УДК 531.36:62-50

© 2010 г. Л. А. Манита

# ОПТИМАЛЬНЫЙ ОСОБЫЙ РЕЖИМ И РЕЖИМ С УЧАЩАЮЩИМИСЯ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ

Изучается задача минимизации среднеквадратичного отклонения однородной струны с закрепленными концами от положения равновесия. Управлением служит плотность внешних сил, действующих на струну. Предполагается, что заданы начальные условия и концы струны закреплены. Используется метод Фурье, который позволяет задачу управления уравнением в частных производных свести к задаче управления счетной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Для полученной задачи оптимального управления в пространстве $l_2$ доказано, что оптимальный синтез содержит особые траектории и траектории с учащающимися переключениями. Для исходной задачи оптимального управления колебаниями струны доказано, что существует единственное решение, при этом оптимальное управление имеет счетное число переключений на конечном интервале времени.

Ранее [1–3] рассматривалась задача управления колебаниями струны в классе обобщенных решений, представлен метод определения оптимального управления, при котором струна из произвольного заданного положения переходит в произвольное заданное финальное положение с минимальным значением интеграла граничной энергии. При этом управлением является либо смещение одного из концов струны [1], либо упругая сила, действующая на одном из концов [2], либо рассматривается комбинированное управление: упругая сила, приложенная к левому концу струны, и смещение правого конца [3]. Рассматривалась задача перевода струны из положения покоя в заданное фиксированное положение за заданное время, когда управлением служит смещение одного из концов струны [4]; показано, что последовательность конечномерных аппроксимаций задачи (основанная на Фурье-представлении) сходится в норме пространства $L_2[0,T]$ к решению исходной задачи. С использованием модифицированного метода моментов исследовалась задача управления движением упругой системой (описываемой линейным гиперболическим уравнением) посредством сосредоточенного граничного воздействия силового типа [5]. Имеется подробный обзор результатов для задач управления упругими системами [6].

Ниже для задачи минимизации среднеквадратичного отклонения однородной струны с закрепленными концами от положения равновесия показано, что оптимальное управление является четтеринг-управлением, т.е. имеет счетное число переключений на конечном интервале времени.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим уравнение малых поперечных колебаний натянутой струны длиной $l$ и постоянной линейной плотностью $\rho$

$$u_{tt}(t,x) - a^2 u_{xx}(t,x) = g(t,x); \quad a^2 = K/\rho \tag{1.1}$$

где $u(t,x)$ и $g(x,t)$ – смещение струны и плотность внешних сил (на единицу массы струны) в момент времени $t$ в точке $x$, $K$ – натяжение струны. Предположим, что концы струны закреплены:

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0, \quad t > 0 \tag{1.2}$$

и фиксированы начальные положение и скорость струны:

$$u\big|_{t=0} = \alpha(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \beta(x), \quad x \in [0,l] \tag{1.3}$$

Рассмотрим плотность внешних сил в виде

$$g(t,x) = q(t)f(x)$$

где $f(x)$ – некоторая заданная функция, $q(t)$ – управляющая функция при ограничениях

$$-1 \le q(t) \le 1 \tag{1.4}$$

Управление $q(t)$ выбирается из условия минимизации среднеквадратичного отклонения струны от положения равновесия:

$$\int_0^\infty \int_0^l u^2(t,x)\,dx\,dt \to \inf \tag{1.5}$$

Для решения поставленной задачи (1.1)–(1.5) оптимального управления колебаниями струны применим метод Фурье, который оказывается успешным при решении многих задач, например, в задачах управления балкой Тимошенко [7]. А именно, будем искать решение $u(t,x)$ в виде ряда по собственным функциям эллиптического оператора $L = -d^2/dx^2$ с коэффициентами Фурье, зависящими от переменной $t$. Ниже будет показано, что полученный ряд сходится и дает единственное решение задачи (решение почти всюду). При этом коэффициенты Фурье оказываются решениями некоторой задачи оптимального управления счетной системой обыкновенных дифференциальных уравнений – задачи о стабилизации счетного числа осцилляторов под действием единой, ограниченной по модулю силы. Будет доказано, что для начальных условий из некоторой окрестности начала координат решение задачи существует и единственно, оптимальные траектории содержат участок особой траектории, который сопрягается с неособым с бесконечным числом переключений управления.

**2. Сведение к задаче оптимального управления в пространстве $l_2$.** В области определения

$$D_L = \left\{ \upsilon \in C^2[0,l] : \upsilon(0) = \upsilon(l) = 0 \right\}$$

рассмотрим положительный самосопряженный оператор $L = -d^2/dx^2$, обладающий полной ортонормированной в пространстве $L_2(0,l)$ системой собственных функций $\{h_j(x)\}_{j=1}^\infty$ и соответствующей системой собственных значений $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$:

$$h_j(x) = \sqrt{2/l}\sin\left(\sqrt{\lambda_j}x\right), \quad \lambda_j = (\pi j/l)^2$$

Предположим, что функции $\alpha(x), \beta(x), f(x) \in L_2(0,l)$. Разложим решение $u(t,x)$ уравнения (1.1) и функцию $f(x)$ по системе собственных функций оператора $L$ (всюду далее суммирование ведется от $j = 1$ до $j = \infty$):

$$u(t,x) = \sum s_j(t)h_j(x), \quad s_j(t) = (u,h_j)_{L_2(0,l)}, \quad f(x) = \sum C_j h_j(x), \quad C_j = (f,h_j)_{L_2(0,l)} \tag{2.1}$$

Целевой функционал (1.5) при этом принимает вид

$$\int_0^\infty \sum s_j^2(t)dt \to \inf \tag{2.2}$$

Подставляя разложения (2.1) в уравнение (1.1), получим

$$\sum\left(\ddot{s}_j(t) + \omega_j^2 s_j(t) - C_j q(t)\right)h_j(x) = 0, \quad \omega_j = a\sqrt{\lambda_j} = \pi ja/l$$

Отсюда в силу ортогональности системы собственных функций следует, что коэффициенты Фурье $s_j(t)$ удовлетворяют счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{s}_j(t) + \omega_j^2 s_j(t) = C_j q(t), \quad j = 1,2,... \tag{2.3}$$

и задача состоит в том, чтобы найти коэффициенты Фурье $s_j(t)$.

Разложим функции $\alpha(x), \beta(x)$ в ряды Фурье по системе $\{h_j(x)\}_{j=1}^\infty$. Получим

$$\alpha(x) = \sum \alpha_j h_j(x), \alpha_j = (\alpha, h_j)_{L_2(0,l)}, \quad \beta(x) = \sum \beta_j h_j(x), \beta_j = (\beta, h_j)_{L_2(0,l)}$$

Начальные условия для функций $s_j(t)$ принимают вид

$$s_j(0) = \alpha_j, \quad \dot{s}_j(0) = \beta_j \tag{2.4}$$

**3. Оптимальное управление счетной системой осцилляторов.** Итак, для нахождения функций $s_j(t)$ рассмотрим задачу оптимального управления (2.2)–(2.4). Управление $q(t)$ – скалярная измеримая функция, удовлетворяющая ограничениям (1.4). На параметры задачи накладываем следующие условия: $C_j \neq 0$ при всех $j$, векторы $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,...)$, $\beta = (\beta_1,\beta_2,...)$ и $C = (C_1,C_2,...)$ из пространства $l_2$.

Введем обозначения [8]

$$\tau_j(t) = \dot{s}_j(t)/\omega_j, \quad c_j = C_j/\omega_j, \quad a_j = \alpha_j, \quad b_j = \beta_j/\omega_j$$

Тогда задача (2.2)–(2.4) примет вид

$$\int_0^\infty \sum s_j^2(t)dt \to \inf \tag{3.1}$$

$$\dot{s}_j = \omega_j \tau_j, \quad \dot{\tau}_j = -\omega_j s_j + c_j q \tag{3.2}$$

$$s_j(0) = a_j, \quad \tau_j(0) = b_j, \quad j = 1,2,... \tag{3.3}$$

$$-1 \le q(t) \le 1 \tag{3.4}$$

Определим векторы

$$s(t) = (s_1(t), s_2(t),...), \quad \tau(t) = (\tau_1(t), \tau_2(t),...)$$

$$a = (a_1,a_2,\ldots), \quad b = (b_1,b_2,\ldots), \quad c = (c_1,c_2,...)$$

Из условия минимизации (3.1) с необходимостью следует, что

$$\lim_{T\to\infty} s(T) = \lim_{T\to\infty} \tau(T) = 0$$

Существование, единственность, непрерывная зависимость от начальных данных и продолжимость на всю числовую прямую решений задачи Коши (3.2)–(3.3) были получены [8] из явного представления соответствующих решений.

Для задачи (3.1)–(3.4) доказано [8], что для всех начальных данных $(a,b)$ из некоторой открытой окрестности начала координат пространства $l_2 \times l_2$ множество допустимых траекторий непусто, а именно, существует допустимое управление, обеспечивающее экспоненциальное убывание траектории системы (3.2), откуда следует конечность функционала (3.1). Отсюда получаем утверждение о существовании решения задачи (3.1)–(3.4) для любых начальных данных $(a,b)$ из некоторой открытой окрестности начала координат. Единственность оптимальной траектории следует из строгой выпуклости функционала (3.1) на решениях системы (3.2).

Применим к задаче (3.1)–(3.4) формально обобщенный принцип максимума Понтрягина. Определим функцию Понтрягина

$$H(\psi_1,\psi_2,s,\tau,q) = \sum\left(\psi_{1j}\omega_j\tau_j - \psi_{2j}\omega_j s_j + \psi_{2j}c_j q - s_j^2/2\right)$$

Через $\psi_i$ обозначен вектор $(\psi_{i1},\psi_{i2},\ldots)(i = 1,2)$.

Рассмотрим в пространстве $l_2 \times l_2 \times l_2 \times l_2$ гамильтонову систему

$$\begin{aligned} &\dot\psi_{1j} = \psi_{2j}\omega_j + s_j, \quad \dot s_j = \omega_j\tau_j \\ &\dot\psi_{2j} = -\psi_{1j}\omega_j, \quad \dot\tau_j = -\omega_j s_j + c_j\hat q(t), \quad j = 1,2,\ldots \end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$\hat q(t) = \arg\max_{q\in[-1,1]} H = \operatorname{sgn} H_1(t), \quad H_1(t) = \sum \psi_{2j}(t)c_j \tag{3.6}$$

Доказано [8], что для задачи (3.1)–(3.4) принцип максимума Понтрягина является необходимым и достаточным условием оптимальности. А именно, имеют место следующие утверждения.

*Лемма* 1 (достаточное условие оптимальности). Пусть $(\psi_1(t),\psi_2(t),s(t),\tau(t))$ – произвольное решение системы (3.5)–(3.6) с граничными условиями

$$s(0) = a, \quad \tau(0) = b, \quad s(T) = 0, \quad \tau(T) = 0$$

Тогда $(s(t),\tau(t))$ – решение задачи (3.1)–(3.4).

Пусть $q^*(t)$ – оптимальное управление в задаче (3.1)–(3.4) (оно существует и единственно), $s^*(t),\tau^*(t)$ – соответствующая оптимальная траектория.

*Лемма* 2 (необходимое условие оптимальности). Существует нетривиальная функция $(\psi_1(\cdot),\psi_2(\cdot))$ со значениями в пространстве $l_2 \times l_2$, удовлетворяющая сопряженной системе уравнений

$$\dot\psi_{1j} = \psi_{2j}\omega_j + s_j^*, \quad \dot\psi_{2j} = -\psi_{1j}\omega_j, \quad j = 1,2,\ldots$$

причем выполнено условие максимума

$$\max_{-1\le q(t)\le 1}\left(\sum \psi_{2j}(t)c_j q(t)\right) = \sum \psi_{2j}(t)c_j q^*(t)$$

Из условия максимума оптимальное управление определяется однозначно, если только $H_1(t) \neq 0$.

Предположим, что существует интервал $(t_1,t_2)$, такой, что

$$H_1(t) \equiv 0, \quad \forall t \in (t_1,t_2)$$

Будем дифференцировать тождество $H_1(t) \equiv 0$ в силу системы (3.5) до тех пор, пока не появится управление с ненулевым коэффициентом. При этом будем считать, что все получающиеся ряды сходятся. Введем обозначения

$$H_2(t) = -\sum c_j \psi_{1j}(t)\omega_j, \quad H_3(t) = -\sum c_j \omega_j (\psi_{2j}(t)\omega_j + s_j(t))$$

$$H_4(t) = -\sum c_j \omega_j^2 (-\psi_{1j}(t)\omega_j + \tau_j(t))$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}H_1(t) = H_2(t), \quad \frac{d^2}{dt^2}H_1(t) = \frac{d}{dt}H_2(t) = H_3(t),\\
&\frac{d^3}{dt^3}H_1(t) = \frac{d}{dt}H_3(t) = H_4(t)\\
&\frac{d^4}{dt^4}H_1(t) = \frac{d}{dt}H_4(t) = \sum c_j \omega_j^3 (\psi_{2j}\omega_j + 2s_j) - q\sum c_j^2 \omega_j^2
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Из соотношений (3.7) следует, что на интервале $(t_1,t_2)$:

$$H_1(t) = H_2(t) = H_3(t) = H_4(t) = 0 \tag{3.8}$$

Определим экстремаль (т.е. решение системы (3.5)—(3.6)), лежащую на поверхности (3.8) как особую экстремаль. Тогда управление на особой экстремали определяется из последнего уравнения (3.7) и равно

$$q^0(t) = \sum c_j \omega_j^3 (\psi_{2j}\omega_j + 2s_j) \Big/ \sum c_j^2 \omega_j^2 \tag{3.9}$$

Для задачи (3.1)—(3.4) доказано следующее. Для начальных данных $(a,b)$ из достаточно малой окрестности начала координат оптимальная траектория за конечное время с бесконечным числом переключений управления выходит на поверхность, заполненную особыми экстремалями, и затем оптимальная траектория остается на особой поверхности. А именно, верно следующее утверждение.

*Теорема* 1 (см. [8]). Пусть $c_j \neq 0, \forall j$ и вектор $\left(c_1\omega_1^4, c_2\omega_2^4, c_3\omega_3^4, \ldots\right) \in l_2$. Предположим, что существуют такие положительные постоянные $\delta$ и $B$, что

$$|\omega_{j+1}| - |\omega_j| \geq \delta, \quad |\omega_j| \leq Bj, \quad j = 1,2,\ldots$$

Тогда найдется окрестность начала координат пространства $(s,\tau)$, такая, что для всех начальных данных $(\alpha,\beta)$ из этой окрестности выполнены следующие утверждения:

1) оптимальное решение задачи (3.1)—(3.4) существует и единственно;

2) в пространстве $(s,\tau,\psi_1,\psi_2)$ имеется поверхность $\Sigma$ коразмерности 4, задаваемая уравнениями (3.8), заполненная особыми экстремалями задачи (3.1)—(3.4), управление на которых определяется формулой (3.9);

3) для всех начальных данных, не принадлежащих проекции поверхности особых экстремалей $\Sigma$ на пространство $(s,\tau)$, оптимальные траектории выходят на $\Sigma$ за конечное время с бесконечным числом переключений управления.

**4. Обобщенное решение задачи управления колебаниями струны и его свойства.** В разд. 3 для задачи (3.1)–(3.4) показано, что оптимальное решение $\left(s^*(t), q^*(t)\right)$ существует и единственно и оптимальный синтез содержит особые траектории и траектории с учащающимися переключениями.

Если зафиксировать управление $q(t) = q^*(t)$, то компоненты вектора $s^*(t)$ можно записать в виде

$$s_j^*(t) = \alpha_j \cos\left(a\sqrt{\lambda_j}t\right) + \frac{1}{a\sqrt{\lambda_j}}\beta_j \sin\left(a\sqrt{\lambda_j}t\right) + I_j(t), \quad j = 1,... \tag{4.1}$$

$$I_j(t) = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_j}}\int_0^t C_j q^*(\tau)\sin\left(a\sqrt{\lambda_j}(t-\tau)\right)d\tau$$

После подстановки в первый ряд (2.1) получим

$$u^*(t,x) = \sum\left(\alpha_j \cos\left(a\sqrt{\lambda_j}t\right) + \frac{1}{a\sqrt{\lambda_j}}\beta_j \sin\left(a\sqrt{\lambda_j}t\right) + I_j(t)\right)h_j(x) \tag{4.2}$$

Формально ряд (4.2) удовлетворяет уравнению (1.1), граничным условиям (1.2) и начальным условиям (1.3). Далее покажем, что при выполнении некоторых ограничений на данные задачи этот ряд дает обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3).

Обозначим $Q_T = (0,l)\times(0,T)$, где $T > 0$. Определим пространство $H^k(Q_T) = W_2^k(Q_T)$ – пространство Соболева функций из пространства $L_2(Q_T)$, таких, что все их обобщенные производные до порядка $k$ принадлежат пространству $L_2(Q_T)$. Через $H_0^k(Q_T)$ обозначим пространство $W_{2,0}^k(Q_T)$, которое является пополнением пространства $C_0^\infty(Q_T)$ по норме $H^k(Q_T)$.

*Определение* 1. Функция $u \in H^1(Q_T)$ называется обобщенным решением в $Q_T$ задачи (1.1)–(1.3), если она удовлетворяет граничным условиям (1.2), начальным условиям (1.3) и тождеству

$$\int_{Q_T}\left(a^2 u_x \upsilon_x - u_t \upsilon_t\right)dxdt = \int_{Q_T} g\upsilon dxdt + \int_0^l \beta(x)\,\upsilon(0,x)dx$$

для всех $\upsilon \in H^1(Q_T)$, для которых

$$\upsilon|_{x=0} = \upsilon|_{x=l} = 0, \quad \upsilon|_{t=T} = 0$$

*Определение* 2. Функция $u \in H^2(Q_T)$ называется решением почти всюду смешанной задачи (1.1)–(1.3), если она удовлетворяет в $Q_T$ (для почти всех $(t,x) \in Q_T$) уравнению (1.1), удовлетворяет граничным условиям (1.2) и начальным условиям (1.3).

Сформулируем основной результат для задачи (1.1)–(1.5).

*Теорема* 2. Пусть функции $\alpha \in H_0^2(0,l)$, $\beta \in H_0^1(0,l)$, а функция $f(x)$ удовлетворяет условиям

$$f \in KC^3[0,l], \quad f(0) = f_{xx}(0) = 0, \quad f(l) = f_{xx}(l) = 0 \tag{4.3}$$

и, кроме того, все коэффициенты Фурье разложения функции $f(x)$ по системе $\{h_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ отличны от нуля. Тогда существуют положительные постоянные $\gamma_1$ и $\gamma_2$, такие, что если

$$\|\alpha\|_{L_2(0,l)} < \gamma_1, \quad \|\beta\|_{L_2(0,l)} < \gamma_2$$

то а) оптимальное решение $u^*(t,x)$ задачи (1.1)–(1.5) существует и единственно, $u^*(t,x) \in H^2(Q_T), \forall T > 0$; б) оптимальные траектории являются траекториями с учащающимися переключениями, т.е. управление на оптимальной траектории имеет бесконечное число переключений на конечном интервале времени.

*Доказательство.* Проверим выполнение условий теоремы 1. Так как функция $f(x)$ удовлетворяет условиям (4.3), то для ее коэффициентов Фурье $C_j$ в разложении по системе функций

$$h_j(x) = \sqrt{2/l}\sin\left(\sqrt{\lambda_j}x\right), \quad j = 1,2,...$$

верны оценки [9]

$$|C_j| \le \varepsilon_j j^{-3}, \quad \varepsilon_j > 0, \quad j = 1,2,..., \quad \sum \varepsilon_j^2 < \infty$$

Тогда имеем

$$c_j\omega_j^4 = C_j\omega_j^3 = C_j(\pi ja/l)^3 = \theta C_j j^3; \quad \theta = (\pi a/l)^3$$

Отсюда следует, что

$$\sum\left(c_j\omega_j^4\right)^2 \le \theta^2\sum\varepsilon_j^2 < \infty, \quad \text{т.е.} \quad \left(c_1\omega_1^4, c_2\omega_2^4, c_3\omega_3^4, ...\right) \in l_2$$

Кроме того,

$$|\omega_{j+1}| - |\omega_j| \ge \delta, \quad |\omega_j| \le Bj, \quad j = 1,2,...; \quad \delta = \pi a/l, \quad B = \pi a/l$$

Таким образом, для задачи (3.1)–(3.4) верна теорема 1, т.е. оптимальное управление $q^*(t)$ имеет бесконечное число переключений на конечном интервале времени.

Составим ряд

$$\sum s_j^*(t)h_j(x) \tag{4.4}$$

где $s_j^*(t) (j = 1,2,...)$ – оптимальное решение задачи (3.1)–(3.4).

При выполнении условий теоремы, налагаемых на функции $f$, $\alpha$, $\beta$, следует [10, 11], что функция $u^*(t,x)$, определяемая рядом (4.4), является единственным обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3), причем $u^*(t,x) \in H^2(Q_T)$. Следовательно [10], $u^*(t,x)$ – решение почти всюду задачи (1.1)–(1.3), т.е. функция $u^*(t,x)$ удовлетворяет в $Q_T$ (для любого $T > 0$) уравнению (1.1) (для почти всех $(t,x) \in Q_T$), граничным условиям (1.2) и начальным условиям (1.3).

Кроме того, имеем

$$\int_0^\infty \sum\left(s_j^*(t)\right)^2 dt = \int_0^\infty\int_0^l (u^*(t,x))^2 dxdt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T\int_0^l (u^*(t,x))^2 dxdt$$

Поэтому, если на функции $s^*(t) = \left(s_1^*(t), s_2^*(t), \ldots\right)$ достигается минимум функционала (2.2), то на функции $u^*(t,x)$, определяемой рядом (4.4), будет достигаться минимум функционала (1.5), т.е. $u^*(t,x)$ – решение задачи (1.1)–(1.5).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (08-01-00474-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация граничного управления смещением на одном конце струны при свободном втором ее конце за произвольный достаточно большой промежуток времени // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 417. № 1. С. 12–17.
2. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация граничного управления упругой силой на одном конце струны, основанная на отыскании минимума интеграла от модуля упругой силы, возведенного в произвольную степень $p \geq 1$ // Докл. РАН. 2007. Т. 412. № 6. С. 732–735.
3. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация комбинированного граничного управления колебаниями струны – упругой силой на одном конце и смещением на другом конце // Докл. РАН. 2005. Т. 402. № 5. С. 590–595.
4. *Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Разгулин А.В.* О методе Фурье для решения одной задачи управления колебанием струны // Вест. МГУ. 1993. № 2. С. 3–8.
5. *Акуленко Л.Д.* Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1095–1103.
6. *Знаменская Л.Н.* Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004. 175 с.
7. *Зеликин М.И., Манита Л.А.* Оптимальные режимы с учащающимися переключениями в задаче управления балкой Тимошенко // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 2. С. 295–304.
8. *Борисов В.Ф., Зеликин М.И., Манита Л.А.* Экстремали с накоплением переключений в бесконечномерном пространстве // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. 2008. Т. 58. С. 3–55.
9. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 3. М.: Высш. шк., 1989. 352 с.
10. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 391 с.
11. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

Москва
e-mail: lmanita@rambler.ru

Поступила в редакцию
01.XI.2009