Известия вузов. Математика
2010, № 10, с. 82–86

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Краткое сообщение

В.П. МАКСИМОВ, А.Л. ЧАДОВ

О КОНСТРУКТИВНОМ ИССЛЕДОВАНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫПОЛНЕНИЕМ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Аннотация. Рассматриваются линейные краевые задачи для систем функционально-дифференциальных уравнений с числом краевых условий, превышающим размерность системы. Исследуется разрешимость таких задач в случае, когда допускается приближенное выполнение краевых условий. Предлагаемый подход использует теоремы, условия которых допускают эффективную проверку с использованием современных средств вычислений.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, краевые задачи, конструктивные методы, доказательные вычисления.

УДК: 517.929

Abstract. Linear boundary value problems for functional differential equations are considered when the number of boundary conditions is greater than the dimension of the system in the case of approximate fulfilment of boundary conditions. The approach is based on theorems whose conditions allow one to check up them by special reliable computing procedures.

Keywords: functional differential equations, boundary value problems, constructive methods, reliable computing.

Введение

Исследованию краевых задач для систем дифференциальных уравнений и их обобщений посвящена обширная литература (например, [1], [2] и приводимая там библиография). В этой работе речь идет о направлении исследований, связанном с теоретическим обоснованием и практической реализацией компьютерного (computer-assisted) исследования линейных краевых задач. Целью такого исследования является установление факта разрешимости краевой задачи и построение гарантированных оценок погрешности приближенных решений. Основу излагаемого здесь подхода составляют приемы приближенного описания множества решений линейного функционально-дифференциального уравнения с гарантированной оценкой погрешности в сочетании со специальными теоремами, условия которых могут быть проверены в результате доказательного вычислительного эксперимента, использующего современные компьютерные технологии и системы (Maple, Mathematica и др.). В

Поступила 02.04.2010

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-96054) и компании “Прогноз”, г. Пермь.

случаях, когда известные достаточные признаки разрешимости краевой задачи оказываются неприменимыми, обсуждаемый подход может оказаться единственно возможным для получения результата. Различные варианты этого подхода применительно к обыкновенным дифференциальным, интегральным уравнениям и уравнениям с частными производными занимают заметное место в современной литературе, начиная с основополагающей монографии Каучера и Миранкера [3]. Рассматриваемые здесь краевые задачи представляют значительный интерес и с точки зрения возможных приложений, в частности, в задачах экономической динамики [4].

1. Предварительные сведения

Будем исследовать только краевые задачами

$$\mathcal{L}x = f, \quad lx = \beta \tag{1}$$

с линейным ограниченным оператором $\mathcal{L} : AC^n[0;T] \to L^n[0;T]$ и линейным ограниченным вектор-функционалом $l : AC^n[0;T] \to R^m$. Здесь $AC^n[0;T]$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0;T] \to R^n$, $L^n[0,T]$ — пространство суммируемых по Лебегу функций $z : [0,T] \to R^n$,

$$\|x\|_{AC^n} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_{L^n}, \quad \|z\|_{L^n} = \int_0^T |z(t)|\, dt,$$

где $|\alpha| = \max\limits_{i=1,\dots,n} |\alpha_i|$ для $\alpha = \mathrm{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$. Систематическое изложение теории краевых задач (1) дается в монографиях [1], [2], [5]. Ниже всюду предполагается, что главная часть оператора $\mathcal{L}$ — оператор $Q = \mathcal{L}V$, где $(Vz)(t) = \int\limits_0^t z(s)ds$, имеет представление

$$(Qz)(t) = z(t) - \int_0^t K(t,s)z(s)\, ds, \quad t \in [0,T].$$

Здесь элементы $k_{ij}(t,s)$ ядра $K(t,s)$ измеримы на множестве $\{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$ и таковы, что на этом множестве

$$|k_{ij}(t,s)| \leqslant \varkappa(t), \quad i,j = 1,\dots,n,$$

где функция $\varkappa$ суммируема на $[0,T]$. В этом случае функционально-дифференциальная система $\mathcal{L}x = f$ охватывает дифференциальные уравнения с сосредоточенным и/или распределенным запаздыванием и интегро-дифференциальные системы Вольтерра. Пространство всех решений однородной системы $\mathcal{L}x = 0$ имеет размерность n. Пусть $\{x_1, \dots, x_n\}$ — базис в этом пространстве. Матрица $X = (x_1, \dots, x_n)$ называется фундаментальной матрицей (для определенности будем считать, что $X(0) = E$ — единичная $n \times n$-матрица). Задача Коши

$$\mathcal{L}x = f, \quad x(0) = \alpha$$

однозначно разрешима при любых $f \in L^n[0,T]$ и $\alpha \in R^n$, и ее решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)\alpha + \int_0^t C(t,s)f(s)\, ds,$$

где $C(t,s)$ — матрица Коши.

Вектор-функционал l в задаче (1) имеет представление

$$lx = \Psi x(0) + \int_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)\, ds, \tag{2}$$

где элементы $m \times n$-матрицы Φ измеримы и ограничены в существенном на $[0, T]$, Ψ — постоянная $m \times n$-матрица. Будем считать, что компоненты l_i, $i = 1, \dots, m$, вектор-функционала $l = \mathrm{col}\,(l_1, \dots, l_m)$ образуют линейно независимую систему. Вектор-функционалы вида (2) исчерпывают класс линейных ограниченных вектор-функционалов, определенных на $AC^n[0, T]$. Краевые условия $lx = \beta$ охватывают многочисленные классы конкретных краевых условий, встречающихся в приложениях, в том числе, двух- и многоточечные, интегральные, нагруженные интегральные и др.

2. Переопределенные краевые задачи и их ε-приближенная разрешимость

В случае $m > n$ задача (1) не может быть корректно разрешимой (т. е. всюду и однозначно разрешимой), необходимое и достаточное условие разрешимости такой задачи может быть записано как условие ортогональности правой части $\{f, \beta\}$ пространству решений однородной сопряженной задачи ([1], с. 24; [5], с. 38). Таким образом, свойство существования точного решения переопределенной задачи является "тонким" (не грубым) свойством, которое не может быть установлено в результате вычислительного эксперимента, оперирующего с приближенными данными и/или использующего вычисления с конечной точностью. Кроме того, в прикладных задачах, где краевая задача (1) возникает как модель реальных изучаемых процессов, упомянутое тонкое свойство либо указывает на неадекватность модели, либо приводит к необходимости изменить постановку задачи. Один подход к преодолению проблемы переопределенности, связанный с расширением основного пространства и обобщением понятия решения, был предложен в [6], его систематическое изложение можно найти в [1], [2], [5]. Конструктивная реализация этого подхода подробно описана в [4]. Рассмотрим другой подход.

С учетом того, что в любом случае на практике доступно для построения лишь приближенное решение (т. е. функция, дающая достаточно малую невязку при подстановке в уравнение и краевые условия), естественной представляется следующая постановка переопределенной краевой задачи (1).

Зафиксируем $\varepsilon = \mathrm{col}\,\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$, $\varepsilon_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, m$. Будем называть ε-приближенным решением краевой задачи (1) такое решение x уравнения $\mathcal{L}x = f$, что

$$|l_i x - \beta_i| \leqslant \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

т. е. краевые условия $lx = \beta$ выполняются приближенно с точностью, определяемой заданным вектором ε.

Наша цель — сформулировать условия ε-приближенной разрешимости в форме, позволяющей производить их проверку с помощью вычислительного эксперимента. Для формулировки таких условий введем следующие обозначения.

Каждой матрице B, элементы которой могут принимать значения из заданных отрезков, поставим в соответствие пару матриц $\underline{B}$ и $\overline{B}$, элементами которых являются соответственно левые и правые концы упомянутых отрезков. Через $\widetilde{B}$ обозначим множество матриц, элементами которых являются всевозможные сочетания левых и правых концов соответствующих отрезков. Значки $\underline{\cdot}$, $\bar{\cdot}$ и $\tilde{\cdot}$ при необходимости будем использовать применительно к элементам матрицы B. Так, например, $b_{ij} \in [\underline{b}_{ij}, \overline{b}_{ij}]$, $\widetilde{b}_{ij} = \{\underline{b}_{ij}, \overline{b}_{ij}\}$. Через $\breve{\varkappa}(t)$ обозначим $n \times n$-матрицу $\{\varkappa(t)\}_{i,j=1,\dots,n}$, $\mathcal{R}(t) = \breve{\varkappa}(t) \exp\left\{ \int\limits_0^t \breve{\varkappa}(\tau)\, d\tau \right\}$. Пусть $X^a(t)$ — приближенная фундаментальная матрица, $X^a(0) = E$; $\Delta(t)$ — ее невязка: $(\mathcal{L}X^a)(t) = \Delta(t)$, $t \in [0, T]$;

$\Lambda(t) = \lfloor \Delta(t) \rfloor + \mathcal{R}(t)\int\limits_0^t \lfloor \Delta(\tau) \rfloor \, d\tau$. Здесь и ниже для матрицы $B = \{b_{ij}\}$ через $\lfloor B \rfloor$ обозначена матрица $\{|b_{ij}|\}$. Обозначим $\underline{Y}(t) = \dot{X}^a(t) - \Lambda(t)$, $\overline{Y}(t) = \dot{X}^a(t) + \Lambda(t)$, $Y(t) = \{y_{ij}(t)\}$, $\underline{y}_{ij}(t) \leqslant y_{ij}(t) \leqslant \overline{y}_{ij}(t)$, $t \in [0, T]$; $\Theta = \int\limits_0^T \Phi(s)Y(s)\,ds$, $A = \Psi + \Theta$, $g(t) = \int\limits_0^t C(t,s)f(s)\,ds$, $b = \beta - lg$.

Теорема. *Пусть* $\mathrm{rang} A = r$ *для всех* $A = \{a_{ij}\}$, $\underline{a}_{ij} \leqslant a_{ij} \leqslant \overline{a}_{ij}$. *Пусть, далее, найдутся последовательности индексов* $\{i_1, \dots, i_r\}$ *и* $\{j_1, \dots, j_r\}$ *и такая последовательность нулей и единиц* $\{\nu_1 \dots, \nu_r\}$, $\nu_k \in \{0, 1\}$, $k = 1, \dots, r$, *что*

$$\left| \max \begin{vmatrix} \widetilde{a}_{i_1j_1} & \cdots & \widetilde{a}_{i_1j_r} & \widetilde{b}_{i_1} + (-1)^{\nu_1}\varepsilon_{i_1} \\ \hdotsfor{4} \\ \widetilde{a}_{i_rj_1} & \cdots & \widetilde{a}_{i_rj_r} & \widetilde{b}_{i_r} + (-1)^{\nu_r}\varepsilon_{i_r} \\ \widetilde{a}_{ij_1} & \cdots & \widetilde{a}_{ij_r} & \widetilde{b}_i \end{vmatrix} \right| \leqslant \varepsilon_i \left| \min \begin{vmatrix} \widetilde{a}_{i_1j_1} & \cdots & \widetilde{a}_{i_1j_r} \\ \hdotsfor{3} \\ \widetilde{a}_{i_rj_1} & \cdots & \widetilde{a}_{i_rj_r} \end{vmatrix} \right|, \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда краевая задача (1) *ε-приближенно разрешима.*

Доказательство теоремы использует известную теорему С.Н. Черникова ([7], с. 66–70).

Приведем иллюстрирующий пример. Для задачи

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + t\int\limits_0^t (s-2)^2\dot{x}(s)\,ds = \frac{t^3}{200}y(t) - \frac{1}{10}z(t), \\ \dot{y}(t) = -\frac{1}{5}x(t) - \int\limits_0^t sy(s)\,ds + \frac{1}{100}z(t), \\ \dot{z}(t) + \frac{1}{10}\int\limits_0^t z(s)\,ds = -\frac{1}{10}x(t) + \frac{1}{100}y(t) - \frac{t}{20}z(t), \\ t \in [0,\, 2]; \end{cases} \qquad \begin{cases} \int\limits_0^2 x(s)\,ds + y(1) + z(2) = 1, \\ x(1) + \int\limits_0^1 y(s)\,ds + z(0) = 2, \\ x(0) + y(2) + \int\limits_0^2 sz(s)\,ds = 3, \\ \int\limits_0^2 x(s)\,ds + \int\limits_0^2 y(s)\,ds + \int\limits_0^2 z(s)\,ds = 0 \end{cases}$$

ε-приближенная разрешимость установлена с помощью вычислительного эксперимента, реализованного в системе Maple, для $\varepsilon = \mathrm{col}(\frac{9}{250}, \frac{9}{250}, \frac{9}{250}, \frac{9}{250})$.

Литература

[1] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений* (Ин-т компьют. исслед., М., 2002).

[2] Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Introduction to the theory of functional differential equations: Methods and applications* (Hindawi Publishing Corporation, NY, 2007).

[3] Kaucher E.W., Miranker W.L. *Self-validating numerics for functional space problems* (Academic Press, NY, 1988).

[4] Максимов В.П., Румянцев А.Н. *Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике. Конструктивное исследование*, Изв. вузов. Математика, № 5, 56–71 (1993).

[5] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений* (Наука, М., 1991).

[6] Анохин А.В. *О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений*, ДАН СССР **286** (5), 1037–1040 (1986).

[7] Черников С.Н. *Линейные неравенства* (Наука, М., 1968).

В.П. Максимов

*профессор, кафедра информационных систем и математических методов в экономике,
Пермский государственный университет,
ул. Букирева, д. 15, г. Пермь, 614990,*

e-mail: maksimov@econ.psu.ru

А.Л. Чадов

*аспирант, кафедра информационных систем и математических методов в экономике,
Пермский государственный университет,
ул. Букирева, д. 15, г. Пермь, 614990,*

e-mail: alchadov@yandex.ru

V.P. Maksimov

*Professor, Chair of Information Systems and Mathematical Methods in Economics,
Perm State University,
15 Bukirev str., Perm, 614990 Russia,*

e-mail: maksimov@econ.psu.ru

A.L. Chadov

*Postgraduate, Chair of Information Systems and Mathematical Methods in Economics,
Perm State University,
15 Bukirev str., Perm, 614990 Russia,*

e-mail: alchadov@yandex.ru