УДК 621.385.6

Ю.Н. Пчельников, А.А. Елизаров
Московский государственный институт электроники и математики
(технический университет), e-mail: yelizarov@list.ru

РЕШЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЛБВ ДЛЯ СЛУЧАЯ ОПТИМАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Yu.N. Pchelnikov, A.A. Yelizarov
Moscow State Institute of Electronics & Mathematics (Technical University)

SOLUTION OF THE TWT CHARACTERISTIC EQUATION FOR THE OPTIMUM INTERACTION

An approximate solution for the characteristic equation presented in this paper made it possible to find relatively simple relations between the space charge and velocity parameters for the optimum interaction as well as for the boundaries of the interaction area. Approximate expressions for the maximum incremental rate and the optimum velocity parameter was also derived.

Анализ лампы с бегущей волной (ЛБВ) в линейном режиме обычно сводится к получению и решению дисперсионного уравнения конкретной замедляющей системы (ЗС) с электронным потоком (ЭП) заданной конфигурации. Как правило, это трансцендентное уравнение, включающее комбинации функций от комплексных поперечных постоянных, поперечной постоянной τ в областях вне ЭП и поперечной постоянной T в ЭП. В случае спиральной ЗС - это модифицированные функции Бесселя. Прямое решение таких дисперсионных уравнений достаточно сложно, поэтому в большинстве случаев трансцендентное дисперсионное уравнение преобразуют к алгебраическому уравнению четвёртой степени, называемому характеристическим уравнением ЛБВ [1, 2]. Решение характеристического уравнения позволяет найти фазовые постоянные четырёх волн, одна из которых нарастает, вызывая усиление подаваемого на вход ЛБВ сигнала. Величина нарастания определяется мнимой частью фазовой постоянной этой волны β_4. Хотя более правильно говорить о постоянной распространения, будем, для удобства анализа, пользоваться фазовой постоянной, полагая, что она наряду с действительной частью, определяющей изменение фазы, включает и мнимую часть, определяющую изменение амплитуды (уменьшение при отрицательном и увеличение при положительном значении).

Решение характеристического уравнения существенно упрощается при отсутствии затухания в ЗС. Поэтому ограничимся рассмотрением взаимодействия электронного потока с волной в ЗС с идеально проводящими проводниками.

Нахождение корней характеристического уравнения ЛБВ представляет собой довольно трудоёмкую задачу. В то же время

978-1-4244-6955-0/10/$26.00 ©2010 IEEE

наибольший практический интерес представляет знание максимального значения корня нарастающей волны и соответствующего ему параметра скорости b.

Напомним, что при использовании фазовой постоянной в качестве искомой переменной характеристическое уравнение имеет следующий вид [1]:

$$(\beta^2-\beta_0^2)[(\beta-\beta_e)^2-\Gamma\beta_p^2]=-K_c\beta_p^2\beta_0^2\,. \tag{1}$$

Здесь β_0 - фазовая постоянная при отсутствии ЭП; β_e - постоянная ЭП, равная отношению угловой частоты к средней скорости электронов u_0; β_p – плазменное волновое число, равное отношению плазменной частоты безграничного ЭП к скорости u_0; K_c - коэффициент связи; Г - коэффициент депрессии.

Пренебрегая взаимодействием ЭП с обратной волной, степень уравнения (1) обычно понижают до третьей, допуская при этом ошибку в определении влияния пространственного заряда. Достаточно корректно понизить степень характеристического уравнения можно, разделив обе его части на $(\beta+\beta_0)$ и пользуясь следующим приближённым преобразованием:

$$\frac{1}{\beta+\beta_0}\approx\frac{1}{2\beta_0}(1-\frac{\beta-\beta_0}{2\beta_0})\,. \tag{2}$$

В результате (1) сводится к следующему уравнению:

$$(\beta-\beta_0)[(\beta-\beta_e)^2-\Gamma_1\beta_p^2]\approx-\frac{1}{2}K_c\beta_p^2\beta_0\,, \tag{3}$$

где

$$\Gamma_1\approx\Gamma+\frac{K_c}{4}\,. \tag{4}$$

Деля обе части уравнения (3) на β_0^3 и на правую часть (3) с положительным знаком, представим характеристическое уравнение в нормированном виде:

$$\xi[(\xi+b)^2-QC]\approx-1\,. \tag{5}$$

Здесь ξ - нормированное возмущение фазовой постоянной

$$\xi=\frac{\beta-\beta_0}{\beta_0 C}\,; \tag{6}$$

C - параметр усиления (параметр Пирса [3]), определяемый выражением

$$C^3 = \frac{K_c \beta_p^2}{2\beta_0^2}; \tag{7}$$

b - нормированный параметр скорости

$$b = \frac{\beta_0 - \beta_e}{\beta_0 C}; \tag{8}$$

Q - не зависящая от плотности тока постоянная, характеризующая лишь связь ЭП с продольным электрическим полем волны

$$Q == \frac{2\Gamma_1}{K_c}. \tag{9}$$

Представляя в уравнении (5) нормированную переменную ξ в виде комплексной величины с действительной и мнимой частями, обозначенными соответственно через x и y, заменим его системой из двух уравнений

$$x(x+b)^2 - 2y^2(x+b) - xy^2 - xQC + 1 = 0, \tag{10}$$

$$y(x+b)^2 + 2xy(x+b) - y^3 - yQC = 0. \tag{11}$$

Уравнение (11) справедливо только при y, отличном от нуля, что позволяет разделить обе его части на y. После простейших преобразований с прибавлением и вычитанием x^2, находим

$$(2x+b)^2 - y^2 - x^2 - QC = 0. \tag{12}$$

Обозначая модуль переменной ξ буквой r, напишем вместо (12)

$$(2x+b)^2 = r^2 + QC, \tag{13}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$. Возвращаясь к уравнению (11), разделим его снова на y, а затем умножим на x

$$x(x+b)^2 + 2x^2(x+b) - xy^2 - xQC = 0. \tag{14}$$

Вычитая (14) из (9), находим после простейших преобразований с учётом введенного выше обозначения для модуля ξ

$$x + b = \frac{1}{2r^2}. \tag{15}$$

Продифференцируем уравнения (12) и (15) по b, пренебрегая зависимостью параметра пространственного заряда QC от параметра скорости b

$$2x\frac{\partial x}{\partial b}(x+b)+r^2(\frac{\partial x}{\partial b}+1)=0\,, \tag{16}$$

$$(2x+b)(2\frac{\partial x}{\partial b}+1)=x\frac{\partial x}{\partial b}\,. \tag{17}$$

При дифференцировании предполагалось, что максимальному значению y_m соответствует нулевое значение производной y по b, благодаря чему

$$r\frac{\partial r}{\partial b}=x\frac{\partial x}{\partial b}\,. \tag{18}$$

Заменяя в (16) r^2 выражением, полученным из (15), находим после простейших преобразований

$$4x\frac{\partial x}{\partial b}(x+b)^2+\frac{\partial x}{\partial b}+1=0\,. \tag{19}$$

Исключая из (17) и (19) производную x по b, находим уравнение, связывающее оптимальные по усилению значения x_m и b_m

$$\frac{1}{2x_m+b_m}=4x_m(x_m+b_m)\,. \tag{20}$$

Уравнение (20) позволяет получить с помощью уравнений (12) и (15) квадратное уравнение относительно суммы ($2x_m+b_m$).

$$(2x_m+b_m)^2-2x_m(2x_m+b_m)-QC=0\,. \tag{21}$$

Решая уравнение (21), находим выражение для оптимального по усилению параметра скорости

$$b_m=-x_m+\sqrt{x_m^2+QC}\,. \tag{22}$$

Так как оптимальное значение параметра скорости должно лежать между границами области взаимодействия, то b_m должно быть положительно, что возможно лишь при положительном знаке перед корнем в (22).

Для упрощения дальнейших выкладок введём следующее обозначение:

$$D_m = x_m + b_m. \qquad (23)$$

Возвращаясь к уравнению (20), преобразуем его с помощью соотношения (23) к следующему виду:

$$x_m^2 + D_m x_m - \frac{1}{4D_m} = 0 \cdot \qquad (24)$$

С учётом того, что соответствующие оптимальному взаимодействию значения D_m и x_m всегда положительны, ограничимся только одним решением уравнения (24)

$$x_m = \frac{D_m}{2}(\sqrt{1+\frac{1}{D_m^3}} - 1) \cdot \qquad (25)$$

Формула (25) позволяет найти зависимость x_m от D_m. Подставляя полученные значения x_m в (22), находим соответствующие значения параметра QC, а далее, с помощью выражений (13) и (23), находим b_m и y_m.

Кривая b_m на рис. 1 демонстрирует связь между оптимальным по взаимодействию параметром скорости b_m и соответствующим ему параметром QC. Здесь же приведены зависимости x_m и y_m от QC. Таким образом, выбирая параметр QC, можно найти соответствующие ему значения y_m и b_m. Знание оптимального по взаимодействию значения y_m позволяет рассчитать максимальное значение параметра нарастания усиливаемой волны

$$\operatorname{Re}\beta_4 = C\beta_0 y_m. \qquad (26)$$

Из рис. 1 видно, что в представляющих практический интерес случаях, когда величина QC не превышает единицы, оптимальный по взаимодействию параметр скорости b_m приблизительно равен QC. Исключая из (22) и (23) x_m и полагая затем $b_m \approx QC$, находим

$$D_m \approx \frac{(1+QC)}{2}. \qquad (27)$$

Подставляя приближённое выражение (27) в формулу (25), получим

$$x_m \approx \frac{1+QC}{4}(\sqrt{1+\frac{8}{(1+QC)^3}} - 1) \cdot \qquad (28)$$

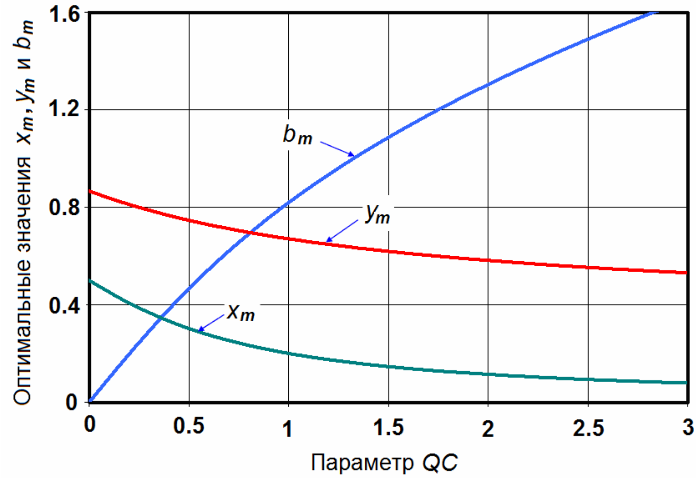

Рис. 1. Зависимости оптимальных по взаимодействию величин от параметра QC

Находя с учётом соотношений (13) и (15)

$$r_m^2 \approx \frac{1}{2\sqrt{x_m^2 + QC}}, \qquad (29)$$

вычитая из (28) $x_m{}^2$ и извлекая корень, получим

$$y_m \approx \sqrt{\frac{1}{2(x_m^2 + QC)} - x_m^2}\,. \qquad (30)$$

На рис. 2 приведены зависимости оптимального значения постоянной нарастания y_m от параметра QC, рассчитанные с помощью приведенных выше точных соотношений (кривая 1), а также с помощью приближённой формулы (30) (кривая 2). Несмотря на то, что указанное приближение получено для относительно малых значений QC, формула (30) позволяет получить близкие к точным значения y_m даже при значениях QC, достигающих трёх. Отметим, что очень хорошее приближение даёт следующая эмпирическая формула (кривая 3):

$$y_m \approx \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + QC)^{-0.36}\,. \qquad (31)$$

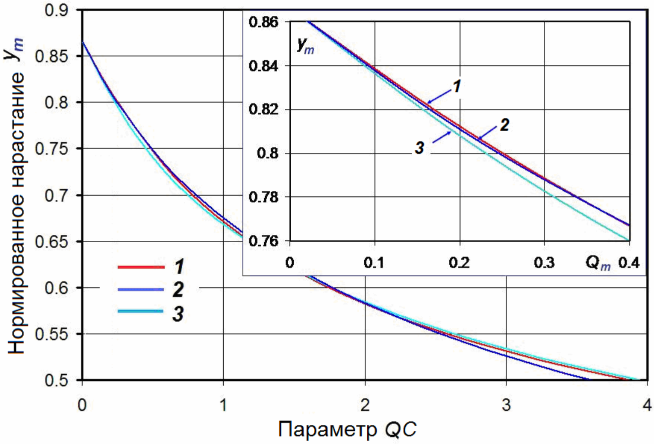

Рис. 2. Зависимости нормированной величины постоянной нарастания, y_m, в режиме оптимального взаимодействия от параметра QC

Полагая, что на границах области взаимодействия $y = 0$, преобразуем уравнения (13) и (15) к следующему виду:

$$b = -x\left(1 - \frac{1}{2x^3}\right); \tag{32}$$

$$QC = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{4x^3}\right). \tag{33}$$

Задаваясь различными значениями x, находим соответствующие им значения QC и b (b_1 на границе с меньшими скоростями электронов и b_2 на границе с большими скоростями).

Из приведенных на рис. 3 зависимостей видно, что любому значению QC, большему нуля, соответствует $b_2 > 1{,}9$, а при $QC < 1{,}9$ нормированный параметр скорости на первой границе меньше нуля ($b_1 < 0$). Из этого следует, что при представляющих наибольший практический интерес значениях QC (меньших двух) границы области взаимодействия лежат с обеих сторон от нулевого значения нормированного параметра скорости, в то время как оптимальное по постоянной нарастания его значение всегда больше нуля. Лишь при очень больших значениях параметра пространственного заряда (превышающих 1,9) усиление возможно только при скоростях электронов, больших фазовой скорости волны в «холодной» ЗС. Другим важным выводом из результатов проведенного расчёта является то, что максимальное нарастание волны всегда происходит при скорости электронов, превышающей скорость «холодной» волны ЗС.

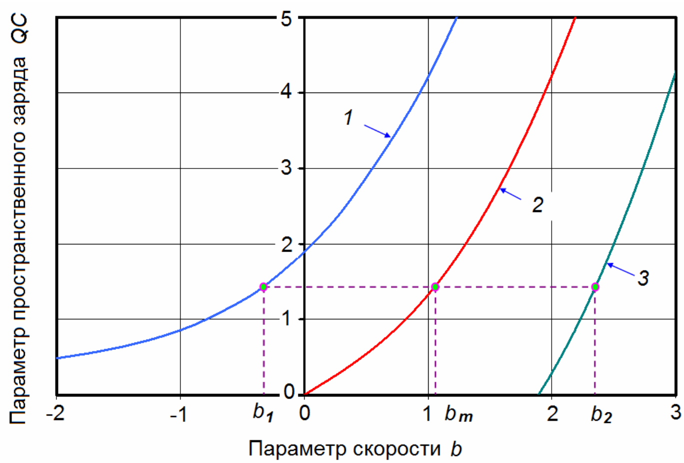

Рис. 3. Зависимости между параметром скорости *b* и соответствующим ему значением параметра пространственного заряда *QC* на первой и второй границах области взаимодействия (кривые *1* и *2*, соответственно); кривая *3* относится к режиму максимального взаимодействия

Проведенный выше анализ характеристического уравнения при отсутствии потерь в ЗС позволил получить его решение для широкого диапазона параметров, с избытком охватывающего область представляющих практический интерес параметров спиральных ЛБВ. Получены простые аналитические соотношения, позволяющие рассчитать действительные и мнимые части фазовых постоянных прямых волн. Найдены соотношения, определяющие границы области взаимодействия, а также оптимальное по взаимодействию значение параметра синхронизма. Получено выражение для максимального значения постоянной нарастания. Найдены приближённые аналитические выражения для оптимального значения постоянной нарастания.

Библиографический список

1. Лошаков Л. Н. Теория и расчёт усиления лампы с бегущей волной/ Л. Н. Лошаков, Ю.Н. Пчельников. М.: Сов. радио, 1964. 239 с.

2. Вайнштейн Л. А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике/ Л.А. Вайнштейн, В.А. Солнцев. М.: Сов. радио, 1973. 400 с.

3. Пирс Дж. Р. Лампа бегущей волны / Дж. Р. Пирс. М.: Сов. радио, 1952. 229 с.