С.Б. Измалков,
А.В. Савватеев
Российская экономическая школа,
Д.Г. Ильинский
Центральный экономико-математический институт РАН

ИГРЫ НА ВЫЖИВАНИЕ

В данной работе мы изучаем игру с несколькими раундами, в которой два или более игроков борются за приз, а действия игроков направлены на то, чтобы выбить противника из игры. Единственный выживший или несколько договорившихся о мирном окончании игры получают приз. Одним из примеров является классическая дуэль, поэтому мы будем использовать естественные для этой игры термины.

Рассматриваемая игра – динамическая игра с бесконечным горизонтом, состоящая из раундов (их дискретное количество). В каждом раунде каждый из активных (*живых*) игроков выбирает себе цель (возможен также пропуск хода, так называемая *стрельба в воздух*), и далее все одновременно производят выстрелы. Действия игроков являются общим знанием. После стрельбы все оставшиеся в живых вновь выбирают себе цель, и начинается следующий раунд. Игра заканчивается, как только все оставшиеся игроки договорились о «мире», т.е. пропустили ход.

Формально игра задается следующим образом: есть N игроков $1,\dots,n$. Заданы меткости игроков $a(i)$ – вероятности попадания в цель. Естественно считать, что $0 < a(i) < 1$. Меткости игроков являются общим знанием.

Выигрыши распределяются следующим образом:

$$V(1) > 2V(2) > 3V(3) > \dots > nV(n) > 0,$$

где $V(n)$ – выигрыш выжившего игрока, если он с еще $(n-1)$-м игроком выстрелили в воздух.

Под равновесием здесь везде понимается равновесие, совершенное на подыграх.

Дуэли

Был проведен полный анализ равновесий для игры «дуэль». Получены следующие результаты.

Лемма 1. «Война», т.е. стрельба игроков друг в друга на каждом шаге, является равновесием.

Лемма 2. «Мир», т.е. одновременная стрельба в воздух, не достигается в равновесии.

Следствие 1. Если бы стоимость мира была больше, чем V/2, мир мог бы быть достигнут для некоторых значений параметров a(i) и a(j). Чем больше меткости игроков, тем сложнее достичь «мира».

Лемма 3. Существует два несимметричных равновесия, которые (слабо) Парето доминируют равновесие «война».

А именно, есть так называемая *джентльменская дуэль*: игроки по очереди стреляют друг в друга. Этим достигается следующий эффект: игроки не могут убить друг друга одновременно, а значит, их суммарных выигрыш увеличивается. Следствием данных лемм является теорема 1.

Теорема 1. Множество SPE-равновесий в дуэли описывается парой (T, k), где T – раунд, с которого начинается джентльменская дуэль, в которой игрок k стреляет первым. До периода T игроки следуют равновесию «война». Более того, все равновесия в смешанных стратегиях имеют похожую структуру. Во всех них в некотором раунде T один и только один игрок может смешивать стрельбу в противника и в воздух. После стрельбы в воздух этим игроком происходит джентльменская дуэль, иначе они следуют любой другой чистой или смешанной стратегиям.

Принцип однократного отклонения

Однократным отклонением от профиля стратегий σ называется профиль σ′ такой, что

1) для всех игроков, кроме игрока *i* стратегии совпадают;

2) для *i* существует момент времени *t*, в который стратегии σ(*i*) и σ′(*i*) отличаются, во все остальные моменты времени эти стратегии совпадают.

Игрок *i* называется *отклоняющимся.*

Принцип однократного отклонения обычно применяется для задач с дисконтированием. Оказывается, что он верен и в этом классе игр. Здесь роль дисконтирования играют меткости игроков.

Теорема 2. (Принцип однократного отклонения.) Профиль стратегий σ является SPE-равновесием тогда и только тогда, когда не существует однократного отклонения, приносящего выгоду тому отклоняющемуся игроку.

Игра с тремя игроками (труэль)

Рассмотрим сначала случай, когда $V(2) = V(3) = 0$. Для произвольных меткостей a, b, c были найдены все SPE в стационарных стратегиях.

Теорема 3. Если V(2) = V(3) = 0, то стрельба в воздух никогда не является равновесием SPE в чистых стационарных стратегиях. Равновесиями будут следующие профили стратегий: стрельба по кругу (в любом направлении); стрельба двух более слабых в сильного. Можно явно выписать условия на a, b, c, при которых происходит переключение из одного режима равновесия в другое.

Теперь предположим, что $V(2)$ или $V(3)$ не равны нулю. В этом случае рассмотрена ситуация $a = b = c$.

Утверждение 1. Если меткости всех игроков одинаковы, то существует два вида симметричных равновесий: в чистых стратегиях это стрельба по кругу, в смешанных – стрельба с равными вероятностями в противников.

Кроме этого, получен результат о том, как игроки могут поддерживать мир (т.е. равновесие, при котором все игроки стреляют в воздух). Самое интересное, что зависимость стоимости мира от меткостей игроков является немонотонной функцией.

Игры с *n* игроками

Пока что нет общих результатов для игры n игроков. Получен только следующий результат.

Утверждение 2. Если меткости всех игроков одинаковы, то все стационарные равновесия в чистых стратегиях описываются следующим образом: в каждого кто-то стреляет.

Другими словами, игроки разбиваются на группы игроков, в которых все стреляют по кругу.

Литература

Brams S.J., Kilgour D.M. Game Theory and National Security. Cambridge, MA: Basil Blackwell, 1988.

Carter B. The Late Shift: Letterman, Leno, and the Network Battle for the Night. N.Y.: Hyperion, 1994.

Kilgour D.M. The Simultaneous Truel // International Journal of Game Theory. 1972. № 1(4). P. 229–242.

Kilgour D.M., Brams S.J. The Truel // Mathematics Magazine. 1997. 70(5). P. 315–326.

Kinnaird C. Encyclopedia of Puzzles and Pastimes. Citadel, Secaucus, NJ (USA), 1946.

Lorenz K. Personal Communication to Martin Shubik. August 11. 1968.

Shubik M. Does the Fittest Necessarily Survive? // Shubik M. (ed.) Reading in Game Theory and Political Behavior. Garden City NY (USA), 1954. Doubleday. P. 43–46.