Подъемы лагранжевых торов.

С.А. Белёв[1], Н. А. Тюрин[2]

В настоящей работе мы продолжаем исследования лагранжевой геометрии компактных симплектических многообразий, обладающих псевдоторической структурой. В отличие от [1], где строились лагранжевы слоения с гладким общим слоем, ниже мы занимаемся задачей построения лагранжевых торов.

Напомним, псевдоторической структурой на компактном симплектическом многообразии (X, ω_X) вещественной размерности $2n$ называется набор данных $(f_1, ..., f_k, B, \psi, Y)$, состоящий из набора гладких морсовских функций f_i, алгебраически не зависимых почти всюду на X и попарно коммутирующих, и семейства симплектических подмногообразий $\{Q_p = \overline{\psi^{-1}(p)} = \psi^{-1}(p) \cup B, p \in Y\}$ вещественной размерности $2k$ с базисным множеством $B \subset X$, параметризуемого торическим симплектическим многообразием (Y, ω_Y) вещественной размерности $2(n-k)$, так что выполнены следующие обобщенные коммутационные соотношения. Во - первых, гамильтонов поток, индуцируемый каждой f_i, сохраняет каждый элемент семейства Q_p; во - вторых, для любой гладкой функции $h \in C^\infty(Y, \mathbb{R})$ поднятое посредством симплектической связности ∇_ψ гамильтоново векторное поле X_h коллинеарно гамильтонову векторному полю поднятой функции $\psi^* h$ всюду на $X \backslash B$, то есть

$$\nabla_\psi X_h \wedge X_{\psi^* h} \equiv 0 \qquad (*)$$

для любой $h \in C^\infty(Y, \mathbb{R})$ (детали определения см. [2]). Слой Q_p, гладкий вне базисного множества B, мы называем регулярным. Псевдоторическую структуру $(f_1, ..., f_k, B, \psi, Y)$ с регулярным общим слоем мы называем регулярной. Для регулярной псевдоторической структуры множество точек $p \in Y$, параметризующих нерегулярные слои, составляет подмногообразие $D_{\text{Sing}} \subset Y$. Отображение вещественными интегралами $F = (f_1, ..., f_k) : X \to \mathbb{R}^k$ определяет выпуклый многогранник $P_Q \subset \mathbb{R}^k$, изоморфный многограннику моментов торического многообразия $(Q_p, (f_1, ..., f_k))$ для общего $p \in Y$, так что $F(B) = \partial P_Q$; особенности нерегулярных слоев $\text{Sing}_\psi \subset X \backslash B$ составляют подмножество в детерминантали $\Delta(f_1, ..., f_k) = \{df_1 \wedge ... df_k = 0\} \subset X$, причем во всех известных на сегодняшний день примерах $\Delta(f_1, ..., f_k) = B \cup \text{Sing}_\psi$. Образ $F(\text{Sing}_\psi) = P_{\text{Sing}} \subset P_Q$ есть подмножество коразмерности 1 в многограннике P_Q, состоящее из пересечений P_Q с некоторыми гиперплоскостями $\pi_1, ..., \pi_m \subset \mathbb{R}^k$. При этом нерегулярный слой $Q_p, p \in D_{\text{Sing}}$ есть приводимое многообразие, каждая компонента которого сама по себе является торическим многообразием, многранник моментов которого получается отрезанием поднабором гиперплоскостей π_i соответствующей части от P_Q. Таким образом, для регулярного слоя Q_p прообразом внутренней точки $F^{-1}(x) \cap Q_p, x \in P_Q \backslash \partial P_Q$, будет гладкий лагранжев k - мерный тор; для нерегулярного слоя Q_p прообразом точки $F^{-1}(x) \cap Q_p, x \in P_Q \backslash (\partial P_Q \cup P_{\text{Sing}})$, снова будет гладкий k - мерный тор, но если $x \in P_{\text{Sing}}$, то прообразом будет сингулярный тор специального вида (подробности в [1], [2]).

[1]Лаборатория Теоретической Физики ОИЯИ (Дубна)

[2]Лаборатория Теоретической Физики ОИЯИ (Дубна) и Факультет математики ВШЭ

Пример. Реализуем многообразие флагов F^3 как гиперповерхность в прямом произведении $\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2$ задаваемую уравнением $x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$; тогда имеется псевдоторическая структура (f_1, f_2, B, ψ, Y), где $B \subset F^3$ — шестиугольник, состоящий из шести проективных прямых, Y есть $\mathbb{CP}^1$, а $D_{\text{Sing}} \subset Y$ состоит из трех точек. Далее, в качестве $P_Q \subset \mathbb{R}^2$ имеем плоский выпуклый шестиугольник, являющийся многоугольником моментов торической поверхности дель Пеццо $\mathbb{CP}^2_3$, а $P_{\text{Sing}} \subset P_Q$ состоит из трех диагоналей P_Q, соединяющих попарно противоположные вершины. Каждая такая диагональ делит P_Q на два четырехугольника, каждый из которых является выпуклым многогранником для торической поверхности дель Пеццо $\mathbb{CP}^2_1$, и каждый из трех особых слоев $Q_p, p \in D_{\text{Sing}}$ есть пара таких поверхностей дель Пеццо, пересекающихся по прямой — прообразу соответствующей диагонали. Таким образом, множество особенностей Sing есть три такие прямые (детали этой конструкции см. в [3]).

Основное наблюдение настоящей работы содержит следующая

Теорема. *Пусть на компактном симплектическом многообразии (X, ω_X) задана регулярная псевдоторическая структура $(f_1, ..., f_k, B, \psi, Y)$. Тогда*

1) для произвольного гладкого лагранжева тора $T \subset Y$ и произвольного набора значений $(c_1, ..., c_k) = x \in \mathbb{R}^k$ вещественных интегралов $(f_1, ..., f_k)$ из области $x \in P_Q \backslash (\partial P_Q \cup P_{Sing})$ существует подъем T до гладкого лагранжева тора $T(x) \subset X$;

2) для произвольного гладкого лагранжева тора $T \subset Y$ такого что $T \cap D_{Sing} = \emptyset$ и произвольного набора значений $(c_1, ..., c_k) = x \in \mathbb{R}^k$ вещественных интегралов $(f_1, ..., f_k)$ из области $x \in P_Q \backslash \partial P_Q$ существует подъем T до гладкого лагранжева тора $T(x) \subset X$.

Случай, когда $T \subset Y$ есть стандартный тор в симплектическом торическом многообразии Y, следует из доказательства Предложения 2 [1]. Для произвольного тора модифицируем основную идею конструкции из [1], а именно построим локальный набор функций $(h_1, ..., h_{n-k})$ на Y вблизи T таких, что $\{h_i, h_j\}_{\omega_Y} = 0$ и T есть совместное множество уровня этих функций, соответствующее некритическим значениям.

Итак, пусть $T \subset Y$, а $(c_1, ..., c_k) = x \in \mathbb{R}^k$ набор значений $f_1, ..., f_k$ как в условиях 1) или 2). Тогда для каждого слоя $Q_p \subset X$ над точкой $p \in T \subset Y$ выбор значений функций определяет гладкий лагранжев тор $S^p_{c_1,...,c_k}$. Объединяя эти торы вдоль $T \subset Y$, получаем

$$T(x) = \bigcup_{p \in T} S^p_{c_1,...,c_k},$$

обладающее структурой расслоения над (n-k) - мерным тором со слоем k - мерный тор. Покажем, что $T(X)$ является лагранжевым тором. Для этого достаточно построить на $T(X)$ набор векторных полей $\nu_1, ..., \nu_n$, глобально тривиализующих касательное расслоение $TT(x)$ и удовлетворяющих условию $\omega_X(\nu_i, \nu_j) \equiv 0$ на $T(x)$.

Набор $\nu_1, ..., \nu_n$ частично уже существует на $T(x)$ так как всякая функция из набора $f_1, ..., f_k$ гамильтоновым действием сохраняет каждое из $S^p_{c_1,...,c_k}$, то есть

$$\nu_i = X_{f_i}|_{T(x)}, \quad i = 1, ..., k.$$

Построим теперь недостающие векторные поля. Для этого покажем, что для любого лагранжева тора $T \subset Y$ найдется локальный набор первых интегралов $h_1, ..., h_{n-k}$, чьи гамильтоновы векторные поля сохраняют T. В самом деле, согласно теореме Дарбу - Вейнстейна, [4], любое лагранжево подмногообразие $S \subset Y$ обладает окрестностью $N(S) \subset Y$, симплектоморфной некоторой малой окрестности $N_0(S) \subset T^*S$ нулевого сечения кокасательного расслоения. Так как в нашем случае $S = T$ есть тор, то взяв на T^*T набор коммутирующих функций $p_1, ..., p_{n-k}$, соотвествующих координатам "действия", обрезав все p_i так чтобы они занулились на границе $N_0(S)$ и затем перенося результат на $N(S)$, мы получим необходимый локальный набор $h_1, ..., h_{n-k}$. Теперь воспользуемся подъемом $\psi^* : C^\infty(Y, \mathbb{R}) \to C^\infty(X \backslash (B \cup \mathrm{Sing}))$ гладких функций и определим локальные гладкие функции $\psi^* h_1, ..., \psi^* h_{n-k}$ вблизи $T(x) \subset X$. При этом заметим, что условия 1) и 2) удостоверяют в том, что в обоих этих случаях $T(x)$ не пересекается с $B \cup \mathrm{Sing}$ и, значит, обладает некоторой окрестностью, для которой работает подъем ψ^*. По определению псевдоторической структуры $\nabla_\psi X_{h_i}$ коллинеарен $X_{\psi^* h_i}$ откуда следуют коммутационные соотношения для f_i и $\psi^* h_j$, и значит в качестве ν_j при $j > k$ можно взять $\nu_j = X_{\psi^* h_{j-k}}|_{T(x)}$. Чтобы убедиться в том, что при этом последние векторные поля симплектически ортогональны между собой, нам необходимо дополнительное исследование условия (*).

Пусть условие (*) выполнено для произвольной гладкой функции h на Y. Тогда если гамильтоново векторное поле X_h не обращается в нуль в некоторой окрестности точки $p \in Y$, то из условия (*) следует, что существует не обращающаяся в нуль вещественная функция

$$\alpha : X \backslash (B \cup \mathrm{Sing}) \to \mathbb{R}, \quad \text{т.ч.} \quad X_{\psi^* h} = \alpha_h \nabla_\psi X_h.$$

Тогда нетрудно видеть, что функция α должна быть одна и та же для всех функций. В самом деле, применим условие (*) к произведению пары $h_1 \cdot h_2$. Тогда получаем

$$\nabla_\psi X_{h_1 \cdot h_2} \wedge X_{\psi^*(h_1 \cdot h_2)} = \psi^* h_1 \cdot \psi^* h_2 (\alpha_{h_1} \nabla_\psi X_{h_1} \wedge \nabla_\psi X_{h_2} + \alpha_{h_2} \nabla_\psi X_{h_2} \wedge \nabla_\psi X_{h_1}),$$

откуда видно, что условие (*) выполнено тогда и только тогда, когда $\alpha_{h_1} = \alpha_{h_2}$ для любой пары функций, откуда следует универсальность α.

Далее, в слое $\psi^{-1}(p) = Q_p \backslash B$ над p рассмотрим в произвольной точке $x \in \psi^{-1}(p) \subset X$ разложение касательного пространства $T_x X = T_x^{\mathrm{hor}} \oplus T_x^{\mathrm{vert}}$, задаваемое симплектической связностью ∇_ψ, и возьмем ограничение симплектической формы ω_X на горизонтальную компоненту, обозначив его ω_X^{hor}. Тогда нетрудно видеть, что геометрический смысл функции α таков: для любой пары векторов $v_1, v_2 \in T_x^{\mathrm{hor}}$ имеем равенство

$$\omega_X^{\mathrm{hor}} = \alpha(x) \omega_Y (d\psi(v_1), d\psi(v_2)).$$

Отсюда следует, что если два гамильтоновых векторных поля были симплектически ортогональны внизу на Y, то их подъемы посредством ∇_ψ наверх останутся симплектически отрогональными. Применяя снова условие (*), получаем, что $\psi^* h_j$ коммутируют в X. Но построенный нами тор $T(x)$ есть совместное множество уровней функций $f_1, ..., f_k, \psi^* h_1, ..., \psi^* h_{n-k}$, определенных в его окрестности и коммутирующих между собой. Отсюда следует, что $T(x)$ — лагранжев.

Замечание. На самом деле для построения подъема лагранжева тора из Y в X мы нигде не пользовались тем, что Y есть торическое многообразие. Поэтому конструкция такого рода подъема может быть использована в общей ситуации когда на компактном симплектическом многообразии действует вещественный тор неполной размерности.

Доказанная выше Теорема может быть использована для построения гамильтоново неизотопных монотонных лагранжевых торов в произвольных монотонных симплектических многообразиях (например, в многообразиях Фано). Возвращаясь к **Примеру**, приведенному выше, заметим, что подъемом лагранжевых торов можно получить соответствие

$$H_1(Y\backslash D_{\mathrm{Sing}}, \mathbb{Z}) \to \text{классы лагранжевых торов};$$

при этом нетривиальным это соответствие в **Примере** становится только для монотонных торов. В этом случае ожидается, что каждый из трех примитивных классов из

$$H_1(Y\backslash D_{\mathrm{Sing}}, \mathbb{Z}) = H_1(\mathbb{CP}^1\backslash \text{три точки}, \mathbb{Z})$$

порождает свой класс монотонного лагранжева тора в многообразии Фано F^3, и эти три класса попарно гамильтоново неизотопны.

Благодарности

Работа выполнена при финасовой поддержке совместного гранта РФФИ (n. 11-01-00980-a) и НИУ ВШЭ (n. 11- 09- 0038), а также при поддержке Лаборатории Алгебраической Геометрии НИУ-ВШЭ, грант правительства РФ дог. 11 11.G34.31.0023.

Литература

[1] С.А. Белёв, Н.А. Тюрин, *“Неторические лагранжевы слоения торических многообразий Фано”*, Матем. Заметки, том 87 (2010) n. 1, стр. 48-59;
[2] Н.А. Тюрин, *“Псевдоторические структуры на торических и неторических многообразиях Фано”*, Теор. Мат. Физ, том 162 (2010) n. 3, стр.
[3] Н.А. Тюрин, *“Специальные лагранжевы слоения многообразия флагов F3”*, Теор. Мат. Физ, том 167 (2011) n. 2, стр 193 - 205;
[4] A. Weinstein, “Lagrangian submanifolds and Hamiltonian systems”, Ann. of Math., v. 98 (1973) n. 2, pp. 377 - 410.