$$f_{max}=f\left(X_{max}=\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{15}.$$

Д.3. В растворе X содержится 10% вещества A и 30% вещества B, в растворе Y 20% A и 30% B, в растворе Z 60% A и 20% B. В результате смешивания получился раствор T, содержащий 30% A. Найти наименьшее и наибольшее возможное содержание вещества B в растворе T.

27. Яблоки, содержащие 70% воды, при сушке потеряли 60% своей массы. Сколько процентов воды содержат сушеные яблоки?

0,7 – количество воды до выпаривания, 0,3 – количество сухого вещества, $0{,}7+0{,}3=1$.

X – количество воды после выпаривания: $X+0{,}3=0{,}4 \Rightarrow X=0{,}1$.

Процент воды после выпаривания: $\dfrac{0{,}1}{0{,}1+0{,}3}\cdot 100\%=25\%$.

Д.З. На коробке с вермишелью написано, что её масса составляет 500 г при влажности13%. Какова будет масса вермишели если её хранить при влажности 25%?

28. Сколько кг воды надо выпарить из 100 кг массы, содержащей 90% воды, чтобы получить массу, содержащую 80% воды?

Сухое вещество 10% от 100 кг $\Rightarrow$ 10 кг.

До выпаривания: $\dfrac{90(\textit{вода})}{90(\textit{вода})+10}\cdot 100\%=90\%$.

После выпаривания: $\dfrac{90-x}{90-x+10}=0{,}8 \Rightarrow 90-x=80-0{,}8x \Rightarrow 0{,}2x=10 \Rightarrow x=50$.

Д.З. Сколько г воды надо выпарить из 100 г 10%-го раствора соляной кислоты, чтобы получить 20%-й раствор?

Д.З. Арбуз весил 20 кг и содержал 99% воды. Когда он немного высох, то стал содержать 98% воды. Сколько теперь весит арбуз?

29. Сколько кг пресной воды надо добавить к 30 кг морской воды, содержащей 5% соли, чтобы получить морскую воду, содержащую 2% соли?

Соль: 50% от 30 кг $\Rightarrow$ 1,5 кг.

До разбавления: $\dfrac{1{,}5(\textit{соль})}{1{,}5(\textit{соль})+28{,}5(\textit{вода})}\cdot 100\%=5\%$.

После разбавления: $\dfrac{1{,}5(\textit{соль})}{1{,}5(\textit{соль})+(28{,}5+x)(\textit{вода})}=\dfrac{1}{50} \Rightarrow \dfrac{1{,}5}{30+x}=\dfrac{1}{50} \Rightarrow x=45$.

Д.З. Сколько г воды надо добавить к 100 г 30%-й соляной кислоты, чтобы получить 10%-ю соляную кислоту?

11. ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ

$$\textit{Производительность} = \frac{\textit{объём работ}}{\textit{время}}: \ X = \frac{V}{T}.$$

1. Производительность труда возросла на 14% , поэтому работа была выполнена на 21 день раньше плана. За сколько дней была выполнена работа?

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{T} \\ 1{,}14X = \dfrac{1}{T-21} \end{cases} \Rightarrow \frac{1{,}14}{T} = \frac{1}{T-21} \Rightarrow 1{,}14T - 1{,}14 \cdot 21 = T \Rightarrow$$

$$0{,}14T = 1{,}14 \cdot 21;$$

$$T = \frac{1{,}14 \cdot 21}{0{,}14} = \frac{114 \cdot 21}{14} = \frac{114 \cdot 3}{2} = 57 \cdot 3 = 171 \Rightarrow \text{Ответ: } 150.$$

Д.З. Производительность труда возросла на 30%, поэтому работа была выполнена на 12 дней быстрее плана. За сколько дней была выполнена работа?

2. Если производительность труда повысить на 20% и увеличить время работы на 1 час против плана, то можно изготовить на 18 деталей сверх плана. Если производительность труда повысить на 30% и увеличить время работы на 2 час против плана, то можно изготовить на 31 деталь сверх плана. Чему равно число деталей, изготовляемых по плану?

$$\begin{cases} 1{,}2\dfrac{V}{T} = \dfrac{V+18}{T+1} \\ 1{,}3\dfrac{V}{T} = \dfrac{V+31}{T+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1{,}2 \cdot VT + 1{,}2V = VT + 18T \\ 1{,}3 \cdot VT + 2{,}6V = VT + 31T \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0{,}2 \cdot VT + 1{,}2V = 18T \\ 0{,}3 \cdot VT + 2{,}6V = 31T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} VT + 6V = 90T & (1)\cdot(-3) \\ 3VT + 26V = 310T & (2) \end{cases} \Rightarrow 8V = 40T$$

$$\Rightarrow T = \frac{V}{5} \Rightarrow (1) \Rightarrow \frac{V^2}{5} + 6V = \frac{90}{5}V \Rightarrow V^2 - 60V = 0 \Rightarrow V = 60.$$

Д.З. Если производительность труда повысить на 30% и увеличить время работы на 4 час против плана, то можно изготовить на 14 деталей сверх плана. Если производительность труда повысить на

50% и увеличить время работы на 3 час против плана, то можно изготовить на 15 деталей сверх плана. Чему равно число деталей, изготовляемых по плану?

3. Если Билл повысит свою производительность труда в 7 раз, а Джек понизит свою производительность в 3 раза против плана, то время совместного выполнения работы уменьшится в 3 раза. Как относится плановая производительность Билла к плановой производительности Джека?

$$\begin{cases} B + D = \dfrac{1}{T} & (1) \\ 7B + \dfrac{D}{3} = \dfrac{3}{T} & (2) \end{cases}; \quad \frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{7B + \dfrac{D}{3}}{B + D} = 3;$$

обозначение $\dfrac{B}{D} = a$: $\dfrac{7a + \dfrac{1}{3}}{a+1} = 3 \Rightarrow 21a + 1 = 3a + 3 \Rightarrow 18a = 2 \Rightarrow$

$a = \dfrac{1}{9}$.

Д.З. Если Билл повысит свою производительность труда в 9 раз, а Джек понизит свою производительность в 4 раза против плана, то время совместного выполнения работы уменьшится в 3 раза. Как относится плановая производительность Билла к плановой производительности Джека?

4. Если Билл повысит свою производительность труда на 20%, а Джек на 110% против плана, то время совместного выполнения работы уменьшится на 20%. Как относится плановая производительность Билла к плановой производительности Джека?

$$\begin{cases} B + D = \dfrac{1}{T} & (1) \\ 1{,}2B + 2{,}1D = \dfrac{1}{0{,}8T} & (2) \end{cases}; \quad \frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{B + D}{1{,}2B + 2{,}1D} = 0{,}8;$$ обозначение

$\dfrac{B}{D} = a$: $\dfrac{a+1}{1{,}2a + 2{,}1} = 0{,}8$.

$a + 1 = 0{,}8(1{,}2a + 2{,}1) \Rightarrow a + 1 = 0{,}96a + 1{,}68 \Rightarrow 0{,}04a = 0{,}68 \Rightarrow$
$a = 17$.

Д.З. Если Билл повысит свою производительность труда на 80%, а Джек уменьшит на 30%, по сравнению с планом, то время совместного выполнения работы не изменится по сравнению с плановым, которое равно 36 дней. Сколько дней понадобится Биллу, если он будет выполнять тот же объём работ в одиночку?

Д.З. Если Билл повысит свою производительность труда на 100%, а Джек увеличит на 50% по сравнению с планом, то они вместе выполнят работу за 60 мин. Если Билл повысит свою производительность труда на 50%, а Джек увеличит на 100% по сравнению с планом, то они вместе выполнят работу за 50 мин. За какое время Билл и Джек, работая с плановой производительностью, выполнят работу.

Время на выполнение объема V при совместной работе:

$$T = \frac{V}{X+Y}.$$

5. Если после совместного выполнения 20% работы Билл повысит свою производительность на 30%, а Джек повысит на 50%, то на выполнение всей работы понадобится 40 дней. Если указанное повышение производительности произойдет после выполнения 40% работы, то на выполнение всей работы понадобится 43 дня. За сколько дней они вместе выполнят работу с повышенной производительностью?

$$\begin{cases} \dfrac{0,2}{B+D} + \dfrac{0,8}{1,3B+1,5D} = 40 & (1) \\ \dfrac{0,4}{B+D} + \dfrac{0,6}{1,3B+1,5D} = 43 & (2) \end{cases}; \quad \frac{1}{1,3B+1,5D} = ? \Rightarrow \quad (1)\cdot 2-(2) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1,3B+1,5D} = 80-43 = 37.$$

Д.З. Если после совместного выполнения 40% работы Билл повысит свою производительность на 20%, а Джек повысит на 60%, то на выполнение всей работы понадобится 40 дней. Если указанное повышение производительности произойдет после выполнения 60% работы, то на выполнение всей работы понадобится 43 дня. За сколько дней они вместе выполнят работу с повышенной производительностью?

Объем работ за указанное время T при совместной работе: $V = T\cdot(X+Y)$.

6. Если после совместного выполнения половины работы Билл повысит свою производительность на 30%, а Джек – на 20%, то на выполнение всей работы понадобится 81 день. Если указанное повышение производительности произойдет после истечения половины времени, то на выполнение всей работы понадобится 80 дней. За сколько дней они вместе выполнят работу с плановой производительностью?

$$\begin{cases}\dfrac{0,5}{B+D}+\dfrac{0,5}{1,3B+1,2D}=81\\ 0,5\cdot 80(B+D)+0,5\cdot 80(1,3B+1,2D)=1\end{cases};\ a=\frac{1}{B+D}=?$$

$$b=\frac{1}{1,3B+1,5D};$$

$$\begin{cases}0,5a+0,5b=81\\ \dfrac{40}{a}+\dfrac{40}{b}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=162\\ \dfrac{40}{a}+\dfrac{40}{b}=1\end{cases}\Rightarrow b=162-a\Rightarrow$$

$$\frac{40}{a}+\frac{40}{162-a}=1.$$

$$40\cdot 162-40a+40a=162a-a^2\Rightarrow a^2-162a+40\cdot 162=0\Rightarrow$$

$$a_{1,2}=81\pm\sqrt{(81)^2-81\cdot 80}=81\pm 9.$$

$a_2=72$ – постороннее решение, так как меньше 80. Ответ: $a_1=90$.

Д.З. Если после совместного выполнения половины работы Билл повысит свою производительность на 80%, а Джек – на 160%, то на выполнение всей работы понадобится 64 дня. Если указанное повышение производительности произойдет после истечения половины времени, то на выполнение всей работы понадобится 55 дней. За сколько дней они вместе выполнят работу с плановой производительностью?

7. Два плиточника, работая вместе, могут за 1 час выложить дорожку длиной 30 м. Чтобы выложить 60 м такой дорожки, первый плиточник затратит на 3 часа больше, чем второй. За сколько часов первый плиточник может выложить 90 м такой дорожки?

$$\begin{cases}X+Y=30\\ \dfrac{60}{X}-\dfrac{60}{Y}=3\end{cases};\ X=\frac{90}{?};\ Y=30-X\Rightarrow\frac{60}{X}-\frac{60}{30-X}=3\Rightarrow$$

$$\frac{20}{X}-\frac{20}{30-X}=1\Rightarrow$$

$$600 - 20X - 20X = 30X - X^2 \Rightarrow X^2 - 70X + 600 = 0.$$

$X_1 = 60$ – постороннее решение, так как больше 30.

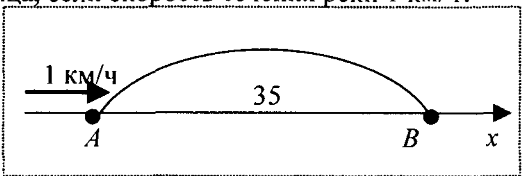
$X_2 = 10 = \dfrac{90}{9}$. Ответ: за 9 часов.

Д.З. Два оператора, работая вместе, могут за 1 час ввести 40 страниц текста. Работая отдельно, первый оператор на ввод 90 страниц этого текста тратит на 5 часов больше, чем второй оператор на ввод 25 страниц. За сколько часов второй оператор может ввести 275 страниц текста?

Д.З. Если Билл выкопает 13 метров траншеи, а после этого Джек выкопает еще 11 метров, то на выполнение этой работы потребуется 31 минута. Если Билл выкопает 7 метров траншеи, а после этого Джек выкопает еще 9 метров, то на это потребуется 24 минуты. Если Билл выкопает 8 метров траншеи, а после этого Джек выкопает еще 8 метров, то на это потребуется промежуток времени, продолжительность которого в минутах равна…

Д.З. Если Билл выполнит 70% работы, а после этого Джек доделает остальное, то на это понадобится 48 дней. Ту же работу можно выполнить за 25 дней, если Билл будет работать 30% этого времени, а остальное время проработает Джек (Джек работает быстрее Билла). Сколько дней достаточно для совместного выполнения работы?

8. Пароход проходит 35 км против течения реки на 2 часа дольше, чем тот же путь по течению. Сколько времени займет путешествие в оба конца, если скорость течения реки 1 км/ч?



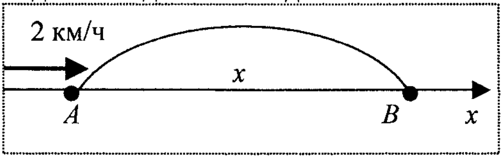
$$t_{по} = \frac{35}{V+1},\ t_{против} = \frac{35}{V-1} \Rightarrow \frac{35}{V-1} - \frac{35}{V+1} = 2 \Rightarrow 35\frac{V+1-V+1}{V^2-1} = 2;$$

$$35\frac{2}{V^2-1} = 2 \Rightarrow V^2 - 1 = 35 \Rightarrow V = 6.$$

Д.З. Пароход проходит 24 км против течения реки на 2 часа дольше, чем тот же путь по течению. Сколько времени займет путешествие в оба конца, если скорость течения реки 1 км/ч?

9. Города A и B расположены на берегу реки, которая течёт со скоростью 2 км/час. Пароход проходит маршрут ABA за 28 часов.

Если скорость парохода в неподвижной воде увеличить в 3 раза, то прохождение маршрута ABA займет 9 часов. Найти первоначальную скорость парохода в неподвижной воде.

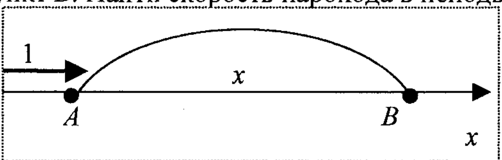


$$\begin{cases} \frac{x}{V+2}+\frac{x}{V-2}=28 \\ \frac{x}{3V+2}+\frac{x}{3V-2}=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2Vx}{V^2-4}=28 \\ \frac{6Vx}{9V^2-4}=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2Vx=28(V^2-4) \\ 2Vx=3(9V^2-4) \end{cases} \Rightarrow$$

$3(9V^2-4)=28(V^2-4) \Rightarrow 27V^2-12=28V^2-112 \Rightarrow V^2=100 \Rightarrow$ $V=10$.

Д.З. Города A и B расположены на берегу реки, которая течёт со скоростью 2 км/час. Пароход проходит маршрут ABA за 55 часов. Если скорость парохода в неподвижной воде увеличить в 3 раза, то прохождение маршрута ABA займет 18 часов. Найти первоначальную скорость парохода в неподвижной воде.

10. Из пункта A в пункт B (оба расположены на берегу реки) отправились одновременно вниз по течению плот и пароход. Пока плот плыл по течению со скоростью 1 км/час, пароход успел совершить восемь рейсов по маршруту ABA (сначала вниз по течению, затем обратно) и прибыл в пункт A одновременно с прибытием плота в пункт B. Найти скорость парохода в неподвижной воде.



$$\frac{8x}{V+1}+\frac{8x}{V-1}=\frac{x}{1} \Rightarrow \frac{8}{V+1}+\frac{8}{V-1}=1 \Rightarrow \frac{16V}{V^2-1}=1 \Rightarrow$$

$16V=V^2-1 \Rightarrow V^2-16V-1=0 \Rightarrow V_{1,2}=8\pm\sqrt{64+1}=8\pm\sqrt{65} \Rightarrow$

$V=8+\sqrt{65}$.

Д.З. Из пункта A в пункт B (оба расположены на берегу реки) отправились одновременно вниз по течению плот и пароход. Пока плот плыл по течению со скоростью 2 км/час, пароход успел совершить четыре рейса по маршруту AB (вниз по течению), и три рейса по маршруту BA (вверх по течению) и прибыл в пункт B одновременно с прибытием плота. Найти скорость парохода в неподвижной воде.

11. Билл продал партию компьютеров, а Джек – партию принтеров, и их выручка оказалась одинаковой. «Если бы принтеры стоили столько же, сколько компьютеры, я бы получил 216 тыс. руб.», сказал Джек. «Если бы компьютеры стоили бы как принтеры, я бы получил 150 тыс. руб.», сказал Билл. На сколько процентов компьютер дороже принтера?

K – стоимость 1 компьютера, X – число компьютеров;

P – стоимость 1 принтера, Y – число принтеров. $\dfrac{K}{P} = ?$

$$\begin{cases} KX = PY \\ YK = 216 \\ XP = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{K}{P} = \dfrac{Y}{X} \\ Y = \dfrac{216}{K} \\ X = \dfrac{150}{P} \end{cases} \Rightarrow \frac{K}{P} = \frac{216 \cdot P}{K \cdot 150} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{K}{P}\right)^2 = \frac{216}{150} = \frac{108}{75} = \frac{36}{25} \Rightarrow \frac{K}{P} = \frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5} \Rightarrow \text{на } 20\%.$$

Д.З. Билл продал партию компьютеров, а Джек – партию принтеров, и их выручка оказалась одинаковой. «Если бы принтеры стоили бы как компьютеры, я бы получил 98 тыс. руб.», сказал Джек. «Если бы компьютеры стоили столько же, сколько принтеры, я бы получил 32 тыс. руб.», сказал Билл. На сколько процентов компьютер дороже принтера?

12. ПРОГРЕССИИ

Убывающая геометрическая прогрессия: $b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ldots\ |q|<1$.

Сумма членов прогрессии: $S_\infty = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Сумма квадратов членов прогрессии:

$$b_1^2 + b_1^2q^2 + b_1^2q^4 + \ldots = \frac{b_1{}^2}{1-q^2}.$$

Сумма кубов членов прогрессии: $b_1^3 + b_1^3q^3 + b_1^3q^6 + \ldots = \dfrac{b_1{}^3}{1-q^3}$.

Сумма четвертых степеней членов прогрессии:

$$b_1^4 + b_1^4q^4 + b_1^4q^8 + \ldots = \frac{b_1{}^4}{1-q^4}.$$

Сумма нечетных членов прогрессии:

$$b_1 + b_1q^2 + b_1q^4 + \ldots = \frac{b_1}{1-q^2}.$$

Сумма четных членов прогрессии: $b_1q + b_1q^3 + b_1q^5 + \ldots = \dfrac{b_1q}{1-q^2}$.

Сумма квадратов нечетных членов прогрессии:

$$b_1^2 + b_1^2q^4 + b_1^2q^8 + \ldots = \frac{b_1{}^2}{1-q^4}.$$

Сумма квадратов четных членов прогрессии:

$$b_1^2q^2 + b_1^2q^6 + b_1^2q^{10} + \ldots = \frac{b_1{}^2q^2}{1-q^4}.$$

1. Вычислить $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\ldots$.

Д.З. Вычислить

$$\log_2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots\right);\ \log_2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots\right).$$

2. Вычислить $\sqrt{7}\cdot\sqrt[4]{7}\cdot\sqrt[8]{7}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2n]{7}\cdot\ldots$.

$$\sqrt{7}\cdot\sqrt[4]{7}\cdot\sqrt[8]{7}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2n]{7}\cdot\ldots=7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots}=\left\{b_1=\frac{1}{2};q=\frac{1}{2}\right\}=7^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}}=7.$$

Д.З. Вычислить $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{3}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2n]{3}\cdot\ldots$.

3. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна сумме квадратов ее членов и равна 5. Найти знаменатель прогрессии и ее первый член.

$$\begin{cases}\dfrac{b_1}{1-q}=5,\\[2mm] \dfrac{b_1^2}{1-q^2}=5\end{cases} \Rightarrow \frac{25\cdot(1-q)^2}{1-q^2}=5 \Rightarrow \frac{5\cdot(1-q)}{1+q}=1 \Rightarrow 5-5q=1+q \Rightarrow$$

$$q=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Д.З. Найти первый член убывающей геометрической прогрессии, если сумма ее членов равна 4, а квадратов 8.

Д.З. Найти первый член убывающей геометрической прогрессии, если сумма ее членов равна 1, а квадратов 8.

4. Второй член убывающей геометрической прогрессии относится к сумме всех членов как 6:25. Найти наименьший знаменатель прогрессии.

$$\frac{b_1\cdot q}{\left(\dfrac{b_1}{1-q}\right)}=\frac{6}{25} \Rightarrow (1-q)\cdot q=\frac{6}{25} \Rightarrow q^2-q+\frac{6}{25}=0;$$

$$q_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-\dfrac{24}{25}}}{2}=\frac{1\pm\dfrac{1}{5}}{2} \Rightarrow q_{\min}=\frac{2}{5}.$$

Д.З. Второй член убывающей геометрической прогрессии относится к сумме всех членов как 1:5. Найти наименьший знаменатель прогрессии.

5. Квадрат второго члена убывающей геометрической прогрессии относится к сумме квадратов всех членов как 3:16. Найти знаменатель прогрессии.

$$\frac{b_1^{\,2}q^2}{\left(\frac{b_1^{\,2}}{1-q^2}\right)}=\frac{3}{16}\Rightarrow q^2\left(1-q^2\right)=\frac{3}{16}\Rightarrow q^4-q^2+\frac{3}{16}=0;$$

$$q^2=\frac{1\pm\sqrt{1-\frac{12}{16}}}{2}=\frac{1\pm\frac{1}{2}}{2}\Rightarrow q_1^2=\frac{3}{4}\Rightarrow q=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ q_2^2=\frac{1}{4}\Rightarrow q\pm=\frac{1}{2}.$$

Д.З. Квадрат второго члена убывающей геометрической прогрессии относится к сумме квадратов всех членов как 1:4. Найти наименьший знаменатель прогрессии.

6. Куб суммы всех членов убывающей геометрической прогрессии с положительными членами относится к сумме кубов всех членов этой прогрессии как 13:4. Найти знаменатель этой прогрессии.

$$\text{ОДЗ } -1<q<1\Rightarrow\frac{\left(\frac{b_1}{1-q}\right)^3}{\left(\frac{b_1^3}{1-q^3}\right)}=\frac{13}{4}\Rightarrow\frac{1-q^3}{(1-q)^3}=\frac{13}{4}\Rightarrow$$

$$\frac{(1-q)\left(1+q+q^2\right)}{(1-q)^3}=\frac{13}{4};$$

$$\frac{\left(1+q+q^2\right)}{(1-q)^2}=\frac{13}{4}\Rightarrow 4+4q+4q^2=13-26q+13q^2\Rightarrow$$

$$9q^2-30q+9=0\Rightarrow 3q^2-10q+3=0\Rightarrow q_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-9}}{3}=\frac{5\pm4}{3}\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}q_1=3-\text{постороннее}\\ q_2=\frac{1}{3}\end{array}\right.\Rightarrow q=\frac{1}{3}.$$

Д.З. Куб суммы всех членов убывающей геометрической прогрессии с положительными членами относится к сумме кубов всех членов этой прогрессии как 10:3. Найти знаменатель этой прогрессии.

Д.З. Четвертая степень суммы всех членов убывающей геометрической прогрессии равна сумме четвертых степеней всех членов этой прогрессии. Найти знаменатель этой прогрессии.

7. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12, а сумма членов с четными номерами равна 4. Найти знаменатель прогрессии.

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 12, \\ \dfrac{b_1 \cdot q}{1-q^2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{12(1-q)\cdot q}{1-q^2} = 4 \Rightarrow \frac{3\cdot q}{1+q} = 1 \Rightarrow 3q = 1+q \Rightarrow q = \frac{1}{2}.$$

Д.З. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 28, а сумма членов с четными номерами равна 12. Найти знаменатель прогрессии.

Д.З. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 3, а сумма членов с нечетными номерами равна 2. Найти знаменатель прогрессии.

8. Первый член убывающей геометрической прогрессии равен 1, а сумма больше 8. Найти множество значений знаменателя.

$$\text{ОДЗ} \quad -1 < q < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-q} > 8 \Rightarrow 8 - 8q < 1 \Rightarrow \begin{cases} q > \dfrac{7}{8}, \\ -1 < q < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{7}{8} < q < 1.$$

Д.З. Первый член убывающей геометрической прогрессии равен 1, а сумма больше 6. Найти множество значений знаменателя.

9. Если выбросить из бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами все члены с четными номерами, то сумма уменьшится на 25%. Найти знаменатель прогрессии.

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = S, \\ \dfrac{b_1}{1-q^2} = \dfrac{3}{4}S \end{cases} \Rightarrow b_1 = (1-q)\cdot S \Rightarrow \frac{(1-q)S}{(1-q)(1+q)} = \frac{3}{4}S \Rightarrow \frac{1}{(1+q)} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 3q + 3 = 4 \Rightarrow q = \frac{1}{3}.$$

Д.З. Если выбросить из бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами все члены с четными номерами, то сумма уменьшится на 11,(1)%. Найти знаменатель прогрессии.

Д.З. Если выбросить из бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами все члены с нечетными номерами, то сумма уменьшится на 66,(6)%. Найти знаменатель прогрессии.

10. Найти первый член убывающей геометрической прогрессии, если сумма ее четных членов равна 12, а нечетных 36.

$$\begin{cases} \dfrac{b_1 q}{1-q^2}=12, \\ \dfrac{b_1}{1-q^2}=36 \end{cases} \Rightarrow q=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{b_1}{1-\frac{1}{9}}=36 \Rightarrow b_1=36\cdot\frac{8}{9}=32.$$

Д.З. Найти первый член убывающей геометрической прогрессии, если сумма ее четных членов равна 2, а нечетных 4.

11. Если знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами увеличить на 10%, не изменив первый член, то сумма прогрессии увеличится на 900%. Найти первоначальное значение знаменателя.

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q}=S, \\ \dfrac{b_1}{1-1{,}1\cdot q}=10S \end{cases} \Rightarrow \frac{(1-q)\cdot S}{1-1{,}1\cdot q}=10S \Rightarrow 10-11\cdot q=1-q \Rightarrow q=\frac{9}{10}.$$

Д.З. Если знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами увеличить на 20%, не изменив первый член, то сумма прогрессии увеличится на 800%. Найти первоначальное значение знаменателя.

12. Найти знаменатель убывающей геометрической прогрессии с положительными членами, если каждый член этой прогрессии в 3 раза больше суммы всех последующих членов.

$$\frac{b_1}{b_2+b_3+\ldots}=\frac{b_1}{b_1q+b_1q^2+\ldots}=\frac{b_1}{\left(\dfrac{b_1q}{1-q}\right)}=\frac{1-q}{q}=3 \quad\Rightarrow\quad 3q=1-q \quad\Rightarrow$$

$$q=\frac{1}{4}.$$

Д.З. Найти знаменатель убывающей геометрической прогрессии с положительными членами, если каждый член этой прогрессии в 4 раза больше суммы всех последующих членов.

Основное свойство геометрической прогрессии:
произведение равноудаленных соседей есть квадрат среднего $b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_n^{\ 2}$.

13. Второй член геометрической прогрессии равен –2, а седьмой равен 64. Найти пятый член этой прогрессии.

$$b_2 = -2, b_7 = 64 \Rightarrow b_7 = b_2 \cdot q^5 \Rightarrow q^5 = -32 \Rightarrow q = -2 \Rightarrow$$

$$b_5 = b_2 \cdot q^3 = -2 \cdot (-2)^3 = 16.$$

Д.З. Третий член геометрической прогрессии равен 2, а восьмой равен -64. Найти шестой член этой прогрессии.

14. Первый член геометрической прогрессии с положительными членами равен 1, а третий член равен $2\sqrt{2}+3$. Найти второй член прогрессии.

$$b_1 = 1, b_3 = 2\sqrt{2}+3 \Rightarrow b_1 \cdot b_3 = b_2^{\ 2};$$

$$b_2 = \sqrt{2\sqrt{2}+3} = \sqrt{1+2\sqrt{2}+2} = \sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2} = 1+\sqrt{2}.$$

Д.З. Первый член геометрической прогрессии с положительными членами равен 1, а третий член равен $2\sqrt{5}+6$. Найти второй член прогрессии.

Сумма n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}.$$

15. Вычислить $1+2+4+\ldots+2^{98}+2^{99}$.

$$q = 2,\ b_1 = 1;\ n = 100 \Rightarrow S_{100} = \frac{1 \cdot \left(1-2^{100}\right)}{1-2} = 2^{100}-1.$$

Д.З. Вычислить $1-2+4-\ldots+2^{98}-2^{99}$; $-1+3-9+\ldots-3^{98}+3^{99}$.

16. Вычислить $8 \cdot \left(1-7+49+\ldots+7^{10}-7^{11}+7^{12}\right)$.

$$q = -7;\ b_1 = 1;\ n = 13 \Rightarrow S_{13} = 8 \cdot \frac{1 \cdot \left(1-(-7)^{13}\right)}{1+7} = 1+7^{13}.$$

Д.З. Вычислить

$$2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{31};\ 1-5+25+\ldots+5^{10}-5^{11}+5^{12}.$$

17. В начале первой недели в пруд запустили 7 инфузорий. В конце каждой недели каждая инфузория делится на 2 части, после чего карась съедает 3 инфузории. Найти число инфузорий в начале 31 недели.

В начале 1 недели: 7.

В начале 2 недели: $7\cdot 2-3=11\ =7+4\ =7+2^2$.

В начале 3 недели: $11\cdot 2-3=19\ =11+8\ =11+2^3=7+2^2+2^3$.

В начале 4 недели:

$$19\cdot 2-3=35\ =19+16\ =19+2^4=7+2^2+2^3+2^4.$$

....

В начале 31 недели:

$$7+\left(2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{31}\right)=\left\{b_1=2^2, q=2, n=30\right\}=$$

$$=7+\frac{2^2\cdot\left(1-2^{30}\right)}{1-2}=7+4\cdot\left(2^{30}-1\right)$$

Арифметическая прогрессия: $a_1,\ a_2=(a_1+d),\ a_3=(a_1+2d),\ \ldots$.

Сумма n членов арифметической прогрессии: $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$.

Полусумма равноудаленных соседей есть среднее: $a_n=\frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$.

18. Найти сумму всех целых решений неравенства $\log_{51}(x-1)<1$.

ОДЗ $x-1>0\ \Rightarrow\ x>1\ \Rightarrow\ \log_{51}(x-1)<\log_{51}51\ \Rightarrow\ 1<x<52\ \Rightarrow$

$$S_{50}=2+3+\ldots+50+51=\frac{2+51}{2}\cdot 50=53\cdot 25.$$

Д.З. Найти сумму всех целых решений неравенства $\log_{54}(x-3)<1$; $\log_{41}(x-10)<1$.

19. Решить уравнение $(1+2+3+\ldots+8)x=1+2+3+\ldots 144$.

Д.З. Решить уравнение $(1+2+3+\ldots+11)x=1+2+3+\ldots 121$.

20. Вычислить $1+3+5+\ldots+21+23$.

Арифметическая прогрессия: $a_1=1,\ d=2$;

число шагов $\frac{23-1}{2}=11 \Rightarrow$ число членов $n=12 \Rightarrow$

$$S_{12}=\frac{1+23}{2}\cdot 12=144.$$

Д.З. Вычислить $1+7+13+\ldots+43+49$.

21. Сумма 7-го и 11-го членов арифметической прогрессии равна 14. Найти сумму членов с 5-го до 13-й.

$$S_9=a_5+a_6+\ldots+a_{12}+a_{13}=\frac{a_5+a_{13}}{2}\cdot 9=?$$

$$a_5+a_{13}=a_7+a_{11}=14 \Rightarrow S_9=\frac{a_5+a_{13}}{2}\cdot 9=\frac{14}{2}\cdot 9=63.$$

Д.З. Сумма 5-го и 11-го членов арифметической прогрессии равна 15. Найти сумму членов с номерами 3, 7, 9 и 13.

22. Сумма членов арифметической прогрессии с номерами 5, 9, 13, 17 равна 12. Найти сумму членов с 3 по 19.

$$a_5+a_9+a_{13}+a_{17}=12.$$

$$S_{17}=a_3+a_4+\ldots+a_{18}+a_{19}=\frac{a_3+a_{19}}{2}\cdot 17=a_{11}\cdot 17=?$$

$$a_5+a_9+a_{13}+a_{17}=(a_{11}-6d)+(a_{11}-2d)+(a_{11}+2d)+$$
$$+(a_{11}+6d)=4a_{11}=12 \quad ;$$

$$a_{11}=3 \Rightarrow S_{17}=3\cdot 17=51.$$

Д.З. Сумма членов арифметической прогрессии с номерами 7, 11, 15, 19 равна 20. Найти сумму членов с 4 по 22.

23. Дано: $a_{27}-a_{21}=9$. Найти $a_{23}-a_7$.

$$a_{27}-a_{21}=6d=9 \Rightarrow d=\frac{3}{2} \Rightarrow a_{23}-a_7=16d=16\cdot\frac{3}{2}=24.$$

Д.З. Дано: $a_{19}-a_{11}=28$. Найти $a_{36}-a_{14}$.

24. $a_5+a_9=7$. $\quad a_2+a_4+a_{10}+a_{12}=?$

$$a_5+a_9=2a_7=7 \Rightarrow a_7=\frac{7}{2}.$$

$$a_2+a_4+a_{10}+a_{12}=(a_2+a_{12})+(a_4+a_{10})=4a_7=4\cdot\frac{7}{2}=14.$$

25. Дано $a_2+a_5+a_{11}=24$. Найти a_7+a_5.

$$a_2+a_5+a_{11}=(a_6-4d)+(a_6-d)+(a_6+5d)=3a_6=24 \Rightarrow a_6=8 \Rightarrow$$

$$a_7+a_5=2a_6=16.$$

Д.З. Дано $a_3 + a_6 + a_{12} = 30$. Найти $a_8 + a_6$.

Д.З. Дано $a_6 + a_9 = 30$. Найти $a_1 + \ldots + a_{14}$.

26. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна $\frac{26}{3}$, а произведение третьего и четвертого членов равно $\frac{65}{3}$. Найти разность прогрессии и первый член.

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = \frac{26}{3}, \\ a_3 \cdot a_4 = \frac{65}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_3 = \frac{26}{3}, \\ a_3(a_3 + d) = \frac{65}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = \frac{13}{3}, \\ \frac{13}{3}\left(d + \frac{13}{3}\right) = \frac{65}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$d = 5 - \frac{13}{3} = \frac{2}{3};$$

$$a_1 = a_3 - 2d = \frac{13}{3} - \frac{4}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

Д.З. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна $\frac{2}{5}$, а произведение третьего и четвертого членов равно $\frac{4}{25}$. Найти разность прогрессии и первый член.

Д.З. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 11, а произведение третьего и четвертого членов равно 88. Найти первый член прогрессии.

Д.З. Произведение первого и пятого членов арифметической прогрессии равно 11, а произведение второго и четвертого членов равно 59. Найти разность прогрессии.

27. Сумма шестнадцати первых членов арифметической прогрессии равна 136, а сумма восьми членов с нечетными номерами равна 56. Найдите седьмой член прогрессии.

$$\begin{cases} a_1 + \ldots + a_{16} = 136, \\ a_1 + a_3 + \ldots + a_{13} + a_{15} = 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_1 + a_{16}}{2} \cdot 16 = 136, \\ \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 8 = 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_{16} = 17, \\ a_1 + a_{15} = 14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = 3 \Rightarrow a_1 + a_{15} = 2a_8 = 14 \Rightarrow \Rightarrow a_8 = 7 \Rightarrow$$

$$a_7 = a_8 - d = 7 - 3 = 4.$$

Д.З. Сумма восемнадцати первых членов арифметической прогрессии равна 136, а сумма девяти членов с нечетными номерами равна 56. Найдите восьмой член прогрессии.

Д.З. На первом этаже 21 этажного дома находится 21 шкаф, которые нужно разместить по одному на каждом этаже. Сколько будет стоить эта работа, если подъем одного шкафа на один этаж стоит 1 у.е.?

Д.З. В прямоугольном треугольнике длины сторон образуют арифметическую прогрессию. Найти косинус большего острого угла треугольника.

28. В геометрической прогрессии $b_1 = 3,\ b_2 = 6$. В арифметической прогрессии $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_n = b_3$. Найти сумму членов арифметической прогрессии от a_1 до a_n включительно.

В геометрической прогрессии: $q = 2$, $b_3 = 12$.

В арифметической прогрессии: $d = 3$, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$ $a_n = 12$, $\Rightarrow$ $n = 4 \Rightarrow S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow S_4 = \dfrac{3+12}{2} \cdot 4 = 30$.

Д.З. В геометрической прогрессии $b_1 = 1, b_2 = 3$. В арифметической прогрессии $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_n = b_3$. Найти сумму членов арифметической прогрессии от a_1 до a_n включительно

29. Три положительных числа являются последовательными членами возрастающей геометрической прогрессии. Если среднее из них увеличить в два раза, то они станут последовательными членами арифметической прогрессии. Найти знаменатель геометрической прогрессии.

$b_1,\ b_1q,\ b_1q^2$ – геометрическая прогрессия;

$b_1,\ 2b_1q,\ b_1q^2$ – арифметическая прогрессия $\Rightarrow$ по основному свойству арифметической прогрессии: $\dfrac{b_1 + b_1q^2}{2} = 2b_1 \cdot q \Rightarrow$ $q^2 - 4q + 1 = 0 \Rightarrow q = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow q = 2 + \sqrt{3}$.

Д.З. Три положительных числа являются последовательными членами возрастающей геометрической прогрессии. Если среднее из них увеличить в три раза, то они станут последовательными членами арифметической прогрессии. Найти знаменатель геометрической прогрессии.

30. Числа $1; b; c$ являются последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии. Если большее из них увеличить на 12,5% , то они станут последовательными членами геометрической прогрессии. Найти b.

Основное свойство арифметической прогрессии: $\frac{1+c}{2}=b$,

$c \to c\left(1+\frac{1}{8}\right)=\frac{9}{8}c$;

$1, b, \frac{9}{8}c$ геометрическая прогрессия $\Rightarrow$ по основному свойству геометрической прогрессии: $\frac{9}{8}c=b^2 \Rightarrow c=\frac{8}{9}b^2$;

$$1+\frac{8}{9}b^2=2b \Rightarrow 8b^2-18b+9=0 \Rightarrow b_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{8}=\frac{9\pm 3}{8};$$

$$\left[\begin{array}{l} b_1=\frac{3}{2} \\ b_2=\frac{3}{4} - \text{постороннее} \end{array}\right. \Rightarrow b=\frac{3}{2}.$$

Д.З. Числа $1; b; c$ являются последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии. Если большее из них увеличить на 66,(6)% то они станут последовательными членами геометрической прогрессии. Найти b.

Д.З. Числа $1; b; c$ являются последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии. Если большее из них увеличить на 33,(3)%, то они станут последовательными членами геометрической прогрессии. Найти b.

Перевод процентов в доли:

$$50\% \Rightarrow \frac{1}{2};\ 25\% \Rightarrow \frac{1}{4};\ 12{,}5\% \Rightarrow \frac{1}{8};\ 6{,}25\% \Rightarrow \frac{1}{16};\ 3{,}125\% \Rightarrow \frac{1}{32};$$

$$66,(6)\% \Rightarrow \frac{2}{3};\ 33,(3)\% \Rightarrow \frac{1}{3};\ 11,(1)\% \Rightarrow \frac{1}{9};\ 6,(6)\% \Rightarrow \frac{1}{15};$$

$$3,(3)\% \Rightarrow \frac{1}{30};\ 2,(2)\% \Rightarrow \frac{1}{45};\ 1,(1)\% \Rightarrow \frac{1}{90}.$$

13. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Формулы приведения для $\sin x$ ***и*** $\cos x$

1. Подвижка аргумента на π *меняет знак функции*

$$\cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \sin(\pi - x) = \sin x,$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x, \quad \sin(\pi + x) = -\sin x.$$

2. Подвижка аргумента на $\pi/2$ *меняет функцию на родственную (для всех функций).*

Знак определяется по знаку исходной функции в исходной четверти.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \; \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x, \; \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x,$$
$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x, \; \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x.$$

3. Подвижка аргумента на 2π *не меняет вида функции (для всех функций)*

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \; \cos(x \pm 2\pi) = \cos x.$$

Формулы приведения для $\operatorname{tg} x$ ***и*** $\operatorname{ctg} x$***:***

Подвижка аргумента на π *и* 2π *не меняет вида функции.*

Знаки тригонометрических функций $\sin x$ *и* $\cos x$ *по четвертям*

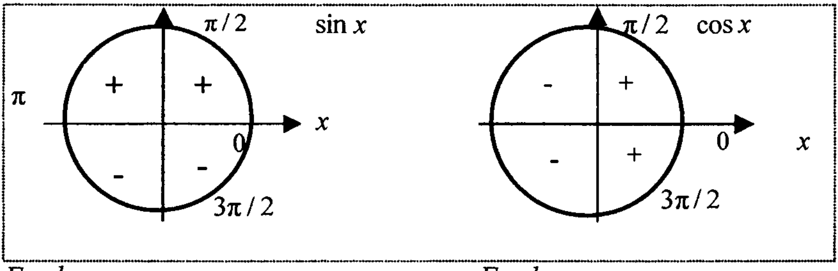
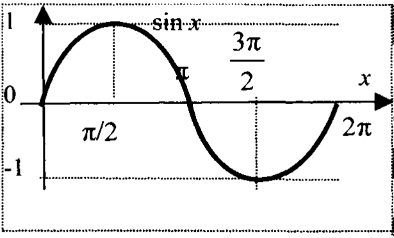
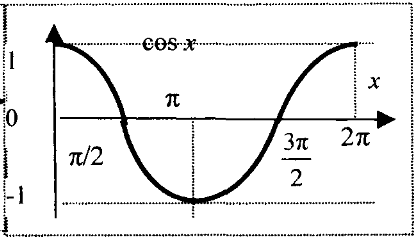


График синуса *График косинуса*





Значения синусов и косинусов характерных углов:

$$\sin 0 = 0,\ \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 0 = 0,\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Значения тангенсов и котангенсов характерных углов:

$$\operatorname{tg} 0 = 0;\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3};\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1;\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3};\ \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1;\ \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3};\ \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0.$$

Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x,\quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1.$$

Формулы половинного аргумента:

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2};\ \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-(\operatorname{tg}\alpha)\cdot(\operatorname{tg}\beta)};\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - g\beta}{1+(\operatorname{tg}\alpha)\cdot(\operatorname{tg}\beta)}.$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y;$$

$$\sin(x-y) = \sin x\cdot\cos y - \cos x\cdot\sin y;$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y;$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cdot\cos y + \sin x\cdot\sin y.$$

Преобразование суммы в произведение:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right);$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right);$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right);$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Преобразование произведения в сумму:

$$2\sin a\cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b);$$

$$2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b);$$

$$2\cos a\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b).$$

1. Упростить $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin(2\pi-x)$.

$$\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin(-x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin x = \sin x+\sin x = 2\sin x.$$

Д.З. Упростить $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos(\pi-x)-\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$.

2. Преобразовать в произведение

$$\sin(16x)+\sin(18x) = \sin(20x)+\sin(22x).$$

$$2\sin(17x)\cdot\cos x = 2\sin(21x)\cdot\cos x.$$

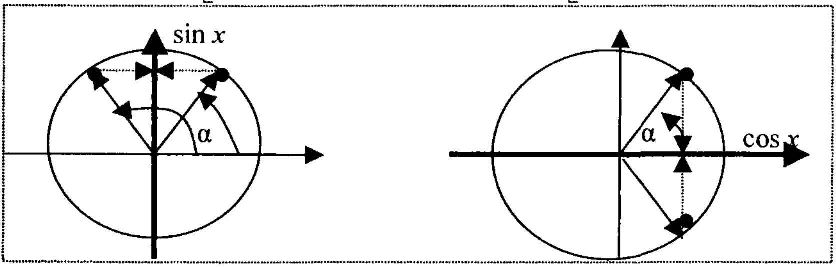
Д.З. Преобразовать в произведение

$$\sin(15x)+\sin(19x) = \sin(27x)+\sin(31x);$$

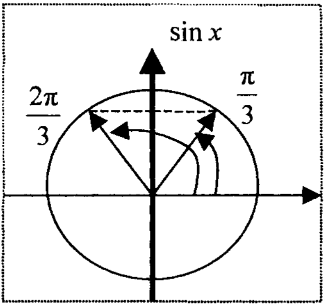
$$\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x+\sin 9x+\sin 11x+\sin 13x+\sin 15x = 0.$$

Решение тригонометрических уравнений:

$$\sin x = a \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha+2\pi k \\ x = \pi-\alpha+2\pi k \end{array}\right., \quad \cos x = a \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha+2\pi k \\ x = -\alpha+2\pi k \end{array}\right..$$



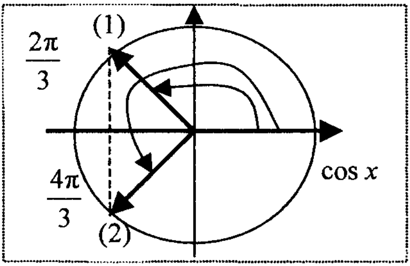
3. Найти сумму двух наименьших положительных корней уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



$x_1 + x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$.

Д.З. Найти сумму двух наименьших положительных корней уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Найти сумму двух наименьших положительных корней уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$.

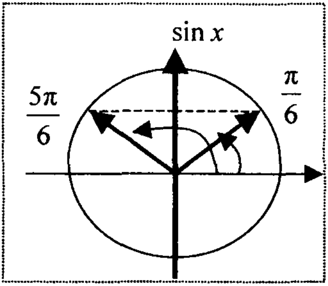


$x_1 + x_2 = \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi$.

Д.З. Найти сумму двух наименьших положительных корней уравнений $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos x = \frac{1}{2}$.

5. Найти два наименьших положительных корня уравнения $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \ldots = 1$.

$$\frac{\sin x}{1-\sin x}=1 \;\Rightarrow\; \sin x=\frac{1}{2} \;\Rightarrow$$



$$\left[\begin{array}{l} x^{(1)}{}_{\min}=\dfrac{\pi}{6} \\ x^{(2)}{}_{\min}=\dfrac{5\pi}{6} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\; x_1+x_2=\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}=\pi .$$

Д.3. Найти два наименьших положительных корня уравнения $\cos x-\cos^2 x+\cos^3 x-\ldots=\dfrac{1}{3}$.

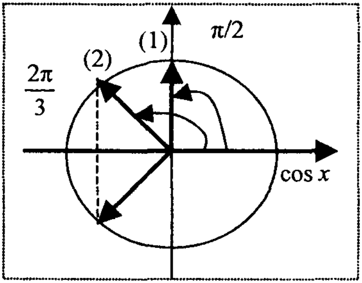
6. Найти сумму двух наименьших положительных решений уравнения $\cos x+2\cos^2 x+4\cos^3 x+\ldots+2^7\cos^8 x=0$.

Геометрическая прогрессия: $b_1=\cos x$; $q=2\cos x$; $n=8$.

$$\begin{cases} \dfrac{\cos x\left(1-(2\cos x)^8\right)}{1-2\cos x}=0, \\ 1-2\cos x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\cos x(1-2\cos x)(1+2\cos x)\left(1+(2\cos x)^2\right)}{1-2\cos x}=0, \\ 1-2\cos x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

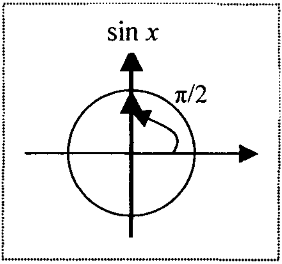
$$\Rightarrow \cos x(1+2\cos x)\left(1+(2\cos x)^2\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ 1+2\cos x=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \cos x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$



$$\left[\begin{array}{l} x^{(1)}{}_{\min}=\dfrac{\pi}{2} \\ x^{(2)}{}_{\min}=\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. \Rightarrow\; x_1+x_2=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{6}.$$

Д.З. Найти сумму двух наименьших положительных решений уравнения $\sin x + 2\sin^2 x + 4\sin^3 x + \ldots + 128\sin^8 x = 0$.

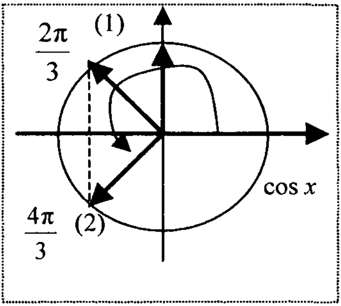
7. Найти сумму трех наименьших положительных корней уравнения $\sin x = 1$.



$$\frac{\pi}{2} + \left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{15\pi}{2}.$$

Д.З. Найти сумму трех наименьших положительных корней уравнений $\cos x = -1$; $\dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$; $\sin x = -1$.

8. Найти второй по величине положительный корень уравнения $\cos\left(\dfrac{\pi x}{6} - \dfrac{\pi}{6}\right) + \dfrac{1}{2} = 0$.

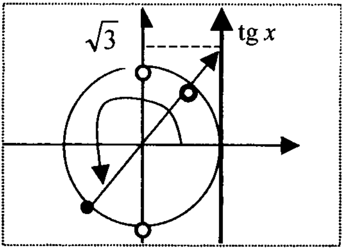


$$\cos\left(\frac{\pi x}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi x^{(2)}}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{(2)} = 9.$$

Д.З. Найти второй по величине положительный корень уравнения $\sin\left(\dfrac{\pi x}{6} - \dfrac{\pi}{6}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

9. Найти наименьший корень уравнения $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x - \pi}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x - \pi}}$.

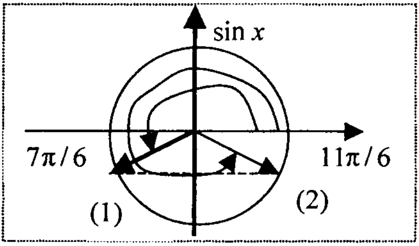
ОДЗ $x > \pi$ 

$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$.

Д.З. Найти наименьший корень уравнений $\frac{\sin x}{\sqrt{x-\pi}} = \frac{1}{\sqrt{x-\pi}}$; $\frac{\cos x}{\sqrt{x-\pi}} = \frac{0,5}{\sqrt{x-\pi}}$.

10. Найти два наименьших положительных решения уравнения $\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 0$.

$\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad \Rightarrow$



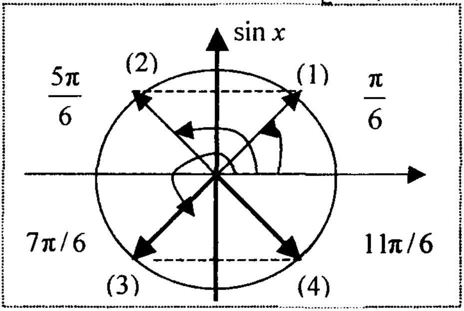
$\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) = -\frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi x_1}{12} = \frac{7\pi}{6} \\ \frac{\pi x_2}{12} = \frac{11\pi}{6} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 14 \\ x_2 = 22 \end{array}\right. .$$

Д.З. Найти два наименьших положительных решения уравнения $\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) + \sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) = 0$.

11. Найти три наименьших положительных корня уравнения $\sin^2\left(\frac{\pi x}{12}\right) = 0,25$.

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(\dfrac{\pi x}{12}\right) = \dfrac{1}{2} \\ \sin\left(\dfrac{\pi x}{12}\right) = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$



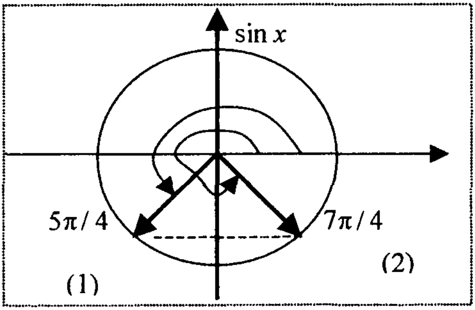
$$\frac{\pi \cdot x_1}{12} = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2;$$

$$\frac{\pi \cdot x_2}{12} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x_2 = 10; \quad \frac{\pi \cdot x_3}{12} = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x_3 = 14.$$

Д.З. Найти три наименьших положительных корня уравнения $\cos^4\left(\dfrac{\pi \cdot x}{12}\right) = 0{,}25$; $\sin^4\left(\dfrac{\pi \cdot x}{12}\right) = \dfrac{9}{16}$.

12. Найти три наибольших положительных корня уравнения $\sin\left(\dfrac{60\pi}{x}\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

$$\sin\left(\frac{60\pi}{x}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \Rightarrow$$



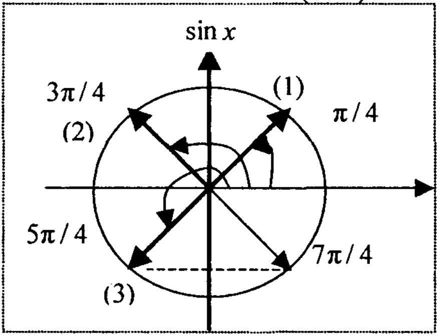
Наибольшее значение x соответствует наименьшему значению $\left(\dfrac{60\pi}{x}\right) \Rightarrow \dfrac{60\pi}{x^{(1)}_{\max}} = \dfrac{5\pi}{4} \Rightarrow x^{(1)}_{\max} = \dfrac{60 \cdot 4}{5} = 48$; $\dfrac{60\pi}{x^{(2)}_{\max}} = \dfrac{7\pi}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^{(2)}_{\max} = \frac{60 \cdot 4}{7} = \frac{240}{7}.$$

Д.З. Найти три наибольших положительных корня уравнения $\sin\left(\frac{20\pi}{x}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$.

13. Найти три наибольших корня уравнения $\sin^2\left(\frac{60\pi}{x}\right)=\frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{60\pi}{x}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\left(\frac{60\pi}{x}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Rightarrow$$



$$\frac{60\pi}{x^{(1)}_{\max}}=\frac{\pi}{4} \Rightarrow x^{(1)}_{\max}=60\cdot 4=240;\ \frac{60\pi}{x^{(2)}_{\max}}=\frac{3\pi}{4} \Rightarrow$$

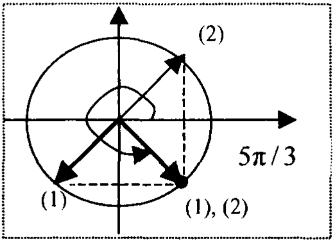
$$\Rightarrow x^{(2)}_{\max}=\frac{60\cdot 4}{3}=80;$$

$$\frac{60\pi}{x^{(3)}_{\max}}=\frac{5\pi}{4} \Rightarrow x^{(3)}_{\max}=\frac{60\cdot 4}{5}=48.$$

Д.З. Найти три наибольших корня уравнения $\sin^2\left(\frac{20\pi}{x}\right)=\frac{3}{4}=0$.

14. Найти наименьшее положительное значение параметра p, при котором система $\begin{cases}x\cdot 2\sin\left(\frac{\pi\cdot p}{12}\right)-y=\cos\left(\frac{\pi\cdot p}{12}\right),\\ \sqrt{3}\cdot x+y=-0,5\end{cases}$ имеет бесконечное число решений.

$$\begin{cases}\dfrac{2\sin\left(\frac{\pi\cdot p}{12}\right)}{\sqrt{3}}=-1,\\ \dfrac{\cos\left(\frac{\pi\cdot p}{12}\right)}{-0,5}=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sin\left(\frac{\pi\cdot p}{12}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}, & (1)\\ \cos\left(\frac{\pi\cdot p}{12}\right)=\frac{1}{2} & (2)\end{cases} \Rightarrow$$



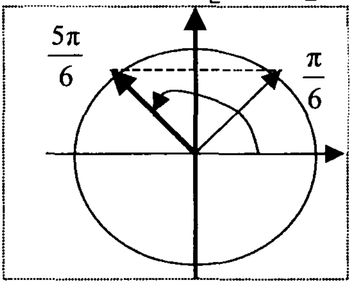
$$\frac{\pi\cdot p_0}{12}=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}\;\Rightarrow\;p_0=\frac{5\cdot 12}{3}=20\,.$$

Д.З. Найти наименьшее положительное значение параметра p, при котором система $\begin{cases} x\cdot 2\cos\left(\dfrac{\pi\cdot p}{12}\right)-y=\sin\left(\dfrac{\pi\cdot p}{12}\right),\\ \sqrt{3}\cdot x+y=0{,}5\end{cases}$ имеет бесконечное число решений.

15. Найти наибольший корень уравнения $2\cos^2 x+7\sin x+2=0$ из промежутка $0\le x\le 2\pi$.

$$2-2\sin^2 x+7\sin x+2=0\;\Rightarrow\;2\sin^2 x-7\sin x-4=0\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sin x=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{4}=\frac{7\pm 9}{4}\;\Rightarrow\;\left[\begin{array}{l}\sin x=4-\text{постороннее}\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\;\Rightarrow$$

$\sin x=\dfrac{1}{2};$  $x=\dfrac{5\pi}{6}.$

Д.З. Найти наибольший корень уравнений $2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x+1=0$; $2\cos^2 x+7\sin x+2=0$ из промежутка $0\le x\le 2\pi$.

16. Найти наименьшее положительное решение уравнения

$$\left(\cos^2 x-\cos x-1\right)\left(\cos^2 x-\cos x-3\right)+1=0.$$

$$t=\cos^2 x-\cos x-1\;\Rightarrow\;t(t-2)+1=0\;\Rightarrow\;t^2-2t+1=0\;\Rightarrow\;t=1;$$

$$\cos^2 x-\cos x-1=1\;\Rightarrow\;\cos^2 x-\cos x=2\;\Rightarrow\;\cos x=-1.$$

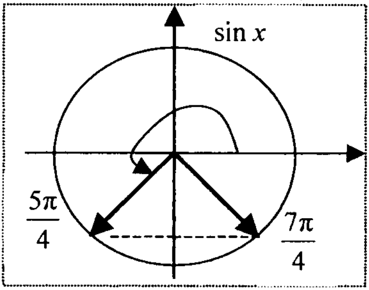
Ответ: $x=\pi$.

Д.З. Найти наименьшее положительное решение уравнения
$$\left(\sin^2 x-\sin x-1\right)\left(\sin^2 x-\sin x-3\right)+1=0.$$

17. Найти наименьшее положительное решение уравнения $2\sin^2 x+\sqrt{18}\sin x+2=0$.

$$\sin x=\frac{-\sqrt{18}\pm\sqrt{18-16}}{4}=\frac{-3\sqrt{2}\pm\sqrt{2}}{4}\;\Rightarrow\;\left[\begin{array}{l}\sin x=-\sqrt{2}-\text{постороннее}\\ \sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\;\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$



$$x=\frac{5\pi}{4}.$$

Д.З. Найти наименьшее положительное решение уравнения $2\cos^2 x+\sqrt{27}\cos x+3=0$.

18. Решить уравнение $\sin\left(180^\circ-x\right)-\sin^2\left(270^\circ+x\right)-1=0$.

$$\sin x-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-1=0\;\Rightarrow\;\sin x-\cos^2 x-1=0\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sin x-\left(1-\sin^2 x\right)-1=0\;\Rightarrow\;\sin^2 x+\sin x=2\;\Rightarrow\;\begin{cases}\sin^2 x=1\\ \sin x=1\end{cases}\;\Rightarrow$$

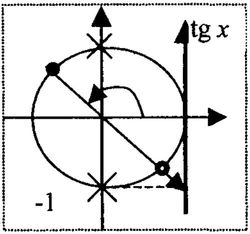
$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=\pm1\\ \sin x=1\end{cases}\;\Rightarrow\;\sin x=1\;\Rightarrow\;x=\frac{\pi}{2}+2\pi k.$$

Д.З. Решить уравнения $\sin\left(180^\circ+x\right)+2\cos^2\left(180^\circ-x\right)+2=0$; $\sin\left(270^\circ-x\right)-\sin^2\left(180^\circ-x\right)+1=0$.

19. Найти наименьшее положительное решение уравнения $\cos 2x=4\cos x+4\sin x$.

$$\cos^2 x-\sin^2 x=4(\cos x+\sin x)\;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=4(\cos x+\sin x);$$

$$(\cos x-\sin x-4)(\cos x+\sin x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x-\sin x=4 - \text{постороннее}\\ (\cos x+\sin x)=0\end{array}\right.$$



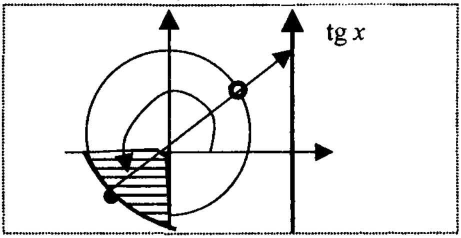
$$\Rightarrow \cos x+\sin x=0 \Rightarrow \operatorname{tg} x=-1 \Rightarrow \quad x=-\frac{\pi}{4}+\pi.$$

Д.З. Найти наименьшее положительное решение уравнения $\cos 2x+7\cos x-7\sin x=0$; $\sin 2x-2\cos x=0$.

20. Решить уравнение $\sqrt{-\cos x}=\sqrt{-\sin x}$.

ОДЗ $\begin{cases}-\cos x\ge 0,\\ -\sin x\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos x\le 0,\\ \sin x\le 0\end{cases} \Rightarrow$ 3-й квадрант $\Rightarrow -\cos x=-\sin x$

$$\Rightarrow \sin x=\cos x \Rightarrow$$

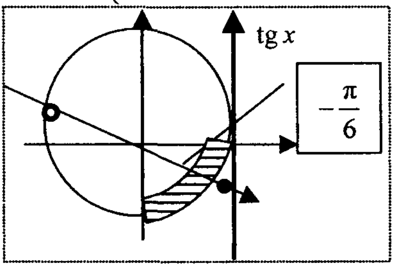


$$\operatorname{tg} x=1 \quad x=\frac{5\pi}{4}+2\pi k.$$

Д.З. Решить уравнение $\sqrt{\cos x}=\sqrt{\sin x}$; $\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}=0$.

21. Найти решение уравнения $\sqrt{\cos x}=\sqrt{-\sqrt{3}\cdot\sin x}$.

ОДЗ $\begin{cases}\cos x\ge 0,\\ -\sin x\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos x\ge 0,\\ \sin x\le 0\end{cases} \Rightarrow$ 4-й квадрант $\Rightarrow \cos x=-\sqrt{3}\cdot\sin x$



$$\Rightarrow \operatorname{tg} x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k.$$

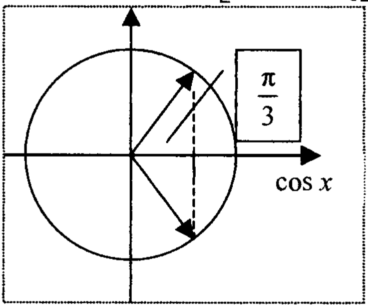
Д.З. Найти решение уравнений $\sqrt{-\sin x}=\sqrt{\sqrt{3}\cdot\cos x}$; $\sqrt{-\cos x}=\sqrt{\sqrt{3}\cdot\sin x}$; $\sqrt{\cos x}=\sqrt{\sqrt{3}\cdot\sin x}$.

22. Решить уравнение $\sqrt{6}\cdot\cos x=\sqrt{1+\cos x}$.

ОДЗ $\cos x\ge 0 \;\Rightarrow\; 6\cos^2 x=1+\cos x \;\Rightarrow\; 6\cos^2 x-\cos x-1=0 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{1\pm 5}{12} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} \cos x_1=\dfrac{1}{2}, \\ \cos x_2=-\dfrac{4}{12}-\text{постороннее} \end{array}\right. \;\Rightarrow$$

$\cos x_1=\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow$



$\Rightarrow\; x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$.

Д.З. Решить уравнения

$$\sqrt{6}\sin x=\sqrt{1+\sin x}\,;\; -\sqrt{6}\cos x=\sqrt{1+\cos x}\,.$$

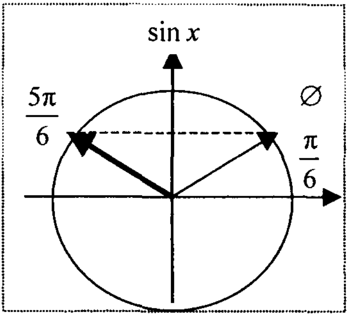
23. Решить уравнение $\sqrt{3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\sin^2\frac{x}{2}$.

$$\sqrt{\frac{3}{2}\sin x}+\cos x=0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{3}{2}\sin x}=-\cos x\,.$$

$$\text{ОДЗ} \begin{cases}\sin x\ge 0\\ \cos x\le 0\end{cases}, \;\Rightarrow\; \text{2-я четверть} \;\Rightarrow\; \frac{3}{2}\sin x=\cos^2 x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\sin x=1-\sin^2 x \;\Rightarrow\; 2\sin^2 x+3\sin x-2=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}=\left[\begin{array}{l}1/2\\ -2-\text{постороннее}\end{array}\right. \;\Rightarrow\; \sin x=\frac{1}{2} \;\Rightarrow$$



$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

Д.З. Решить уравнение $\sqrt{-3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \cos^2\frac{x}{2}$

24. Решить уравнение $\sin x - 1 = \sqrt{2 - 2\sin x}$.

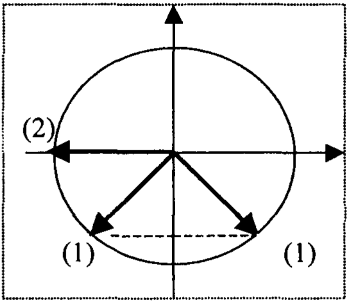
$$\text{ОДЗ} \begin{cases} 2 - 2\sin x \geq 0, \\ \sin x - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Д.З. Решить уравнения

$$\cos x - 1 = \sqrt{3 - 3\cos x}\,;\ 1 - \sin x = \sqrt{2\sin x - 2}\,.$$

25. Найти число решений уравнения $\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\cos x + 1\right) = 0$ на интервале $[0;\, 4\pi]$.

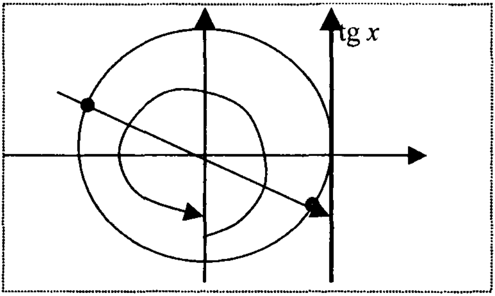
$$\left[\begin{array}{ll} \sin x = -\frac{1}{2} & (1) \\ \cos x = -1 & (2) \end{array}\right. \Rightarrow$$



1-е уравнение – 4 решения, 2-е уравнение – 2 решения.
Ответ: 6 решений.

Д.З. Найти число решений уравнения $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x - 1\right) = 0$ на интервале $[0;\, 4\pi]$.

26. Найти число решений уравнения $\sqrt{3}\sin x+3\cos x=0$ на интервале $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.



$\operatorname{tg} x=-\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow$ 2 решения.

Д.З. Найти число решений уравнения $\sqrt{3}\sin x-\cos x=0$ на интервале $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

27. Найти наименьшее положительное решение уравнения $\cos x+\cos 3x=2$.

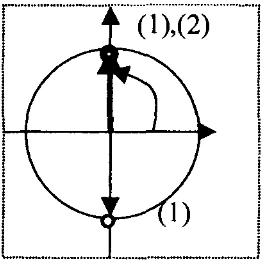
$$\begin{cases}\cos x=1,\\ \cos 3x=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\pi k,\\ 3x=2\pi n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\pi k,\\ x=\frac{2\pi n}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{6\pi k}{3},\\ x=\frac{2\pi n}{3}\end{cases}\Rightarrow k=1;\ n=3,\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_{\min}=2\pi.$$

Д.З. Найти наименьшее положительное решение уравнений $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=3$; $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=3$.

28. При каких значениях параметра a уравнение $x\cdot\cos a+\sin a=1$ выполняется при любых x?

$$x\cos a=1-\sin a\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\cos a=0\\ 1-\sin a=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\cos a=0 & (1)\\ \sin a=1 & (2)\end{cases}\quad\Rightarrow$$



$a=\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

Д.З. При каких значениях параметра a уравнение $x \cdot \sin a + \cos a = 1$ выполняется при любых x?

Общее решение уравнения $\cos x = \cos a$: $\left[\begin{array}{l} x = a + 2\pi k \\ x = -a + 2\pi n \end{array}\right.$.

29. Найти наименьшее положительное решение $\cos x = \cos 5$.

$$\left[\begin{array}{l} x = 5 + 2\pi k \\ x = -5 + 2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{\min} = 5 \\ x_{\min} = 2\pi - 5 \approx 1{,}28 \end{array}\right. \Rightarrow x_{\min} = 2\pi - 5.$$

Д.З. Найти наименьшее положительное решение $\cos x = \cos 4$.

30. Найти три наименьших положительных решения уравнения $\cos(12x) = \cos(9x)$.

$$\left[\begin{array}{l} 12x = 9x + 2\pi k \\ 12x = -9x + 2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 2\pi k \\ 21x = 2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi k}{3} \\ x = \dfrac{2\pi n}{21} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \textit{Ответ:} \left[\begin{array}{l} x^{(1)}{}_{\min} = \dfrac{2\pi}{21} \\ x^{(2)}{}_{\min} = \dfrac{4\pi}{21} \\ x^{(3)}{}_{\min} = \dfrac{6\pi}{21} \end{array}\right..$$

Д.З. Найти три наименьших положительных решения уравнений $\cos(272x) = \cos(234x)$; $\cos 100x = \cos 70x$.

31. Найти три наименьших положительных корня уравнения $\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$.

$$\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{4}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi x}{4} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi x}{4} + 2\pi k \\ \dfrac{\pi x}{4} = -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi x}{4} + 2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 0 = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + 4k \\ \varnothing \end{array}\right. \Rightarrow x = 1 + 4k \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 5;\ x_3 = 9.$$

Д.З. Найти три наименьших положительных корня уравнений $\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)=0$; $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$.

Общее решение уравнения $\sin x=\sin a$: $\left[\begin{array}{l} x=a+2\pi k \\ x=\pi-a+2\pi n \end{array}\right.$.

32. Найти наименьшее положительное решение $\sin x=\sin 3$.

$$\left[\begin{array}{l} x=3+2\pi k \\ x=\pi-3+2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{\min}=3 \\ x_{\min}=\pi-3 \end{array}\right. \Rightarrow x_{\min}=\pi-3.$$

Д.З. Найти наименьшее положительное решение $\sin x=\sin 6$.

33. Найти наименьшее положительное решение уравнения $\sin 12x=\sin 9x$.

$$\left[\begin{array}{l} 12x=9x+2\pi k \\ 12x=\pi-9x+2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=2\pi k \\ 21x=\pi+2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2\pi k}{3} \\ x=\dfrac{\pi+2\pi n}{21} \end{array}\right. \Rightarrow x_{\min}=\frac{\pi}{21}.$$

Д.З. Найти наименьшее положительное решение уравнения $\sin 100x=\sin 70x$; $\sin(270x)=\sin(236x)$.

34. Найти два наименьших положительных решения уравнения $\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x=\frac{1}{8}$.

Домножим уравнение на $\sin 2x$:

$$\underline{2\sin 2x\cdot\cos 2x}\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x=\frac{1}{4}\sin 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{2\sin 4x\cdot\cos 4x}\cdot\cos 8x=\frac{1}{2}\sin 2x \Rightarrow \underline{2\sin 8x\cdot\cos 8x}=\sin 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 16x=\sin 2x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 16x=2x+2\pi k \\ 16x=\pi-2x+2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 14x=2\pi k \\ 18x=\pi+2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi k}{7} \\ x=\dfrac{\pi+2\pi n}{18} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^{(1)}{}_{\min}=\dfrac{\pi}{18} \\ x^{(2)}{}_{\min}=\dfrac{\pi}{7} \end{array}\right..$$

Д.З. Найти два наименьших положительных решения

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x \cdot \cos 16x = \frac{1}{32};$$

$$\sin x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16 \cdot \cos x}.$$

Д.З. Найти наибольший корень уравнения

$$8\left(\cos\frac{\pi}{x}\right)\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{x}\right)\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{x}\right)\cdot\left(\cos\frac{8\pi}{x}\right)-\cos\left(\frac{15\pi}{x}\right)=0.$$

35. Найти два наименьших положительных решения $\sin(2x)-\sin(9x)+\sin(16x)=0$.

$$2\sin(9x)\cdot\cos(7x)-\sin(9x)=0 \Rightarrow \sin(9x)\cdot(2\cos(7x)-1)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin(9x)=0\\ 2\cos(7x)-1=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin(9x)=0\\ \cos(7x)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}9x=\pi k\\ 7x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\\ 7x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k\\ x=\dfrac{\pi+6\pi k}{21}\\ x=\dfrac{-\pi+6\pi k}{21}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x^{(1)}{}_{\min}=\dfrac{\pi}{21}\\ x^{(2)}{}_{\min}=\dfrac{\pi}{9}\end{array}\right..$$

Д.З. Найти два наименьших положительных решения $\sin(4x)-\sin(10x)+\sin(16x)=0$; $\sin(473x)+\sin(227x)+\sin(700x)=0$.

36. Найти три наименьших положительных решения $\sin(35x)+\sin(43x)=\sqrt{2}\cdot\sin(78x)\cdot\cos(4x)$.

$$2\sin(39x)\cos(4x)=\sqrt{2}\cdot\sin(78x)\cdot\cos(4x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin(39x)\cos(4x)=\sqrt{2}\cdot 2\sin(39x)\cdot\cos(39x)\cdot\cos(4x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(39x)\cdot\cos(4x)\cdot\left(\sqrt{2}\cos(39x)-1\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin(39x)=0\\ \cos(4x)=0\\ \sqrt{2}\cos(39x)-1=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}39x=\pi k\\ 4x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ 39x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\\ 39x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi k}{39}\\ x=\dfrac{\pi+2\pi k}{8}\\ x=\dfrac{\pi+8\pi k}{4\cdot 39}\\ x=\dfrac{-\pi+8\pi k}{4\cdot 39}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^{(1)}{}_{\min}=\dfrac{\pi}{39\cdot 4}\\ x^{(2)}{}_{\min}=\dfrac{\pi}{39}\\ x^{(3)}{}_{\min}=\dfrac{7\pi}{4\cdot 39}\end{array}\right..$$

Д.З. Найти три наименьших положительных решения $\sqrt{3}(\sin(41x)+\sin(35x))=2\cdot\sin(76x)\cdot\cos(3x)$.

37. Найти наименьшее положительное решение

$$\sin(16x)+\sin(18x)=\sin(20x)+\sin(22x).$$

$$2\sin(17x)\cos(x)=2\sin(21x)\cos(x)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos(x)=0\\ \sin(21x)=\sin(17x)\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ 21x=17x+2\pi k\\ 21x=\pi-17x+2\pi n\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi+2\pi k}{2}\\ x=\dfrac{\pi k}{2}\\ x=\dfrac{\pi+2\pi n}{38}\end{array}\right.\Rightarrow x_{\min}=\frac{\pi}{38}.$$

Д.З. Найти наименьшее положительное решение $\sin(15x)+\sin(19x)=\sin(27x)+\sin(31x)$.

38. Найти три наименьших положительных корня уравнения

$$\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x+\sin 9x+\sin 11x+\sin 13x+\sin 15x=0.$$

$$(\sin x+\sin 3x)+(\sin 5x+\sin 7x)+(\sin 9x+\sin 11x)+(\sin 13x+\sin 15x)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin 2x\cdot\underline{\cos x}+2\sin 6x\cdot\underline{\cos x}+2\sin 10x\cdot\underline{\cos x}+2\sin 14x\cdot\underline{\cos x}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos x\cdot(\sin 2x+\sin 6x+\sin 10x+\sin 14x)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cos x\cdot\left(\sin 4x\cdot\underline{\cos 2x}+\sin 12x\cdot\underline{\cos 2x}\right)=0\ \Rightarrow$$

$$4\cos x\cdot\cos 2x\cdot\left(\sin 4x+\sin 12x\right)=0\ \Rightarrow\ 8\cos x\cdot\cos 2x\cdot\sin 8x\cdot\cos 4x=0$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos 2x=0\\ \sin 8x=0\\ \cos 4x=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ 2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ 8x=\pi k\\ 4x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k\\ x=\dfrac{\pi}{8}k\\ x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{4}k\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^{(3)}{}_{\min}=\dfrac{3\pi}{8}\\ x^{(2)}{}_{\min}=\dfrac{\pi}{4}\\ x^{(1)}{}_{\min}=\dfrac{\pi}{8}\end{array}\right..$$

Д.З. **Найти три наименьших положительных корня уравнения**

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x+\sin 5x+\sin 6x+\sin 7x+\sin 8x=0.$$

Д.З. **Найти три наибольших положительных корня уравнения**

$$\sin\frac{\pi}{x}+\sin\frac{3\pi}{x}+\sin\frac{5\pi}{x}+\sin\frac{7\pi}{x}+\sin\frac{9\pi}{x}+\sin\frac{11\pi}{x}+\sin\frac{13\pi}{x}+\sin\frac{15\pi}{x}=0.$$

39. Найти три наименьших положительных корня уравнения $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x+\cos 6x+\cos 7x+\cos 8x=0$.

$$(\cos x+\cos 3x)+(\cos 2x+\cos 4x)+(\cos 5x+\cos 7x)+(\cos 6x+\cos 8x)=0;$$

$$2\cos 2x\cdot\underline{\cos x}+2\cos 3x\cdot\underline{\cos x}+2\cos 6x\cdot\underline{\cos x}+2\cos 7x\cdot\underline{\cos x}=0;$$

$$2\cos x\cdot\left(\cos 2x+\cos 3x+\cos 6x+\cos 7x\right)=0;$$

$$2\cos x\cdot\left(\left(\cos 2x+\cos 6x\right)+\left(\cos 3x+\cos 7x\right)\right)=0;$$

$$2\cos x\cdot\left(2\cos 4x\cdot\underline{\cos 2x}+2\cos 5x\cdot\underline{\cos 2x}\right)=0;$$

$$4\cos x\cdot\cos 2x\left(\cos 4x+\cos 5x\right)=0\ \Rightarrow\ 8\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{9x}{2}\cdot\cos 2x=0$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos\dfrac{x}{2}=0\\ \cos\dfrac{9x}{2}=0\\ \cos 2x=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ \dfrac{9x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ 2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k\\ x=\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2\pi}{9}k\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^{(1)}{}_{\min}=\dfrac{\pi}{9}\\ x^{(2)}{}_{\min}=\dfrac{\pi}{4}\\ x^{(3)}{}_{\min}=\dfrac{\pi}{3}\end{array}\right..$$

Д.З. Найти три наименьших положительных корня уравнения

$$\cos 3x + \cos 9x - \cos 15x - \cos 21x - \cos 27x - \cos 33x +$$
$$+ \cos 39x + \cos 45x = 0.$$

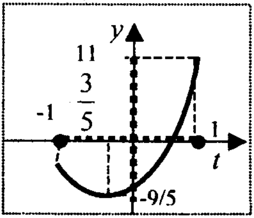
Д.З. Найти три наибольших положительных корня уравнения

$$\cos\frac{\pi}{x} + \cos\frac{3\pi}{x} + \cos\frac{5\pi}{x} + \cos\frac{7\pi}{x} + \cos\frac{9\pi}{x} + \cos\frac{11\pi}{x} + \cos\frac{13\pi}{x} + \cos\frac{15\pi}{x} = 0.$$

40. Найти множество значений функции $y = 5\sin^2 x + 6\sin x$.

Замена: $t = \sin x \Rightarrow \begin{cases} y = 5\cdot t^2 + 6t, \\ -1 \le t \le 1 \end{cases} \Rightarrow$ Вершина параболы

$t_0 = -\dfrac{3}{5}$,



$y_{\min} = y\left(-\dfrac{3}{5}\right) = -\dfrac{9}{5}$, $y_{\max} = y(1) = 11$, $-\dfrac{9}{5} \le y \le 11$.

Д.З. Найти множество значений функции $y = 2\sin^2 x - 6\cos x$; $y = \sin^2 x + 3\sin x$; $y = \cos^2 x + \sin x + 1$.

41. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $5\cdot\sin^2 x + 6\sin x = p$ имеет хотя бы одно решение.

Графический метод: левая функция – $y_л = 5\sin^2 x + 6\sin x$, правая функция – $y_п = p$.

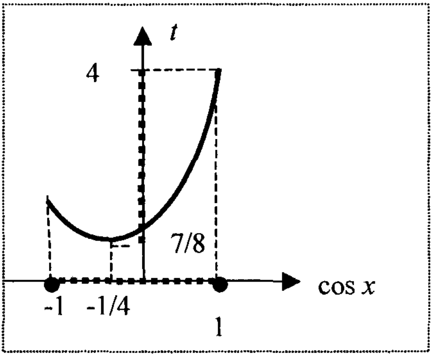
Д.З. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $2\cdot\sin^2 x - 6\cos x = p$ имеет хотя бы одно решение.

42. Найти область изменения функции

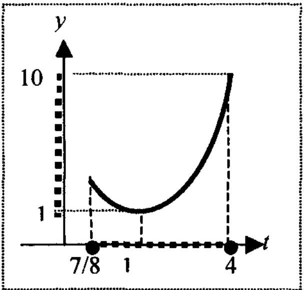
$$y = \left(2\cos^2 x + \cos x + 1\right)^2 - 2\left(2\cos^2 x + \cos x + 1\right) + 2.$$

Внутренняя функция $\begin{cases} t = 2\cos^2 x + \cos x + 1, \\ -1 \le \cos x \le 1 \end{cases}$ – парабола. Вершина

параболы $\cos x = -\dfrac{1}{4}$



Внешняя функция $\begin{cases} y = t^2 - 2t + 2, \\ \dfrac{7}{8} \le t \le 4 \end{cases}$ – парабола.

Вершина параболы $t_0 = 1 \Rightarrow$  $\Rightarrow 1 \le y \le 10$.

Д.З. Найти область изменения функции

$$y = \left(\sin^2 x + \sin x + 1\right)^2 - 2\left(\sin^2 x + \sin x + 1\right) + 2.$$

43. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\left(2\cos^2 x + \cos x + 1\right)^2 - 2\left(2\cos^2 x + \cos x + 1\right) + 2 = p$ имеет хотя бы одно решение.

Графический метод: левая функция –

$$y_л = \left(2\cos^2 x + \cos x + 1\right)^2 - 2\left(2\cos^2 x + \cos x + 1\right) + 2,$$

правая функция – $y_п = p$.

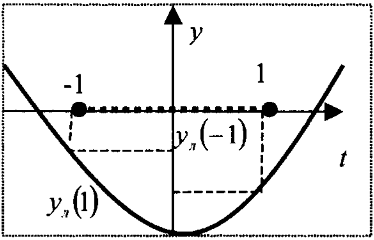
Д.З. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\left(\sin^2 x + \sin x + 1\right)^2 - 2\left(\sin^2 x + \sin x + 1\right) + 2 = p$ имеет хотя бы одно решение.

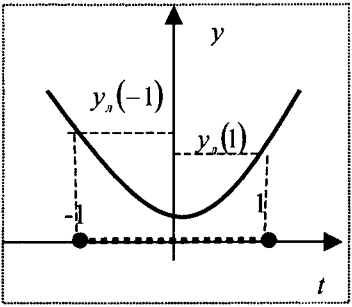
44. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\sin^2 x - p\sin x - 2 = 0$ не имеет решений.

Замена: $t = \sin x \Rightarrow \begin{cases} t^2 - p\cdot t - 2 = 0, \\ -1 \le t \le 1. \end{cases}$

Графический метод: левая функция – $y_л(x) = t^2 - p\cdot t - 2$.

$y_л(-1)\cdot y_л(1) > 0$:





$(1 + p - 2)(1 - p - 2) > 0 \Rightarrow (p-1)(-1-p) > 0 \Rightarrow (p-1)(p+1) < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -1 < p < 1$.

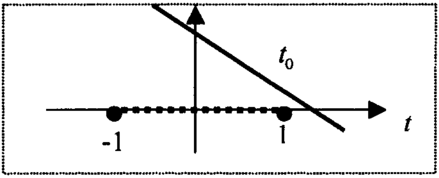
Д.З. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\sin^2 x - 2p\sin x - 3 = 0$ не имеет решений.

45. При каких значениях параметра p уравнение $(p-4)\cdot\sin^2 x - 2p\cdot\sin x + 6 = 0$ не имеет решений?

Замена: $t = \sin x \Rightarrow \begin{cases} (p-4)\cdot t^2 - 2p\cdot t + 6 = 0, \\ -1 \le t \le 1. \end{cases}$

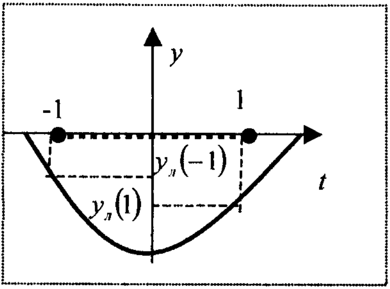
Графический метод: левая функция – $y_л = (p-4)\cdot t^2 - 2p\cdot t + 6$.

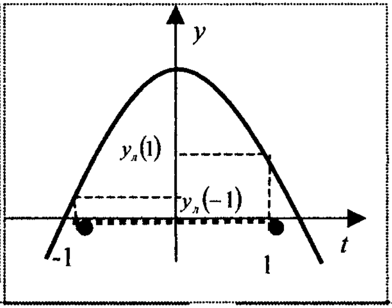
1) $\begin{cases} a = 0, \\ |t_0| > 1 \end{cases}$

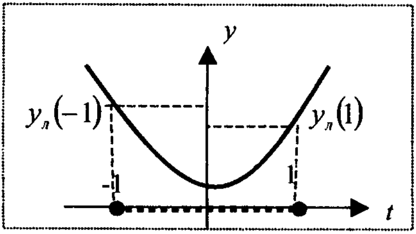


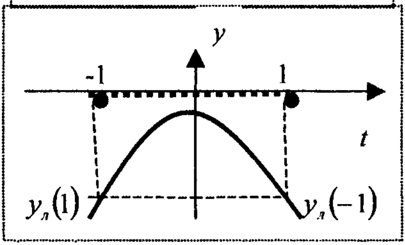
$p_1 = 4$, $t_0 = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$;

2) $y_л(-1)\cdot y_л(1) > 0$









$(p-4+2p+6)(p-4-2p+6)>0 \quad \Rightarrow \quad (3p+2)(2-p)>0 \quad \Rightarrow$

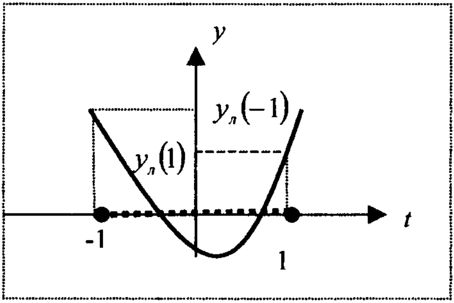
$\Rightarrow (3p+2)(p-2)<0 \Rightarrow -\dfrac{2}{3}<p<2$.

Д.З. $(p-5)\cdot\cos^2 x-4p\cdot\cos x+4=0$.

46. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\sin^2 x-p\sin x-2=0$ имеет хотя бы одно решение.

Замена: $t=\sin x \Rightarrow \begin{cases} t^2-p\cdot t-2=0, \\ -1\le t\le 1. \end{cases}$

Графический метод: левая функция – $y_л(x)=t^2-p\cdot t-2$.

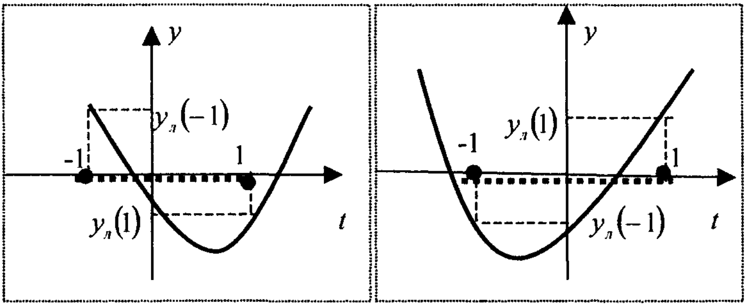


1) $\begin{cases} D\ge 0, \\ y_л(-1)\cdot y_л(1)\ge 0, \\ |x_0|\le 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} p^2+8\ge 0, \\ (1+p-2)(1-p+2)\ge 0 \\ \left|\frac{p}{2}\right|\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p-1)(3-p)\ge 0, \\ |p|\le 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (p-1)(p-3)\le 0, \\ |p|\le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\le p\le 3, \\ -2\le p\le 2 \end{cases} \Rightarrow 1\le p\le 2;$$

2) $y_л(-1)\cdot y_л(1)\le 0$



$(1+p-2)(1-p+2)\le 0 \;\Rightarrow\; (p-1)(3-p)\le 0 \;\Rightarrow\; (p-1)(p-3)\ge 0 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} p\le 1 \\ p\ge 3 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} p\le 2 \\ p\ge 3 \end{array}\right.$.

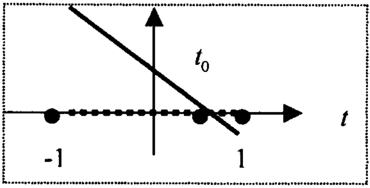
Д.3. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\sin^2 x-2p\sin x-2=0$ имеет хотя бы одно решение.

47. При каких значениях p уравнение $(4-p)\cdot\sin^2 x-2\cdot\sin x+1=0$ имеет хотя бы одно решение?

Замена: $t=\sin x \;\Rightarrow\; \begin{cases} (4-p)\cdot t^2-2\cdot t+1=0, \\ -1\le t\le 1. \end{cases}$

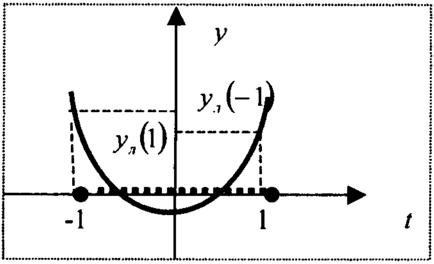
Графический метод: левая функция – $y_л=(4-p)t^2-2\cdot t+1$.

1) $\begin{cases} a = 0, \\ |t_0| \le 1; \end{cases}$



$p_1 = 4,\ t_0 = \dfrac{1}{2};$

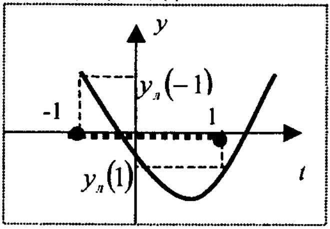
2) $\begin{cases} D \ge 0, \\ y_л(-1)\cdot y_л(1) \ge 0 \\ -1 \le t_B \le 1 \end{cases}$

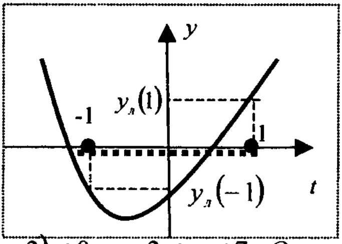


$$\Rightarrow \begin{cases} p \ge 3, \\ (4 - p + 2 + 1)(4 - p - 2 + 1) \ge 0, \\ \left|\dfrac{1}{4 - p}\right| \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 3, \\ (7 - p)(3 - p) \ge 0, \\ |p - 4| \ge 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p \ge 3, \\ (p - 7)(p - 3) \ge 0, \\ |p - 4| \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 3 \\ \left[\begin{array}{l} p \ge 7 \\ p \le 3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} p \ge 5 \\ p \le 3 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow\ p \ge 7;$$

3) $y_л(-1)\cdot y_л(1) \le 0$





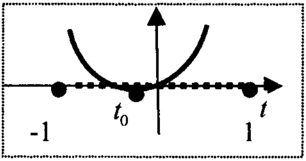
$(7 - p)(3 - p) \le 0 \Rightarrow (p - 7)(p - 3) \le 0 \Rightarrow 3 \le p \le 7$. *Ответ:* $p \ge 3$.

Д.3. При каких значениях параметра p уравнение $(6-p)\cdot\cos^2 x - 8\cdot\cos x + 1 = 0$ имеет хотя бы одно решение?

48. При каких значениях параметра p уравнение

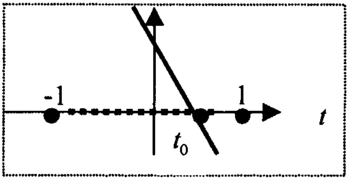
$$(p-4)\cdot\left(\frac{2\arcsin x}{\pi}\right)^2 - 6\cdot\left(\frac{2\arcsin x}{\pi}\right) + 1 = 0 \text{ имеет одно решение?}$$

Замена: $t = \dfrac{2\arcsin x}{\pi} \Rightarrow \begin{cases}(p-4)\cdot t^2 - 6\cdot t + 1 = 0,\\ -1 \le t \le 1.\end{cases}$



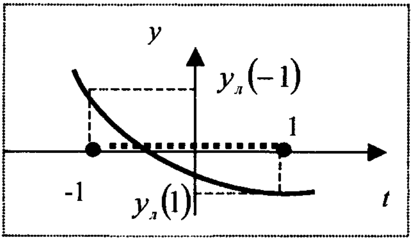
1) $\begin{cases} D = 0, \\ |t_0| \le 1; \end{cases}$ $D = 9-(p-3) = 0 \Rightarrow p_1 = 12$,

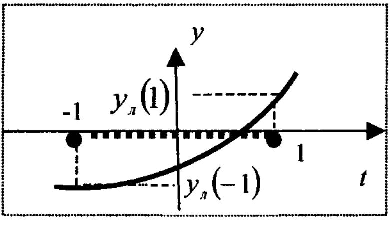
$t_0 = \dfrac{3}{p_1 - 4} = \dfrac{3}{8}$;



2) $\begin{cases} a = 0, \\ |t_0| \le 1; \end{cases}$ $p_2 = 4$, $t_0 = \dfrac{1}{6}$;

3) $y_л(-1)\cdot y_л(1) \le 0$:





$(p-4+6+1)\cdot(p-4-6+1) \le 0 \Rightarrow (p+3)\cdot(p-9) \le 0 \Rightarrow -3 \le p \le 9$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} -3 \le p \le 9 \\ p = 12 \end{array}\right.$.

Д.З. При каких значениях параметра p уравнение

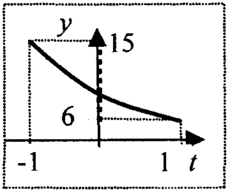
$(p-6)\cdot\left(\frac{2\arcsin x}{\pi}\right)^2-8\cdot\left(\frac{2\arcsin x}{\pi}\right)+1=0$ имеет хотя бы одно решение;

$$(p-8)\cdot\left(\frac{2\operatorname{arctg} x}{\pi}\right)^2-10\cdot\left(\frac{2\operatorname{arctg} x}{\pi}\right)+1=0;$$

$$(p-3)\cdot\left(\frac{\arccos x}{\pi}\right)^2-4\cdot\left(\frac{\arccos x}{\pi}\right)+1=0;$$

$$(p-6)\cdot\left(\frac{\operatorname{arcctg} x}{\pi}\right)^2-8\cdot\left(\frac{\operatorname{arcctg} x}{\pi}\right)+1=0.$$

49. Найти множество значений функции $y=\dfrac{60}{3\sin x+7}$.



Замена: $t=\sin x \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{60}{3t+7}, \\ -1\le t\le 1 \end{cases}$ – гипербола $\Rightarrow$

$\Rightarrow t=-1 \quad\Rightarrow\quad y=\dfrac{60}{-3+7}=\dfrac{60}{4}=15$; $\quad t=1 \quad\Rightarrow\quad y=\dfrac{60}{3+7}=\dfrac{60}{10}=6 \quad\Rightarrow$

$\Rightarrow 6\le y\le 15$.

Д.З. Найти множество значений функции $y=\dfrac{50}{2\cos x+5}$.

50. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\dfrac{60}{3\sin x+7}=p$ имеет хотя бы одно решение.

Замена: $\begin{cases} t=\sin x, \\ -1\le t\le 1. \end{cases}$

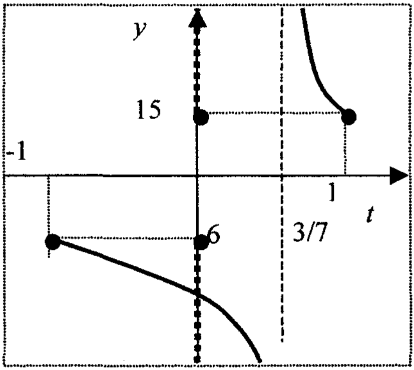
Графический метод: левая функция – $y_л=\dfrac{60}{3t+7}$, правая функция – $y_п=p$.

$6\le p\le 15$.

Д.З. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\frac{60}{2\cos^5 x+7}=p$ имеет хотя бы одно решение.

51. Найти область изменения функции $y=\frac{60}{7\sin^3 x-3}$.

Замена: $t=\sin^3 x \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{60}{7t-3}, \\ -1\le t\le 1. \end{cases}$



$t=-1 \Rightarrow y=\frac{60}{-7-3}=\frac{60}{-10}=-6,\quad t=1 \Rightarrow y=\frac{60}{7-3}=\frac{60}{4}=15 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y\ge 15 \\ y\le -6 \end{array}\right.$.

Д.З. Найти область изменения функции $y=\frac{60}{8\cos^7 x-2}$.

52.Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\frac{60}{7\sin^3 x-3}=p$ не имеет решений.

Замена: $t=\sin^3 x \Rightarrow -1\le t\le 1$.

Графический метод: функция – $y_л=\frac{60}{7t-3}$, правая функция – $y_п=p$.

$-6<p<15$.

Д.З. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\frac{60}{8\cos^7 x-2}=p$ имеет хотя бы одно решение.

53. Найти область изменения функции $y=\cos^4 x+\sin^4 x$.

$$y=\left(\cos^4 x+\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x\right)-2\sin^2 x\cos^2 x=$$
$$=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x;$$
$$y=1-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x \Rightarrow 0\le\sin^2 2x\le 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\le y\le 1.$$

Д.З. Найти область изменения функции $y=\cos^6 x+\sin^6 x$; $y=\cos^8 x+\sin^8 x$.

Метод дополнительного аргумента:

$$a\sin x+b\cos x=c \quad \times\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
$$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\varphi}\sin x+\underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\varphi}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
$$\cos\varphi\cdot\sin x+\cos x\cdot\sin\varphi=\sin(x+\varphi),$$
$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

---

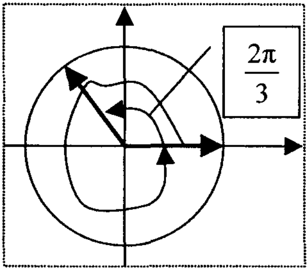
54. Найти два наименьших положительных решения уравнения $\sin x-\sqrt{3}\cdot\cos x=1$.

$$\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\varphi=\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k \\ x-\dfrac{\pi}{3}=\pi-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^{(1)}{}_{\min}=\dfrac{\pi}{2} \\ x^{(2)}{}_{\min}=\dfrac{5\pi}{6}\end{array}\right..$$

Д.З. Найти два наименьших положительных решения уравнений $\sqrt{3}\cdot\sin x-\cos x=1$; $\sin x-\cos x=1$.

55. Найти решения уравнения $\sqrt{3}\cdot\sin x+\cos x=1$ на интервале $[0;2\pi]$.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cdot\cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2};$$



$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2\pi k \\ x+\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\pi k \\ x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n \end{array}\right..$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$; 2π.

Д.З. Найти решения уравнения $\sqrt{15}\cdot\sin x+\cos x=2$ на интервале $[0;2\pi]$.

56. Найти множество значений функции $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x-2$.

$$\frac{y}{2}=\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-1=\sin(x-\varphi)-1 \Rightarrow y=2\sin(x-\varphi)-2;$$

$$y_{\max}=0,\ y_{\min}=-4 \Rightarrow -4\le y\le 0.$$

Д.З. Найти множество значений функции $y=2\sin x+\sqrt{5}\cos x+3$.

57. Укажите множество значений функции $y=3\sin 2x-8\cos^2 x$.

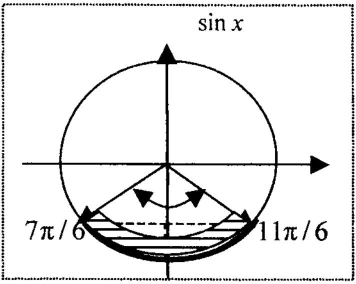
$$y=3\sin 2x-8\cos^2 x=3\sin 2x-8\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}=3\sin 2x-4\cos 2x-4;$$

$$\frac{y}{5}=\left(\frac{3}{5}\sin 2x-\frac{4}{5}\cos 2x\right)-\frac{4}{5}=\sin(2x-\varphi)-\frac{4}{5} \Rightarrow y=5\sin(2x-\varphi)-4;$$

$$y_{\max}=1,\ y_{\min}=-9 \Rightarrow -9\le y\le 1.$$

Д.З. Найти множество значений функции $y=\sin 2x+2\sin^2 x$; $y=5\sin 2x-2\cos^2 x$.

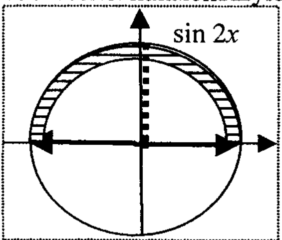
58. Найти наименьшую длину решения неравенства $\sin x \le -\frac{1}{2}$.



$\frac{7\pi}{6} \le 3x \le \frac{11\pi}{6} \;\Rightarrow\; L = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$.

Д.З. Найти наименьшую длину решения неравенств $\cos x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos x < \frac{1}{2}$.

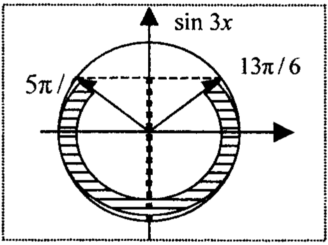
59. Найти наименьшую длину решения неравенства $\sin 2x \ge 0$.



$0 \le 2x \le \pi \;\Rightarrow\; 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; L = \frac{\pi}{2}$.

Д.З. Найти наименьшую длину решения неравенств $\sin 4x \ge 0$; $\cos 4x \ge 0$.

60. Найти наименьшую длину решения неравенства $\sin 3x \le \frac{1}{2}$.



$\frac{5\pi}{6} \le 3x \le \frac{13\pi}{6} \;\Rightarrow\; \frac{5\pi}{18} \le x \le \frac{13\pi}{18} \;\Rightarrow$

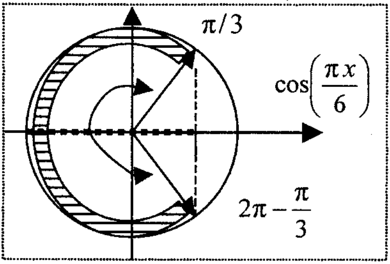
$\Rightarrow L = \frac{8\pi}{18} = \frac{4\pi}{9}$.

Д.З. Найти наименьшую длину решения неравенств $\cos 4x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 6x \geq \frac{1}{2}$.

61. Указать целые числа из интервала $x \in [0;6]$, которые являются решениями неравенства $\frac{\sin(\pi \cdot x/3)}{\sin(\pi \cdot x/6)} \leq 1$.

$$\text{ОДЗ } \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{6}\right) \neq 0 \Rightarrow \frac{\pi \cdot x}{6} \neq \pi \cdot k \Rightarrow x \neq 6 \cdot k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin\left(\frac{\pi \cdot x}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi \cdot x}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi \cdot x}{6}\right)} \leq 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{6}\right) \leq \frac{1}{2}$$



$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi \cdot x}{6} \leq 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2 \leq x \leq 10 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 2; 3; 4; 5$.

Д.З. Указать целые числа из интервала $x \in [0;6]$, которые являются решениями неравенства $\frac{\sin(\pi \cdot x/3)}{\sin(\pi \cdot x/6)} \geq 1$.

62. Решить неравенство $x \cdot \cos 4 > \cos 4$.

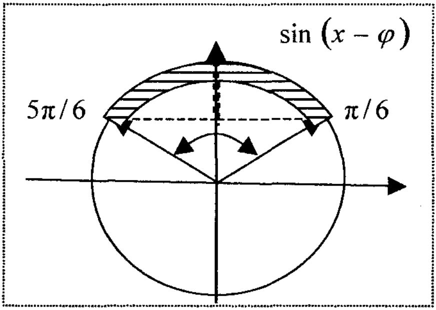
$\pi \approx 3{,}14 \Rightarrow 4 = \pi + 0{,}86 \Rightarrow$ 3-й квадрант $\Rightarrow \cos 4 < 0 \Rightarrow x < 1$.

Д.З. Решить неравенства $x \cdot \sin 5 > \sin 5$; $x \cdot \operatorname{ctg} 4 > \cos 4$.

63. Найти наименьшую длину решения неравенства $\sin x - \sqrt{3} \cdot \cos x \geq 1$.

Метод дополнительного аргумента: $\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(x - \varphi) \geq \frac{1}{2}$.



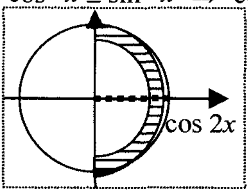
$$\frac{\pi}{6} \le x - \varphi \le \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + \varphi \le x \le \frac{5\pi}{6} + \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \frac{5\pi}{6} + \varphi - \frac{\pi}{6} - \varphi = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

Д.З. Найти наименьшую длину решения неравенств $\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x \le 1$; $2\sin x + \sqrt{5}\cos x \le 3$.

64. Найти наименьшую длину решения неравенства $|\cos x| \ge |\sin x|$.

$\cos^2 x \ge \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x \ge 0 \Rightarrow \cos 2x \ge 0 \Rightarrow$

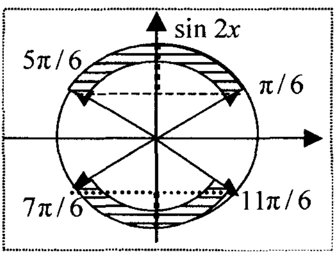


$$-\frac{\pi}{2} \le 2x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow L = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Д.З. Найти наименьшую длину решения неравенств $|\cos 2x| \ge |\sin x|$; $|\cos x| \ge |\sin 2x|$.

65. Найти наименьшую длину решения неравенства $\sin^2 2x \ge \frac{1}{4}$.

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x \ge \frac{1}{2} \\ \sin 2x \le -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{6} \le 2x \le \frac{5\pi}{6} \\ \frac{7\pi}{6} \le 2x \le \frac{11\pi}{6} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{12} \le x \le \frac{5\pi}{12} \\ \frac{7\pi}{12} \le x \le \frac{11\pi}{12} \end{array}\right. \Rightarrow L = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}.$$

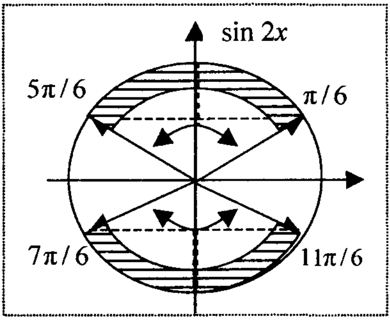
Д.З. Найти наименьшую длину решения неравенства $\cos^2 2x \le \frac{1}{4}$.

66. Найти длину решения неравенства $\cos^4 x + \sin^4 x < \frac{7}{8}$ на отрезке $[0; \pi]$.

$$\cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x < \frac{7}{8} + 2\sin^2 x\cos^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2 < \frac{7}{8} + 2\sin^2 x\cos^2 x \Rightarrow 1 < \frac{7}{8} + 2\sin^2 x\cos^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\sin^2 x\cos^2 x > \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2(2x) > \frac{1}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(2x) > \frac{1}{2} \\ \sin(2x) < -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$$



$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{6} \le 2x \le \frac{5\pi}{6} \\ \frac{7\pi}{6} \le 2x \le \frac{11\pi}{6} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{12} \le x \le \frac{5\pi}{12} \\ \frac{7\pi}{12} \le x \le \frac{11\pi}{12} \end{array}\right. \Rightarrow$$

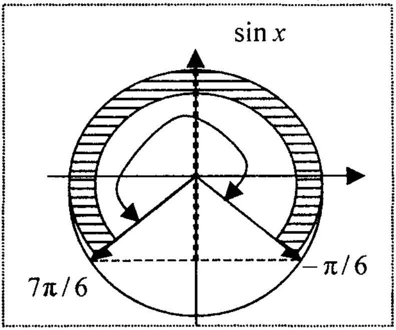
$$\Rightarrow L = \left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) + \left(\frac{11\pi}{12} - \frac{7\pi}{12}\right) = \frac{4\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}.$$

Д.З. Найти длину решения неравенства $\cos^4 x + \sin^4 x > \frac{5}{8}$ на отрезке $[0; \pi]$.

67. Найти наименьшую длину решения неравенства $2\cos^2 x + 7\sin x + 2 \ge 0$.

$$2-2\sin^2 x+7\sin x+2\ge 0 \;\Rightarrow\; 2\sin^2 x-7\sin x-4\le 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{4}=\frac{7\pm 9}{4} \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2}\le \sin x\le 4 \;\Rightarrow\; \sin x\ge -\frac{1}{2}\Rightarrow$$



$$-\frac{\pi}{6}\le x\le \frac{7\pi}{6} \;\Rightarrow\; L=\frac{8\pi}{6}=\frac{4\pi}{3}.$$

Д.З. Найти наименьшую длину решения неравенств $2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x+1\ge 0$; $2\sin^2 x+3\sqrt{3}\cos x+4\le 0$.

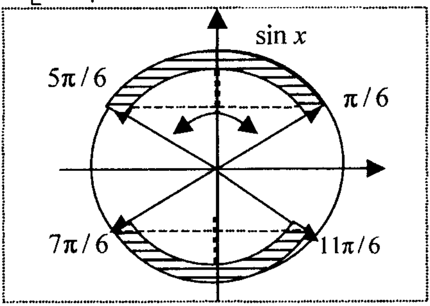
68. Найти длину решения неравенства $16\sin^4 x+11\ge 16\cos^2 x$ на промежутке $[0;\pi]$.

$$16\sin^4 x+11\ge 16-16\sin^2 x \;\Rightarrow\; 16\sin^4 x+16\sin^2 x-5\ge 0.$$

Замена: $t=\sin^2 x\ge 0 \;\Rightarrow\; 16t^2+16t-5\ge 0 \;\Rightarrow$

$$t_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{64+80}}{16}=\frac{-8\pm 12}{16} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} t\le -\frac{5}{4} - \text{постороннее} \\ t\ge \frac{1}{4} \end{array}\right. \;\Rightarrow\; t\ge \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x\ge \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} \sin x\le -\frac{1}{2} \\ \sin x\ge \frac{1}{2} \end{array}\right. \;\Rightarrow$$



$$\Rightarrow L=\frac{2\pi}{3}.$$

Д.З. Найти длину решения неравенства $16\sin^4 x \ge 16\cos^2 x + 5$ на промежутке $[0;\pi]$.

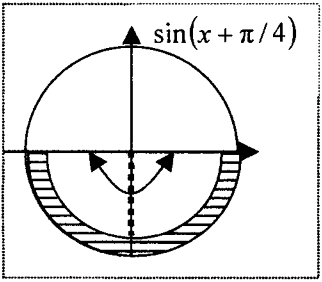
69. Найти наименьшую длину решения неравенства $\cos 2x \ge 4\cos x + 4\sin x$.

$$\cos^2 x - \sin^2 x \ge 4(\cos x + \sin x) \Rightarrow$$
$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) \ge 4(\cos x + \sin x) \Rightarrow$$
$$(\cos x - \sin x - 4)(\cos x + \sin x) \ge 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x - \sin x \ge 4 \\ \cos x + \sin x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \\ \begin{cases} \cos x - \sin x \le 4 \\ \cos x + \sin x \le 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x + \sin x \le 0 \end{array}\right. \Rightarrow \cos x + \sin x \le 0.$$

Метод дополнительного аргумента: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x \le 0 \Rightarrow$

$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le 0 \Rightarrow$



$\pi \le x + \dfrac{\pi}{4} \le 2\pi \Rightarrow$

$\dfrac{3\pi}{4} \le x \le \dfrac{7\pi}{4} \Rightarrow L = \pi.$

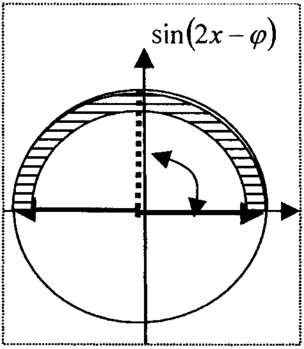
Д.З. Найти наименьшую длину решения неравенств $\cos 2x + 7\cos x - 7\sin x \le 0$; $\sin 2x - 2\cos x \le 0$.

70. Найти наименьшую длину решения неравенства $\cos^4 x - \sin^4 x \le \sqrt{3}\sin 2x$.

$$(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) \le \sqrt{3}\sin 2x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x \le \sqrt{3}\sin 2x \Rightarrow \cos 2x \le \sqrt{3}\sin 2x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x \ge 0.$$

Метод дополнительного аргумента: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \dfrac{1}{2}\cos 2x \ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(2x - \varphi) \ge 0.$



$0 \le 2x-\varphi \le \pi \quad \Rightarrow \quad \varphi \le 2x \le \pi+\varphi \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\varphi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\varphi}{2} \;\Rightarrow\; L=\dfrac{\pi}{2}$.

Д.З. Найти наименьшую длину решения неравенств $\cos^4 x-\sin^4 x \ge \sqrt{5}\cdot\sin 2x$; $\sqrt{16\cos^2\left(\dfrac{\pi x}{12}\right)+5} \ge 4\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{12}\right)$.

71. Найти наименьшую длину решения неравенства $8(\cos x)\cdot(\cos 2x)\cdot(\cos 4x)\cdot(\cos 8x)+\cos(17x)\ge 0$ на отрезке $[0;\pi]$.

$\sin x \ge 0 \;\Rightarrow$ до множим уравнение на $\sin x \;\Rightarrow\; (\sin x \ge 0)$;

$$4\cdot\underline{2(\sin x)\cdot(\cos x)}\cdot(\cos 2x)\cdot(\cos 4x)\cdot(\cos 8x)+(\sin x)\cdot\cos(17x)\ge 0 \;\Rightarrow$$

$$2\cdot\underline{2(\sin 2x)\cdot(\cos 2x)}\cdot(\cos 4x)\cdot(\cos 8x)+(\sin x)\cdot\cos(17x)\ge 0 \;\Rightarrow$$

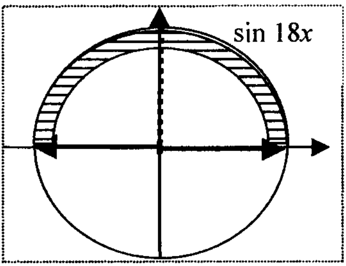
$$\underline{2(\sin 4x)\cdot(\cos 4x)}\cdot(\cos 8x)+(\sin x)\cdot\cos(17x)\ge 0 \;\Rightarrow$$

$$\underline{2(\sin 8x)\cdot(\cos 8x)}+2(\sin x)\cdot\cos(17x)\ge 0 \Rightarrow$$

$$(\sin 16x)+2(\sin x)\cdot\cos(17x)\ge 0 .$$

Используем $2\sin a\cos b=\sin(a-b)+\sin(a+b)$.

$\sin(18x)\ge 0 \quad\Rightarrow$

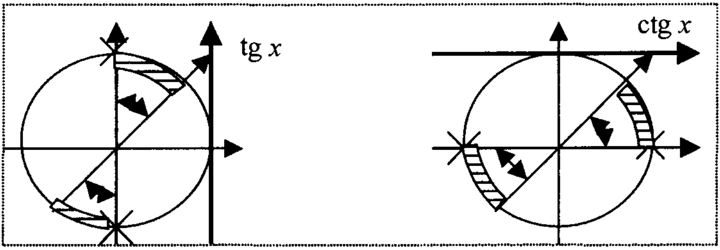


$\Rightarrow \quad 0\le 18x \le \pi \quad \Rightarrow$

$0 \le x \le \dfrac{\pi}{18} \;\Rightarrow\; L=\dfrac{\pi}{18}$.

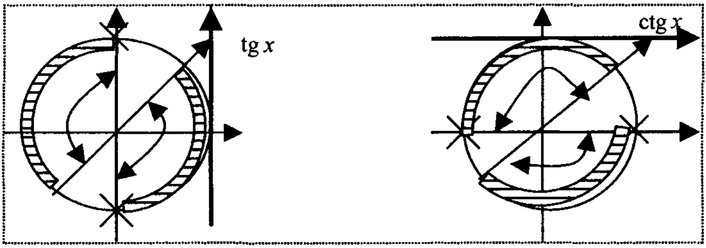
Д.З. Найти наименьшую длину решения неравенства $32(\cos 2x)\cdot(\cos 4x)\cdot(\cos 8x)\cdot(\cos 16x)\cdot(\cos 32x)-\cos(62x)\geq 0$ на отрезке $[0;\pi]$.

72. Найти наименьшую длину решения неравенства: $\operatorname{tg} x \geq 1$ $\operatorname{ctg} x \geq 1$



$\frac{\pi}{4}\leq x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow L=\frac{\pi}{4}$, $\qquad 0<x\leq\frac{\pi}{4} \Rightarrow L=\frac{\pi}{4}$.

73. Найти наименьшую длину решения неравенства: $\operatorname{tg} x \leq 1$ $\operatorname{ctg} x \leq 1$



$-\frac{\pi}{2}<x\leq\pi \Rightarrow L=\frac{3\pi}{4}$, $\qquad -\pi<x\leq\frac{\pi}{4} \Rightarrow L=\frac{3\pi}{4}$.

Д.З. Найти наименьшую длину решения неравенства $-\frac{1}{\sqrt{3}}\leq \operatorname{tg} x\leq 1$.

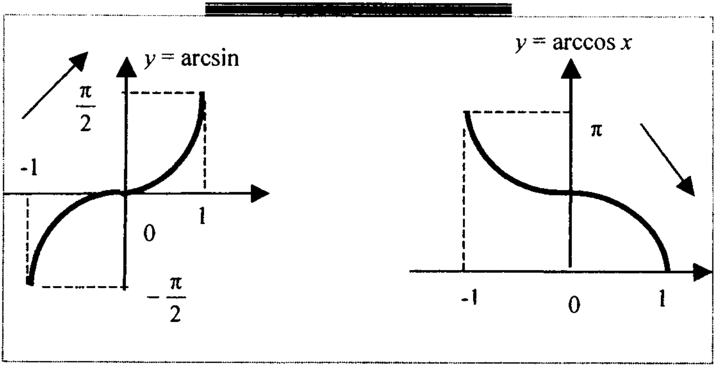
74. Решить неравенство $\log_2(\sin x)<\log_2(\cos x)$ на промежутке $[0;2\pi]$.

ОДЗ $\begin{cases}\sin x>0\\ \cos x>0\end{cases} \Rightarrow 0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ 1-й квадрант $\Rightarrow \sin x<\cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow 0<\operatorname{tg} x<1 \Rightarrow 0<x<\frac{\pi}{4}$.

Д.З. Решить неравенство $\log_2(\cos^2 x)>\log_2(\sin x)$ на промежутке $[0;2\pi]$.

14. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ



Возрастающая | *Убывающая*

$y = \arcsin x,\ \ |x| \le 1,\ \ -\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$, $\qquad y = \arccos x, |x| \le 1,\ \ 0 \le y \le \pi$.

Действие прямой на обратную

$\begin{cases} \sin(\arcsin x) = x, \\ -1 \le x \le 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\arccos x) = x, \\ -1 \le x \le 1. \end{cases}$

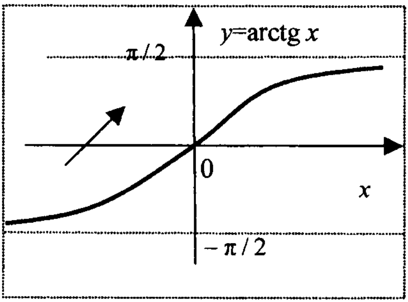
Действие обратной на прямую

$\begin{cases} y = \arcsin(\sin x) = \left[\begin{array}{l} x + 2\pi k \\ \pi - x + 2\pi k \end{array} \right., \\ -\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \arccos(\cos x) = \pm x + 2\pi k, \\ 0 \le y \le \pi \end{cases}$

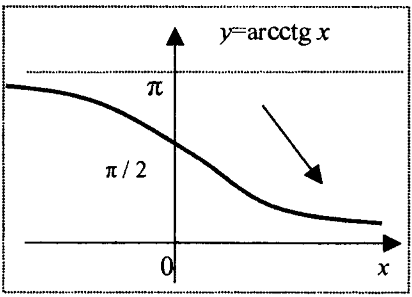
нечетная | *общего вида*

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$ $\qquad \arccos(-x) = \pi - \arccos x$

Основное тождество: $\arccos x + \arcsin x = \pi / 2$



Возрастающая



Убывающая

$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. $\qquad\qquad$ $0 < y < \pi$.

Действие прямой на обратную:

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) \equiv x$, $\qquad\qquad$ $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) \equiv x$.

Действие обратной на прямую:

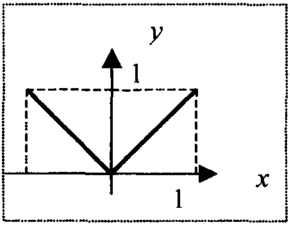
$$\begin{cases} y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x + \pi k, \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x + \pi k, \\ 0 < y < \pi \end{cases}$$

нечетная $\qquad\qquad$ *общего вида*

$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg}(x)$ $\qquad\qquad$ $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg}(x)$

Основное тождество: $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

1. Построить график функции $y = \sin(\arcsin|x|)$.



ОДЗ $-1 \le x \le 1 \Rightarrow y = |x| \le 1$

Д.З. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} y = \sin(\arcsin|x|), \\ 4y = p + 8x^2 \end{cases}$ имеет 2 различных решения.

Д.З. Построить график функции

$$y = \sin(\arcsin x); \ y = \cos(\arccos x).$$

2. Найти область определения функции $y = \arccos(\log_{51} x)$.

ОДЗ $-1 \le \log_{51} x \le 1 \Rightarrow \log_{51} \frac{1}{51} \le \log_{51} x \le \log_{51} 51 \Rightarrow \frac{1}{51} \le x \le 51$.

Д.З. Найти область определения функции $y = \arcsin(\log_{67} x)$.

3. Вычислить $\arcsin(\sin 2)$.

$$y=\arcsin(\sin 2)=\left[\begin{array}{l}2+2\pi k,\\ \pi-2+2\pi k\end{array}\right.,\quad -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\arcsin(\sin 2)=\pi-2.$$

Д.З. Вычислить $\arcsin(\sin 5)$; $\arccos(\cos 5)$.

4. Пусть x_n – последовательность, $x_1=4,\ x_{n+1}=\arcsin\sqrt{0{,}5-0{,}5\cos(x_n)}$ при всех $n\ge 1$. Найти значение выражения $y_n=x_1+x_2+\ldots+x_n+\ldots$.

$$x_{n+1}=\arcsin\left|\sin\frac{x_n}{2}\right|=\left[\begin{array}{l}\left|\dfrac{x_n}{2}+2\pi k\right|\\ \left|\pi-\dfrac{x_n}{2}+2\pi k\right|\end{array}\right.;$$

$$x_2=\left[\begin{array}{l}\left|\dfrac{x_1}{2}+2\pi k\right|\\ \left|\pi-\dfrac{x_1}{2}+2\pi k\right|\end{array}\right.=\left[\begin{array}{l}|2+2\pi k|\\ |\pi-2+2\pi k|\end{array}\right.=\pi-2;$$

$$x_3=\left[\begin{array}{l}\left|\dfrac{x_2}{2}+2\pi k\right|\\ \left|\pi-\dfrac{x_2}{2}+2\pi k\right|\end{array}\right.=\left[\begin{array}{l}\left|\dfrac{\pi-2}{2}+2\pi k\right|\\ \left|\pi-\dfrac{\pi-2}{2}+2\pi k\right|\end{array}\right.=\frac{\pi-2}{2};\ x_4=\frac{\pi-2}{4}\ldots\Rightarrow\ldots$$

$$\ldots\ y_\infty=x_1+x_2+\ldots=4+(\pi-2)+\frac{(\pi-2)}{2}+\frac{(\pi-2)}{4}+\ldots=$$

$$=4+\frac{\pi-2}{1-\dfrac{1}{2}}=4+2\pi-4=2\pi.$$

Д.З. Пусть x_n – последовательность, $x_1=8,\ x_{n+1}=\arcsin\sqrt{0{,}5-0{,}5\cos(x_n)}$ при всех $n\ge 1$. Найти значение выражения $y_n=x_1+x_2+\ldots+x_n+\ldots$.

5. Вычислить $\dfrac{144}{\pi}\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

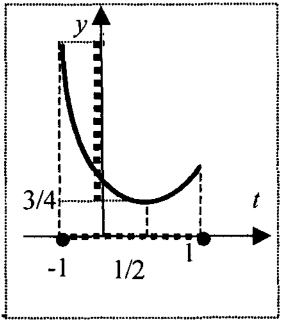
$$\frac{144}{\pi}\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{144}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{144}{6}=\frac{72}{3}=24.$$

Д.З. Вычислить

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ \arccos\left(\frac{1}{2}\right);\ \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right);\ \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

6. Найти область изменения функции

$$y=\left(\frac{2\arcsin x}{\pi}\right)^2-\left(\frac{2\arcsin x}{\pi}\right)+1.$$



Замена: $t=\dfrac{2\arcsin x}{\pi}\ \Rightarrow\ \begin{cases} y=t^2-t+1, \\ -1\le t\le 1 \end{cases}\ \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3}{4}\le y\le 3.$

Д.З. Найти область изменения функции

$$y=2\left(\frac{\arccos x}{\pi}\right)^2-\left(\frac{\arccos x}{\pi}\right)+1;$$

$$y=2\left(\frac{\operatorname{arcctg} x}{\pi}\right)^2-\left(\frac{\operatorname{arcctg} x}{\pi}\right)+1;\ y=4\left(\frac{2\operatorname{arctg} x}{\pi}\right)^2-\left(\frac{2\operatorname{arctg} x}{\pi}\right)+1.$$

7. Найти значения параметра p, при которых уравнение $\left(\dfrac{2\arcsin x}{\pi}\right)^2-\left(\dfrac{2\arcsin x}{\pi}\right)+1=p$ имеет хотя бы одно решение.

Замена: $t=\dfrac{2\arcsin x}{\pi}\ \Rightarrow\ \begin{cases} t^2-t+1=p, \\ -1\le t\le 1. \end{cases}$

Графический метод:

левая функция – $y_л=t^2-t+1$, правая функция – $y_п=p\ \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3}{4}\le p\le 3.$

Д.3. Найти значения параметра p, при которых уравнение $2\left(\frac{\arccos x}{\pi}\right)^2-\left(\frac{\arccos x}{\pi}\right)+1=p$ имеет хотя бы одно решение.

8. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases}\arcsin\sqrt{\frac{x(4-x)}{3}}\le\frac{\pi}{2},\\ \arcsin\sqrt{\frac{(x-p)(4-x+p)}{3}}\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$ имеет одно решение.

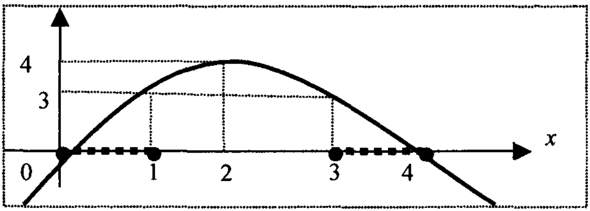
ОДЗ $\begin{cases}-1\le\sqrt{\frac{x(4-x)}{3}}\le 1,\\ -1\le\sqrt{\frac{(x-p)(4-x+p)}{3}}\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{\frac{x(4-x)}{3}}\le 1,\\ \sqrt{\frac{(x-p)(4-x+p)}{3}}\le 1\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}0\le x(4-x)\le 3,\\ 0\le(x-p)(4-x+p)\le 3\end{cases};$

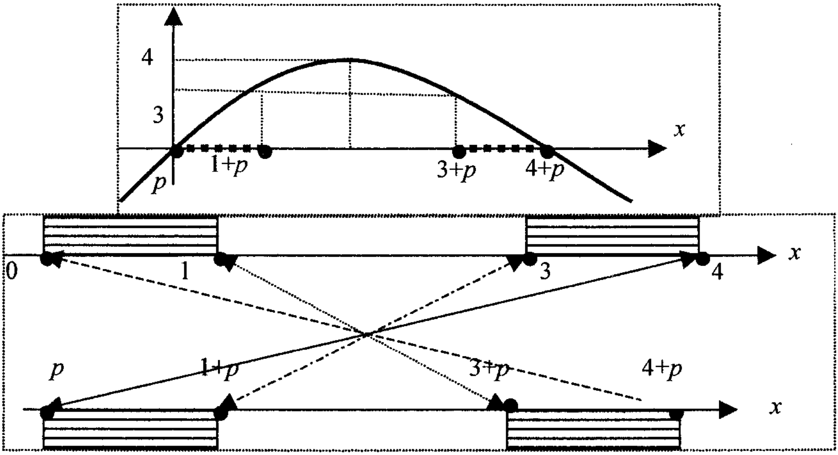
$\begin{cases}\arcsin\sqrt{\frac{x(4-x)}{3}}\le\arcsin 1,\\ \arcsin\sqrt{\frac{(x-p)(4-x+p)}{3}}\le\arcsin 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{\frac{x(4-x)}{3}}\le 1,\\ \sqrt{\frac{(x-p)(4-x+p)}{3}}\le 1\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}0\le x(4-x)\le 3,\\ 0\le(x-p)(4-x+p)\le 3.\end{cases}$

1) $0\le x(4-x)\le 3$;



2) $0\le(x-p)(4-x+p)\le 3$. Замена: $x-p=y\Rightarrow 0\le y(4-y)\le 3$.



1) $p=4$; 2) $p+1=3 \Rightarrow p=2$; 3) $p+3=1 \Rightarrow p=-2$; 4) $p+4=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow p=-4$.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} \arcsin\sqrt{\dfrac{x(6-x)}{5}} \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \arcsin\sqrt{\dfrac{(x-p)(6-x+p)}{5}} \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ имеет одно решение.

Связи тригонометрических функций

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x,\ \cos^2 x = 1-\sin^2 x.$$

$$\sin^2 a = \frac{\mathrm{tg}^2 a}{1+\mathrm{tg}^2 a},\ \cos^2 a = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 a}.$$

$$\sin^2 a = \frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 a},\ \cos^2 a = \frac{\mathrm{ctg}^2 a}{1+\mathrm{ctg}^2 a}.$$

$$\mathrm{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}-1 = \frac{\sin^2 a}{1-\sin^2 a},\ \mathrm{ctg}^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}-1 = \frac{\cos^2 a}{1-\cos^2 a}.$$

---

9. Вычислить $\mathrm{tg}^2\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$.

$$\operatorname{tg}^2\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{8}}\right)=\frac{1}{\cos^2\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{8}}\right)}-1=\frac{1}{\frac{1}{8}}-1=8-1=7.$$

Д.З. Вычислить $\operatorname{tg}^2\left(\arcsin\sqrt{8}\right)$.

10. Вычислить $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

$$\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)=$$

$$=\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)=\frac{\sin\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{1}{4}\right)}}=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\frac{1}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Д.З. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

11. Вычислить $84\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{48}\right)$.

$$84\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{48}\right)=84\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\sqrt{48}\right)}}=\frac{84}{\sqrt{1+48}}=\frac{84}{7}=12.$$

Д.З. Вычислить $\sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt{8}\right)$.

12. Вычислить $A=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4}+\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{7}$.

$$\operatorname{tg}A=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{7}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{7}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{7}}{1-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{7}}=\frac{7\sqrt{3}+12\sqrt{3}}{28-9}=\frac{19\sqrt{3}}{19}=\sqrt{3}$$

$$A=\frac{\pi}{3}.$$

Д.З. Вычислить $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$.

13. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(7)-\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(7)-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(7))-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(7))\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{7-1}{1+7}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

Д.З. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(6)+\frac{\pi}{4}\right)$.

14. Вычислить $\sin\left(\operatorname{arctg}(7)-\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\sin\left(\operatorname{arctg}(7)-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(7)-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}(7)-\frac{\pi}{4}\right)}}=$$

$$=\left\{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(7)-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}\right\}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{3}{5}.$$

Д.З. Вычислить $\sin\left(\operatorname{arctg}(6)+\frac{\pi}{4}\right)$.

15. Вычислить $130\sin\left[\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)+\arcsin\left(\frac{5}{13}\right)\right]$.

$$130\sin\left[\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)+\arcsin\left(\frac{5}{13}\right)\right]=$$

$$130\left(\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cdot\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)+\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cdot\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\right)=$$

$$=130\left(\frac{3}{5}\cdot\sqrt{1-\frac{25}{169}}+\sqrt{1-\frac{9}{25}}\cdot\frac{5}{13}\right)=130\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}\right)=130\cdot\frac{56}{65}=112.$$

Д.З. Вычислить

$$130\sin\left[\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)-\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right];\ \cos\left(\arccos\frac{5}{13}-\arcsin\frac{3}{5}\right).$$

16. Вычислить $\log_2\left[\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arccos(0)\right)\right]$.

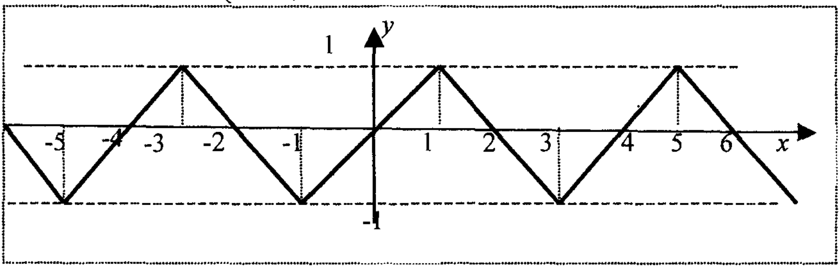
$$\log_2\left[\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos(0)\right)\right]=\log_2\left[\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\right]=$$

$$=\log_2\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\log_2\frac{\sqrt{2}}{2}=\log_2\sqrt{2}-\log_2 2=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}.$$

Д.3. Вычислить

$$\log_2\left[\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\arcsin(1)\right)\right];\ \log_2\left[\sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right)\right)\right].$$

График функции $\begin{cases} y=\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)=\left[\begin{array}{l} x+4k, \\ 2-x+4k \end{array}\right. \\ -1\le y\le 1 \end{cases}$ *(нечетная пила)*

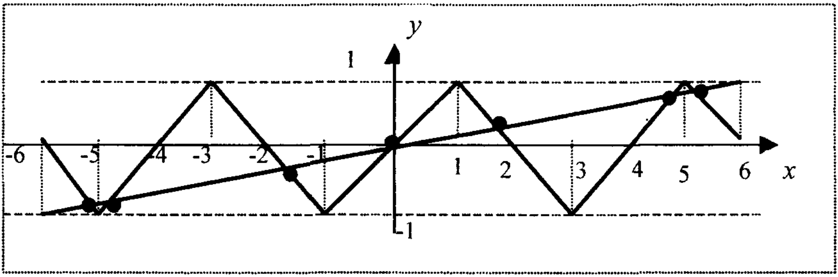


17. Найти число решений уравнения $\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{x}{6}$.

ОДЗ $\left|\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\right|\le 1 \ \Rightarrow\ |x|\le 6$.

Графический метод: $y_л = y_п$.

$y_л=\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)$ – нечетная пила; $y_п=\frac{x}{6}$ – прямая:



7 решений.

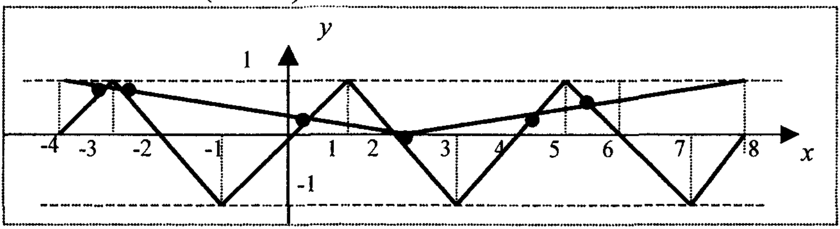
Д.З. Найти число решений уравнений $\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{x}{8}$; $\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{x}{10}$.

18. Найти число решений уравнения $\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{|x-2|}{6}$.

ОДЗ $\left|\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\right|\le\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \left|\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\right|\le 1\ \Rightarrow\ |x-2|\le 6\ \Rightarrow$
$\Rightarrow -4\le x\le 8$.

Графический метод: $y_л = y_п$.

$y_л=\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)$ – нечетная пила; $y_п=\frac{|x-2|}{6}$ – галка:



6 решений.

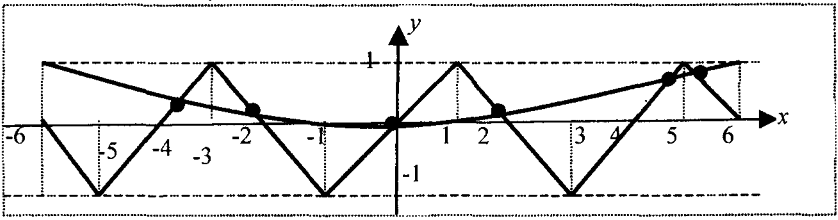
Д.З. Найти число решений уравнения $\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{|x-3|}{7}$.

19. Найти число решений уравнения $\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{x^2}{36}$.

ОДЗ $\left|\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\right|\le\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \left|\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\right|\le 1\ \Rightarrow\ |x|\le 6$.

Графический метод: $y_л = y_п$.

$y_л = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)$ – нечетная пила; $y_п = \frac{x^2}{36}$ – парабола:



6 решений.

Д.З. Найти число решений уравнения $\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{x^2}{25}$.

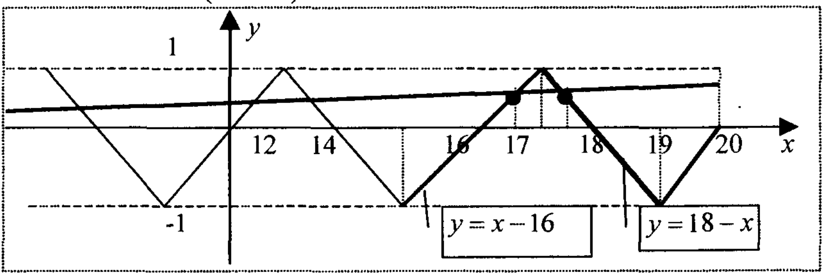
20. Найти два наибольших решения уравнения

$$\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{1}{4}\sin\left(\arcsin\frac{x}{20}\right).$$

ОДЗ $|x| \le 20 \Rightarrow \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{x}{80}$.

Графический метод: $y_л = y_п$.

$y_л = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)$ – нечетная пила; $y_п = \frac{x}{80}$ – прямая:



$$\left[\begin{array}{l} x - 16 = \frac{x}{80} \\ 18 - x = \frac{x}{80} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^{(2)}_{\max} = \frac{80}{79}\cdot 16 \\ x^{(1)}_{\max} = \frac{80}{81}\cdot 18 = \frac{160}{9} = 17\frac{7}{9} \end{array}\right. \Rightarrow x_{\max} = 17\frac{7}{9}.$$

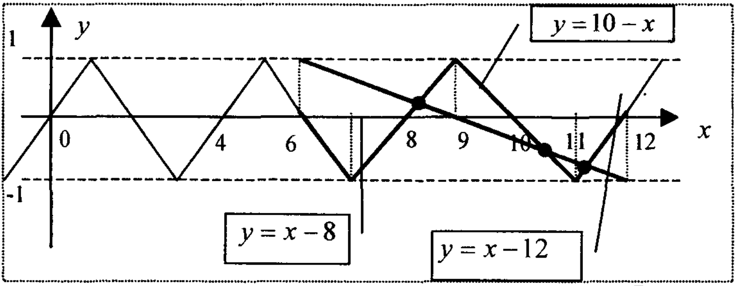
Д.З. Найти наименьшее положительное решение уравнения $\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{4}{5}\sin\left(\arcsin\frac{x}{16}\right)$.

21. Решить уравнение $\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{9-x}{3}$.

ОДЗ $-1\le\frac{9-x}{3}\le 1 \quad\Rightarrow\quad -3\le 9-x\le 3 \quad\Rightarrow\quad -12\le -x\le -6 \quad\Rightarrow$ $6\le x\le 12$.

Графический метод: $y_л = y_п$.

$y_л=\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)$ – нечетная пила; $y_п=\frac{9-x}{3}$ – прямая:

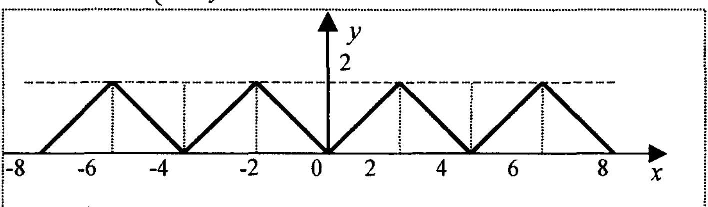


$$\left[\begin{array}{l} x-8=\frac{9-x}{3} \\ 10-x=\frac{9-x}{3} \\ x-12=\frac{9-x}{3}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-24=9-x \\ 30-3x=9-x \\ 3x-36=9-x\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4x_1=33 \\ 2x_2=21 \\ 4x_3=45\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=8\frac{1}{4} \\ x_2=10\frac{1}{2} \\ x_3=11\frac{1}{4}\end{array}\right..$$

Д.З. Решить уравнения

$$\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{13-x}{3};\ \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{7-x}{3}.$$

График функции $\begin{cases} y=\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)=\left[\begin{array}{l} x+4k, \\ -x+4k\end{array}\right. \\ 0\le y\le 2\end{cases}$ *(четная пила)*

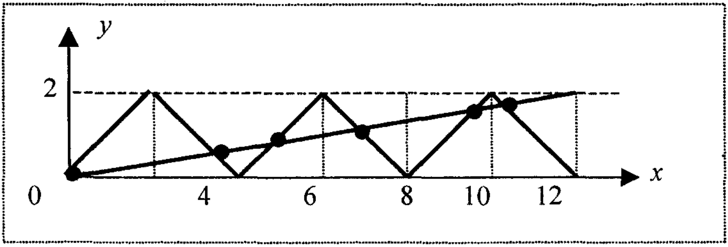


22. Найти число решений уравнения $\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{x}{6}$.

ОДЗ $0\le\frac{x}{6}\le 2 \Rightarrow 0\le x\le 12$.

Графический метод: $y_л = y_п$.

$y_л=\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)$ – четная пила; $\begin{cases} y_п=\frac{x}{6} \\ 0\le x\le 12 \end{cases}$ – отрезок прямой:



6 решений.

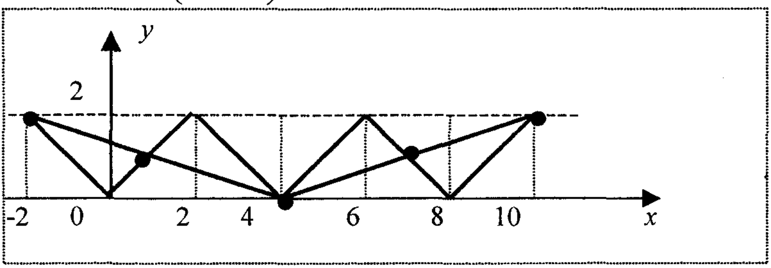
Д.З. Найти число решений уравнений $\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{x}{5}$; $\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{x}{7}$.

23. Найти число решений уравнения $\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{|x-4|}{3}$.

ОДЗ $\frac{|x-4|}{3}\le 2 \Rightarrow |x-4|\le 6 \Rightarrow -2\le x\le 10$.

Графический метод: $y_л = y_п$.

$y_л=\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)$ – четная пила; $y_п=\frac{|x-4|}{3}$ – галка:



5 решений.

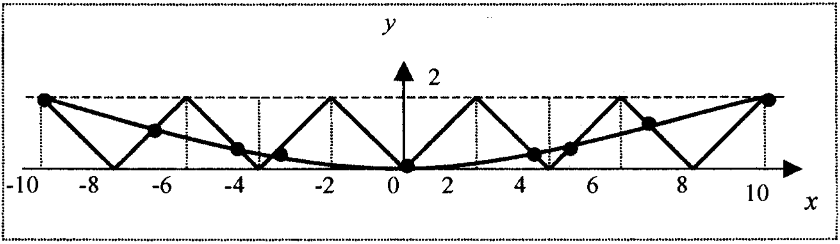
Д.З. Найти число решений уравнения $\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{|x-5|}{4}$.

24. Найти число решений уравнения $\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{x^2}{50}$.

ОДЗ $\frac{x^2}{50}\le 2 \Rightarrow |x|\le 10$.

Графический метод: $y_л = y_п$.

$y_л=\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)$ – четная пила; $y_п=\frac{x^2}{50}$ – парабола:



9 решений.

Д.З. Найти число решений уравнения $\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{x^2}{18}$.

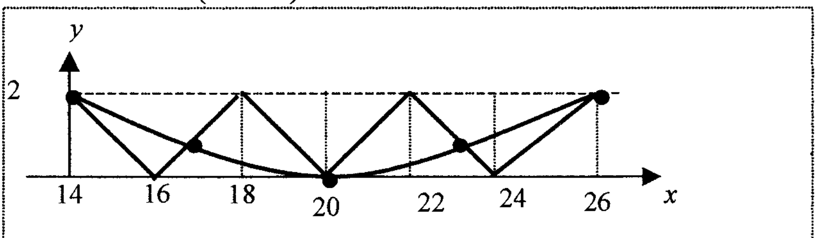
25. Найти число решений уравнения

$$\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{(x-20)^2}{18}.$$

ОДЗ $\frac{(x-20)^2}{18}\le 2 \Rightarrow |x-20|\le 6 \Rightarrow 14\le x\le 26$.

Графический метод: $y_л = y_п$.

$y_л=\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)$ – четная пила; $y_п=\frac{(x-20)^2}{18}$ – парабола:



5 решений.

Д.З. Найти число решений уравнений

$$\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{(x-10)^2}{18};\ \frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{(x-6)^2}{32}.$$

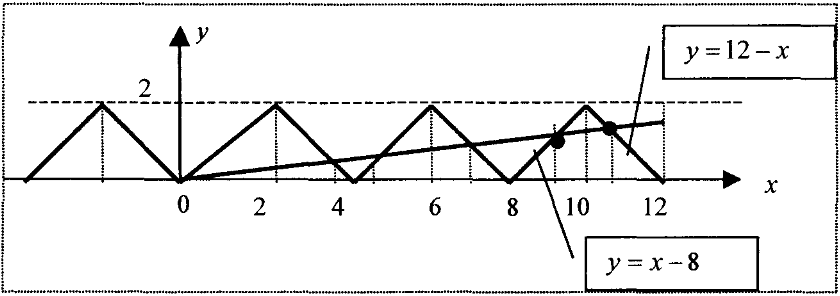
26. Найти два наибольших решения уравнения

$$\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{4}{5}\cos\left(\arccos\frac{x}{12}\right).$$

ОДЗ $|x|\le 12$.

Графический метод: $y_л = y_п$.

$$y_л=\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right) \text{ – четная пила; } \begin{cases} y_п=\dfrac{x}{15} \\ |x|\le 12 \end{cases} \text{ – отрезок прямой:}$$



$$\left[\begin{array}{l} 12-x=\dfrac{x}{15} \\ x-8=\dfrac{x}{15} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^{(1)}{}_{\max}=\dfrac{15}{16}\cdot 12=\dfrac{45}{4}=11\dfrac{1}{4} \\ x^{(2)}{}_{\max}=\dfrac{15}{14}\cdot 8=\dfrac{60}{7}=8\dfrac{4}{7} \end{array}\right..$$

Д.З. Найти два наименьших положительных решения уравнения

$$\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{5}{3}\cos\left(\arccos\frac{x}{10}\right).$$

27. Решить уравнение $\arcsin(\sin 3x)=x$.

ОДЗ $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(\arcsin(\sin 3x))=\sin x \Rightarrow \sin 3x=\sin x$;

$$\left[\begin{array}{l} 3x=x+2\pi k \\ 3x=\pi-x+2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=2\pi k \\ 4x=\pi+2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi k \\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}n \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_{2,3}=\pm\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right..$$

Д.З. Решить уравнения $\arcsin(\sin 4x)=2x$; $\arccos(\cos 5x)=x$; $\arccos(\cos 6x)=3x$.

28. Найти все положительные решения уравнения

$$\arcsin\left[\sin\left(3\pi\cos\left(\arccos\frac{x}{18}\right)\right)\right]=\frac{\pi}{6}.$$

ОДЗ $-18\le x\le 18 \Rightarrow \arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{6}\right)=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi x}{6}=\frac{\pi}{6}+2\pi k\\ \frac{\pi x}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi n\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=1+12k\\ x=5+12n\end{array}\right. \Rightarrow$$ положительные решения:

$$\left[\begin{array}{l}x=1;13\\ x=5;17\end{array}\right..$$

Д.З. Найти все положительные решения уравнения

$$\arccos\left[\cos\left(3\pi\sin\left(\arcsin\frac{x}{18}\right)\right)\right]=\frac{\pi}{6}.$$

Действие прямой тригонометрической функции на обратную

$$\begin{cases}\sin(\arcsin x)=x,\\ |x|\le 1\end{cases} \quad \begin{cases}\cos(\arccos x)=x,\\ |x|\le 1\end{cases}.$$

---

29. Решить уравнение $\cos(\arcsin x)=1-2x$.

ОДЗ $\begin{cases}-1\le x\le 1\\ 0\le 1-2x\le 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1\le x\le 1\\ -1\le -2x\le 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1\le x\le 1\\ 0\le 2x\le 1\end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases}-1\le x\le 1\\ 0\le x\le \frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow 0\le x\le \frac{1}{2}.$$

Уравнять внешнюю функцию с внутренней:

$$\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}=1-2x \Rightarrow \sqrt{1-x^2}=1-2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-x^2=1-4x+4x^2 \Rightarrow 5x^2-4x=0 \Rightarrow x(5x-4)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{4}{5} - \text{постороннее} \\ x=0 \end{array}\right. \Rightarrow x=0.$$

Д.З. Решить уравнения $\cos(\arccos x)=x$; $\cos(\arcsin x)=4x-1$; $\sin(\arccos x)=x$.

30. Решить уравнения $\cos(2\arccos x)=-2x$.

ОДЗ $\begin{cases}-1\le x\le 1\\ -1\le 2x\le 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1\le x\le 1\\ -\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow -\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{1}{2}$.

$\cos(2x)=2\cos^2 x-1 \Rightarrow 2\cos^2(\arccos x)-1=-2x \Rightarrow 2x^2-1= \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x \Rightarrow 2x^2+2x-1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+2}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\approx\dfrac{-1-1{,}7}{2}=-1{,}3 - \text{постороннее} \\ x_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\approx\dfrac{-1+1{,}7}{2}=0{,}4 \end{array}\right. \Rightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

Д.З. Решить уравнение $\cos(2\arcsin x)=2x$; $\dfrac{2\sin(2\arcsin x)}{x}=1$.

31. Найти положительный корень уравнения

$$\sin\left[2\arcsin\left(4\sin\left(\arcsin\frac{x}{120}\right)\right)\right]=\frac{\sqrt{19}\cdot x}{150}.$$

ОДЗ $\begin{cases}|x|\le 120\\ \dfrac{\sqrt{19}}{150}|x|\le 1\end{cases} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{19}}{150}|x|\le 1$.

$$\sin\left[2\arcsin\left(\frac{x}{30}\right)\right]=\frac{\sqrt{19}\cdot x}{150} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{30}\right)\cdot\cos\left(\arcsin\frac{x}{30}\right)=\frac{\sqrt{19}\cdot x}{150} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\frac{x}{30}\cdot\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{30}\right)}=\frac{\sqrt{19}\cdot x}{150} \Rightarrow 2\frac{x}{30}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{30}\right)^2}=\frac{\sqrt{19}\cdot x}{150} \Rightarrow$$

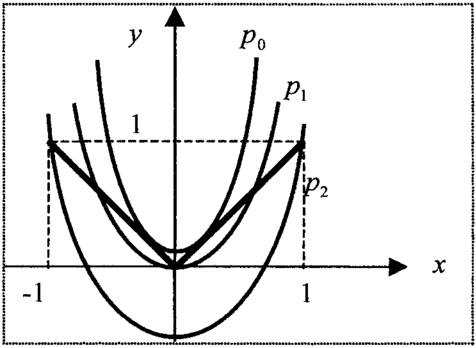
$$\Rightarrow \sqrt{1-\left(\frac{x}{30}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{10} \Rightarrow 1-\left(\frac{x}{30}\right)^2 = \frac{19}{100} \Rightarrow \left(\frac{x}{30}\right)^2 = \frac{81}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{30} = \Rightarrow = \frac{9}{10} \Rightarrow x = 27.$$

Д.3. Найти положительный корень уравнения

$$\sin\left[2\arcsin\left(7\sin\left(\arcsin\frac{x}{140}\right)\right)\right] = \frac{\sqrt{7}\cdot x}{40}.$$

32. При каких значениях параметра p система $\begin{cases} y = \sin(\arcsin|x|), \\ y = 4x^2 - p \end{cases}$ имеет два различных решения?



ОДЗ $|x| \le 1 \Rightarrow \begin{cases} y = |x| \le 1, \\ y = p + 4x^2 \end{cases}$

$p = p_0$: Касание параболы $y = 4x^2 - p$ и прямой $y = x$:

$4x^2 - p = x \Rightarrow 4x^2 - x - p = 0 \Rightarrow D = 1 + 17p_0 = 0 \Rightarrow p_0 = -\frac{1}{17}$.

p_1: Прохождение параболы $y = 4x^2 - p$ через начало координат $(0; 0) \Rightarrow p_1 = 0$.

p_2: Прохождение параболы $y = 4x^2 - p$ через точку $(1; 1) \Rightarrow$ $\Rightarrow 1 = 4 - p_2 \Rightarrow p_2 = 3$.

Два решения при $\left[\begin{array}{l} p_0 \\ p_1 < p \le p_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p_0 = \frac{1}{17} \\ 0 < p \le 3 \end{array}\right.$.

Д.З. При каких значениях параметра p система $\begin{cases} y = \sin\left(\arcsin\dfrac{|x|}{3}\right), \\ y = p + 4x^2 \end{cases}$ имеет два различных решения?

33. При каких значениях параметра p система $\begin{cases} y = \sin(2\arcsin x), \\ x^2 + y^2 = \dfrac{p}{16} \end{cases}$ имеет два различных решения?

ОДЗ $|x| \le 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 2\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin x), \\ x^2 + y^2 = \dfrac{p}{16} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x\cdot\sqrt{1-x^2}, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{p}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 4x^2(1-x^2), \\ x^2 + y^2 = \dfrac{p}{16} \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4x^2(1-x^2) = \frac{p}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^4 - 5x^2 + \frac{p}{16} = 0 \Rightarrow t = x^2 \Rightarrow 4t^2 - 5t + \frac{p}{16} = 0 \Rightarrow D = 25 - p = \Rightarrow$$

$$\Rightarrow = 0 \Rightarrow p = 25,\ t_0 = \frac{5}{8} < 1;$$

два решения $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{5}{8}} \Rightarrow p = 25$.

Д.З. При каких значениях параметра p система $\begin{cases} y = \cos(2\arccos x), \\ x^2 + y^2 = \dfrac{p}{64} \end{cases}$ имеет два различных решения?

34. Решить уравнение $\sin\left(\dfrac{\arccos\left(\dfrac{2}{x}\right)}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{9}{x}}$.

ОДЗ $\begin{cases} x \ge 9 \\ \left|\dfrac{2}{x}\right| \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 9 \\ \dfrac{2}{x} \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 9 \\ x \ge 2 \end{cases} \Rightarrow x \ge 9$.

$$\sin\left(\frac{\arccos\frac{2}{x}}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\left(\arccos\frac{2}{x}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{9}{x}}\quad\Rightarrow\quad\sqrt{\frac{1-\frac{2}{x}}{2}}=\sqrt{\frac{9}{x}}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\frac{2}{x}=\frac{18}{x}\ \Rightarrow\ 1=\frac{20}{x}\Rightarrow\ x=20.$$

Д.З. Решить уравнения

$$\cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{5}{x}\right)}{2}\right)=\sqrt{\frac{9}{x}};\ \sin\left(\frac{\arccos\left(\frac{5}{x}\right)}{2}\right)=\sqrt{\frac{9}{x}}.$$

35. Решить уравнение $\cos\left(\frac{\arcsin\left(\sqrt{1-\frac{49}{36}x^2}\right)}{2}\right)=\frac{5x}{2}$.

ОДЗ $\begin{cases}\frac{49}{36}x^2\le 1\\ 0\le\frac{5x}{2}\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{6}{7}\le x\le\frac{6}{7}\\ 0\le x\le\frac{2}{5}\end{cases}\Rightarrow\ 0\le x\le\frac{2}{5}.$

$$\cos^2\left(\frac{\arcsin\sqrt{1-\frac{49}{36}x^2}}{2}\right)=\left(\frac{5x}{2}\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\cos\left(\arcsin\sqrt{1-\frac{49}{36}x^2}\right)=2\cdot\left(\frac{5x}{2}\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos\left(\arcsin\sqrt{1-\frac{49}{36}x^2}\right)=\frac{25}{2}x^2-1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\pm\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\sqrt{1-\frac{49}{36}x^2}\right)}=\frac{25}{2}x^2-1\ \Rightarrow\ \sqrt{1-1+\frac{49}{36}x^2}=\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\frac{25}{2}x^2\Rightarrow\frac{7}{6}x=1-\frac{25}{2}x^2\ \Rightarrow\ \frac{25}{2}x^2+\frac{7}{6}x-1=0\ \Rightarrow$$

$$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+25\cdot 4\cdot 18}}{50}=\frac{-7\pm 43}{50}=\frac{-7\pm 43}{50}=\left[\begin{array}{l}\frac{18}{25}\\ -1-\text{постороннее}\end{array}\right.$$

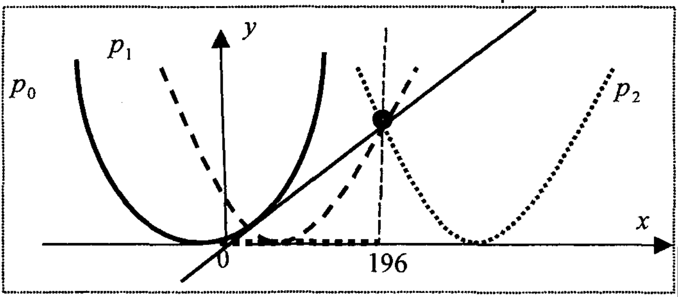
Д.З. Решить уравнения

$$\sin\left(\frac{\arcsin\left(\sqrt{1-\frac{49}{36}x^2}\right)}{2}\right)=\frac{5x}{2};\ \cos\left(\frac{\arcsin\left(\sqrt{1-\frac{49}{100}x^2}\right)}{2}\right)=2x.$$

36. При каких значениях параметра p уравнение $196\sin\left(\arcsin\frac{x}{196}\right)=\frac{(x-p)^2}{4}$ имеет одно решение?

ОДЗ $|x|\le 196 \Rightarrow x=\frac{(x-p)^2}{4}$.

Графический метод: $y_л=x$, $y_п=\frac{(x-p)^2}{4}$.



$$\left[\begin{array}{l}p=p_0\\ p_1<p\le p_2\end{array}\right.$$

p_0: Режим касания параболы и прямой $x=\frac{(x-p)^2}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2-2px+p^2-4x=0 \Rightarrow x^2-2x(p+2)+p^2=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow p_0=-1$.

$p_{1,2}$: Пересечение параболы и прямой в точке $x=196 \Rightarrow$
$196=\frac{(p_{1,2}-196)^2}{4} \Rightarrow |p_{1,2}-196|=2\cdot 14 \Rightarrow p_{1,2}=196\mp 2\cdot 14$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l}p=-1\\ 168<p\le 224\end{array}\right.$.

Д.З. При каких значениях параметра уравнение $16\sin\left(\arcsin\dfrac{x}{4}\right)=(x-p)^2$ имеет одно решение?

37. Решить уравнение $6\arcsin x+3\arccos x=2\pi$.

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x \quad\Rightarrow\quad 3\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)+6\arcsin x=2\pi \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\arcsin x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \arcsin x=\frac{\pi}{6}.$$

Уравнять внешние функции: $\arcsin x=\arcsin\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Д.З. Решить уравнение

$$8\arcsin x+4\arccos x=\pi;\ \arccos x=\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right).$$

38. Решить уравнение $9(\arcsin x)^2-9\pi\cdot\arcsin x-4\pi^2=0$.

Замена: $t=\arcsin x \Rightarrow \begin{cases}9t^2-9\pi\cdot t-4\pi^2=0,\\ -\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$

$$t_{1,2}=\frac{9\pi\pm\sqrt{81\pi^2+9\cdot16\pi^2}}{18}=\frac{9\pi\pm3\pi\sqrt{9+16}}{18}=\frac{3\pi\pm5\pi}{6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=\dfrac{4\pi}{3}-\text{посторонний}\\ t_2=-\dfrac{\pi}{3}\end{array}\right. \Rightarrow t=-\frac{\pi}{3} \Rightarrow \arcsin x=-\frac{\pi}{3}.$$

Уравнять внешние функции:

$$\arcsin x=\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow x=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Д.З. Решить уравнения $9(\arccos x)^2-9\pi\cdot\arccos x-4\pi^2=0$; $9(\arccos x)^2-3\pi\cdot\arccos x-2\pi^2=0$.

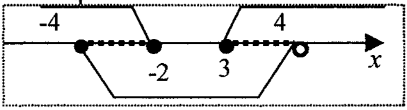
39. Решить уравнение

$$\frac{\arccos x}{\pi}+\left(\frac{\arccos x}{\pi}\right)^2+\left(\frac{\arccos x}{\pi}\right)^3+\ldots=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{\dfrac{\arccos x}{\pi}}{1-\dfrac{\arccos x}{\pi}}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2\frac{\arccos x}{\pi}=1-\frac{\arccos x}{\pi} \Rightarrow \arccos x=\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Д.З. Решить уравнение $\frac{\arcsin x}{\pi}-\left(\frac{\arcsin x}{\pi}\right)^2+\left(\frac{\arcsin x}{\pi}\right)^3-\ldots=1$.

40. Найти ОДЗ функции $y=\sqrt{\frac{x^2-x-6}{\arccos^2\frac{x}{4}}}$.



$$\begin{cases} x^2-x-6\ge 0, \\ -1\le\frac{x}{4}<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge 3 \\ x\le -2 \end{array}\right. \\ -4\le x<4 \end{cases},$$

$$\left[\begin{array}{l} 3\le x<4 \\ -4\le x\le -2 \end{array}\right..$$

Д.З. Найти ОДЗ функции $y=\sqrt{\frac{\arcsin^2\left(\frac{x}{2}-5\right)}{-x^2+17x-70}}$.

41. Решить неравенство $\arccos(2x-1)\le\arccos(1-2x)$.

ОДЗ $\begin{cases} -1\le 2x-1\le 1 \\ -1\le 1-2x\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\le 2x\le 2 \\ -2\le -2x\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 1\ge x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow 0\le x\le 1.$

Внешняя функция arccos – убывающая $\Rightarrow$ аргументы сопоставляются в обратном направлении:

$$\begin{cases} 2x-1\ge 1-2x, \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x\ge 2, \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge\frac{1}{2}, \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \Rightarrow 0\le x\le\frac{1}{2}.$$

Д.З. Решить неравенства $\arcsin(4x-3)\le\arcsin(3-4x)$; $\arccos\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)\ge\arccos\frac{2}{3}$.

42. Решить неравенство $\arccos x<\frac{5\pi}{6}$.

ОДЗ $-1\le x\le 1 \Rightarrow \arccos x<\pi-\frac{\pi}{6}=\arccos\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \arccos x<\arccos\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right) \Rightarrow x>\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x>-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1\le x\le 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}<x\le 1.$$

Д.З. Решить неравенства $\arcsin x > \frac{\pi}{4}$; $\arccos x > \frac{3\pi}{4}$.

43. Решить неравенство $\arccos x > \frac{1}{2}$.

ОДЗ $-1 \le x \le 1$.

Уравнять внешние функции: $\arccos x > \arccos\left(\cos\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x < \cos\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x < \cos\frac{1}{2} \\ -1 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow -1 \le x < \cos\frac{1}{2}.$$

Д.З. Решить неравенства $\arccos x < \frac{1}{3}$; $\arcsin x < \frac{1}{4}$.

44. Решить неравенство $\arccos(\log_2 x) \le \frac{\pi}{2}$.

ОДЗ $-1 \le \log_2 x \le 1 \Rightarrow \log_2\frac{1}{2} \le \log_2 x \le \log_2 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le x \le 2$.

Уравнять внешние функции: $\arccos(\log_2 x) \le \arccos 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_2 x \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \frac{1}{2} \le x \le 2 \end{cases} \Rightarrow 1 \le x \le 2.$$

Д.З. Решить неравенство $\arcsin\left(\log_2\sqrt{x}\right) \le \frac{\pi}{6}$.

45. Найти длину решения неравенства

$$9(\arcsin x)^2 - 9\pi\cdot\arcsin x - 4\pi^2 \le 0.$$

Замена: $t = \arcsin x \Rightarrow \begin{cases} 9t^2 - 9\pi\cdot t - 4\pi^2 \le 0, \\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Корни уравнения

$$t_{1,2} = \frac{9\pi \pm \sqrt{81\pi^2 + 9\cdot 16\pi^2}}{18} = \frac{9\pi \pm 3\pi\sqrt{9+16}}{18} = \frac{3\pi \pm 5\pi}{6};$$

$$\left[\begin{aligned} t_1 &= \frac{4\pi}{3} \\ t_2 &= -\frac{\pi}{3} \end{aligned}\right. \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{4\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Возврат в исходную переменную: $-\frac{\pi}{3} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$.

Уравнять внешние функции: $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \le \arcsin x \le \arcsin 1$.

Внешняя функция arcsin – возрастающая $\Rightarrow$ аргументы сопоставляются в том же направлении: $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le 1 \Rightarrow L = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Д.З. Найти длину решения неравенств

$$9(\arccos x)^2 - 9\pi \cdot \arccos x - 4\pi^2 \ge 0;$$

$$9(\arccos x)^2 - 3\pi \cdot \arccos x - 2\pi^2 \le 0.$$

46. Решить неравенство $\arcsin(\arcsin x) + \frac{\pi}{6} \ge 0$.

ОДЗ $-1 \le \arcsin x \le 1 \Rightarrow \arcsin(-\sin 1) \le \arcsin x \le \arcsin(\sin 1)$.

Функция arcsin – возрастающая $\Rightarrow$ аргументы сопоставляются в том же направлении: $-\sin 1 \le x \le \sin 1$.

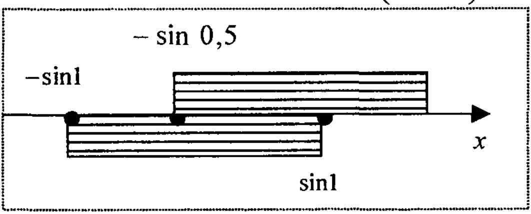
$\arcsin(\arcsin x) \ge -\frac{\pi}{6}$.

Уравнять внешние функции: $\arcsin(\arcsin x) \ge \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \arcsin x \ge -\frac{1}{2}$.

Уравнять внешние функции: $\arcsin x \ge \arcsin\left(-\sin\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \ge -\sin\frac{1}{2} \\ -\sin 1 \le x \le \sin 1 \end{cases} \Rightarrow$$



$\Rightarrow -\sin\frac{1}{2} \le x \le \sin 1$.

Д.З. Решить неравенство $\arccos(\arccos x) \le \frac{\pi}{6}$.

15. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Производная степенной функции:

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1},$$

$$(x)' = 1,\ \left(x^3\right)' = 3x^2,\ \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}},$$

$$(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x.$$

Производная сложной функции:

$$\left(y(u(x))\right)'_x = y'_u\cdot u'_x,$$

$$(\sin 3x)' = 3\cos 3x,\ \left((2-3x)^2\right)' = 2(2-3x)\cdot(-3) = -6(2-3x).$$

Производная произведения:

$$\left(U(x)\cdot V(x)\right)' = U'\cdot V + U\cdot V',\ (x\sin x)' = \sin x + x\cos x.$$

1. Найти производную функции $9\sin(3x) - 7\cos(6x)$ в точке $x = 0$.

$y'(x) = 27\cos(3x) + 42\sin(6x) \Rightarrow y'(0) = 27$.

Д.З. Найти производную функции $3\sin(7x) - 2\sin(4x)$ в точке $x = 0$.

2. Найти производную функции $y = x^3\cdot(2-3x)^2$.

$\left(x^3\cdot(2-3x)^2\right)' = 3x^2(2-3x)^2 + x^3\cdot 2(2-3x)(-3) =$
$= 3x^2(2-3x)^2 - 6x^3(2-3x) = x^2(2-3x)(3(2-3x)-6x) = 3x^2(2-3x)(2-9x).$

Д.З. Найти производную функции

$$y = x^2\cdot(3-4x)^3;\ y = x^2\cdot\sin 3x.$$

3. Найти производную функции

$\sin x + \sin 5x + \sin 9x + \ldots + \sin 49x + \sin 53x$ в точке $x = 0$.

$y'(x) = \cos x + 5\cos 5x + 9\cos 9x + \ldots + 49\cos 49x + 53\cos 53x$.

$y'(0) = 1 + 5 + 9 + \ldots + 49 + 53$ – арифметическая прогрессия.

$$\left\{a_1 = 1;\ d = 4;\ \text{число шагов} = \frac{53-1}{4} = 13,\ n = 14\right\};$$

$$S_{14} = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14 = \frac{1+53}{2} \cdot 14 = 27 \cdot 14.$$

Д.З. Найти производную функции

$\cos x + \cos 5x + \cos 9x + \ldots + \cos 49x + \cos 53x$ в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Д.З. Найти производную функции
$\sin x + \sin 7x + \sin 13x + \ldots + \sin 43x + \sin 49x$ в точке $x = \pi$.

4. Найти производную функции
$6\left(x - x^5 + x^{25} - x^{125} + \ldots + x^{\left(5^8\right)} - x^{\left(5^9\right)} + x^{\left(5^{10}\right)}\right)$ в точке $x = 1$.
$y'(x) = 6\left(1 - 5x^4 + 25x^{24} - 125x^{124} + \ldots + 5^8 x^{\left(5^8-1\right)} - 5^9 x^{\left(5^9-1\right)} + 5^{10} x^{\left(5^{10}-1\right)}\right);$

$$y'(1) = 6\left(1 - 5 + 25 - 125 + \ldots + 5^8 - 5^9 + 5^{10}\right) =$$

$$= \left\{b_1 = 1;\ q = -5;\ n = 11\right\} = 6 \cdot \frac{1-(-5)^{11}}{1-(-5)} = 5^{11} + 1.$$

Д.З. Найти производную функции

$8(x - x^7 + x^{49} - x^{343} + \ldots + x^{\left(7^{10}\right)} - x^{\left(7^{11}\right)} + x^{\left(7^{12}\right)})$ в точке $x = 1$.

Д.З. Найти значение производной функции
$y(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + \ldots + \dfrac{x^8}{8}$ в точке $x = 2$.

Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = y(x)$ в точке x_0: $k = y'(x_0)$

5. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 40x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8$ при $x = 1$.

$$y'(x) = 40 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + 6x^5 - 7x^6 + 8x^7;$$

$$k = y'(1) = 40 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 = 40 + 2 + 1 + 1 + 1 = 45.$$

Д.З. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 20x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6$ при $x = 1$.

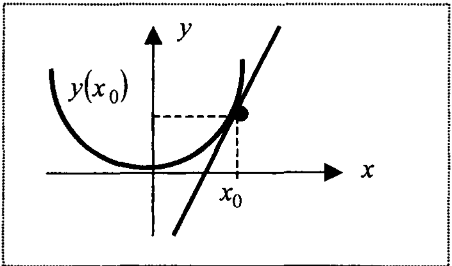
6. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + \ldots$ при $x = \dfrac{1}{2}$.

$$y'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \Rightarrow y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

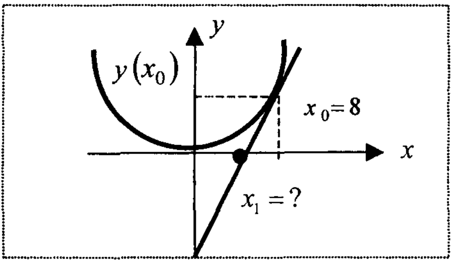
Д.З. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots$ при $x = \dfrac{1}{4}$.

Уравнение касательной к графику функции $y = y(x)$ в точке x_0:

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$$



7. Касательная к графику функции $y = x^4$, проведенная через точку этого графика с абсциссой $x = 8$, пересекает ось абсцисс в точке $x = \ldots$.

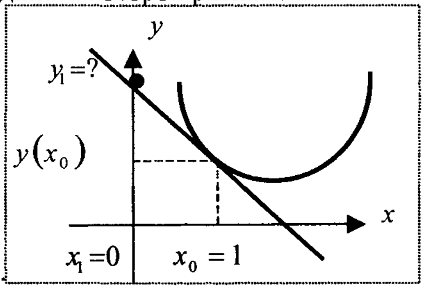


$$y = 8^4 + 4 \cdot 8^3 (x - 8) \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 8^4 + 4 \cdot 8^3 (x_1 - 8) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 + 4(x_1 - 8) = 0 \Rightarrow 4x_1 = 32 - 8 = 24 \Rightarrow x_1 = 6.$$

Д.З. Касательная к графику функции $y=x^5$, проведенная через точку этого графика с абсциссой $x=10$, пересекает ось абсцисс в точке $x=\dots$.

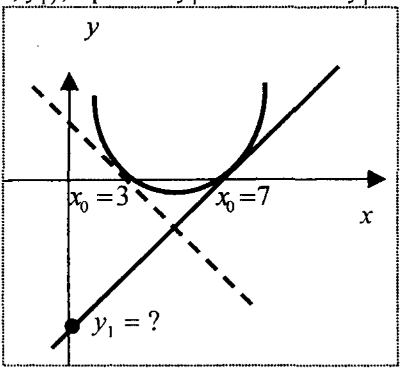
8. Касательная к графику функции $y=10x^2-4x^5-x-4$, касающаяся этого графика в точке с абсциссой $x_0=1$, пересекает ось ординат в точке, ордината которой равна… .



$x_0=1,\ x_1=0\ \Rightarrow\ y'(x)=20x-20x^4-1\ \Rightarrow\ y'(1)=20-20-1=-1\ \Rightarrow$
$\Rightarrow y_1=y(1)+y'(1)(0-1)=y(1)-y'(1)=(10-4-1-4)-(20-20-1)=2$.

Д.З. Касательная к графику функции $y=15x^3-9x^5-2x-1$, касающаяся этого графика в точке с абсциссой $x_0=1$, пересекает ось ординат в точке, ордината которой равна… .

9. Прямая, касающаяся графика параболы $y=x^2-10x+21$ в точке, лежащей на оси абсцисс, пересекает ось ординат в точке $(0;y_1)$, причем $y_1<0$. Найти y_1.



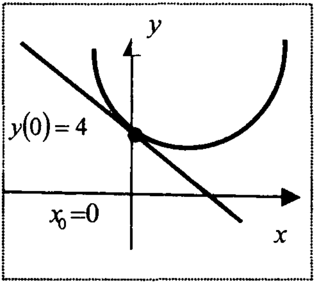
$y(x_0)=0\ \Rightarrow\ x^2-10x+21=0\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=3-\text{посторонний}\\ x_0=7\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1=0+y'(7)(0-7)=-7\cdot y'(7)=-7\cdot(2\cdot7-7)=-14.$$

Д.З. Прямая, касающаяся графика параболы $y = x^2 - 4x + 3$ в точке, лежащей на оси абсцисс, пересекает ось ординат в точке $(0; y_1)$, причем $y_1 < 0$. Найти y_1.

10. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 5x + 4$, проведенной через точку пересечения этого графика с осью ординат.

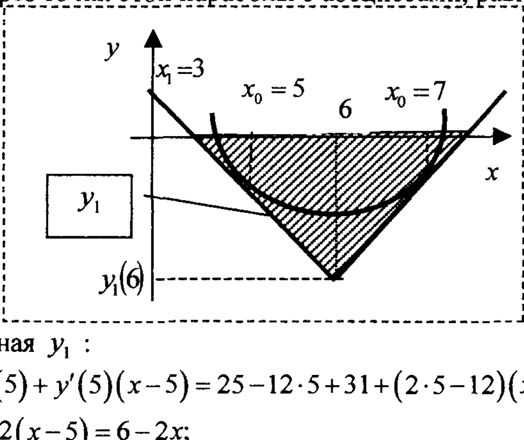


$x_0 = 0$, $y(0) = 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = y(0) + y'(0)(x - 0) = 4 + (-5)x = 4 - 5x.$$

Д.З. Составить уравнение касательной к графику функции $y = -x^2 - 3x + 4$, проведенной через точку пересечения этого графика с осью ординат.

11. Найти площадь треугольника, ограниченного отрезком оси абсцисс и отрезками касательных к параболе $y = x^2 - 12x + 31$, проведенных через точки этой параболы с абсциссами, равными 5 и 7.



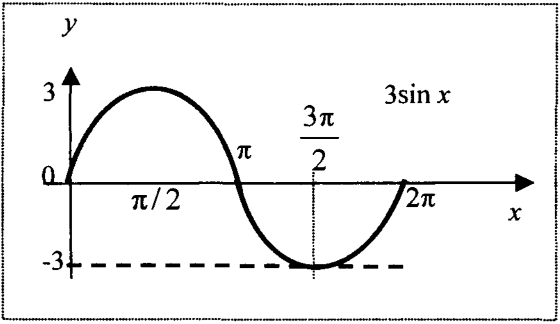
Касательная y_1 :

$$y_1 = y(5) + y'(5)(x - 5) = 25 - 12 \cdot 5 + 31 + (2 \cdot 5 - 12)(x - 5) =$$
$$= -4 - 2(x - 5) = 6 - 2x;$$

$$y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \Rightarrow y_1(6) = 6 - 2 \cdot 6 = -6 \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 = 18.$$

Д.З. Найти площадь треугольника, ограниченного отрезком оси абсцисс и отрезками касательных к параболе $y=-x^2+10x-16$, проведенных через точки этой параболы с абсциссами, равными 4 и 6.

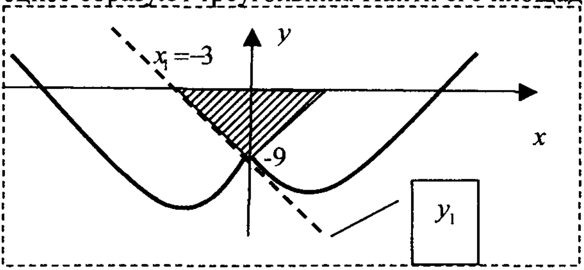
12. Прямая, касающаяся графика функции $y=3\sin x$ в точке с абсциссой $x=\frac{3\pi}{2}$, пересекает ось ординат в точке $(0;\, y_1)$. Найти y_1.



$y_1=-3$

Д.З. Прямая, касающаяся графика функции $y=\sin x$ в точке с абсциссой $x=\frac{7\pi}{2}$, пересекает ось ординат в точке $(0;\, y_1)$. Найти y_1.

13. Отрезки касательных к параболам $y=x^2-3x-9$ и $y=x^2+3x-9$, касающихся парабол в точке $x=0$, вместе с отрезком оси абсцисс образуют треугольник. Найти его площадь.



Касательная y_1 :

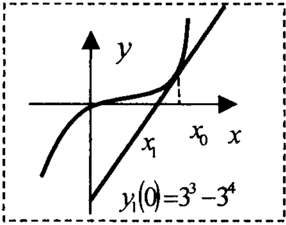
$y_1(0)=-9 \Rightarrow\ y_1=y(0)+y'(0)(x-0)=-9-3(x-0)=-9-3x\ \Rightarrow\ x_1=-3 \Rightarrow$

$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 9=27$.

Д.З. Отрезки касательных к параболам $y=x^2-4x-10$ и $y=x^2+4x-10$, касающихся парабол в точке $x=0$, вместе с отрезком оси абсцисс образуют треугольник. Найти его площадь.

14. Найти площадь треугольника, ограниченного отрезками оси абсцисс и ординат и отрезком касательной к $y=x^3$, проведенной через точку этого графика абсциссой $x=3$.

$$y=y(3)+y'(3)(x-3)=3^3+3\cdot 3^2(x-3)=3^3-3^4+3^3\cdot x;$$

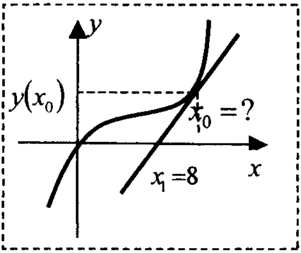


$$x_1=\frac{3^4-3^3}{3^3}=3-1=2 \Rightarrow S=\frac{1}{2}\left(3^4-3^3\right)2=3^4-3^3=54.$$

Д.З. Найти площадь треугольника, ограниченного отрезками оси абсцисс и ординат и отрезком касательной к графику функции $y=\dfrac{x^2}{2}$, проведенной через точку этого графика абсциссой $x=2$.

Д.З. Написать уравнение касательной к графику функции $y=0{,}5\cdot\sin(8x)$ в точке $x=0$.

15. Касательная к графику функции $y=x^3$, пересекающая ось абсцисс в точке $x_1=8$, касается графика в точке $(x_0;y_0)$. Найти x_0.



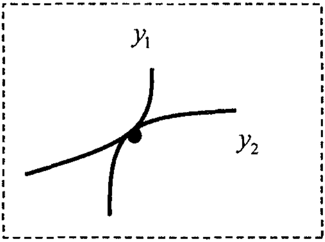
$$0=y(x_0)+y'(x_0)(8-x_0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0={x_0}^3+3{x_0}^2(8-x_0) \Rightarrow 24{x_0}^2-2{x_0}^3=0 \Rightarrow 2{x_0}^2(12-x_0)=0 \Rightarrow$$

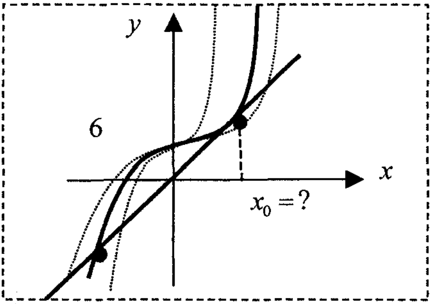
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=12 \end{array}\right..$$

Д.З. Касательная к графику функции $y=x^8$, пересекающая ось абсцисс в точке $x_1=21$, касается графика в точке $(x_0;y_0)$. Найти x_0.

Касание двух произвольных функций y_1 *и* y_2: $\begin{cases} y_1 = y_2, \\ y_1' = y_2'. \end{cases}$



16. Уравнение $x = kx^5 + 6$ имеет два корня. Чему равен наибольший?

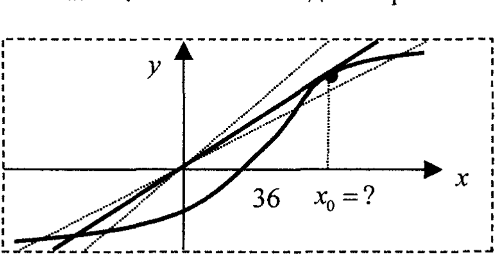


Режим касания: $\begin{cases} x = kx^5 + 6, \\ 1 = 5kx^4 \end{cases} \Rightarrow k = \dfrac{1}{5x^4} \Rightarrow x = \dfrac{x}{5} + 6 \Rightarrow \dfrac{4x}{5} = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{15}{2}$.

Д.З. Уравнение $x = kx^9 + 10$ имеет два корня. Чему равен наибольший?

17. Уравнение $kx = \sqrt[11]{x - 36}$ имеет два корня. Чему равен наибольший?



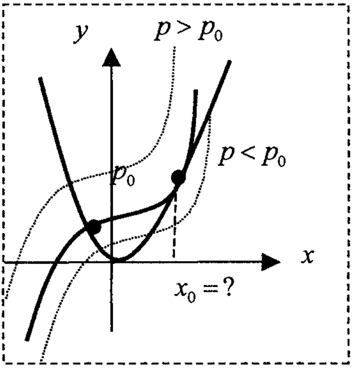
Режим касания:

$$\begin{cases} kx = (x-36)^{1/11}, \\ k = \frac{1}{11}(x-36)^{-10/11} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{11}\cdot\frac{x}{(x-36)^{10/11}} = (x-36)^{1/11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{11}\cdot x = x-36 \Rightarrow \frac{10}{11}x = 36 \Rightarrow x = 36\cdot\frac{11}{10} = \frac{18\cdot 11}{5}.$$

Д.З. Уравнение $kx = \sqrt[9]{x-72}$ имеет два корня. Чему равен наибольший?

18. При каком значении параметра p уравнение $81x^6 = 2x^9 + p$ ($p > 0$) имеет два различных корня?



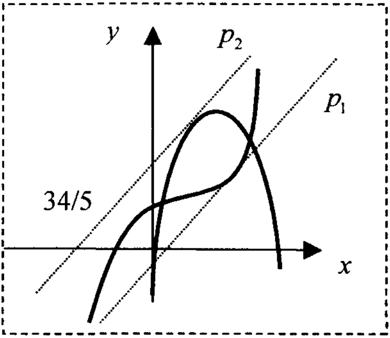
Режим касания:

$$\begin{cases} 81x^6 = 2x^9 + p, \\ 81\cdot 6x^5 = 2\cdot 9x^8 \end{cases} \Rightarrow 27 = x^3 \Rightarrow x = 3;$$

$$p_0 = 81\cdot 3^6 - 2\cdot 3^9 = 3^4\cdot 3^6 - 2\cdot 3^9 = 3^9.$$

Д.З. При каком значении параметра p уравнение $104\cdot x^{10} = 10x^{13} + p$ имеет два различных корня?

19. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} \frac{34}{5} + \frac{x^5}{5} \le y \le 3x - x^2 + 8, \\ y = x + p \end{cases}$ имеет одно решение.



p_1: Режим касания (общая схема): $y=\frac{34}{5}+\frac{x^5}{5}$ и $y=x+p$ $\Rightarrow$

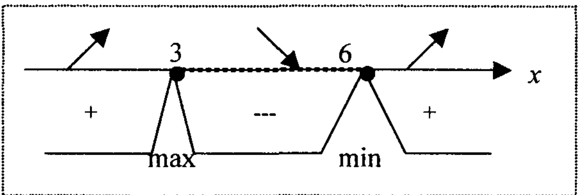
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{34}{5}+\frac{x^5}{5}=x+p \\ x^4=1 \end{cases} \Rightarrow x=1 \Rightarrow \frac{34}{5}+\frac{1}{5}=1+p_1 \Rightarrow p_1=6.$$

p_2: Режим касания параболы и прямой: $y=3x-x^2+8$ и $y=x+p$ $\Rightarrow$ $3x-x^2+8=x+p$ $\Rightarrow$ $x^2-2x+p-8=0$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow D=1-p+8=0 \Rightarrow p_2=9$.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых система $\begin{cases} \frac{11}{6}+\frac{x^6}{6} \le y \le 3x-x^2+8, \\ y=x+p \end{cases}$ имеет одно решение.

20. Найти интервал убывания функции $y=2x^3-27x^2+108x$.

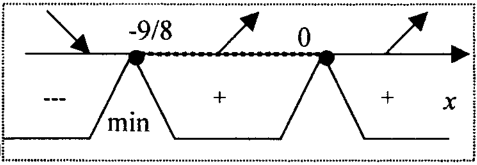
$y'=6x^2-54x+108=6(x^2-9x+18)=6(x-3)(x-6)$.



$3<x<6$.

Д.З. $y=2x^3-27x^2+84x$; $y=2x^3-21x^2+72x$.

21. Найти число экстремумов функции $y=2x^4+3x^3-4$.



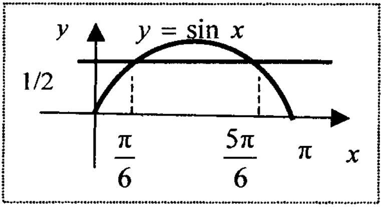
$y' = 8x^3 + 9x^2 = x^2(8x+9)$

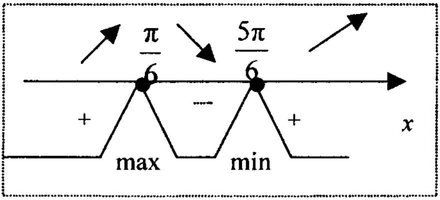
1 экстремум.

Д.З. Найти число экстремумов функции $y = 2x^5 + 3x^3 - 5$; $y = 2x^6 + 4x^3 - 3$.

22. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{x}{2} + \cos x$ на интервале $[0; \pi]$.

$$y' = \frac{1}{2} - \sin x = 0 \;\Rightarrow\; \sin x = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{6} - \max \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} - \min \end{array}\right. \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{\pi}{6} \;\Rightarrow$$



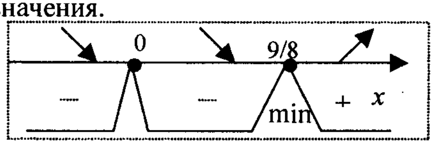


$$y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$y_{\min} = y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{12} + \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{12} - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Д.З. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{x}{2} - \sin x$ на интервале $[0; \pi]$.

23. Найти значение x, при котором функция $y = 2x^4 - 3x^3 - 4$ достигает наименьшего значения.



$y' = 8x^3 - 9x^2 = x^2(8x-9)$ $\quad x_0 = \frac{9}{8}$.

Д.З. Найти значение x, при котором функция $y = 2x^5 + 3x^3 - 5$ достигает наименьшего значения.

24. Найти значение x, при котором функция $y = \sqrt{x} + \sqrt{6-3x}$ достигает своего наибольшего значения.

$$\text{ОДЗ } \begin{cases} x \geq 0, \\ 6 - 3x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \ 0 \leq x \leq 2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-3}{2\sqrt{6-3x}} = \frac{\sqrt{6-3x} - 3\sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{6-3x}} = 0;$$

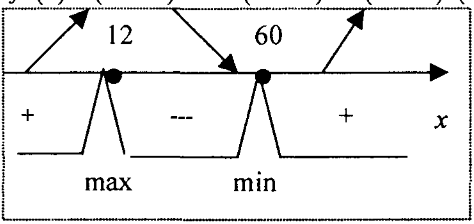
$$\sqrt{6-3x} - 3\sqrt{x} = 0 \ \Rightarrow \ \sqrt{6-3x} = 3\sqrt{x} \ \Rightarrow 6 - 3x = 9x \ \Rightarrow \ x_0 = \frac{1}{2}.$$

Д.З. Найти значение x, при котором функция $y = \sqrt{4x} + \sqrt{20-16x}$ достигает своего наибольшего значения.

25. Студент собирается потратить 60 у.е. на летнее обучение. Часть средств, x у.е., необходимо потратить на проживание, остальное, y у.е., – на оплату образовательной программы, причем качество обучения пропорционально $x \cdot y^4$. Сколько у.е. следует потратить на проживание?

$$\begin{cases} x + y = 60, \\ f(x) = x \cdot y^4 \end{cases} \Rightarrow \ y = 60 - x \Rightarrow f(x) = x \cdot (60 - x)^4;$$

$$f'(x) = (60 - x)^4 - 4x(60 - x)^3 = (60 - x)^3 (60 - 5X).$$



$x_0 = 12$.

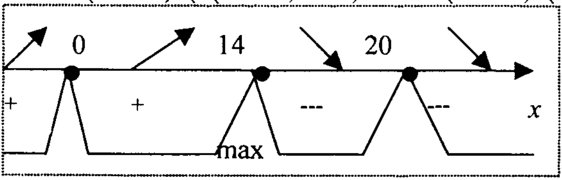
Д.З. Студент собирается потратить 112 у.е. на летнее обучение. Часть средств, x у.е., необходимо потратить на проживание, остальное, y у.е., – на оплату образовательной программы, причем качество обучения пропорционально $x \cdot y^6$. Сколько у.е. следует потратить на образовательную программу?

26. Найти значение x, при котором функция $7\log_3 x + 3\log_3(20 - x)$ достигает своего наибольшего значения.

$$y = \log_3 x^7 + \log_3 (20-x)^3 = \log_3 \left[x^7 (20-x)^3\right] = \log_3 f(x).$$

Внешняя функция: $\log_3$ – монотонно возрастающая: точка максимума внутренней функции $f(x) = x^7(20-x)^3$ совпадает с точкой максимума внешней функции $\log_3$.

$$f'(x) = 7x^6(20-x)^3 - 3x^7(20-x)^2 =$$
$$= x^6(20-x)^2(7(20-x)-3x) = 10x^6(20-x)^2(14-x).$$



$x_0 = 14$.

Д.З. Найти значение x, при котором функция $7\log_7 x + 5\log_7 (24-x)$ достигает своего наибольшего значения.

27. Найти значение x, при котором функция $\left(2^{x^3}\right)^{(30-x)^7}$ достигает своего наибольшего значения.

$$\left(2^{x^3}\right)^{(30-x)^7} = 2^{x^3(30-x)^7}.$$

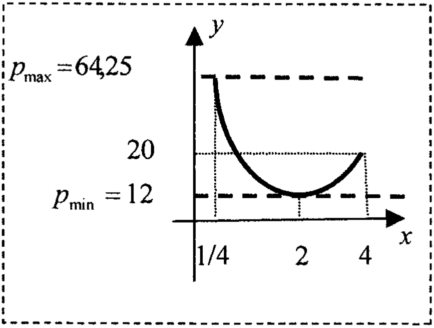
Внешняя функция: $2^{f(x)}$ – монотонно возрастающая, точка максимума внутренней функции $f(x) = x^3(30-x)^7$ совпадает с точкой максимума внешней функции $2^{f(x)}$ (предыдущая задача).

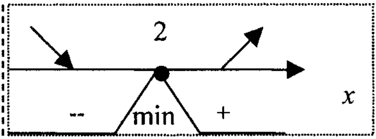
Д.З. Найти значение x, при котором функция $\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^{x^3(30-x)^7}$ достигает своего наименьшего значения.

28. При каких значениях параметра p уравнение $x^2 + \dfrac{16}{x} = p$ имеет хотя бы один корень на промежутке $\left[\dfrac{1}{4}; 4\right]$?

Графический метод: $y_л = x^2 + \dfrac{16}{x}$, $y_п = p$.

$$y_л' = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2(x^3-8)}{x^2} = 0 \Rightarrow x_0^{\,3} = 8 \Rightarrow x_0 = 2 \Rightarrow$$

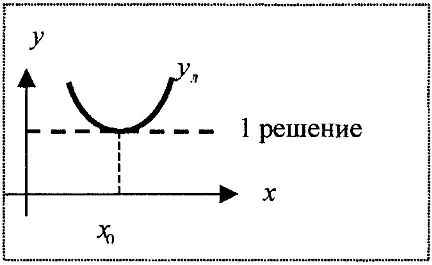




$$y_{\min} = y(2) = 4 + 8 = 12 \;\Rightarrow\; 12 \le p \le 64{,}25.$$

Д.З. При каких значениях параметра p уравнение $x^2 + \dfrac{8}{x^2} = p$ имеет хотя бы один корень на промежутке $\left[\dfrac{1}{4};\, 4\right]$?

29. Найти значение параметра a, при котором уравнение $x + \dfrac{1024}{\sqrt{x}} = a$ имеет одно решение.



Графический метод: $y_л = x + \dfrac{1024}{\sqrt{x}} = x + 1024 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$.

$$y_л' = 1 - \frac{1}{2} \cdot 1024 \cdot x^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{512}{x^{\frac{3}{2}}} = 0 \;\Rightarrow\; x_0^{\frac{3}{2}} = 512 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = (512)^{\frac{2}{3}} = 8^2 = 64;$$

$$y_л(64) = 64 + \frac{1024}{8} = 64 + 253 = 317 \;\Rightarrow\; a_{\min} = 317.$$

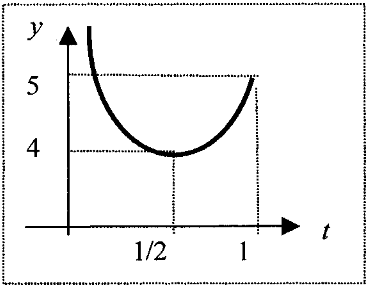
Д.З. Найти значение параметра a, при котором уравнение $x + \dfrac{768}{\sqrt[3]{x}} = a$ имеет одно решение.

30. Найти значения параметра p, при которых уравнение $4\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x} = p$ не имеет решений.

Замена: $t = \sin^2 x \Rightarrow \begin{cases} 4t + \dfrac{1}{t} = p, \\ 0 < t \le 1. \end{cases}$

Графический метод: $y_л = 2t + \dfrac{1}{t}$, $y_п = p$.

$y_л' = 4 - \dfrac{1}{t^2} = 0 \Rightarrow t_0 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y_л\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 + 2 = 4$, $y_л(1) = 4 + 1 = 5$.



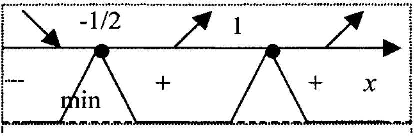
$p < 4$.

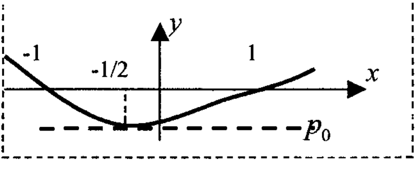
Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $9\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x} = p$ не имеет решений.

31. Найти значения параметра p, при которых уравнение $(x-1)^3(x+1) = p$ имеет одно решение.

Графический метод: $y_л = (x-1)^3(x+1)$, $y_п = p$.

$y_л' = 3(x-1)^2(x+1) + (x-1)^3 = (x-1)^2(3x+3+x-1) = (x-1)^2(4x+2)$.





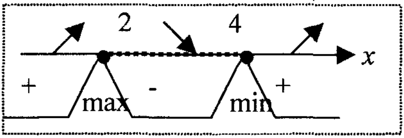
$p_0 = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^3 \dfrac{1}{2} = -\dfrac{27}{16}$.

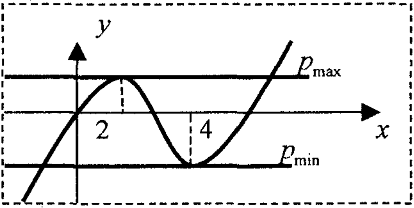
Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $(x-2)^3(x+2)=p$ имеет одно решение.

32. Найти значения параметра p, при которых уравнение $x^3-9x^2+24x=p$ имеет два различных корня.

Графический метод: $y_л=x^3-9x^2+24$, $y_п=p$.

$y_л'=3x^2-18x+24=3\left(x^2-6x+8\right)=3(x-2)(x-4)$.





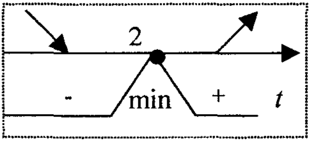
$$\left[\begin{array}{l} p_{\max}=y_л(2)=2\left(2^2-9\cdot 2+24\right)=2\cdot(4-18+24)=20 \\ p_{\min}=y_л(4)=4\left(4^2-9\cdot 4+24\right)=4(16-36+24)=16 \end{array}\right.$$

Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $2x^3-15x^2+36x=p$ имеет два различных корня.

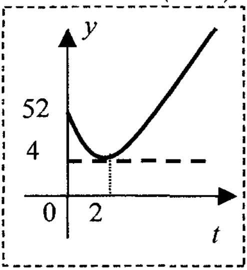
33. Исследовать уравнение $16^x-2^{x+5}+52=p$ на число решений в зависимости от параметра p.

Замена: $t=2^x>0 \Rightarrow t^4-32\cdot t+52=p$.

Графический метод: $y_л=t^4-32\cdot t+52$, $y_п=p$.



$y_л'=4t^3-32=4\left(t^3-8\right) \Rightarrow$

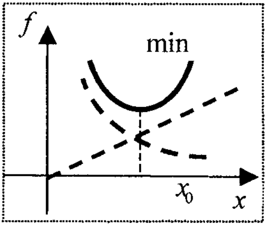


$y_л(2)=2^4-32\cdot 2+52=4$.

$p<4$ – нет решений, $\left[\begin{array}{l} p=4 \\ p\ge 52 \end{array}\right.$ – 1 решение, $4<p<52$ – 2 решения.

Д.З. Найти значения параметра p, при которых уравнение $256^x - 2^{x+3} + 8 = p$ имеет одно решение.

34. Найти наименьшее положительное значение функции $f = x + \dfrac{9}{x}$.



$f' = 1 - \dfrac{9}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad {x_0}^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 3 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow f_{\min} = f(3) = 6$.

Д.З. Найти наименьшее положительное значение функции $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$.

35. Найти наименьшее значение функции $y = 9\operatorname{tg}^2 x + 16\cos^2 x$.

$$y = 9\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) + 16\cos^2 x = 16\cos^2 x + \frac{9}{\cos^2 x} - 9.$$

Замена: $t = \cos^2 x \;\Rightarrow\; y = 16t + \dfrac{9}{t} - 9$.

$y' = 16 - \dfrac{9}{t^2} = 0 \Rightarrow\; {t_0}^2 = \dfrac{9}{16} \;\Rightarrow\; t_0 = \dfrac{3}{4} \;\Rightarrow y_{\min} = y\left(\dfrac{3}{4}\right) = 15$.

Д.З. Найти наименьшее положительное значение функции $y = 8^{\operatorname{tg} x} + 2^{2-3\operatorname{tg} x}$; $y = \log_3\left(x^2\right) + \log_x 81$; $y = -4\log_4(\cos x) - \log_{\cos x} 16$.

36. Найти наименьшее значение функции $y = 48 \cdot \operatorname{tg}^2 x + 81 \cdot \cos^6 x$.

Выход на одну функцию: $y = 48 \cdot \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right) + 81 \cdot \cos^6 x$.

Замена: $t = \cos^2 x \;\Rightarrow\; \begin{cases} y = 81 \cdot t^3 + \dfrac{48}{t} - 48, \\ 0 < t \le 1. \end{cases}$

$y' = 81 \cdot 3 \cdot t^2 - \dfrac{48}{t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad {t_0}^4 = \dfrac{48}{81 \cdot 3} = \dfrac{16 \cdot 3}{81 \cdot 3} = \dfrac{16}{81} \quad \Rightarrow \quad t_0 = \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow y_{\min} = y\left(\dfrac{2}{3}\right) = 48$.

Д.З. Найти наименьшее значение функции

$$y = 768 \cdot tg^2 x + 625 \cdot \cos^6 x.$$

37. Найти наименьшее значение функции $y = \dfrac{5 - 3\cos^2 x}{\sin x}$ на промежутке $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Выход на одну функцию:

$$y = \frac{5 - 3\left(1 - \sin^2 x\right)}{\sin x} = \frac{3\sin^2 x + 2}{\sin x} = 3\sin x + \frac{2}{\sin x}.$$

Замена: $t = \sin x \;\Rightarrow\; \begin{cases} y = 3t + \dfrac{2}{t}, \\ 0 < t \le 1. \end{cases}$

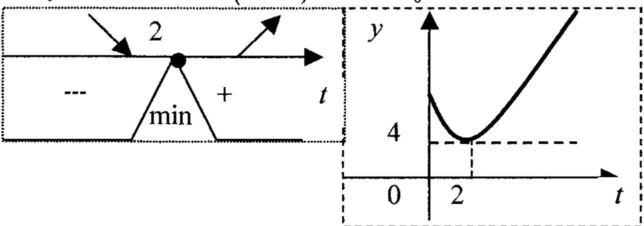
$$y' = 3 - \frac{2}{t^2} = 0 \;\Rightarrow\; t^2 = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; t_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \;\Rightarrow\; y_{\min} = y\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 2\sqrt{6}.$$

Д.З. Найти наименьшее значение функции $y = \dfrac{7 - 4\sin^2 x}{\cos x}$ на промежутке $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

38. Найти наименьшее значение функции $y = 16^x - 2^{x+5} + 52$.

Замена: $t = 2^x \;\Rightarrow\; \begin{cases} y = t^4 - 32t + 52, \\ t > 0. \end{cases}$

$$y' = 4t^3 - 32 = 4\left(t^3 - 8\right) = 0 \;\Rightarrow\; t_0 = 2.$$



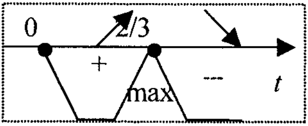
$y_{\min} = y(2) = 4$.

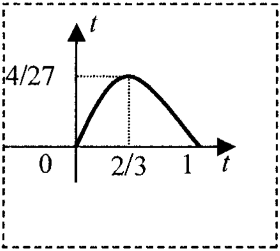
Д.З. Найти наименьшее значение функции $27^{3x} - 3^{x+2} + 13$.

39. Найти наибольшее значение функции $y = \cos^4 x - \cos^6 x$.

Замена: $t=\cos^2 x \Rightarrow \begin{cases} y=t^2-t^3, \\ 0\le t\le 1 \end{cases} \Rightarrow \ y'=2t-3t^2=t(2-3t) \Rightarrow$

$\Rightarrow =0 \Rightarrow t_0=\dfrac{2}{3}$.





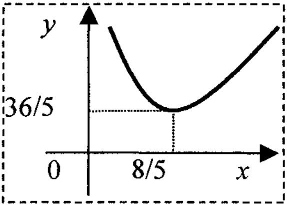
$y_{\min}=y\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{27}$.

Д.З. Найти наибольшее значение функции $y=5\sin^6 x-6\sin^{10} x$.

40. Найти наименьшее значение функции $f=x^2+y^2$ при условии $2x+y=4$.

$y=4-2x \Rightarrow f=x^2+(4-2x)^2=x^2+16-16x+4x^2=$

$\Rightarrow =5x^2-16x+16 \Rightarrow$ парабола усами вверх $x_0=\dfrac{8}{5}$.



$f_{\min}=f\left(\dfrac{8}{5}\right)=\dfrac{36}{5}$.

Д.З. Найти наименьшее значение функции $f=x^2+y^2$ при условии $3x+5y=7$.

41. Найти наименьшее значение функции $f=x^2+y^2$ при условии $x\cdot y=12$.

$$y=\frac{12}{x} \Rightarrow f=x^2+\frac{144}{x^2}, \text{ замена: } t=x^2 \Rightarrow f=t+\frac{144}{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'=1-\frac{144}{t^2}=0 \Rightarrow t^2=144 \Rightarrow t_0=12 \Rightarrow f_{\min}=f(12)=24.$$

Д.З. Найти наименьшее значение функции $f=x^2+y^4$ при условии $x\cdot y=2$.

42. Найти наибольшее значение функции $f = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 2$.

$$y = \sqrt{2 - x^2} \Rightarrow f = x + 2\sqrt{2 - x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f' = 1 - 2\frac{x}{\sqrt{2 - x^2}} = \frac{\sqrt{2 - x^2} - 2x}{\sqrt{2 - x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{2 - x^2} - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2 - x^2} = 2x \Rightarrow 2 - x^2 = 4x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{5} \Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{\max} = f\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = \sqrt{10}.$$

Д.З. **Найти наибольшее значение функции $f = 2x + 3y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.**

Д.З. **Найти наибольшее значение функции $f = x^2 \cdot y^4$ при условии $x^2 + y^2 = 1$**

43. Условия размещения вклада в паевом фонде таковы, что первые 4 года вклад уменьшается на $3x\%$ в год, последующие 5 лет вклад увеличивается на $6x\%$ в год, причем величину x вы можете выбирать сами. При каком значении x через 9 лет прирост вклада будет наибольшим?

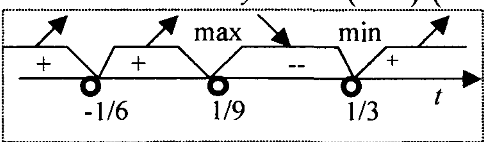
$$y = a\left(1 - \frac{3x}{10^2}\right)^4 \cdot \left(1 + \frac{6x}{10^2}\right)^5.$$

Обозначение $\frac{x}{100} = t \Rightarrow y = a \cdot (1 - 3t)^4 \cdot (1 + 6t)^5$.

Исследование на экстремум:

$$y' = a \cdot \left[-12(1 - 3t)^3 \cdot (1 + 6t)^5 + 30(1 - 3t)^4 \cdot (1 + 6t)^4\right];$$

$$y' = 18a \cdot (1 - 3t)^3 (1 + 6t)^4 (1 - 9t).$$



$t_0 = \frac{1}{9} \Rightarrow x_0 = \frac{100}{9} = 11,(1)\%$.

Д.З. Условия размещения вклада в паевом фонде таковы, что первые 3 года вклад уменьшается на $4x\%$ в год, последующие 6 лет вклад увеличивается на $5x\%$ в год, причем величину x вы можете выбирать сами. При каком значении x через 9 лет прирост вклада будет наибольшим?

44. В начале 2001 года Петя положил 1 млн руб. в сейф и брал из него $m\%$ суммы каждый год. При каком значении m в начале 2010 года он вынет из сейфа максимальную сумму?

В начале 2010 года – девятая выемка.

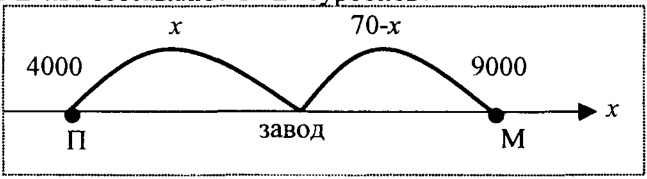
Размер девятой выемки: $y = \frac{m}{100} \cdot 10^6 \left(1 - \frac{m}{100}\right)^8 = x(1-x)^8$;

$$y' = (1-x)^8 - 8x(1-x)^7 = (1-x)^7 \cdot (1-9x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{m}{100} = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{100}{9} = 11,(1)\%.$$

Д.З. В начале 2001 года Петя положил 1 млн руб. в сейф и брал из него $m\%$ суммы каждый год. При каком значении m в начале 2007 года он вынет из сейфа максимальную сумму?

45. Расстояние от Парижа до Марселя равно 70 лье. В Париже квартируют 4000 мушкетеров, в Марселе – 9000. На каком расстоянии (в лье) от Парижа следует расположить винокуренный завод для обслуживания мушкетеров, чтобы минимизировать транспортные расходы, если затраты на перевозку P тонн бургундского на расстоянии L лье составляют $P \cdot L^3$ бурбонов?



Суммарные транспортные расходы: $S = 4000 \cdot x^3 + 9000(70-x)^3$.

$$S' = 4000 \cdot 3x^2 - 9000 \cdot 3(70-x)^2 = 1000\left(12x^2 - 27 \cdot (70-x)^2\right) = 0 \Rightarrow$$

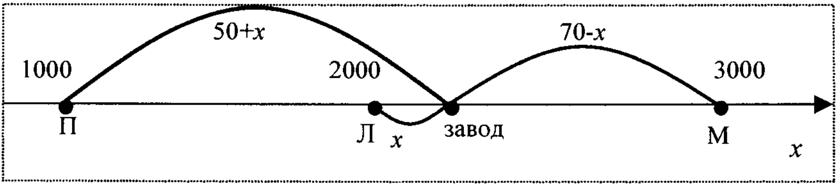
$$\Rightarrow 12x^2 = 27 \cdot (70-x)^2 \Rightarrow 4x^2 = 9 \cdot (70-x)^2 \Rightarrow 2x = 3 \cdot (70-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 42.$$

Д.З. Расстояние от Парижа до Марселя равно 90 лье. В Париже квартируют 9000 мушкетеров, в Марселе – 4000. На каком расстоянии (в лье) от Парижа следует расположить винокуренный завод для обслуживания мушкетеров, чтобы минимизировать транспортные расходы, если затраты на перевозку P тонн бургундского на расстоянии L лье составляют $P \cdot L^3$ бурбонов?

46. Расстояние от Парижа до Лиона равно 50 лье, а от Лиона до Марселя равно 70 лье. В Париже квартируют 1000 мушкетеров, в Лионе – 2000, в Марселе – 3000. На каком расстоянии (в лье) от Лиона следует расположить винокуренный завод для обслуживания

мушкетеров, чтобы минимизировать транспортные расходы, если затраты на перевозку P тонн бургундского на расстоянии L лье составляют $P \cdot L^3$ бурбонов?



Суммарные транспортные расходы:

$$S = 1000 \cdot (50 + x)^3 + 2000 \cdot x^3 + 3000(70 - x)^3 .$$

$$S' = 3000\left((50 + x)^2 + 2x^2 - 3 \cdot (70 - x)^2\right) =$$

$$= 3000\left(50^2 + 100x + \underline{x^2} + \underline{2x^2} - 3 \cdot (70)^2 + 320x \underline{- 3x^2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 420x = 3 \cdot (70)^2 - 50^2 \;\Rightarrow\; x = \frac{3 \cdot 49 - 25}{420} \cdot 100 = \frac{305}{13} = 23\frac{6}{13} .$$

Д.З. Расстояние от Парижа до Лиона равно 50 лье, а от Лиона до Марселя – 60 лье. В Париже квартируют 1000 мушкетеров, в Лионе – 2000, в Марселе – 3000. На каком расстоянии (в лье) от Лиона следует расположить винокуренный завод для обслуживания мушкетеров, чтобы минимизировать транспортные расходы, если затраты на перевозку P тонн бургундского на расстоянии L лье составляют $P \cdot L^3$ бурбонов?

47. Предприниматель должен израсходовать 1584 у.е. на наем грузчиков (3 у.е. на каждого) и менеджеров (16 у.е. на каждого), причем ожидаемый доход численно равен произведению числа грузчиков на квадрат числа менеджеров. Сколько всего сотрудников нужно нанять, чтобы получить максимальный доход?

x – число грузчиков, y – число менеджеров, расходы: $1584 = 3 \cdot x + 16 \cdot y$,

Функция прибыли: $f = x \cdot y^2 = y^2 \cdot \dfrac{1584 - 16y}{3} = 528 \cdot y^2 - \dfrac{16}{3} y^3$.

$$f' = 528 \cdot 2y - 16y^2 = y(528 \cdot 2 - 16y) = 0 \Rightarrow \; y = \frac{528 \cdot 2}{16} = \frac{528}{8} = 66;$$

$x = \dfrac{1584 - 16y}{3} = 528 - \dfrac{16}{3} \cdot 66 = 176$. Ответ: $y + x = 242$.

Д.З. Предприниматель должен израсходовать 1944 у.е. на наем грузчиков (2 у.е. на каждого) и менеджеров (18 у.е. на каждого), причем ожидаемый доход численно равен произведению числа грузчиков на квадрат числа менеджеров. Сколько всего сотрудников нужно нанять, чтобы получить максимальный доход?

48. Доход численно равен произведению числа грузчиков на куб числа менеджеров. Расходы на наем одного грузчика составляют 2 у.е., а одного менеджера – 6 у.е. При каких минимальных затратах доход достигнет 81 у.е.?

Доход: $S_0 = xy^3 \Rightarrow x = \dfrac{S_0}{y^3}$, расход: $f = 2x + 6y \Rightarrow f = 2\dfrac{S_0}{y^3} + 6y$.

$$f' = -6\frac{S_0}{y^4} + 6 = 0 \Rightarrow y_0 = \sqrt[4]{S_0} \Rightarrow x_0 = \frac{S_0}{y_0^{\,3}} = \frac{S_0}{(S_0)^{3/4}} = \sqrt[4]{S_0};$$

$$f_{\min} = 2x_0 + 6y_0 = 2\cdot\sqrt[4]{S_0} + 6\cdot\sqrt[4]{S_0} = 8\cdot\sqrt[4]{S_0} \Rightarrow f_{\min} = 8\cdot 3 = 24.$$

Д.З. Доход численно равен произведению числа грузчиков на квадрат числа менеджеров. Расходы на наем одного грузчика составляют 2 у.е., а одного менеджера – 4 у.е. При каких минимальных затратах доход достигнет 27 у.е.?

49. Доход нефтяной компании (в у.е.) численно равен произведению квадрата числа геологов на куб числа добытчиков. Наем одного геолога обходится 16 у.е., одного добытчика – 9 у.е. Если доход заданной величины получен при наименьшем возможном расходе на наем, то число, равное отношению числа геологов x к числу добытчиков y, равно… .

Доход: $S_0 = x^2y^3 \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{S_0}}{y^{\frac{3}{2}}}$, расход $f = 16x + 9y \Rightarrow f = 16\dfrac{\sqrt{S_0}}{y^{\frac{3}{2}}} + 9y$.

$$f' = -16\sqrt{S_0}\cdot\frac{3}{2}y^{-\frac{5}{2}} + 9 = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{S_0}}{y^{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{S_0}}{y^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{\sqrt{S_0}}{y^{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{8}.$$

Д.З. Доход нефтяной компании (в у.е.) численно равен произведению квадрата числа геологов на куб числа добытчиков. Наем одного геолога обходится 16 у.е., одного добытчика – 3 у.е. Если доход заданной величины получен при наименьшем возможном расходе на наем, то число, равное отношению числа геологов x к числу добытчиков y, равно… .

50. Стоимость одного часа эксплуатации парохода, плывущего со скоростью v, составляет $72 + 18v + \dfrac{v^2}{2}$. С какой скоростью должен плыть пароход, чтобы стоимость поездки протяженностью 279 км была наименьшей?

Стоимость аренды = время аренды× стоимость аренды одного часа.

$$S = \frac{289}{v}\left(72 + 18v + \frac{v^2}{2}\right) = 289\left(\frac{72}{v} + 18 + \frac{v}{2}\right);$$

$$S' = 289\left(-\frac{72}{v^2} + \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow v_0{}^2 = 144 \Rightarrow v_0 = 12.$$

Д.З. Стоимость одного часа эксплуатации парохода, плывущего со скоростью v, составляет $32 + 18v + \frac{v^2}{2}$. С какой скоростью должен плыть пароход, чтобы стоимость поездки протяженностью 347 км была наименьшей?

51. Стоимость одного часа эксплуатации парохода, плывущего со скоростью v, составляет $100 + v + v^2$. Какое максимальное расстояние можно преодолеть на арендованном пароходе при сумме затрат в 420 у.е.?

Стоимость аренды = время аренды × стоимость аренды одного часа.

$$S_0 = \frac{x}{v}\left(100 + v + v^2\right) = x\left(\frac{100}{v} + 1 + v\right).$$

При заданных затратах расстояние будет наибольшим при минимуме показателей в круглой скобке.

$f = \frac{100}{v} + 1 + v \Rightarrow f' = -\frac{100}{v^2} + 1 = 0 \Rightarrow$ оптимальная скорость $v_0 = 10$.

Максимальное расстояние: $x_{\max} = \dfrac{S_0}{\dfrac{100}{v_0} + 1 + v_0} = 20$.

Д.З. Стоимость одного часа эксплуатации парохода, плывущего со скоростью v, составляет $121 + v + v^2$. Какое максимальное расстояние можно преодолеть на арендованном пароходе при сумме затрат в 460 у.е.?

Неопределенный интеграл: $\int f(x)dx = F(x) + C$, *где* $F'(x) = f(x)$.

Основные свойства:

$(f(x) \pm g(x))dx = \ f(x)dx \pm + \ g(x)dx, \quad k \cdot f(x)dx = k \cdot \ f(x)dx.$

Табличное интегрирование:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1), \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$$

52. Вычислить $\int (2-3x^2) dx$.

$$\int (2-3x^2) dx = \int 2dx - \int 3x^2 dx = 2\int dx - 3\int x^2 dx = 2x - 3\cdot\frac{x^3}{3} + C = 2x - x^3 + C.$$

Д.З. Вычислить $\int \left(2x - 3\sqrt{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx$.

53. Вычислить $\int \frac{dx}{2x+3}$.

$$\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+3)}{2x+3} = \frac{1}{2}\ln(2x+3) + C.$$

Д.З. Вычислить $\int \frac{dx}{4-3x}$.

54. Вычислить $\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x d(3x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

Д.З. Вычислить $\int \cos\frac{x}{4} dx$.

Определенный интеграл.

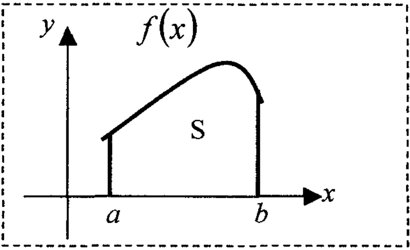
Формула Ньютона–Лейбница: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

55. Вычислить $\int_1^2 (2-3x^2) dx$.

$$\int_1^2 (2-3x^2) dx = \left(2x - x^3\right)\Big|_1^2 = (4-8) - (2-1) = -4 - 1 = -5.$$

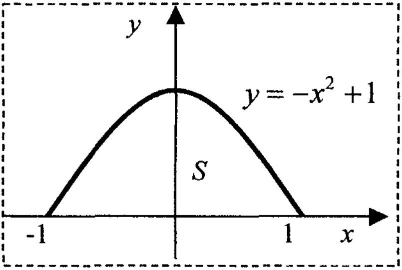
Д.З. Вычислить $\int_0^{\pi} \sin x dx$; $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{3} dx$; $\int_0^{\pi/2} \sin 4x dx$.

Площадь криволинейной трапеции:



$$S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

56. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = -x^2 + 1$ и осью *ox*.

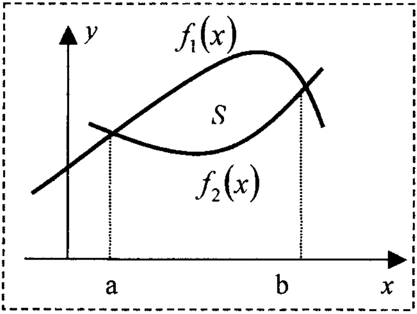


$$S = \int_{-1}^{1} \left(-x^2 + 1\right)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{-1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Д.З. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^3$, осью *ox* и вертикалями $x = 1$ и $x = 2$.

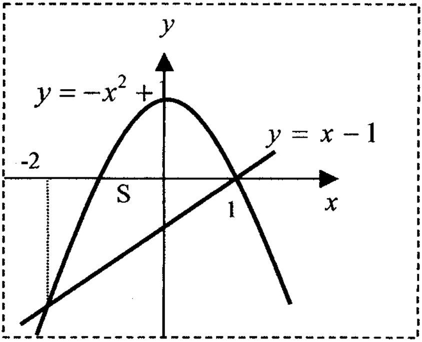
Д.З. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \dfrac{1}{2x+3}$, осью *ox* и вертикалями $x = 1$ и $x = 2$.

Площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$:



$$S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right) dx.$$

57. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = -x^2 + 1$ и $y = x - 1$.



Точки пересечения графиков функций $y = -x^2 + 1$ и $y = x - 1$:

$$-x^2 + 1 = x - 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{array}\right.;$$

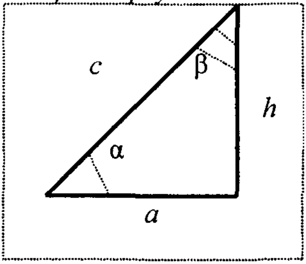
$$S = \int_{-2}^{1} \left(\left(-x^2 + 1\right) - \left(x - 1\right)\right) dx = \int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2\right) dx =$$

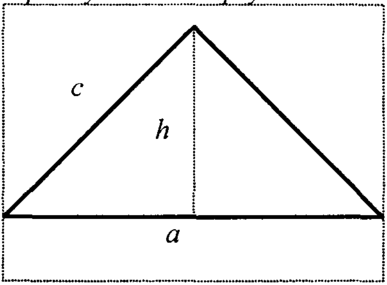
$$= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(-\frac{-8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) = \frac{9}{2}.$$

Д.З. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^3$ и $y = x$.

16. ГЕОМЕТРИЯ

Площадь треугольника — *Прямоугольный треугольник*

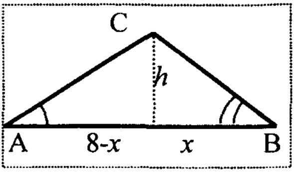




Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + h^2$, $\qquad S_\Delta = \dfrac{1}{2} a \cdot h$,

$$h = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta = a \cdot \operatorname{tg}\alpha = a \cdot \operatorname{ctg}\beta .$$

1. В треугольнике ABC известны сторона $|AB| = 8$ и углы $\angle A = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{5}$, $\angle B = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}$. Найти площадь треугольника ABC.

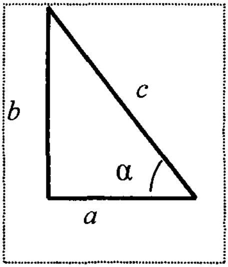


$h = (8 - x) \cdot \operatorname{tg} A = (8 - x) \cdot \dfrac{2}{5}$, $h = x \cdot \operatorname{tg} B = x \cdot \dfrac{2}{3}$;

$$(8 - x) \cdot \frac{2}{5} = x \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow 3(8 - x) = 5x \Rightarrow 8x = 24 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow h = 2 .$$

Д.З. В треугольнике ABC даны $|AB| = 8$ и углы $\angle A = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\angle B = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Найти площадь треугольника ABC.

2. В прямоугольном треугольнике длины сторон образуют арифметическую прогрессию. Найти косинус большего острого угла треугольника.



$\cos\alpha = \dfrac{a}{c} = ?$

$$a, b, c \text{ – арифметическая прогрессия} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a+c}{2} = b, \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + \frac{1}{4}(a+c)^2 \Rightarrow 4c^2 = 4a^2 + a^2 + 2ac + c^2 \Rightarrow 3c^2 = 5a^2 + 2ac \Rightarrow$$

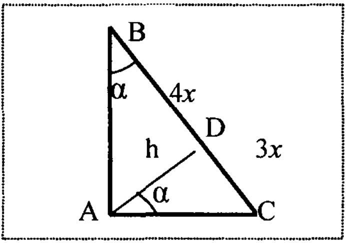
$$\Rightarrow 5\left(\frac{a}{c}\right)^2 + 2\frac{a}{c} - 3 = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+15}}{5} = \frac{-1 \pm 4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{a}{c}\right)_1 = \dfrac{3}{5} \\ \left(\dfrac{a}{c}\right)_2 = -1 \text{ – постороннее} \end{array} \right. \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}.$$

Д.З. В прямоугольном треугольнике длины сторон *a, b, c* образуют геометрическую прогрессию. Найти косинус большего острого угла треугольника.

Д.З. В прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна 13, а площадь равна 12. Найти длину гипотенузы.

3. Высота треугольника, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, делит ее в отношении 3:4. Найти тангенс меньшего острого угла.

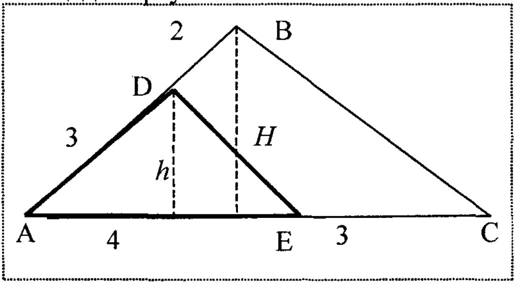


$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h}{4x} = ?$

Высота на гипотенузу есть геометрическое среднее ее отрезков:
$h^2 = 12 \cdot x^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{3} \cdot x \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Д.З. Высота треугольника, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, делит ее в отношении 4:5. Найти тангенс большего острого угла.

4. В треугольнике ABC точка D делит отрезок AB в отношении 3:2, считая от точки A $(AD : DB = 3 : 2)$, а точка E делит отрезок AC в отношении 4:3, считая от точки A $(AE : EC = 4 : 3)$. Найти отношение площадей треугольников ABC и ADE.

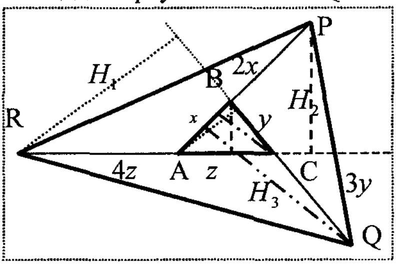


$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{H \cdot 7}{h \cdot 4},\quad \frac{H}{h} = \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 4} = \frac{35}{12}.$$

Д.З. В треугольнике ABC точка D делит отрезок AB в отношении 3:4, считая от точки A $(AD : DB = 3 : 4)$, а точка E делит отрезок AC в отношении 5:3, считая от точки A $(AE : EC = 5 : 3)$. Найти отношение площадей треугольников ABC и ADE.

5. Точка P находится на продолжении стороны AB треугольника ABC за точку B, BP=2AB. Точка Q находится на продолжении стороны BC треугольника ABC за точку C, CQ=3AB. Точка R находится на продолжении стороны AC треугольника ABC за точку A, $AR = 4AC$. Найти отношение площадей треугольников PQR и ABC.



$$S_{RCQ}=\frac{1}{2}3y\cdot H_1=\frac{1}{2}3y\cdot 5h_1=15\cdot\frac{1}{2}y\cdot h_1=15\cdot S_{ABC};$$

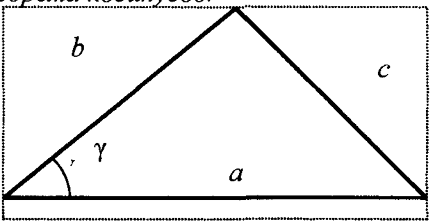
$$S_{RPA}=\frac{1}{2}4z\cdot H_2=\frac{1}{2}4z\cdot 3h_2=12\cdot\frac{1}{2}z\cdot h_2=12\cdot S_{ABC};$$

$$S_{PBQ}=\frac{1}{2}2x\cdot H_3=\frac{1}{2}2x\cdot 4h_3=8\cdot\frac{1}{2}x\cdot h_3=8\cdot S_{ABC};$$

$$\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}}=15+12+8+1=36.$$

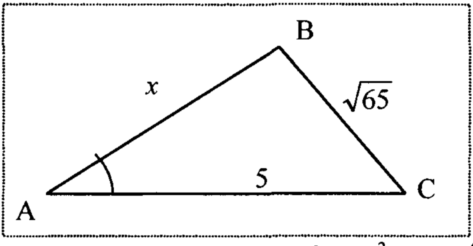
Д.3. Точка P находится на продолжении стороны AB треугольника ABC за точку B, BP=2AB. Точка Q находится на продолжении стороны BC треугольника ABC за точку C, CQ=4AB. Точка R находится на продолжении стороны AC треугольника ABC за точку A, AR=4AC. Найти отношение площадей треугольников PQR и ABC.

Теорема косинусов:



$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$.

6. В треугольнике ABC известны длины сторон $|AC|=5$, $|BC|=\sqrt{65}$ и угол $\angle A=\arccos(-0{,}6)$. Найти $|AB|$.



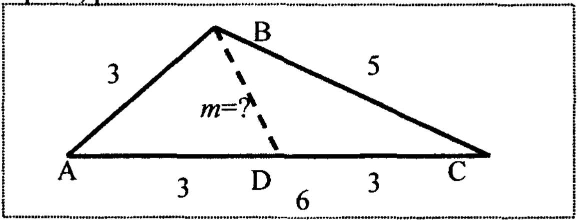
Теорема косинусов: $65=25+x^2-10x\cdot(-0{,}6)\Rightarrow x^2+6x-40=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-10-\text{постороннее}\\ x=4\end{array}\right.\Rightarrow x=4.$$

Д.З. В треугольнике ABC дано $|AC| = \sqrt{55}; |BC| = \sqrt{65}$ и угол $\angle B = \arccos(0{,}5)$. Найти $|AB|$.

Д.З. Стороны треугольника длиной 5 и 10 образуют угол, синус которого равен 0,8. Найти третью сторону треугольника.

7. В треугольнике со сторонами 3,5 и 6 медиана, проведенная к большей стороне, равна

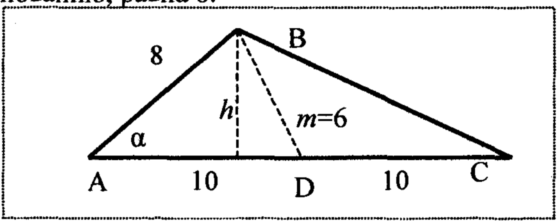


Теорема косинусов для ΔABC: $25 = 9 + 36 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos\angle A \Rightarrow$ $\cos\angle A = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

Теорема косинусов для ΔABD: $m^2 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{5}{9} = 8 \Rightarrow$ $m = 2\sqrt{2}$.

Д.З. В треугольнике со сторонами 3,5 и 6 высота, проведенная к большей стороне, равна... .

8. В треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 20 и 8. Найти площадь треугольника, если медиана, проведенная к основанию, равна 6.



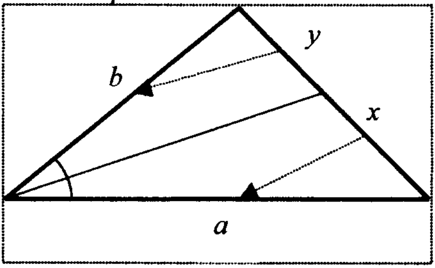
Теорема косинусов для ΔABD: $36 = 100 + 64 - 2 \cdot 10 \cdot 8\cos\alpha \Rightarrow$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$ $\qquad h = 14 \cdot \sin\alpha = 14 \cdot \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = 14 \cdot \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{42}{5} \Rightarrow$

$S = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot h = 10 \cdot \frac{42}{5} = 84$.

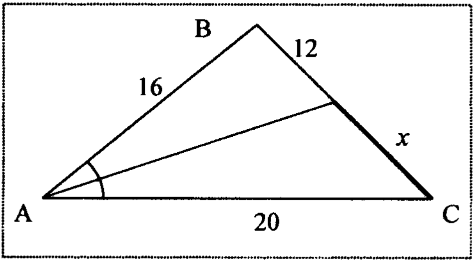
Д.З. В треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 20 и 8. Найти площадь треугольника, если медиана, проведенная к известной боковой стороне, равна 14.

Свойство биссектрисы:



$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

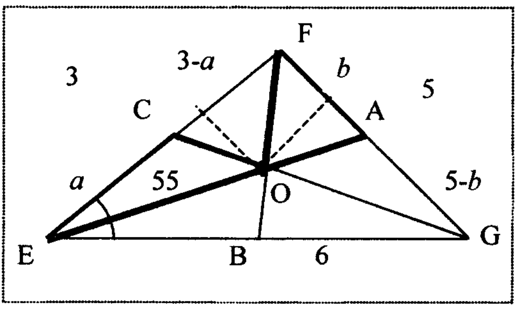
9. В треугольнике биссектриса угла, образованного сторонами AB=16 и AC=20, рассекает стороны BC на отрезки, меньший из которых имеет длину 12. Найти больший отрезок.



$$\frac{12}{16} = \frac{x}{20} \Rightarrow x = \frac{12}{16} \cdot 20 = 15.$$

Д.З. В треугольнике биссектриса угла, образованного сторонами AB=16 и AC=20, рассекает стороны BC на отрезки, больший из которых имеет длину 12. Найти больший отрезок.

10. В треугольнике EFG биссектрисы EA, FB, GC пересекаются в точке O, $A \in FG, B \in EG, C \in EF$, отношение сторон $EF : FG : EG = 3 : 5 : 6$. Площадь треугольника ECO равна 55. Найти площадь треугольника FAO.



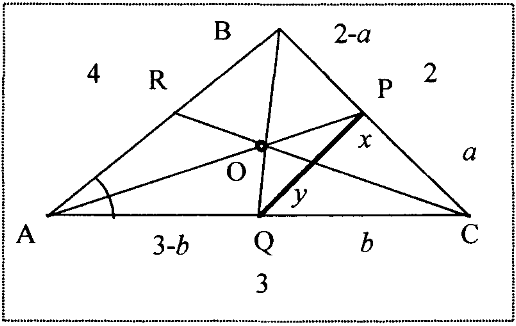
Высоты треугольников равны, так как точка пересечения биссектрис равноудалена от всех сторон треугольника (центр вписанной окружности).

$$\frac{S_{FAO}}{S_{ECO}}=\frac{b\cdot h}{a\cdot h}=\frac{b}{a};\ \frac{b}{3}=\frac{5-b}{6}\ \Rightarrow\ 2b=5-b\ \Rightarrow\ b=\frac{5}{3},\ \frac{a}{6}=\frac{3-a}{5}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5a=18-6a\ \Rightarrow\ a=\frac{11}{18};\ \frac{S_{FAO}}{S_{ECO}}=\frac{5\cdot 18}{3\cdot 11}=\frac{30}{11}.$$

Д.З. В треугольнике EFG биссектрисы EA, FB, GC пересекаются в точке O, $A\in FG, B\in EG, C\in EF$, отношение сторон $FG : EG : EF=6:7:8$. Площадь треугольника ECO равна 70. Найти площадь треугольника FAO.

11. В треугольнике ABC с длинами сторон AB=4, BC=2, AC=3 проведены биссектрисы AP, BQ, CR, причем $P\in BC, Q\in AC, R\in AB$. В каком отношении делит биссектриса CR отрезок PQ, считая от точки P.



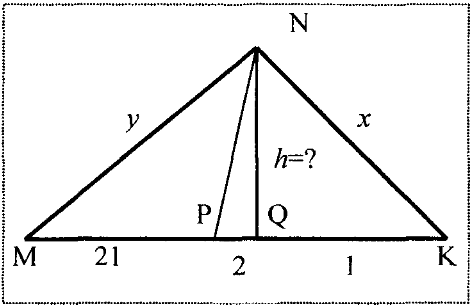
$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\ \Rightarrow\ \frac{x}{y}=\frac{a}{b};$$

$$\frac{a}{3}=\frac{2-a}{4}\ \Rightarrow\ 4a=6-3a\ \Rightarrow\ a=\frac{6}{7},\ \frac{b}{2}=\frac{3-b}{4}\ \Rightarrow\ 2b=3-b\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=1,\ \frac{x}{y}=\frac{6}{7}.$$

Д.З. В треугольнике ABC с длинами сторон AB=6, BC=3, AC=4 проведены биссектрисы AQ, BP, причем $P\in AC, Q\in BC$. Найти отношение площадей треугольников ABC и BPQ.

12. В треугольнике MNK проведены биссектриса NP и высота NQ, причем $P\in MK, Q\in MK$, длины отрезков MP=21, PQ=2, QK=1. Найти квадрат высоты NQ.



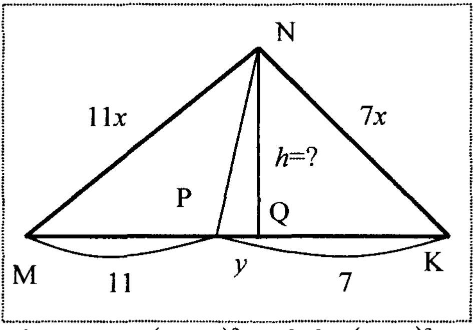
$$\frac{y}{21}=\frac{x}{3} \Rightarrow y=7x;$$

$$h^2=y^2-23^2=x^2-1 \Rightarrow 49x^2-23^2=x^2-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{23^2-1}{48}=\frac{(23-1)(23+1)}{48}=\frac{22\cdot 24}{48}=11 \Rightarrow h^2=x^2-1=10.$$

Д.3. Биссектриса угла треугольника, образованного сторонами 5 и 10, равна 1,(3). Найти косинус этого угла.

13. В треугольнике MNK проведены биссектриса NP и высота NQ, причем $P\in MK, Q\in MK$, длины отрезков MP=21, PK=7. Найти наименьшее значение высоты NQ.



$$h^2=11^2x^2-(11-y)^2=7^2x^2-(7+y)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{121x^2}\overline{-121}+\overline{\overline{\underline{\underline{22y}}}}-y^2=\underline{49x^2}\overline{-49}\overline{\overline{\underline{\underline{-14y}}}}-y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36y=121-49+49x^2-121x^2 \Rightarrow y=2-2x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2=7^2x^2-(7+y)^2=49x^2-(9-2x^2)^2 \Rightarrow$$

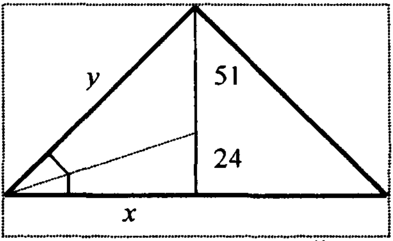
$$\Rightarrow h^2=49x^2-81+36x^2-4x^4=-4x^4+85x^2-81.$$

Вершина параболы $x^2{}_0=\dfrac{85}{8}$.

$$h^2{}_{\min}=h^2\left(\frac{85}{8}\right)=-4\cdot\frac{85^2}{8^2}+85\cdot\frac{85}{8}-81=\frac{-85^2+2\cdot 85^2-81\cdot 16}{16}=\frac{85^2-81\cdot 16}{16};$$

$$h^2_{\min} = \frac{(85-9\cdot4)(85+9\cdot4)}{16} = \frac{49\cdot121}{16} \Rightarrow h_{\min} = \frac{7\cdot11}{4} = \frac{77}{4} = 19\frac{1}{4}.$$

14. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника рассекает высоту на части, равные 51 и 24. Найти длину боковой стороны.



Меньший отрезок примыкает к меньшей стороне треугольника:

$$\frac{y}{51} = \frac{x}{24} \Rightarrow x = y\frac{8}{17}.$$

Теорема Пифагора: $y^2 = x^2 + (75)^2$.

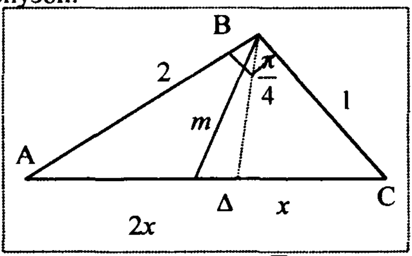
$$y^2 = y^2\frac{8^2}{17^2} + (75)^2 \Rightarrow y^2\left(1 - \frac{8^2}{17^2}\right) = (75)^2 \Rightarrow y^2\frac{17^2 - 8^2}{17^2} = (75)^2 \Rightarrow$$

$$y^2\frac{9\cdot25}{17^2} = (75)^2 \Rightarrow y^2 = \frac{(75)^2\cdot17^2}{9\cdot25} = \frac{75\cdot75\cdot17^2}{9\cdot25} = 25\cdot17^2 \Rightarrow y = 85.$$

Д.З. Биссектриса угла при основании равнобедреиного треугольника рассекает высоту на части, равные 4 и 5. Найти длину основания.

15. Из прямого угла треугольника с катетами 1 и 2 проведены биссектриса и медиана.

Найти расстояние между точками пересечений биссектрисы и медианы с гипотенузой.

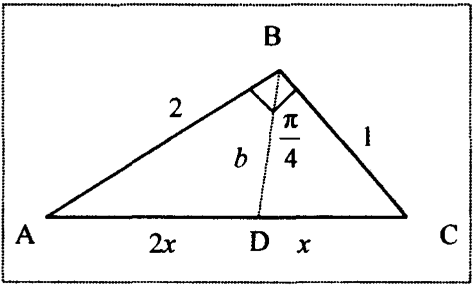


Теорема Пифагора: $1 + 4 = 9x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \Delta = 2x - \frac{2x + x}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{\sqrt{5}}{6}.$$

Д.З. Из прямого угла треугольника с катетами 1 и 3 проведены биссектриса и медиана. Найти расстояние между точками пересечений биссектрисы и медианы с гипотенузой.

16. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 1 и 2. Найти длину биссектрисы прямого угла.



Теорема Пифагора: $1+4=9x^2 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Теорема косинусов для ΔBCD: $x^2=1+b^2-2b\cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$$\frac{5}{9}=1+b^2-b\sqrt{2} \Rightarrow b^2-b\sqrt{2}+\frac{4}{9}=0 \Rightarrow$$

$$b=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-\frac{16}{9}}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}(3\pm1)}{6} \Rightarrow$$

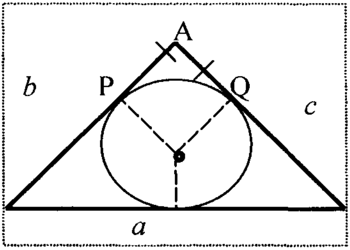
$$\left[\begin{array}{l} b_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx 1 \\ b_2=\frac{\sqrt{2}}{3}\approx\frac{1}{2} - \text{постороннее} \end{array}\right.$$

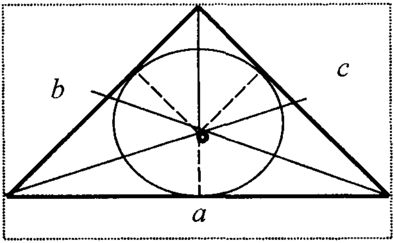
Д.З. Длины сторон треугольника, образующих угол в 60°, равны 2 и 4. Найти длину биссектрисы угла.

Д.З. Длина биссектрисы прямого угла треугольника равна 2, а меньший катет равен 3. Найти больший катет.

Треугольник и вписанная в окружность

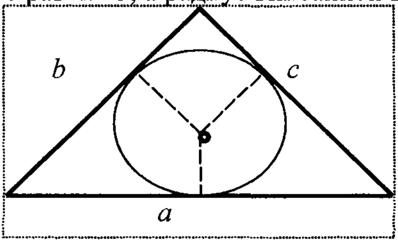
Биссектрисы треугольника пересекаются в центре вписанной окружности





$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} p \cdot r\ ;\ p = a + b + c\ ;\ AP = AQ\ .$$

17. Найти площадь прямоугольного треугольника, периметр которого равен 25, а радиус вписанной в него окружности равен 6.



$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} p \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 6 = 75\ .$$

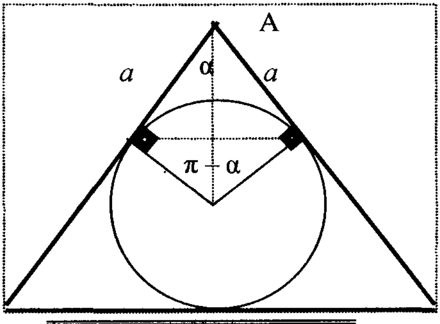
Д.З. Найти площадь правильного треугольника, периметр которого равен 30, а радиус вписанной в него окружности равен 8.

Вписанная в угол α окружность

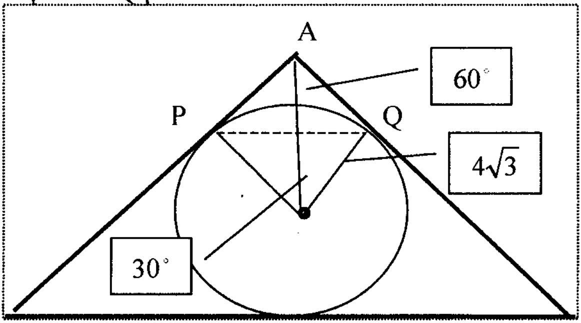
Центральный угол: $\pi - \alpha$

Длина дуги окружности между касательными:

$$L = 2\pi r \cdot \frac{\pi - \alpha}{2\pi} = r \cdot (\pi - \alpha).$$



18. В треугольник с углом при вершине А, равным 120^0, вписана окружность радиуса $r = 4\sqrt{3}$, P и Q – точки ее касания со сторонами угла. Длина отрезка PQ равна

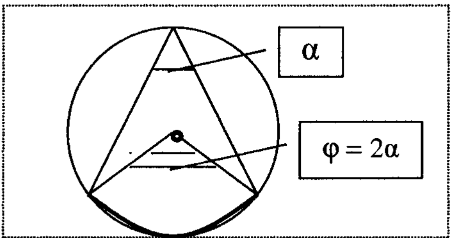


$$\frac{1}{2}PQ = 4\sqrt{3}\cdot\sin 30^\circ = 2\sqrt{3} \Rightarrow PQ = 4\sqrt{3}.$$

Д.З. В треугольник с углом при вершине А, равным 60°, вписана окружность, P и Q – точки ее касания со сторонами угла. Длина отрезка PQ равна 8. Найти радиус вписанной окружности.

Вписанный в окружность угол $\alpha \Rightarrow$ *Центральный угол* $\varphi = 2\alpha$.

Длина дуги окружности: $L = 2\pi R\cdot\dfrac{\varphi}{360^\circ} = 2\pi R\cdot\dfrac{2\alpha}{2\pi} = 2R\alpha$.

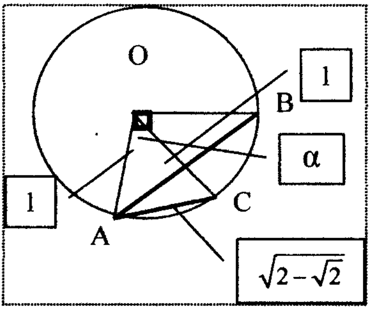


19. Найти длину дуги, которая опирается на вписанный угол величиной 30° в окружности, радиус которой равен 6 см.

$$L = 2\pi R\cdot\frac{2\alpha}{360^\circ} = 12\pi\cdot\frac{60}{360} = 2\pi.$$

Д.З. Найти длину дуги, которая опирается на вписанный угол величиной 120° в окружности, радиус которой равен 6 см.

20. В окружности радиуса 1 хорда, стягивающая некоторую дугу, равна $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Найти хорду, которая стягивает вдвое большую дугу.



Теорема косинусов: $2-\sqrt{2}=1+1-2\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow 2\alpha=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta AOB$ – прямоугольный треугольник $\Rightarrow$

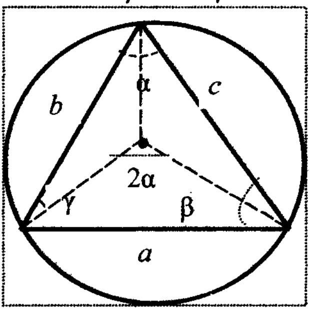
$\Rightarrow |AB|=\sqrt{2}$.

Д.З. В окружности радиуса $\sqrt{2}$ хорда, стягивающая некоторую дугу, равна $\sqrt{6-2\sqrt{3}}$. Найти хорду, которая стягивает втрое большую дугу.

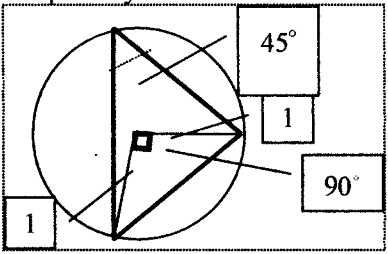
Д.З. К окружности радиуса 5 из точки А проведена касательная длины $2\sqrt{6}$. Найти расстояние от точки А до ближайшей точки окружности.

Треугольник вписан в окружность

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$.



21. Треугольник вписан в окружность радиуса 1. Найти длину стороны, лежащей против угла в 45°.

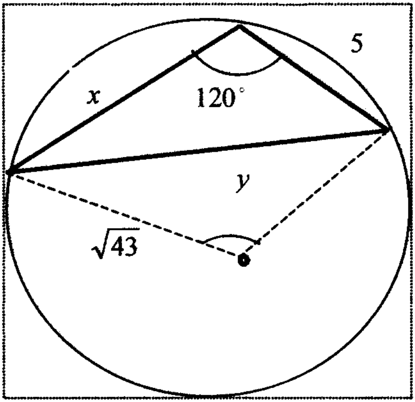


$\sqrt{2}$

Д.З. Треугольник вписан в окружность радиуса 1. Найти длину стороны, лежащей против угла в 30°.

Д.З. Треугольник вписан в окружность радиуса r. Его сторона, лежащая против угла в 15°, равна 4. Найти радиус описанной окружности.

22. Треугольник ABC вписан в окружность, площадь которой 43π. Длина стороны AC=5, а угол, лежащий против стороны BC, равен 120°. Найти AB



Теорема сннусов:

$$\frac{y}{\sin 120^\circ} = 2R = 2\sqrt{43} \Rightarrow y = 2\sqrt{43}\sin 120^\circ = 2\sqrt{43}\cos 30^\circ = \sqrt{129}.$$

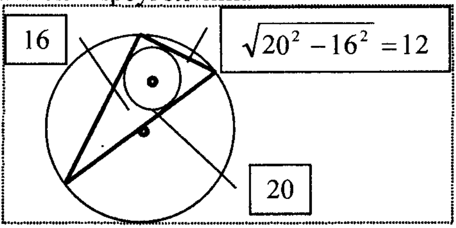
Теорема косинусов:

$$129 = x^2 + 25 - 2\cdot x\cdot 5\cdot\cos\left(120^\circ\right) \Rightarrow x^2 + x\cdot 5 - 104 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{25+416}}{2} = \frac{-5\pm 21}{2} = \left[\begin{array}{l} -13 - \text{постороннее} \\ 8 \end{array}\right. \Rightarrow x = 8.$$

Д.З. Треугольник ABC вписан в окружность, площадь которой 43π. Длина стороны AC=8, а угол, лежащий против стороны BC, равен 60°. Найти AB.

23. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 10, а один из катетов равен 16. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.

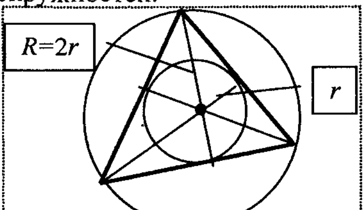


Гипотенуза равна диаметру описанной окружности.

Площадь треугольника через радиус вписанной окружности: $S_\Delta=\frac{1}{2}p\cdot r=\frac{1}{2}16\cdot 12 \Rightarrow r=\frac{16\cdot 12}{20+16+12}=4$.

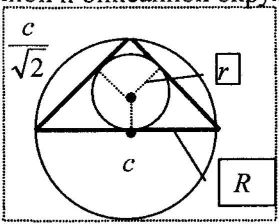
Д.З. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 6,5, а один из катетов равен 5. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.

24. Правильный треугольник. Найти отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.



Точка пересечения медиан делит ее в отношении: 2:1 $\Rightarrow$ $\frac{R}{r}=2$.

25. Равнобедренный прямоугольный треугольник. Найти отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.



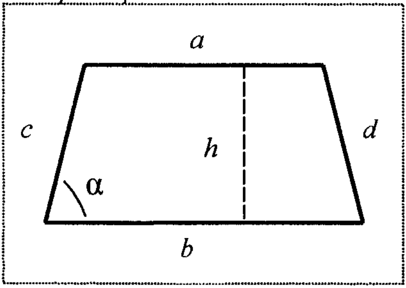
Описанная окружность: $R = \frac{c}{2}$.

Вписанная окружность:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} p \cdot r = \frac{1}{2} \cdot \left(c + c\sqrt{2}\right) \cdot r = \frac{c}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot r = \frac{c^2}{4} \Rightarrow r = \frac{c}{2\left(1 + \sqrt{2}\right)}.$$

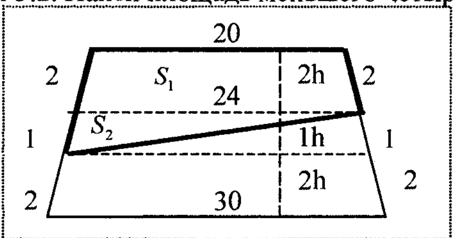
$$\frac{R}{r} = 1 + \sqrt{2}.$$

Трапеция



Площадь трапеции: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

26. Площадь трапеции равна 125, длины оснований относятся как 2:3. Прямая, не параллельная основанию, делит боковые стороны в отношении 3:2. Найти площадь меньшего четырехугольника.

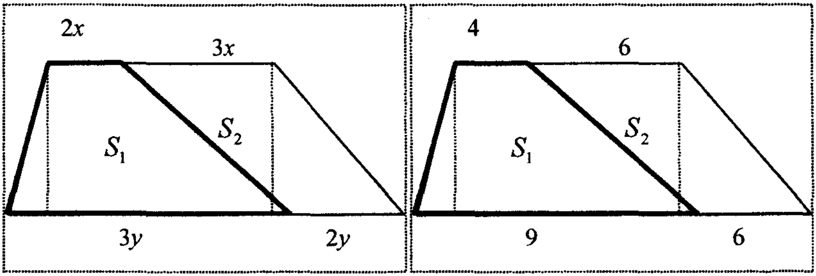


$$S = \frac{20+30}{2} \cdot 5h = 125h = 125 \Rightarrow h = 1 \Rightarrow S_1 = \frac{20+24}{2} \cdot 2h = 44h = 44,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 1h = 12h = 12, \; S = S_1 + S_2 = 44 + 12 = 56.$$

Д.З. Площадь трапеции равна 121, длины оснований относятся как 2:3. Прямая, непараллельная основанию, делит боковые стороны в отношении 7:4. Найти площадь меньшего четырехугольника.

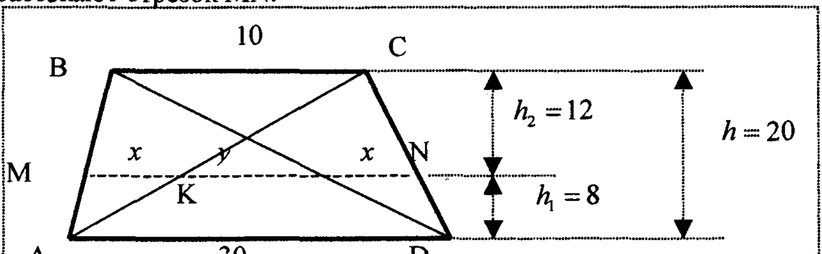
27. В трапеции, длины оснований которой относятся как 2:3, прямая делит верхнее основание в отношении 2:3, а нижнее – в отношении 3:2. Найти отношение площади большей трапеции к меньшей.



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{9+4}{6+6} = \frac{13}{12}.$$

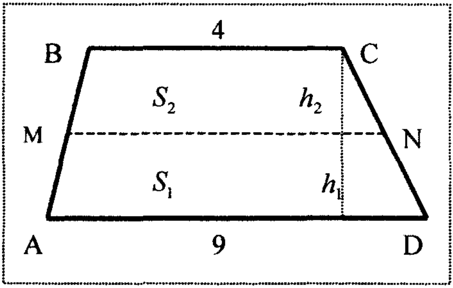
Д.З. В трапеции длины оснований относятся как 3:4. Прямая делит верхнее основание в отношении 4:7, а нижнее – в отношении 7:4. Найти отношение площади большей трапеции к меньшей.

28. Основания трапеции равны 30 и 10. Боковые стороны трапеции отсекают от прямой, параллельной основанию, отрезок MN, длина которого 22. Найти отрезки, на которые диагонали трапеции рассекают отрезок MN.



$$\Delta ABC \sim \Delta AMK \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{h_1}{h} = \frac{8}{20} \Rightarrow x = 4,\ y = 2.$$

29. Основания трапеции равны AD=9, BC=4. Боковые стороны трапеции отсекают от прямой, параллельной основанию, отрезок MN, длина которого равна 6. Найти отношение площади трапеции AMND к площади трапеции MBCN.



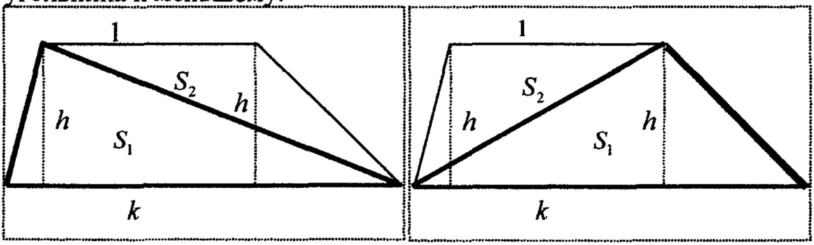
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{9+6}{2}\cdot h_1}{\frac{6+4}{2}\cdot h_2}=\frac{15}{10}\cdot\frac{h_1}{h_2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{h_1}{h_2};$$

$$S_1+S_2=S_0 \Rightarrow \frac{9+6}{2}\cdot h_1+\frac{6+4}{2}\cdot h_2=\frac{9+3}{2}\cdot(h_1+h_2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15h_1+10h_2=13(h_1+h_2);\ \ \frac{h_1}{h_2}=\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ \frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}.$$

Д.З. Основания трапеции равны AD=9, BC=4. Боковые стороны трапеции отсекают от прямой, параллельной основанию, отрезок MN. Высота верхней трапеции равна 2, а нижней 3. Найти длину отрезка MN.

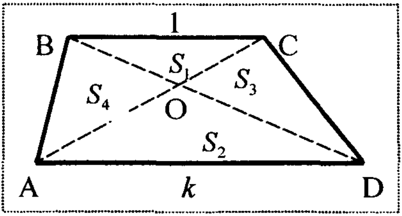
30. В трапеции, длины оснований которой относятся как $1:k$, проведена диагональ. Найти отношение площади большего треугольника к меньшему.



$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{k}{2}\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot h}=k.$$

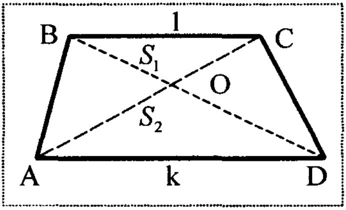
Д.З. В трапеции, длины оснований которой относятся как 3:4, проведена диагональ. Найти отношение площади большего треугольника к меньшему.

31. В трапеции проведены диагонали. Найти отношение площадей треугольников, примыкающих к боковым сторонам трапеции.



$$\frac{S_3}{S_4}=?\quad \frac{S_1+S_3}{S_2+S_4}=\frac{S_1+S_4}{S_2+S_3}\ \Rightarrow\ S_3=S_4.$$

32. В трапеции, длины оснований которой относятся как $1{:}k$, проведены диагонали. Найти отношение площадей треугольников, примыкающих соответственно к верхнему и нижнему основаниям.

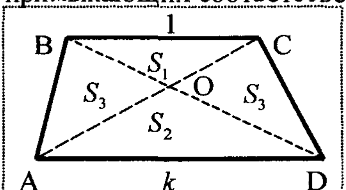


ΔBCO подобен ΔAOD. Коэффициент подобия равен $\dfrac{1}{k}$.

Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия: $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{1}{k^2}$.

Д.З. В трапеции проведены диагонали. Точка пересечения диагоналей делит одну из них в отношении 4:3. Найти отношение площадей треугольников, примыкающих соответственно к верхнему и нижнему основаниям.

33. В трапеции, длины оснований которой относятся как $1{:}k$, проведены диагонали. Найти отношение площадей треугольников, примыкающих соответственно к верхнему и нижнему основаниям.

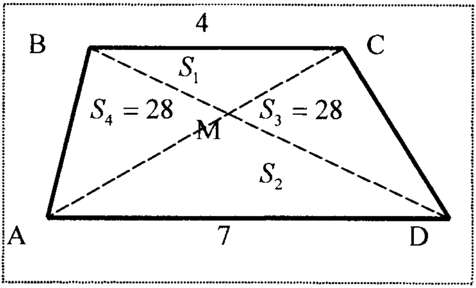


$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{k^2};\ \frac{S_1+S_3}{S_2+S_3}=\frac{1}{k}\Rightarrow kS_1+kS_3=S_2+S_3$$

$$\Rightarrow (k-1)S_3=S_2-kS_1=k^2S_1-kS_1=S_1k(k-1)\Rightarrow \qquad S_3=S_1k=\frac{S_2}{k}\qquad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_3^2=S_1S_2.$$

34. Диагонали AC и BD трапеции ABCD пересекаются в точке M, причем AD : BC = 7:4, площадь треугольника ABM равна 28. Найти площадь трапеции ABCD.



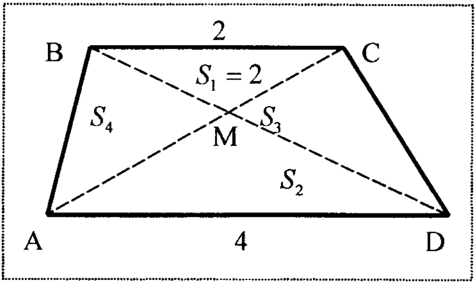
$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{16}{49} \quad \Rightarrow$$

$$S_2 = S_1\frac{49}{16} \quad \Rightarrow \quad S_3 \cdot S_4 = S_1 \cdot S_2 \quad \Rightarrow \quad (28)^2 = S_1^{\ 2} \cdot \frac{49}{16} \quad \Rightarrow \quad 28 = \frac{7}{4}S_1 \quad \Rightarrow$$

$S_1 = 16 \Rightarrow S_2 = 49 \Rightarrow$ Площадь трапеции $S = 28 + 28 + 49 + 16 = 121$.

Д.З. Диагонали AC и BD трапеции ABCD пересекаются в точке M, причем AD : BC = 3:2, площадь треугольника MCD равна 12. Найти площадь трапеции ABCD.

35. Диагонали AC и BD трапеции ABCD пересекаются в точке M, причем AD:BC = 4:2, площадь треугольника BCM равна 2. Найти площадь трапеции ABCD.



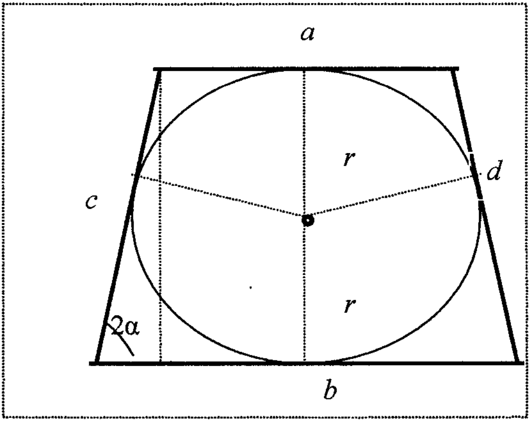
$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow S_2 = 4S_1 = 8$; $S_3 = S_4 \Rightarrow S_3 \cdot S_4 = S_1 \cdot S_2 \Rightarrow S_3^{\ 2} = 16 \Rightarrow S_3 = S_4 = 4$.

Площадь трапеции $S = 4 + 4 + 2 + 8 = 18$.

Д.3. Диагонали AC и BD трапеции ABCD пересекаются в точке M, причем AD : BC = 3:1, площадь треугольника AMD равна 18. Найти площадь трапеции ABCD.

Трапеция описана вокруг окружности



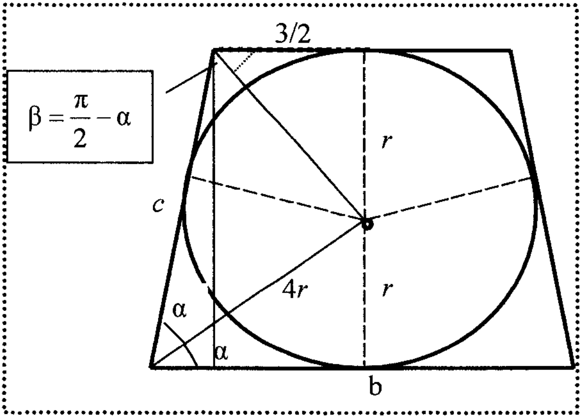
Суммы длин противоположных сторон равны: $a+b=c+d$.
Периметр описанной равнобедренной трапеции:

$$p=a+b+2c=2(a+b)=4c,\ c=\frac{a+b}{2},\ 2r=c\cdot\sin 2\alpha.$$

Площадь описанной равнобедренной трапеции:

$$S=\frac{1}{2}p\cdot r,\ S=2c\cdot r,\ S=c^2\cdot\sin 2\alpha,\ S=\frac{4r^2}{\sin 2\alpha}.$$

36. В описанной около круга равнобедренной трапеции расстояние от центра круга до дальней вершины в 4 раза больше радиуса круга. Меньшее основание равно 3. Найти большее основание.



$$\sin\alpha=\frac{1}{4},\ r=\frac{3}{2}\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{2}\cdot\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$\frac{b}{2}=r\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{2}\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{3}{2}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}}=\frac{45}{2}\ \Rightarrow\ b=45.$$

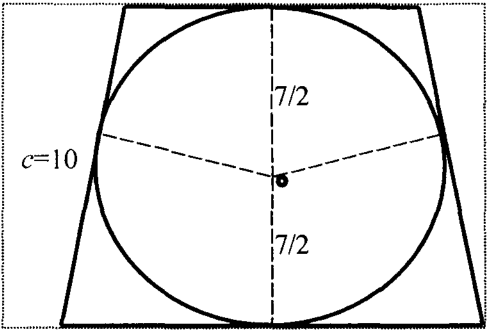
Д.З. В описанной около круга равнобедренной трапеции расстояние от центра круга до дальней вершины в 4 раза больше радиуса круга. Найти косинус острого угла трапеции.

37. Площадь равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна 20, острый угол при основании равен 30^0. Найти боковые стороны трапеции.

$$S=2c\cdot r\ \Rightarrow\ 2r=c\cdot\sin\alpha\Rightarrow S=c^2\cdot\sin\alpha\Rightarrow c=\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{20}{\frac{1}{2}}}=\sqrt{40}.$$

Д.З. Площадь равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна 60, острый угол при основании равен 60^0. Найти боковые стороны трапеции.

38. Найти площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности радиусом $\frac{7}{2}$, если боковая сторона трапеции равна 10.



$S = 2c \cdot r = 2 \cdot 10 \cdot \frac{7}{2} = 70$.

Д.З. Найти площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности радиусом $\frac{7}{2}$, а острый угол при основании равен 60°.

17. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 1

Тест 1. Вариант 1

Задания	1	2	3	4	5
1. Прямая $y = kx$ образует угол в 15° с положительным направлением оси ox при угловом коэффициенте	$\sqrt{3}-1$	$3-\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$1-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. Найти сумму квадратов всех целочисленных значений параметра p, при которых система $\begin{cases} x\cdot\log_7(p^4) + y\cdot\log_2 11 = \log_3(p^2), \\ x\cdot\log_7 81 + y\cdot\log_2 3 = 2 \end{cases}$ имеет бесконечное число решений. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
3. Найти число целых значений, которые может принимать функция $y = 3\cos x + 4\sin x$. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
4. Длина интервала изменения функции $y = \cos^4 x + \sin^4 x$ равна	1/8	1/6	1/4	1/2	1
5. Сумма всех различных корней уравнения $(\log_2 x)^{\log_2 x} = (\log_4 x)^{\log_4 x}$ принадлежит интервалу	$(1; 2]$	$(2; 3]$	$(3; 4]$	$(4; 5]$	$(5; 9]$
6. Найти сумму всех целочисленных решений неравенства $(\log_3 x)(\log_2 3) - 12 + 32(\log_x 3)(\log_3 2) \le 0$. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
7. Сумма всех корней уравнения $25^x - 2\cdot\sqrt{\log_3 324}\cdot 5^x + \log_3 25 = 0$ принадлежит интервалу	$(0; 1]$	$(1; 2]$	$(2; 3]$	$(3; 4]$	$(4; 9]$

Продолжение таблицы 1

Задания	1	2	3	4	5
8. Найти сумму всех значений параметра k, при которых уравнение $\left\|\left\|x-5\right\|-1\right\|-2=kx$ имеет три различных решения	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$
9. Все значения параметра p, при которых промежуток $[-1;1]$ расположен между корнями уравнения $x^2+px-2=0$, образуют интервал длиной	1	2	3	4	∞
10. Найти все значения параметра p, при которых хотя бы одно решение неравенства $\left\|x-p+9\right\|\le 4$ не является решением неравенства $\left\|x-2p+8\right\|\le 7$. В ответе указать число целых значений параметра p, не входящих в решение	5	6	7	8	∞
11. Угловой коэффициент касательной к графику функции $y(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ в точке $x=\frac{1}{2}$ равен	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2
12. Найти сумму всех натуральных значений параметра p, при которых уравнение $81^{\cos^2 x+\sin x}=p$ имеет хотя бы одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
13. Найти сумму двух наименьших положительных решений уравнения $\sin x+2\sin^2 x+4\sin^3 x+\ldots+128\sin^8 x=0$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{6}$

14. Найти наибольшее целочисленное значение параметра R, при котором система $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ \sqrt{15} \cdot x + \dfrac{y}{\sqrt{8}} = 66\sqrt{2} \end{cases}$ не имеет решений. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
15. Найти сумму всех различных корней уравнения $(9^x - 3^x - 2)(9^x - 3^x - 10) + 16 = 0$	1	2	3	4	5
16. Укажите число целых значений параметра p, при которых уравнение $\dfrac{4\|x\| - 24}{\|x\| - 4} = x + p$ имеет одно решение	8	9	10	11	∞
17. Найти площадь фигуры, определяемой системой $\begin{cases} y^2 - \dfrac{4}{\sqrt{3}} xy + x^2 \le 0, \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$	$\dfrac{\pi}{12}$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{4\pi}{3}$
18. Найти сумму квадратов всех различных целочисленных значений параметра p, при которых система $\begin{cases} \arcsin\sqrt{x(1-x)} \ge 0, \\ \arcsin\sqrt{(x-p)(1-x+p)} \le \pi \end{cases}$ имеет одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0

Задания	1	2	3	4	5
19. Найти количество различных целочисленных значений параметра p, при которых уравнение $\frac{75\lvert\sin x\rvert-5}{6\lvert\sin x\rvert-1}=p$ не имеет решений. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
20. Наибольшая длина решения неравенства $\lvert\cos x\rvert \geq \lvert\sin 2x\rvert$ равна	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
21. Наименьшее значение параметра p, при котором уравнение $(x-1)^3(x+1)=p$ имеет хотя бы одно решение, принадлежит интервалу	$(-99;-2]$	$(-2;-1]$	$(-1;0]$	$(0;1]$	$(1;99]$
22. Наибольшее значение параметра p, при котором система $\begin{cases} x^2+y^2=8\lvert x\rvert, \\ 3\lvert x\rvert+4\lvert y\rvert=p \end{cases}$ имеет четыре различных решения – натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен	1	2	3	4	0
23. Наибольший положительный корень уравнения $\sin\frac{\pi}{x}+\sin\frac{3\pi}{x}+\sin\frac{5\pi}{x}+\sin\frac{7\pi}{x}+$ $+\sin\frac{9\pi}{x}+\sin\frac{11\pi}{x}+\sin\frac{13\pi}{x}+\sin\frac{15\pi}{x}=0$ – натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен	1	2	3	4	0

24. Найти сумму всех значений параметра p, при которых система $\begin{cases} \frac{34}{5}+\frac{x^5}{5} \le y \le 3x - x^2 + 8, \\ y = x + p \end{cases}$ имеет одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
25. Найти сумму всех значений параметра p, при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = \frac{p-3}{x} \end{cases}$ имеет два различных решения. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
26. Найти сумму всех значений параметра p, при которых система $\begin{cases} 0 \le y \le 16 - \left\lvert \lvert x \rvert - 8 \right\rvert, \\ 4y = 4x^2 - p \end{cases}$ имеет одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
27. Найти число решений уравнения $\frac{2}{\pi} \arccos\left(\cos \frac{\pi x}{2}\right) = \frac{\lvert x-4 \rvert}{3}$. В ответе привести остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
28. Найти наибольшую длину решения неравенства $8(\cos \pi x) \cdot (\cos 2\pi x) \cdot (\cos 4\pi x) \cdot (\cos 8\pi x) + \cos(17\pi x) > 0$ на отрезке $x \in [0; 1]$	1/36	1/18	1/9	1/6	1/3

Продолжение таблицы 1

Задания	1	2	3	4	5
29. В треугольнике длина биссектрисы угла в 60°, образованного сторонами 2 и 4, равна	3	4	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$
30. Доход численно равен произведению числа грузчиков на квадрат числа менеджеров. Расходы на наем одного грузчика составляют 2 у.е., а одного менеджера 4 у.е. При каких минимальных затратах доход достигнет 27 у.е.?	9	12	15	18	21

Таблица 2

Тест 1. Вариант 2

Задания	1	2	3	4	5
1. Прямая $y = kx$ образует угол в 75° с положительным направлением оси ox при угловом коэффициенте	$2+\sqrt{3}$	$3+\sqrt{3}$	$1+\sqrt{3}$	$1+\frac{\sqrt{3}}{3}$	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. Найти сумму квадратов всех целочисленных значений параметра p, при которых система $\begin{cases} x\cdot\log_7(p^4)+y\cdot\log_2 7=\log_3(p^2), \\ x\cdot\log_7 81+y\cdot\log_2 3=2 \end{cases}$ имеет бесконечное число решений. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
3. Найти число целых значений, которые может принимать функция $y=\sqrt{13}\cdot\cos x+\sqrt{3}\cdot\sin x$. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0

4. Длина интервала изменения функции $y=\cos^6 x+\sin^6 x$ равна	1/4	1/2	3/4	1	5/4
5. Сумма всех различных корней уравнения $(\log_3 x)^{\log_3 x}=(\log_9 x)^{\log_9 x}$ принадлежит интервалу	$(1;2]$	$(2;3]$	$(3;4]$	$(4;5]$	$(5;9]$
6. Найти сумму всех целочисленных решений неравенства $(\log_3 x)(\log_2 3)-10+16\cdot(\log_x 3)(\log_3 2)\le 0$. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
7. Сумма всех корней уравнения $49^x-2\cdot\sqrt{\log_6 432}\cdot 7^x+\log_6 49=0$ принадлежит интервалу	$(0;1]$	$(1;2]$	$(2;3]$	$(3;4]$	$(4;9]$
8. Найти сумму всех значений параметра k, при которых уравнение $\left\|\|x-5\|-2\right\|-1=kx$ имеет три различных решения	1	$-\frac{1}{35}$	$\frac{1}{35}$	$-\frac{2}{35}$	$\frac{2}{35}$
9. Все значения параметра p, при которых промежуток $[-1;1]$ расположен между корнями уравнения $x^2+px-3=0$, образуют интервал длиной	1	2	4	6	∞
10. Найти все значения параметра p, при которых хотя бы одно решение неравенства $\|x-p+9\|\le 3$ не является решением неравенства $\|x-2p+8\|\le 7$. В ответе указать число целых значений параметра p, не входящих в решение	6	7	8	9	∞

Задания	1	2	3	4	5
11. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots$ в точке $x=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
12. Найти сумму всех натуральных значений параметра p, при которых уравнение $16^{\sin^2 x+\cos x}=p$ имеет хотя бы одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
13. Сумма двух наименьших положительных решений уравнения $\cos x+2\cos^2 x+4\cos^3 x+\ldots+2^7\cos^8 x=0$ равна	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$
14. Найти наибольшее целочисленное значение параметра R, при котором система $\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ \sqrt{5}\cdot x+\frac{y}{\sqrt{3}}=24\sqrt{3} \end{cases}$ не имеет решений. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
15. Найти сумму всех различных корней уравнения $(4^x-5\cdot 2^x+1)(4^x-5\cdot 2^x+7)+9=0$	0	1	2	3	4
16. Найти число целых значений параметра p, при которых уравнение $\frac{4\lvert x\rvert-24}{\lvert x\rvert-4}=x+p$ имеет хотя бы одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0

17. Найти площадь фигуры, определяемой системой $\begin{cases} y^2 - 3x^2 \le 0, \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
18. Найти сумму квадратов всех различных целочисленных значений параметра p, при которых система $\begin{cases} \arcsin\sqrt{x(2-x)} \ge 0, \\ \arcsin\sqrt{(x-p)(2-x+p)} \le \pi \end{cases}$ имеет одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
19. Найти количество различных целочисленных значений p, при которых уравнение $\frac{40\lvert\sin x\rvert - 20}{3\lvert\sin x\rvert - 2} = p$ не имеет решений. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
20. Наибольшая длина решения неравенства $\lvert\cos 2x\rvert \ge \lvert\sin x\rvert$ равна	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
21. Наименьшее значение параметра p, при котором уравнение $(x-2)^3(x+2) = p$ имеет хотя бы одно решение, принадлежит интервалу	$(-99; -30]$	$(-30; -20]$	$(-20; -10]$	$(-10; 0]$	$(0; 99]$
22. Наибольшее значение параметра p, при котором система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16\lvert x\rvert, \\ 3\lvert x\rvert + 4\lvert y\rvert = p \end{cases}$ имеет четыре различных решения – натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен	1	2	3	4	0

Задания	1	2	3	4	5
23. Наибольший положительный корень уравнения $\cos\frac{\pi}{x}+\cos\frac{5\pi}{x}+\cos\frac{9\pi}{x}+\cos\frac{13\pi}{x}+$ $+\cos\frac{17\pi}{x}+\cos\frac{21\pi}{x}+\cos\frac{25\pi}{x}+\cos\frac{29\pi}{x}=0$ – натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен	1	2	3	4	0
24. Найти сумму всех значений параметра p, при которых система $\begin{cases}\frac{11}{6}+\frac{x^6}{6}\le y\le 3x-x^2+8,\\ y=x+p\end{cases}$ имеет одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
25. Найти сумму всех значений параметра p, при которых система $\begin{cases}x^2+y^2=2,\\ y=\frac{p-2}{x}\end{cases}$ имеет два различных решения. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
26. Найти сумму всех значений параметра p, при которых система $\begin{cases}0\le y\le 8-\lvert\lvert x\rvert-4\rvert,\\ 4y=4x^2-p\end{cases}$ имеет одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0

27. Найти число решений уравнения $\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{\lvert x-5\rvert}{4}$. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
28. Найти наибольшую длину решения неравенства $4(\cos\pi x)\cdot(\cos 2\pi x)\cdot(\cos 4\pi x)+\cos(9\pi x)>0$ на отрезке $x\in[0;1]$	1/20	1/15	1/10	1/5	1
29. В треугольнике длина биссектрисы угла в 60°, образованного сторонами 4 и 8, равна	5	6	7	$\frac{8}{\sqrt{3}}$	$4\sqrt{3}$
30. Доход численно равен произведению числа грузчиков на куб числа менеджеров. Расходы на наем одного грузчика составляют 2 у.е., а одного менеджера 6 у.е. При каких минимальных затратах доход достигнет 81 у.е?	18	21	24	27	30

Таблица 3

Тест 2. Вариант 1

Задания	1	2	3	4	5
1. Величина площади фигуры $3\lvert y\rvert+4\lvert x\rvert\le 5$ принадлежит интервалу	$(1;2]$	$(2;3]$	$(3;4]$	$(4;5]$	$(5;9]$
2. Найти значение выражения $(\log_7 25)\cdot(\log_5 27)\cdot(\log_3 49)$. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0

Продолжение таблицы 3

Задания	1	2	3	4	5
3. Длина интервала изменения функции $y=\cos^8 x+\sin^8 x$ равна	1/8	1/4	1/2	3/4	7/8
4. Найти количество различных целочисленных значений p, при которых уравнение $\frac{60}{3\sin^3 x+7}=p$ имеет хотя бы одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
5. Сумма всех различных корней уравнения $x^{5\log_2 x}=(4x)^{3\log_2 x}$ принадлежит интервалу	$(1;2]$	$(2;3]$	$(3;4]$	$(4;5]$	$(5;9]$
6. Найти количество различных целочисленных значений, которые может принимать функция $y=(\sin^2 x+\sin x+1)^2-2(\sin^2 x+\sin x+1)+2$. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
7. Все значения параметра p, при которых все числа из промежутка $[-1;1]$, являющиеся решениями неравенства $x^2+px-3<0$, образуют интервал длиной	1	2	4	6	∞
8. Сумма всех различных корней уравнения $\log^2_{2007}(2x-1)-\log_{2007}(x)\cdot\log_{2007}(2x-1)-2\log^2_{2007}(x)=0$ принадлежит интервалу	$(0{,}5;1]$	$(1;2]$	$(2;3]$	$(3;4]$	$(4;99]$
9. Найти количество различных целочисленных значений p, при которых уравнение $\frac{(x^2-3px+2p^2)\cdot(x-4p)}{(x-6)\cdot(x-12)}=0$ имеет один корень	0	1	2	3	4

10. Найти количество различных целочисленных значений параметра p, при которых хотя бы одно решение неравенства $\lvert x-p+9\rvert \le 4$ является решением неравенства $\lvert x-2p+8\rvert \le 7$. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
11. Найти число различных натуральных значений, которые может принимать функция $y(x)=\log_2\left(-9^x+10\cdot 3^x-9\right)$	1	2	3	4	5
12. Найти сумму всех натуральных значений параметра p, при которых уравнение $\cos^2 x+\sin x=\log_{64} p$ имеет хотя бы одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
13. Длина решения неравенства $\sin x+2\sin^2 x+4\sin^3 x+\ldots+128\sin^8 x\ge 0$ на интервале $x\in[0;2\pi]$ равна	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	2π
14. Найти сумму всех натуральных значений параметра p, при которых уравнение $16^{\sin^2 x-\sin x+1}=p$ имеет хотя бы одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
15. Найти наименьшее положительное решение уравнения $\left(\sin^2 x-\sin x-1\right)\left(\sin^2 x-\sin x-3\right)+1=0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
16. Найти значение производной функции $y(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^8}{8}$ в точке $x=2$. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0

Продолжение таблицы 3

Задания	1	2	3	4	5
17. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\sin^2 x - p\sin x - 2 = 0$ не имеет решений. В ответе указать длину интервала	1	3/2	2	5/2	3
18. Найти сумму квадратов всех различных целочисленных значений параметра p, при которых система $\begin{cases} \arcsin\sqrt{\dfrac{x(4-x)}{3}} \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \arcsin\sqrt{\dfrac{(x-p)(4-x+p)}{3}} \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ имеет одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
19. Найти сумму всех целых значений x из области определения функции $y = \arccos(\log_{51} x)$. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
20. Наибольшая длина решения неравенства $\cos^8 x + \sin^8 x \le 17/32$ равна	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/2$
21. Функция $\left(2^{x^3}\right)^{(30-x)^7}$ достигает своего наибольшего значения при x, равном	12	14	16	18	20

22. Наибольшее значение параметра p, при котором система $\begin{cases} x^2+y^2=2\lvert x\rvert+2\lvert y\rvert, \\ 3\lvert x\rvert+4\lvert y\rvert=p \end{cases}$ имеет четыре различных решения, принадлежит интервалу	$(0;12]$	$(12;13]$	$(13;14]$	$(14;15]$	$(15;99]$
23. Найти количество различных целочисленных значений параметра p, при которых уравнение $(p-3)\cdot\left(\frac{2\arcsin x}{\pi}\right)^2-4\cdot\left(\frac{2\arcsin x}{\pi}\right)+1=0$ имеет одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
24. Найти сумму квадратов всех различных целочисленных значений параметров p и q, при которых система $\begin{cases} y\le 5x-x^2+q, \\ y\ge x^2-5x+p, \\ y=x \end{cases}$ имеет два различных решения. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
25. Найти длину интервала значений параметра p, при которых уравнение $16\sin^3 x+\frac{3}{\sin x}=p$ не имеет решений. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
26. Основания трапеции, вписанной в окружность радиусом $\sqrt{2}$, стягивают дуги в 45° и 135°. Величина площади трапеции принадлежит интервалу	$(0;1]$	$(1;2{,}5]$	$(2;3{,}5]$	$(3{,}5;5]$	$(5;7]$

Продолжение таблицы 3

Задания	1	2	3	4	5
27. Найти число корней уравнения $\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{x^2}{49}$. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
28. Найти наибольшую длину решения неравенства $(\cos\pi x)\cdot(\cos 2\pi x)\cdot(\cos 4\pi x)\cdot(\cos 8\pi x)\cdot(\cos 16\pi x)>0$ на отрезке $x\in[1;2]$	1/32	1/16	1/8	1/4	1/2
29. Равнобедренный прямоугольный треугольник вписан и описан около окружности. Отношение радиусов описанной и вписанной окружностей принадлежит интервалу	$(1;1,5]$	$(1,5;2]$	$(2;2,5]$	$(2,5;3]$	$(3;9]$
30. В начале 2001 года Петя положил 1 млн руб. в сейф и брал из него m% суммы каждый год. При каком значении m он вынет из сейфа в начале 2010 года максимальную сумму?	10	11,(1)	12%	15%	18%

Таблица 4

Тест 2. Вариант 2

Задания	1	2	3	4	5
1. Величина площади фигуры $2\|y\|+3\|x\|\le 5$ принадлежит интервалу	$(1;2]$	$(2;3]$	$(3;4]$	$(4;5]$	$(5;9]$
2. Найти значение выражения $(\log_7 125)\cdot(\log_5 81)\cdot(\log_3 49)$. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
3. Длина интервала изменения функции $y=\cos^6 x+\sin^6 x$ равна	1/2	3/4	1	5/4	3/2

4. Найти количество различных целочисленных значений параметра p, при которых уравнение $\frac{60}{2\cos^5 x+3}=p$ имеет хотя бы одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
5. Сумма всех различных корней уравнения $x^{7\log_2 x}=(2x)^{5\log_2 x}$ принадлежит интервалу	$(1;\,2]$	$(2;\,3]$	$(3;\,4]$	$(4;\,5]$	$(5;\,9]$
6. Найти число различных целочисленных значений функции $y=\left(2\cos^2 x+\cos x+1\right)^2-2\left(2\cos^2 x+\cos x+1\right)+2$. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
7. Все значения параметра p, при которых все числа из промежутка $[-1;1]$ являются решениями неравенства $x^2+px-2<0$, образуют интервал длиной	1	2	4	6	∞
8. Сумма всех различных корней уравнения $\log_{13}^2(4x-4)-\log_{13}(x)\cdot\log_{13}(4x-4)-2\cdot\log_{13}^2(x)=0$ принадлежит интервалу	$(1;\,2]$	$(2;\,3]$	$(3;\,4]$	$(4;\,5]$	$(5;\,9]$
9. Найти количество различных целочисленных значений параметра p, при которых уравнение $\frac{\left(x^2-6px+8p^2\right)\cdot(x-8p)}{(x-12)\cdot(x-24)}=0$ имеет один корень.	0	1	2	3	4
10. Найти количество различных целочисленных значений параметра p, при которых хотя бы одно решение неравенства $\lvert x-p+9\rvert\le 3$ является решением неравенства $\lvert x-2p+8\rvert\le 7$. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0

Продолжение таблицы 4

Задания	1	2	3	4	5
11. Найти число различных натуральных значений, которые может принимать функция $y(x)=\log_3\left(-49^x+8\cdot 7^x+11\right)$	1	2	3	4	5
12. Найти сумму всех натуральных значений параметра p, при которых уравнение $\sin^2 x+\cos x=\log_{16} p$ имеет хотя бы одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
13. Длина решения неравенства $\cos x+2\cos^2 x+4\cos^3 x+\ldots+128\cos^8 x\geq 0$ на интервале $x\in[0;2\pi]$ равна	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
14. Найти сумму всех натуральных значений параметра p, при которых уравнение $16^{\cos^2 x+\sin x+1}=p$ имеет хотя бы одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
15. Найти наименьшее положительное решение уравнения $\left(\cos^2 x-\cos x-1\right)\left(\cos^2 x-\cos x-3\right)+1=0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
16. Найти значение производной функции $y(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^8}{8}$ в точке $x=3$. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
17. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $\sin^2 x-2p\sin x-3=0$ не имеет решений. В ответе указать длину интервала	1	3/2	2	5/2	3

18. Найти сумму квадратов всех различных целочисленных значений параметра p, при которых система $\begin{cases} \arcsin\sqrt{\dfrac{x(6-x)}{5}} \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \arcsin\sqrt{\dfrac{(x-p)(6-x+p)}{5}} \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ имеет одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
19. Найти сумму всех целых значений x из области определения функции $y = \arcsin(\log_{67} x)$. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
20. Наибольшая длина решения неравенства $\cos^8 x + \sin^8 x \le \dfrac{37}{124}$ равна	$\dfrac{\pi}{12}$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{2}$
21. Функция $\left(7^{x^7}\right)^{(20-x)^3}$ достигает своего наибольшего значения при x, равном	12	14	16	18	20
22. Наибольшее значение параметра p, при котором система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4\lvert x\rvert + 4\lvert y\rvert, \\ 3\lvert x\rvert + 4\lvert y\rvert = p \end{cases}$ имеет четыре различных решения, принадлежит интервалу	$(0; 24]$	$(24; 26]$	$(26; 28]$	$(28; 30]$	$(30; 99]$

Задания	1	2	3	4	5
23. Найти количество различных целочисленных значений параметра p, при которых уравнение $(p-4)\cdot\left(\frac{2\arcsin x}{\pi}\right)^2-6\cdot\left(\frac{2\arcsin x}{\pi}\right)+1=0$ имеет одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
24. Найти сумму квадратов всех различных целочисленных значений параметров p и q, при которых система $\begin{cases} y\le 3x-x^2+q, \\ y\ge x^2-3x+p, \\ y=x \end{cases}$ имеет два различных решения. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
25. Найти значения параметра p, при которых уравнение $2\sin^2 x+\frac{1}{\sin x}=p$ не имеет решений. В ответе указать длину интервала найденных значений	1	2	3	4	0
26. Основания трапеции, вписанной в окружность радиусом $\sqrt{2}$, стягивают дуги в 60° и 120°. Величина площади трапеции принадлежит интервалу	$(0;1]$	$(1;2{,}5]$	$(2;3{,}5]$	$(3{,}5;5]$	$(5;7]$
27. Найти число корней уравнения $\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{x^2}{25}$. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0

28. Найти наибольшую длину решения неравенства $\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)(\cos\pi x)(\cos 2\pi x)(\cos 4\pi x)(\cos 8\pi x) > 0$ на отрезке $x \in [1; 3]$	1/32	1/16	1/8	1/4	1/2
29. Правильный треугольник вписан и описан около окружности. Отношение радиусов описанной и вписанной окружностей принадлежит интервалу	$(1; 1,5]$	$(1,5; 2]$	$(2; 2,5]$	$(2,5; 3]$	$(3; 9]$
30. В начале 2001 года Петя положил 1 млн руб. в сейф и брал из него m% суммы каждый год. При каком значении m он вынет из сейфа в начале 2007 года максимальную сумму?	10	11,(1)	15	16,(6)	18

Таблица 5

Тест 3. Вариант 1

Задания	1	2	3	4	5
1. Найти произведение всех различных значений параметра p, при которых прямые $y(x) = (p^2 - p - 1)x + 1$ и $y(x) = (p^2 - p - 3)x + 2$ перпендикулярны	2	1	-1	-2	-3
2.Найти сумму квадратов всех целочисленных значений параметра p, при которых система $\begin{cases} x\cdot\log_{2007}(p^4) + y\cdot\log_{2006}11 = \log_5(p^2), \\ x\cdot\log_{2007}625 + y\cdot\log_{2006}5 = 2 \end{cases}$ имеет бесконечное число решений. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
3. Значение выражения $\arcsin(\sin 5)$ равно	5	$5-\pi$	$\pi-5$	$5-2\pi$	$2\pi-5$

Продолжение таблицы 5

Задания	1	2	3	4	5
4. При каких значениях параметра a уравнение $x\cdot\cos a+\sin a=1$ выполняется при любых x?	$\frac{\pi}{2}+2\pi k$	$\frac{\pi}{2}+\pi k$	$2\pi k$	πk	$\varnothing$
5. Найти число решений системы $\begin{cases} y=\lvert\lvert x-5\rvert-1\rvert-2, \\ 2x+5y=0 \end{cases}$	1	2	3	4	0
6. Найти количество различных целочисленных значений параметра p, при которых уравнение $\left(\sin^2 x+\sin x+1\right)^2-2\left(\sin^2 x+\sin x+1\right)+2=p$ имеет бесконечное число решений. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
7. Все значения параметра p, при которых все числа из промежутка $(-\infty;\infty)$ являются решениями неравенства $\sin^2 x+p\cdot\sin x-3<0$, образуют интервал длиной	1	2	4	6	∞
8. Число различных корней уравнения $\log_x^2 2007-\log_x 2007\cdot\log_{(2x-1)} 2007-2\log_{(2x-1)}^2 2007=0$ равно	1	2	3	4	0
9. Наименьшее значение функции $y=\frac{x}{2}+\cos x$ на интервале $[0;\pi]$ достигается в точке x, равной	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$

10. Найти сумму двух наименьших натуральных значений параметра p, при которых уравнение $16^x - 2^{x+5} + 52 = p$ имеет одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
11. Найти число различных натуральных значений, которые может принимать функция $y(x) = \log_2(7\sin^2 x - \sin x)$	1	2	3	4	0
12. Длина решения неравенства $\sin(\arcsin(x-1)) \le \sin(\arcsin 2x)$ равна	0	1/3	1/2	1	2
13. Найти площадь фигуры $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1, \\ 3y^2 - x^2 \le 0 \end{cases}$	π	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$
14. Найти наименьшее значение выражения $p+q$, при котором система $\begin{cases} px + 2\cdot y = 2, \\ x + qy = q \end{cases}$ имеет бесконечное число решений	1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	4
15. Найти сумму всех различных значений параметра p, при которых уравнение $(p-5)\cdot\log_3 x + (p-1)\cdot\log_x 3 = 2$ имеет одно решение	1	5	6	11	12
16. Наименьшее значение функции $f = x^2 + y^2$ при условии $x\cdot y = 12$ равно	12	15	18	21	24
17. Найти наибольшее значение параметра p, при котором система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ x + y = p \end{cases}$ имеет одно решение	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{3}-1$	2	$1+\sqrt{2}$	$1+\sqrt{3}$
18. Наибольшее значение функции $f = x\cdot y$ при условии $x^2 + y^2 = 16$ равно	4	5	6	7	8

Задания	1	2	3	4	5
19. Найти площадь фигуры $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 8y, \\ x^2 + y^2 \le 8x \end{cases}$	$8\pi - 16$	$8\pi - 8$	$4\pi - 8$	$4\pi - 4$	$4\pi - 2$
20. Производная функции $\sin 9x + \sin 18x + \ldots + \sin 1998x + \sin 2007x$ в точке $x = 0$ равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен	1	2	3	4	0
21. Значение производной функции $y = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} - \ldots - \frac{1}{8x^8}$ при $x = \frac{1}{2}$ – натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен	1	2	3	4	0
22. Наибольшее значение параметра p, при котором система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x + 2y, \\ 3x + 4y = p \end{cases}$ имеет одно решение, принадлежит интервалу	$(0;12]$	$(12;13]$	$(13;14]$	$(14;15]$	$(15;99]$
23. Найти число натуральных значений параметра p, при которых уравнение $(p-3)\cdot\left(\frac{\arccos x}{\pi}\right)^2 - 4\cdot\left(\frac{\arccos x}{\pi}\right) + 1 = 0$ имеет одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
24. Функция $\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)^{x^3}\right)^{(30-x)^7}$ достигает своего наименьшего значения при x, равном	0	5	9	20	30

25. Найти сумму квадратов всех целочисленных значений параметра p, при которых система $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ (x-p)^2+y^2=4 \end{cases}$ имеет одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
26. В прямоугольном треугольнике длины сторон образуют геометрическую прогрессию. Найти косинус наибольшего острого угла треугольника	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-2}{2}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1/2
27. Найти число корней уравнения $\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{x^2}{50}$. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
28. В трапеции, основания которой относятся как 2:3, проведена прямая, делящая верхнее основание как 3:2, а нижнее основание как 2:3, считая от левой боковой стороны трапеции. Найти отношение площади левой трапеции к площади правой	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{11}{13}$	$\frac{12}{13}$
29. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 1 и 2. Найти длину биссектрисы прямого угла	$\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}-4$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$2\sqrt{2}-1$	$2\sqrt{2}-2$
30. Найти количество различных целочисленных значений параметра p, при которых уравнение $16\sin^3 x+\frac{3}{\sin x}=p$ не имеет решений. В ответе привести остаток от деления на 5	1	2	3	4	0

Таблица 6

Тест 3. Вариаит 2

Задания	1	2	3	4	5
1. Найти произведение всех различных значений параметра p, при которых прямые $y(x)=(p^2+p-2)x+1$ и $y(x)=(p^2+p)x+2$ перпендикулярны	2	1	-1	-2	-3
2. Найти сумму квадратов всех целочисленных значений параметра p, при которых система $\begin{cases} x\cdot\log_{2007}(p^4)+y\cdot\log_5 2007=\log_3(p^2), \\ x\cdot\log_{2007}81+y\cdot\log_5 3=2 \end{cases}$ имеет бесконечное число решений. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
3. Значение выражения $\arccos(\cos 5)$ равно	5	$5-\pi$	$\pi-5$	$5-2\pi$	$2\pi-5$
4. При каких значениях параметра a уравнение $x\cdot\cos a+\sin a=1$ выполняется при любых x?	$\frac{\pi}{2}+2\pi k$	$\frac{\pi}{2}+\pi k$	$2\pi k$	πk	$\varnothing$
5. Найти число решений системы $\begin{cases} y=\lvert\lvert x-6\rvert-1\rvert-4, \\ 2x+3y=0 \end{cases}$	1	2	3	4	0
6. Найти количество различных целочисленных значений параметра p, при которых уравнение $(2\cos^2x+\cos x+1)^2-2(2\cos^2x+\cos x+1)+2=p$ имеет бесконечное число решений. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0

7. Все значения параметра p, при которых все числа из промежутка $(-\infty; \infty)$ являются решениями неравенства $\sin^2 x + p\sin x - 2 < 0$, образуют интервал длиной	1	2	4	6	∞
8. Число различных корней уравнения $\log_x^2 13 - \log_x 13 \cdot \log_{(4x-4)} 13 - 2 \cdot \log_{(4x-4)}^2 13 = 0$ равно	1	2	3	4	0
9. Наибольшее значение функции $y = \frac{x}{2} - \sin x$ на интервале $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ достигается в точке x, равной	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
10. Найти сумму двух наименьших натуральных значений параметра p, при которых уравнение $256^x - 2^{x+3} + 8 = p$ имеет одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
11. Найти число различных натуральных значений, которые может принимать функция $y(x) = \log_2(15\cos^2 x - \cos x)$	1	2	3	4	0
12. Длина решения неравенства $\cos(\arccos(x-1)) \geq \cos(\arccos 2x)$ равна	0	1/3	1/2	1	2
13. Найти площадь фигуры $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ y^2 - 3x^2 \leq 0 \end{cases}$	π	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$

Задания	1	2	3	4	5
14. Найти наименьшее значение выражения $p+q$, при котором система $\begin{cases} px+4\cdot y=4, \\ x+qy=q \end{cases}$ имеет бесконечное число решений	1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	4
15. Найти сумму всех различных значений параметра p, при которых уравнение $(p-6)\cdot\log_3 x+(p-1)\cdot\log_x 3=2$ имеет одно решение	1	6	7	13	14
16. Наименьшее значение функции $f=x^2+y^2$ при условии $x\cdot y=10$ равно	12	14	16	18	20
17. Найти наибольшее значение параметра p, при котором система $\begin{cases} x^2+y^2=4x, \\ x+y=p \end{cases}$ имеет одно решение	$2\sqrt{2}-2$	$2\sqrt{2}-1$	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}+1$	$2\sqrt{2}+2$
18. Наибольшее значение функции $f=x\cdot y$ при условии $x^2+y^2=4$ равно	1	2	3	4	0
19. Найти площадь фигуры $\begin{cases} x^2+y^2\le 4y, \\ x^2+y^2\le 4x \end{cases}$	$2\pi-4$	$2\pi-2$	2π	$4\pi-2$	$4\pi-4$
20. Производная функции $\sin 3x+\sin 6x+\ldots+\sin 2004x+\sin 2007x$ в точке $x=0$ равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен	1	2	3	4	0

21. Значение производной функции $y=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}-\ldots-\frac{1}{8x^8}$ при $x=\frac{1}{3}$ – натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен	1	2	3	4	0
22. Наибольшее значение параметра p, при котором система $\begin{cases} x^2+y^2=4x+4y, \\ 3x+4y=p \end{cases}$ имеет одно решение, принадлежит интервалу	$(0;24]$	$(24;26]$	$(26;28]$	$(28;30]$	$(30;99]$
23. Найти число натуральных значений параметра p, при которых уравнение $(p-3)\cdot\left(\frac{\operatorname{arcctg} x}{\pi}\right)^2-4\cdot\left(\frac{\operatorname{arcctg} x}{\pi}\right)+1=0$ имеет одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
24. Функция $\left((\operatorname{acrtg} 1)^{x^7}\right)^{(20-x)^3}$ достигает своего наименьшего значения при x, равном	0	6	14	20	30
25. Найти сумму квадратов всех целочисленных значений параметра p, при которых система $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ (x-p)^2+y^2=9 \end{cases}$ имеет одно решение. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
26. В прямоугольном треугольнике длины сторон образуют арифметическую прогрессию. Найти косинус наибольшего острого угла треугольника	1/5	2/5	3/5	4/5	9/10

Задания	1	2	3	4	5
27. Найти число корней уравнения $\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{x^2}{18}$. В ответе указать остаток от деления на 5.	1	2	3	4	0
28. В трапеции, основания которой относятся как 1:3, проведена прямая, делящая верхнее основание как 3:1, а нижнее основание как 1:3, считая от левой боковой стороны трапеции. Найти отношение площади левой трапеции к площади правой	6/7	7/8	8/9	9/10	10/11
29. Длины сторон треугольника, образующих угол в 60°, равны 2 и 4. Найти длину биссектрисы угла	$3\sqrt{2}-2$	$3\sqrt{3}-3$	$2\sqrt{3}$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	$2\sqrt{3}-1$
30. Найти число различных целочисленных значений параметра p, при которых уравнение $64\cos^5 x+\frac{5}{\cos x}=p$ не имеет решений. В ответе привести остаток от деления на 5	1	2	3	4	0

Таблица 7

Тест 4. Вариант 1

Задания	1	2	3	4	5
1. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $2x+y=1$ относительно оси ординат	$-x+2y=1$	$2x-y=1$	$2x+y=-1$	$-2x+y=1$	$x+2y=1$

2. Сумма всех значений параметра p, при которых система $\begin{cases} x \cdot 5^p + y \cdot 37 = 37, \\ x \cdot 6^{\frac{1}{p}} + y = 1 \end{cases}$ имеет бесконечное число решений, принадлежит интервалу	$(-99; 1]$	$(1; 2]$	$(2; 3]$	$(3; 4]$	$(4; 99]$
3. Значение выражения $y = 3^{2^{\log_2 4 \cdot \log_3 2}}$ – натуральное число, остаток от деления на 5 которого равен	1	2	3	4	0
4. Сумма всех значений параметра p, при которых уравнение $x \cdot \log_2(p-7) + \log_2 p = 3$ выполняется при любых x, – натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен	1	2	3	4	0
5. Найти наибольшее натуральное значение параметра b, при котором хотя бы одно решение неравенства $\|x-3\| \le 6$ не является решением неравенства $\|x-b\| < 5$. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
6. Длина интервала изменения функции $y = (\sin^2 x + \sin x + 1)^2 - 2(\sin^2 x + \sin x + 1)$ равна	1	2	3	4	0
7. Все значения параметра p, при которых ни одно из чисел из промежутка $[-1; 1]$ не является решением неравенства $x^2 + p \cdot x - 3 > 0$, образуют интервал длиной	1	2	4	6	∞

Задания	1	2	3	4	5
8. Длина интервала решения неравенства $\log^2_{6-x}17-\log_{6-x}17\cdot\log_x 17-2\cdot\log^2_x 17\le 0$ принадлежит интервалу	$(0;1]$	$(1;2]$	$(2;3]$	$(3;4]$	$(4;6]$
9. Длина интервала изменения функции $y=2^{\sin x}-2^{2\sin x}$ равна	1/2	1	3/2	2	5/2
10. Длина интервала изменения функции $y=\sin(\mathrm{arctg}x)+\cos(\mathrm{arctg}x)$ равна	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	4
11. Производная функции $y(x)=\sin\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)$ в точке $x=0$ равна	$-\frac{\pi}{2}$	-1	0	1	$\frac{\pi}{2}$
12. Длина интервала решения неравенства $\mathrm{tg}\left(\frac{\arccos(x-1)}{2}\right)\ge \mathrm{tg}\left(\frac{\arccos 2x}{2}\right)$ равна	0	1/3	1/2	1	2
13. Наибольшее значение отношения $\frac{x}{y}$ при условии $\begin{cases}x+y=5,\\ y\cdot x=6\end{cases}$ равно	3	2	1	2/3	3/2

14. Количество различных целочисленных значений x из области определения функции $y=\frac{1}{\sqrt{13x-x^2-36}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-11x+18}}$ равно	1	2	3	4	0
15. Наименьший положительный корень уравнения $\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{5}+\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{5}=-1$ равен	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{7\pi}{10}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{6\pi}{5}$
16. Значение параметра p, при котором уравнение $\left\|\,\|x-8\|-8\right\|=p$ имеет три различных решения, – натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен	1	2	3	4	5
17. Наибольшее значение параметра p, при котором система $\begin{cases}x^2+y^2=2\|x\|,\\ x+2y=p\end{cases}$ имеет три различных решения, равно	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{3}-1$	2	$1+\sqrt{2}$	$1+\sqrt{3}$
18. Наименьшее значение функции $f=x^2+y^2$ при условии $x\cdot y=2007$ – натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен	1	2	3	4	0
19. Если $\begin{cases}\arccos(x^2-4x+3)+\sqrt{y^2-1}=0,\\ \arccos(y^2-3y+2)+\sqrt{x^2-1}=0,\end{cases}$ то величина $\frac{x}{y}$ равна	1	-1	4	-4	2

Задания	1	2	3	4	5
20. Найти количество различных целочисленных значений параметра p, при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 240, \\ \left\|\sqrt{27}\cdot x + \dfrac{y}{\sqrt{3}}\right\| = p \end{cases}$ имеет четыре различных решения. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
21. Значение производной функции $y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{2\sin^2 x} + \dfrac{1}{3\sin^3 x} + \ldots + \dfrac{1}{9\sin^9 x}\right)$ при $x = \dfrac{\pi}{6}$ – натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен	1	2	3	4	0
22. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, равен $2-\sqrt{3}$, а острый угол при основании равен 30°. Основание треугольника равно	$\sqrt{3}$	1/2	1	3/2	2
23. Наибольший корень уравнения $\sin\left(\dfrac{25\pi}{x}\right) + \sin\left(\dfrac{237\pi}{x}\right) = \sin\left(\dfrac{37\pi}{x}\right) + \sin\left(\dfrac{249\pi}{x}\right)$ – натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен	1	2	3	4	0

24. Функция $(\operatorname{arctg} 1)^{\frac{x}{2}+\cos x}$ достигает своего наибольшего значения на отрезке $[0; \pi]$ при x, равном	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
25. Сумма квадратов всех значений параметра p, при которых система $\begin{cases} x^2-8px+7p^2 \le 0, \\ (x-20)^2 \ge (9p)^2 \end{cases}$ имеет одно решение, – натуральное число. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
26. Произведение всех различных корней уравнения $36^{\log_5 x} = 216 \cdot 2007^{\log_x 5}$ принадлежит интервалу	$(0; 11]$	$(11; 12]$	$(12; 13]$	$(13; 14]$	$(14; 99]$
27. Наименьшая длина решения неравенства $\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right) \ge \frac{x}{6}$ принадлежит интервалу	$(0; 0{,}5]$	$(0{,}5; 1]$	$(1; 1{,}5]$	$(1{,}5; 2]$	$(2; 4]$
28. В трапеции, длины оснований которой относятся как 2:3, прямая делит верхнее основание в отношении 2:3, а нижнее – в отношении 3:2. Найти отношение площади большей трапеции к меньшей	$\frac{11}{10}$	$\frac{12}{11}$	$\frac{13}{12}$	$\frac{14}{13}$	$\frac{15}{14}$
29. Найти наибольшее значение параметра p, при котором уравнение $2x^{12}+10x^8-2\sqrt{p}\cdot x^7-128\cdot x^6+25x^4-10\sqrt{p}\cdot x^3+p\cdot x^2$ имеет хотя бы один корень. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0

Продолжение таблицы 7

Задания	1	2	3	4	5
30. Предприниматель должен израсходовать 44 у.е. на наем грузчиков (1 у.е. на каждого) и менеджеров (3 у.е. на каждого), причем ожидаемый доход численно равен произведению числа грузчиков на куб числа менеджеров. Сколько всего сотрудников нужно нанять, чтобы получить максимальный доход? В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0

Таблица 8

Тест 4. Вариант 2

Задания	1	2	3	4	5
1. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $x+2y=1$ относительно оси абсцисс	$-x+2y=1$	$x-2y=1$	$x+2y=-1$	$2x+y=1$	$x+2y=1$
2.Сумма всех значений параметра p, при которых система $\begin{cases} x\cdot 6^p + y\cdot 37 = 37, \\ x\cdot 7^{\frac{1}{p}} + y = 1 \end{cases}$ имеет бесконечное число решений, принадлежит интервалу	$(-99;1]$	$(1;2]$	$(2;3]$	$(3;4]$	$(4;99]$
3. Значение выражения $y=7^{3^{\log_3 5}\cdot\log_7 2}$ – натуральное число, остаток от деления на 5 которого равен	1	2	3	4	0
4. Сумма всех значений параметра p, при которых уравнение $x\cdot\log_2(p-15)+\log_2 p=4$ выполняется	1	2	3	4	0

при любых x, – натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен					
5. Найти наибольшее натуральное значение параметра b, при котором хотя бы одно решение неравенства $\|x-4\| \le 7$ не является решением неравенства $\|x-b\| < 5$. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
6. Длина интервала изменения функции $y=\left(2\cos^2 x+\cos x+1\right)^2-2\left(2\cos^2 x+\cos x+1\right)$ – натуральное число, остаток от деления на 5 которого равен	1	2	3	4	0
7. Все значения параметра p, при которых ни одно из чисел из промежутка $[-1;1]$ не является решением неравенства $x^2+px-2>0$, образуют интервал длиной	1	2	4	6	∞
8. Длина интервала решения неравенства $\log^2_{5-x}13-\log_{5-x}13\cdot\log_x 13-2\cdot\log^2_x 13\le 0$ принадлежит интервалу	$(0;1]$	$(1;2]$	$(2;3]$	$(3;4]$	$(4;5]$
9. Длина интервала изменения функции $y=3^{2\cos x}-3^{\cos x}$ равна	5,75	6	6,25	6,5	6,75
10. Длина интервала изменения функции $y=\sin(\operatorname{arcctg} x)-\cos(\operatorname{arcctg} x)$ равна	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	4

Задания	1	2	3	4	5
11. Производная функции $y(x)=\sin\left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)$ в точке $x=0$ равна	$-\frac{\pi}{2}$	-1	0	1	$\frac{\pi}{2}$
12. Длина решения неравенства $\operatorname{ctg}(\arcsin(x-1)) \geq \operatorname{ctg}(\arcsin 2x)$ равна	0	1/3	1/2	1	2
13. Наибольшее значение отношения $\frac{x}{y}$ при условии $\begin{cases} x+y=6, \\ y \cdot x=8 \end{cases}$ равно	4	2	1	1/2	1/3
14. Количество различных целочисленных значений x из области определения функции $y=\frac{1}{\sqrt{10x-x^2-21}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-12x+27}}$ равно	1	2	3	4	0
15. Наименьший положительный корень уравнения $\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{5}-\sin x \cdot \sin\frac{\pi}{5}=1$ равен	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{7\pi}{10}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{9\pi}{5}$
16. Значение параметра p, при котором уравнение $\lvert\lvert x-7\rvert-7\rvert=p$ имеет три различных решения, – натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен	1	2	3	4	5

17. Наибольшее значение параметра p, при котором система $\begin{cases} x^2+y^2=4\lvert x\rvert, \\ x+2y=p \end{cases}$ имеет три различных решения, равно	$\sqrt{3}-1$	$2\sqrt{3}-1$	2	$\sqrt{3}+1$	$2\sqrt{3}+1$
18. Наименьшее значение функции $f=x^2+y^2$ при условии $x\cdot y=2006$ – натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен	1	2	3	4	0
19. Если $\begin{cases} \arccos\left(x^2-6x+8\right)+\sqrt{y^2-1}=0, \\ \arccos\left(y^2-6y+5\right)+\sqrt{x^2-4}=0, \end{cases}$ то величина $\dfrac{x}{y}$ равна	1	-1	2	-2	4
20. Найти количество различных целочисленных значений параметра p, при которых система $\begin{cases} x^2+y^2=30, \\ \left\lvert\sqrt{8}\cdot x+\dfrac{y}{\sqrt{2}}\right\rvert=p \end{cases}$ имеет четыре различных решения. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
21. Значение производной функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{2\cos^2 x}+\dfrac{1}{3\cos^3 x}+\ldots+\dfrac{1}{8\cos^8 x}\right)$ при $x=\dfrac{\pi}{3}$ – натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен	1	2	3	4	0

Задания	1	2	3	4	5
22. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, равен $\sqrt{2}-1$. Гипотенуза треугольника равна	$\sqrt{2}$	1/2	1	3/2	2
23. Наибольший корень уравнения $\sin\left(\frac{27\pi}{x}\right)+\sin\left(\frac{233\pi}{x}\right)=\sin\left(\frac{33\pi}{x}\right)+\sin\left(\frac{239\pi}{x}\right)$ – натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен	1	2	3	4	0
24. Функция $\left(\arccos\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2}-\sin x}$ достигает своего наибольшего значения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ при x, равном	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
25. Сумма квадратов всех значений параметра p, при которых система $\begin{cases}x^2-10px+9p^2\le 0,\\(x-60)^2\ge(11p)^2\end{cases}$ имеет одно решение, – натуральное число. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0

26. Произведение всех различных корней уравнения $25^{\log_3 x} = 125 \cdot 2007^{\log_x 3}$ принадлежит интервалу	$(0; 5]$	$(5; 6]$	$(6; 7]$	$(7; 8]$	$(8; 99]$
27. Наименьшая длина решения неравенства $\frac{2}{\pi}\arccos\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right) \geq \frac{x}{8}$ принадлежит интервалу	$(0; 0{,}5]$	$(0{,}5; 1]$	$(1; 1{,}5]$	$(1{,}5; 2]$	$(2; 4]$
28. В трапеции, длины оснований которой относятся как 3:4, прямая делит верхнее основание в отношении 4:7, а нижнее – в отношении 7:4. Найти отношение площади большей трапеции к меньшей	$\frac{37}{34}$	$\frac{38}{35}$	$\frac{39}{36}$	$\frac{40}{37}$	$\frac{41}{38}$
29. Найти наибольшее значение параметра p, при котором уравнение $2x^8 + 16x^6 - 2\sqrt{p} \cdot x^5 - 46x^4 - 16\sqrt{p} \cdot x^3 + p \cdot x^2 + 81 = 0$ имеет хотя бы один корень. В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0
30. Предприниматель должен израсходовать 88 у.е. на наем грузчиков (2 у.е. на каждого) и менеджеров (6 у.е. на каждого), причем ожидаемый доход численно равен произведению числа грузчиков на куб числа менеджеров. Сколько всего сотрудников нужно нанять, чтобы получить максимальный доход? В ответе указать остаток от деления на 5	1	2	3	4	0

Таблица 9

Тест 5. Вариант 1

Задания	1	2	3	4	5
1. Укажите квадрант, через который не проходит прямая $y = 2x - 1$	1	2	3	4	1,2
2. Вычислить $2+7+12+\ldots+107$. В ответе указать остаток от деления на 5	0	1	2	3	4
3. Укажите сумму длин интервалов, на которых выполняется неравенство $x^4 - 3x^2 + 2 < 0$	0	∞	$2\left(\sqrt{2}-1\right)$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}$
4. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{(x+7)^2} = x+7, \\ \sqrt{(x-3)^2} = 3-x. \end{cases}$ В ответе указать сумму целочисленных решений.	∞	-22	-18	-12	-4
5. Решить неравенство $\sqrt{x+5} < 5 - x$. В ответе указать число целых значений x, удовлетворяющих неравенству	∞	7	8	9	10
6. Сумма корней уравнения $4^x + 25^x = 3 \cdot 10^x$ равна	0	3	1	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
7. Найти площадь треугольника, ограниченного отрезками осей и отрезком касательной к графику функции $y = \lvert x \rvert^3$, проведенной через точку этого графика с абсциссой $x = 1$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	3	2
8. Если Билл повысит, а Джек понизит свою производительность труда на 20% против плана, то время совместного выполнения	2	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$

работы уменьшится на 10% против плана. Как относится плановая производительность Билла к плановой производительности Джека?					
9. Значение выражения $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ равно	0	π	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
10. Укажите наибольшее значение функции $y=\log_2(\sin x)+\log_{\sin x}2$	1	2	-2	-1	∞
11. Сколько целых значений может принимать выражение $y=2\sin x+3\cos x$? В ответе указать остаток от деления на 5.	6	7	8	9	10
12. Решить неравенство $\log_x 4\le 2$	$x>1$	$x\ge 2$	$\left[\begin{array}{l}0<x<1;\\ x\ge 2\end{array}\right.$	$0<x<1$	$1<x\le 2$
13. Укажите число решений уравнения $\frac{\sin x}{1-\cos x}=0$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$	4	3	2	1	0
14. Наибольшая длина решения неравенства $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+\ldots\le 1$ равна	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
15. Укажите число решений уравнения $\frac{3}{2}+x-x^2=\lvert x\rvert^5$	0	1	2	3	4
16. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе $\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2\le 2,\\ xy\le 0\end{cases}$	$4\pi-4$	$2\pi-2$	$\frac{\pi-1}{2}$	$\frac{\pi-1}{4}$	$\pi-1$

Задания	1	2	3	4	5
17. Найти значения параметра a, при которых уравнение $ax^2-\|x-2\|=0$ имеет три действительных корня. В ответе указать величину знаменателя несократимой дроби	1	2	4	8	16
18. Укажите число решений уравнения $\log_x\left(x^2-4\right)=\log_{4x^2-6}\left(x^2-4\right)$	0	1	2	3	4
19. Расход на аренду помещения составляет 90% от общих расходов фирмы. Если стоимость аренды уменьшить в 6 раз при прочих равных условиях, то после этого расход на аренду помещения составит от общих расходов фирмы	84%	60%	30%	24%	15%
20. Укажите число решений уравнения $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+2x+3\right)=1$	0	1	2	3	4
21. Решить неравенство $f\left(x^2-1\right)>f\left(2x-1\right)$, если $f\left(x\right)=\log_{\frac{1}{2}}x$	$x>2$	$1<x<2$	$0<x<2$	$\varnothing$	$x>1$
22. Второй член геометрической прогрессии равен 2, а пятый равен 5. Найти знаменатель прогрессии	$\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$	$\sqrt[4]{\frac{5}{2}}$	$\sqrt[5]{\frac{5}{2}}$	1	$-\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$
23. Укажите число решений уравнения $\log_{x^2}2+\log_2 x^2=3$	8	4	2	1	0
24. Укажите число решений уравнения $\arccos\left(\cos 3x\right)=x$	0	1	2	3	4

25. Укажите интервалы возрастания функции $f(x)=x^3+x^2-x+3$	$-1<x$	$\left[\begin{array}{l} x<-1, \\ x>\frac{1}{3} \end{array}\right.$	$x>\frac{1}{3}$	$\varnothing$	$x>-1$
26. Расстояние между нулями функции $y=x^2+2\sqrt{6}\cdot x+5$ равно	1	2	3	4	5
27. Найти все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} \left(a^2-a\right)\sin\frac{x}{2}+2\cos y=a+5, \\ 3\sin\frac{x}{2}+\cos y=4 \end{cases}$ имеет бесконечное число решений. В ответе привести сумму квадратов всех значений параметра	1	7	9	10	11
28. Решением неравенства $2\cdot\lg x+\lg\frac{1}{\sqrt{10}}<\lg x^2$ является	$\varnothing$	$x>0$	$0<x<\sqrt{10}$	$x>\sqrt{10}$	$x>1$
29. Выражение $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)+\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$ равно	$\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$	$3\cos x$
30. Сумма всех корней уравнения $2^{\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x}}=2x^2-\frac{1}{2}$ равна	$\frac{1}{2}$	$\varnothing$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	0

Таблица 10

Тест 5. Вариант 2

Задания	1	2	3	4	5
1. Укажите квадрант, через который не проходит прямая $y=2x+1$	1	2	3	4	1,2

Задания	1	2	3	4	5
2. Вычислить $7+12+17+\ldots+107$. В ответе указать остаток от деления на 5	0	1	2	3	4
3. Укажите сумму длин интервалов, на которых выполняется неравенство $x^4-4x^2+3<0$	$\sqrt{3}-1$	$2\left(\sqrt{3}-1\right)$	∞	$2\sqrt{3}$	0
4. Решить систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{(x+7)^2}=x+7,\\ \sqrt{(x-2)^2}=2-x.\end{cases}$ В ответе указать сумму целых решений	-5	-20	-25	-30	$-\infty$
5. Решить неравенство $\sqrt{x+1}<2-x$. В ответе указать число целых значений x, удовлетворяющих неравенству	∞	0	1	2	3
6. Сумма корней уравнения $4^x+25^x=4\cdot 10^x$ равна	4	0	1	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
7. Найти площадь треугольника, ограниченного отрезками осей и отрезком касательной к $y=\lvert x\rvert^3$, проведенной через точку этого графика с абсциссой $x=2$	$\frac{32}{3}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
8. Если Билл повысит, а Джек понизит свою производительность труда на 20% против плана, то время совместного выполнения работы увеличится на 10% против плана. Как относится плановая производительность Билла к плановой производительности Джека?	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$

9. Значение выражения $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ равно	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	0
10. Укажите наибольшее значение функции $y=\log_2(\sin x)+\log^3_{\sin x} 2$	2	-2	∞	$\frac{4}{3^{3/4}}$	$-\frac{4}{3^{3/4}}$
11. Сколько целых значений может принимать выражение $y=2\sin x-3\cos x$? В ответе указать остаток от деления на 5.	5	6	7	8	9
12. Решить неравенство $\log_x 4\geq 2$	$x>1$	$x\geq 2$	$\left[\begin{array}{l}0<x<1;\\ x\geq 2\end{array}\right.$	$0<x<1$	$1<x\leq 2$
13. Укажите число решений уравнения $\frac{\cos x}{1-\sin x}=0$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$	0	1	2	3	4
14. Наибольшая длина решения неравенства $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+\ldots\geq 1$ равна	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
15. Укажите число решений уравнения $\frac{5}{2}-x-x^2=\lvert x\rvert^5$	0	1	2	3	4
16. Найти площадь фигуры, каждая точка которой удовлетворяет системе $\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2\leq 2,\\ xy\geq 0\end{cases}$	$2(\pi-1)$	$\pi-1$	$\frac{\pi+1}{2}$	$2(\pi+1)$	$\pi+1$
17. Найти значение параметра a, при котором уравнение $ax^2-\lvert x-1\rvert=0$ имеет три действительных корня. В ответе указать величину знаменателя несократимой дроби	2	4	8	16	32

Задания	1	2	3	4	5
18. Укажите число решений уравнения $\log_x\left(x^2-5\right)=\log_{4x^2-6}\left(x^2-5\right)$	0	1	2	3	4
19. Расход на аренду помещения составляет 80% общих расходов фирмы. Если стоимость аренды уменьшить в 6 раз при прочих равных условиях, то после этого расход на аренду помещения составит от общих расходов фирмы	13,(3)%	26,(6)%	30%	40%	60%
20. Укажите число решений уравнения $\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+2x+4\right)=1$	0	1	2	3	4
21. Решить неравенство $f\left(x^2-1\right)>f\left(3x-1\right)$, если $f\left(x\right)=\log_{\frac{1}{2}} x$	$x>3$	$1<x<3$	$0<x<3$	$\varnothing$	$x>1$
22. Второй член геометрической прогрессии равен 2, а седьмой равен 7. Найти знаменатель прогрессии	$\pm\sqrt[6]{\frac{7}{2}}$	$\sqrt[6]{\frac{7}{2}}$	$\sqrt[5]{\frac{7}{2}}$	1	$-\sqrt[5]{\frac{7}{2}}$
23. Укажите число решений уравнения $\log_{x^2}2+\log_2 x^2=2$	0	1	2	4	8
24. Укажите число решений уравнения $\arcsin(\sin 2x)=x$	0	1	2	3	4
25. Укажите интервалы возрастания функции $f\left(x\right)=x^3-3x+4$	$-1<x<1$	$\left[\begin{array}{l} x<-1, \\ x>1 \end{array}\right.$	$x>1$	$\varnothing$	$x>-1$

26. Расстояние между нулями функции $y = x^2 + \sqrt{21} \cdot x + 3$ равно	1	2	3	4	0
27. Найти все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} (a^2 - a)\sin\frac{x}{2} + 3\cos y = 2a + 7, \\ 4\sin\frac{x}{2} + \cos y = 5 \end{cases}$ имеет бесконечное число решений. В ответе привести остаток от деления на 5 суммы квадратов всех значений параметра	1	2	3	4	0
28. Решением неравенства $2 \cdot \log_3 x + \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} > \log_3 x^2$ является	$x > 0$	$0 < x < \sqrt{3}$	$\varnothing$	$x > \sqrt{3}$	$x > 3$
29. Выражение $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \cos(\pi - x) - \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ равно	$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$3\sin x$
30. Сумма всех корней уравнения $3^{\log_{\sqrt{3}} \sqrt{x}} = 3x^2 - \frac{1}{3}$ равна	$\frac{1}{3}$	$\varnothing$	$\frac{\sqrt{5}+1}{6}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{6}$	0

18. Ответы

Тест 1. Вариант 1

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Номер ответа	3	2	1	4	1	1	1	3	2	3	2	1	5	3	1
Номер задачи	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Номер ответа	4	2	2	3	3	2	2	3	5	4	1	5	2	3	4

Тест 1. Вариант 2

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Номер ответа	1	3	4	3	1	5	1	5	3	4	4	3	4	2	3
Номер задачи	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Номер ответа	1	5	3	4	3	2	4	5	5	1	4	3	3	4	3

Тест 2. Вариант 1

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Номер ответа	4	2	5	5	5	5	3	1	4	3	4	1	4	3	5
Номер задачи	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Номер ответа	5	3	2	1	4	2	4	3	2	3	3	2	1	3	2

Тест 2. Вариант 2

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Номер ответа	5	4	2	4	5	5	2	3	4	1	3	1	4	3	4
Номер задачи	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Номер ответа	5	2	4	3	2	2	4	4	2	2	4	5	2	2	4

Тест 3. Вариант 1

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Номер ответа	4	2	4	1	2	5	3	5	5	1	3	3	4	4	5
Номер задачи	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Номер ответа	5	4	5	1	4	5	4	2	3	2	1	4	5	3	5

Тест 3. Вариант 2

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Номер ответа	3	3	5	3	2	5	2	2	1	4	4	1	2	5	5
Номер задачи	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Номер ответа	5	5	2	1	5	5	4	1	3	2	3	5	4	4	3

Тест 4. Вариант 1

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Номер ответа	4	3	1	3	2	4	3	4	4	2	5	3	5	5	5
Номер задачи	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Номер ответа	3	2	4	1	5	2	5	4	4	4	2	2	3	2	2

Тест 4. Вариант 2

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Номер ответа	2	3	2	1	3	4	2	3	3	2	3	3	2	5	5
Номер задачи	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Номер ответа	2	2	2	3	5	5	5	1	1	5	2	3	4	3	2

Тест 5. Вариант 1

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Номер ответа	2	4	3	2	3	1	2	5	2	3	2	3	4	3	3
Номер задачи	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Номер ответа	5	4	1	2	1	2	1	2	4	2	2	4	2	4	3

Тест 5. Вариант 2

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Номер ответа	4	3	2	3	4	2	1	5	1	5	3	5	2	2	3
Номер задачи	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Номер ответа	5	2	1	4	1	2	3	3	4	2	3	2	3	2	3