Математические заметки

Том 94 выпуск 6 декабрь 2013

УДК 517.938

О простом изотопическом классе диффеоморфизма “источник-сток” на 3-сфере

В. З. Гринес, О. В. Починка

Полученные результаты относятся к решению проблемы Палиса–Пью о существовании дуги с конечным или счетным множеством бифуркаций, соединяющей две системы Морса–Смейла на гладком замкнутом многообразии M^n. Ньюхаус и Пейшото показали, что для потоков такая дуга существует для любого n, более того, она является простой. Однако существуют изотопные диффеоморфизмы, которые не могут быть соединены простой дугой. Для $n = 1$ это связано с наличием числа вращения Пуанкаре, а для $n = 2$ – с возможностью существования периодических точек разных периодов и гетероклинических орбит. В настоящей работе в размерности $n = 3$ обнаруживается новое препятствие к существованию простой дуги, связанное с диким вложением всех сепаратрис седловых точек, и находятся необходимые и достаточные условия того, что диффеоморфизм Морса–Смейла без гетероклинических пересечений на 3-сфере соединяется простой дугой с диффеоморфизмом “источник-сток”.

Библиография: 20 названий.

DOI: 10.4213/mzm10363

Введение

Настоящая работа посвящена решению проблемы Палиса–Пью о существовании дуги с конечным или счетным множеством бифуркаций, соединяющей две системы Морса–Смейла на гладком замкнутом многообразии [1]. В [2] Ньюхаусом и Пейшото было доказано, что любые векторные поля Морса–Смейла соединяются простой дугой. Простота означает, что вся дуга состоит из систем Морса–Смейла за исключением конечного множества точек, в которых векторное поле в определенном смысле наименьшим образом отклоняется от системы Морса–Смейла[1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м) и гранта Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

[1]В работе [2] дается развернутое изложение понятия простой дуги в пространстве векторных полей на данном многообразии. В разделе 1 настоящей работы приведено строгое определение простой дуги в пространстве диффеоморфизмов, которое идейно схоже с соответствующим определением для потоков.

© В. З. Гринес, О. В. Починка, 2013

Для дискретных динамических систем ситуация иная. Два сохраняющих ориентацию диффеоморфизма Морса–Смейла на окружности могут быть соединены *простой дугой* (см. определение 1 ниже), если и только если они имеют одинаковые числа вращения. Как следует из работ Матсумото [3] и Бланшара [4], любая ориентируемая замкнутая поверхность допускает изотопные диффеоморфизмы Морса–Смейла, которые не могут быть соединены простой дугой. Говорят, что два изотопных диффеоморфизма Морса–Смейла принадлежат одному и тому же *простому изотопическому классу*, если они могут быть соединены простой дугой. Из работы [4] следует, что существует бесконечно много простых изотопических классов диффеоморфизмов Морса–Смейла на любой ориентируемой поверхности внутри изотопического класса, допускающего диффеоморфизмы Морса–Смейла.

В размерности 3 проблема существования простой дуги осложняется наличием диффеоморфизмов Морса–Смейла, у которых сепаратрисы седловых периодических точек являются дико вложенными в несущее многообразие. Первый "дикий" пример был построен Пикстоном в [5]. Этот диффеоморфизм принадлежит классу (названному нами в [6] *классом Пикстона*), состоящему из трехмерных диффеоморфизмов Морса–Смейла, у которых неблуждающее множество состоит ровно из четырех точек: двух стоков, источника и седла (см. рис. 1). Как следует из [7], любой диффеоморфизм Пикстона соединяется простой дугой с некоторым диффеоморфизмом "источник-сток". Этот эффект связан с тем, что для любого диффеоморфизма из класса Пикстона по крайней мере одна одномерная сепаратриса седловой точки является ручной [8]. С помощью операции связной суммы двух 3-сфер, на которых заданы диффеоморфизмы из класса Пикстона с дико вложенными сепаратрисами, несложно сконструировать диффеоморфизм, у которого все сепаратрисы всех седел являются дико вложенными (см. рис. 1, где выделены 3-шары для образования связной суммы), в работе доказано, что такой диффеоморфизм не соединяется простой дугой с диффеоморфизмом "источник-сток". Основным результатом работы является нахождение необходимых и достаточных условий существования простой дуги, соединяющей диффеоморфизм Морса–Смейла без гетероклинических пересечений с диффеоморфизмом "источник-сток".

Следует заметить, что ключевым техническим моментом для решения поставленной задачи явился доказанный в разделе 3 результат, утверждающий, что любой диффеоморфизм из рассматриваемого класса, отличный от диффеомофизма "источник-сток", обладает стоковой или источниковой периодической точкой, в области притяжения или отталкивания которой лежит единственная седловая сепаратриса, при этом эта сепаратриса является одномерной и ручной. Этот факт позволяет использовать нетривиальный результат работы [7] для построения простой дуги от данного диффеоморфизма к диффеоморфизму Морса–Смейла, число седловых периодических орбит которого меньше на одну, чем у исходного[2].

1. Формулировка результатов

Пусть $\mathrm{Diff}(M^n)$ – пространство диффеоморфизмов на замкнутом многообразии M^n, снабженное C^1-топологией. *Гладкой дугой* в $\mathrm{Diff}(M^n)$ называется гладкое отоб-

[2]В работе [7] установлено, что любой диффеоморфизм Морса–Смейла без гетероклинических пересечений, неблуждающее множество которого состоит из четырех неподвижных точек, соединяется простой дугой с диффеоморфизмом "источник-сток", посредством бифуркации седло-узел.

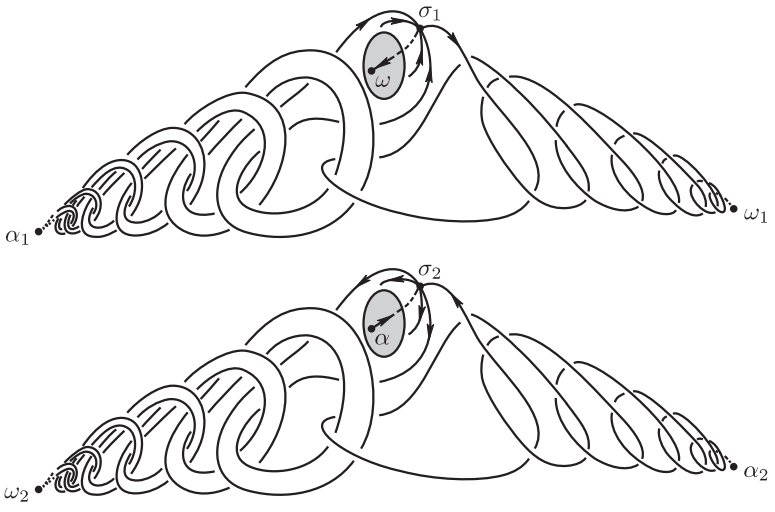

Рис. 1. Связная сумма двух диффеоморфизмов Пикстона

ражение $\xi\colon M^n \times [0,1] \to M^n$, или, что эквивалентно, гладко зависящее от t семейство диффеоморфизмов

$$\{\xi_t \in \mathrm{Diff}(M^n),\ t \in [0,1]\}.$$

Пусть $KS(M^n)$ – множество всех диффеоморфизмов *Купки–Смейла*, т.е. диффеоморфизмов, периодические орбиты которых гиперболические и их устойчивые и неустойчивые многообразия трансверсальны. Диффеоморфизмы Купки–Смейла с конечным неблуждающим множеством образуют множество $MS(M^n)$ диффеоморфизмов Морса–Смейла. Для гладкой дуги ξ множество

$$B(\xi) = \{b \in [0,1],\ \xi_b \notin KS(M^n)\}$$

называется *бифуркационным множеством*. В силу [9] для типичного множества дуг (являющегося пересечением открытых плотных подмножеств в пространстве гладких дуг) бифуркационное множество является счетным и каждый диффеоморфизм ξ_b, $b \in B(\xi)$ с точностью до направления движения по дуге претерпевает одну из следующих бифуркаций: седло-узел, удвоение периода, бифуркацию Хопфа, гетероклиническое касание (см. точные определения бифуркаций в разделе 2 ниже).

Определение 1. Дуга ξ называется *простой*, если бифуркационное множество $B(\xi)$ конечно, $\xi_t \in MS(M^n)$ для любого $t \in ([0,1] \setminus B(\xi))$ и бифуркации имеют один из следующих типов:

- седло-узел[3];
- удвоение периода;
- гетероклиническое касание.

[3]Бифуркация седло-узел состоит в исчезновении двух гиперболических периодических орбит одного и того же периода. В настоящей работе мы будем предполагать, что одна из этих орбит является узловой, другая – седловой.

Простейшим диффеоморфизмом Морса–Смейла является диффеоморфизм “источник-сток”. Неблуждающее множество такого диффеоморфизма состоит из двух точек: источника и стока, а объемлющее многообразие гомеоморфно сфере. В работе [7] было установлено, что любые диффеоморфизмы “источник-сток” на $\mathbb{S}^3$ принадлежат одному и тому же простому изотопическому классу, который мы будем обозначать I_{NS}. В настоящей работе мы покажем, что этот класс не исчерпывается диффеоморфизмами “источник-сток”, и опишем все его элементы, являющиеся диффеоморфизмами без *гетероклинических пересечений* (пересечений устойчивых и неустойчивых многообразий различных седловых точек).

Пусть $f \in MS(M^3)$, σ – седловая точка диффеоморфизма f и ℓ^u_σ – неустойчивая *сепаратриса* (компонента связности множества $W^u_\sigma \setminus \sigma$). Число $\mathrm{per}(\ell^u_\sigma) \in \mathbb{N}$ называется *периодом* сепаратрисы ℓ^u_σ, если $f^{\mathrm{per}(\ell^u_\sigma)}(\ell^u_\sigma) = \ell^u_\sigma$ и $f^m(\ell^u_\sigma) \neq \ell^u_\sigma$ для любого натурального числа $m < \mathrm{per}(\ell^u_\sigma)$. Если сепаратриса ℓ^u_σ не участвует в гетероклинических пересечениях, то $\mathrm{cl}(\ell^u_\sigma) \setminus (\ell^u_\sigma \cup \sigma) = \{\omega\}$, где ω – стоковая периодическая точка (см., например, предложение 2.1.3 книги [6]). При этом, если $\dim W^u_\sigma = 1$, то $\mathrm{cl}(\ell^u_\sigma)$ есть топологически вложенная[4] дуга в M^3. Множество $\ell^u_\sigma \cup \sigma$ является гладким подмногообразием многообразия M^3. Однако многообразие $\mathrm{cl}(\ell^u_\sigma)$ может оказаться диким в точке ω, в этом случае сепаратриса ℓ^u_σ называется *дикой*, и она называется *ручной* в противном случае. Аналогично определяется ручность и дикость устойчивой одномерной сепаратрисы.

Напомним, что динамика любого каскада $f \in MS(M^3)$ может быть представлена следующим образом (см., например, главу 2.2 книги [6]). Обозначим через Ω^q_f, $q = 0, 1, 2, 3$, множество периодических точек p таких, что $\dim W^u_p = q$. Тогда $A_f = W^u_{\Omega^0_f \cup \Omega^1_f}$ – связный аттрактор и $R_f = W^s_{\Omega^3_f \cup \Omega^2_f}$ – связный репеллер с топологической размерностью меньшей или равной единице. Множества A_f и R_f не пересекаются, и каждая точка из множества $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$ является блуждающей и движется под действием f от R_f к A_f.

Будем говорить, что A_f и R_f *разделяются 2-сферой*, если существует гладкая 2-сфера $\Sigma_f \subset V_f$ такая, что A_f и R_f принадлежат различным компонентам связности $M^3 \setminus \Sigma_f$ (см. рис. 2).

Обозначим через $MS_0(M^3)$ класс диффеоморфизмов Морса–Смейла без гетероклинических пересечений на 3-многообразии M^3. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Диффеоморфизм $f \in MS_0(\mathbb{S}^3)$ принадлежит классу I_{NS}, если и только если аттрактор A_f и репеллер R_f разделяются 2-сферой.*

В разделе 5 устанавливается, что диффеоморфизм, фазовый портрет которого описан в конце введения (см. рис. 1), не соединяется простой дугой с диффеоморфизмом “источник-сток”.

---

[4] C^0-отображение $g\colon B \to X$ называется *топологическим вложением* топологического многообразия B в многообразие X, если оно гомеоморфно отображает B на подпространство $g(B)$ с индуцированной из X топологией. При этом образ $A = g(B)$ называется *топологически вложенным многообразием*. Заметим, что топологически вложенное многообразие не является топологическим подмногообразием в общем случае. Если A – подмногообразие, то оно называется *ручным* или *ручно вложенным*; в противном случае A называется *диким* или *дико вложенным* и точки, в которых не выполняются условия определения топологического подмногообразия, называются *точками дикости*.

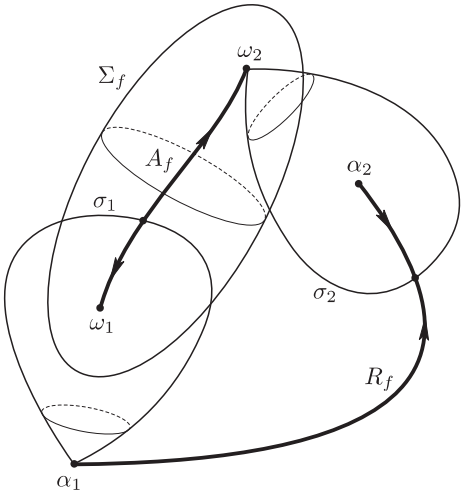

Рис. 2. Диффеоморфизм $f \in MS(M^3)$ с разделенными 2-сферой аттрактором A_f и репеллером R_f

2. Бифуркации на типичной дуге

Для описания бифуркационного множества типичной дуги мы напомним следующие понятия.

Пусть p – неподвижная точка диффеоморфизма $f\colon M^n \to M^n$. Дифференциал Df_p индуцирует разложение касательного пространства T_pM^n в прямую сумму инвариантных подпространств

$$T_pM^n = E^{\mathrm{u}} \oplus E^{\mathrm{c}} \oplus E^{\mathrm{s}}.$$

Линейные отображения $Df_p|_{E^{\mathrm{u}}}$, $Df_p|_{E^{\mathrm{c}}}$, $Df_p|_{E^{\mathrm{s}}}$ имеют собственные значения соответственно внутри, на границе, вне единичного круга. В частности, если $\dim E^{\mathrm{c}} = 0$, точка p является гиперболической. В противном случае существует гладкое инвариантное подмногообразие W^{c}_p многообразия M^n, касательное к E^{c} в точке p. Оно называется *центральным многообразием* негиперболической неподвижной точки. Центральное многообразие не единственно, но отображения $f|_{W^{\mathrm{c}}_p}$ и $f|_{\widetilde{W}^{\mathrm{c}}_p}$ топологически сопряжены для любых центральных многообразий W^{c}_p и $\widetilde{W}^{\mathrm{c}}_p$. Кроме того, точка p имеет гладкое *устойчивое многообразие*

$$W^{\mathrm{s}}_p = \Big\{ y \in M^n : \lim_{k\to+\infty} f^k(y) = p \Big\}$$

и гладкое *неустойчивое многообразие*

$$W^{\mathrm{u}}_p = \Big\{ y \in M^n : \lim_{k\to-\infty} f^k(y) = p \Big\}$$

(см., например, [10]). *Центральное*, *устойчивое* и *неустойчивое многообразия* периодической точки периода k определяются как соответствующие многообразия этой точки как неподвижной точки диффеоморфизма f^k.

Для определения квази-трансверсального пересечения подмногообразий нам понадобится понятие квадратичного дифференциала отображения $h\colon A \to B$ в точке $x \in A$, где A, B – гладкие многообразия. Для этого напомним, что *коядром* первого дифференциала $h_x\colon T_xA \to T_{f(x)}B$ называется факторпространство $\operatorname{Coker} h_x = T_{h(x)}B/h_x(T_xA)$. В локальных координатах $X\colon T_xA \to A$, $Y\colon T_{h(x)}B \to B$, где

$$X(0) = x, \qquad Y(0) = h(x), \qquad \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} X(\zeta t) = \zeta, \qquad \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} Y(\zeta t) = \zeta,$$

отображение h запишется в виде

$$\varphi\colon T_xA \to T_{h(x)}B, \qquad \text{где} \quad \varphi = Y^{-1}hX.$$

Ограничение отображения φ на ядро $\operatorname{Ker} h_x$ представляет собой l функций $\varphi_1, \dots, \varphi_l \in \operatorname{Coker} h_x$, каждая из которых зависит от k переменных $\eta_1, \dots, \eta_k \in \operatorname{Ker} h_x$. *Квадратичным дифференциалом* отображения h в точке x называется отображение $h_{xx}\colon \operatorname{Ker} h_x \to \operatorname{Coker} h_x$, имеющее в локальных координатах $\eta_1, \dots, \eta_k$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ вид

$$(h_{xx}(\eta_1, \dots, \eta_k))_r = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial \zeta_i\, \partial \zeta_j}\, \eta_i \eta_j, \qquad r = 1, \dots, l$$

(см. подробности в [11]).

Пусть теперь N_1, N_2 – гладкие подмногообразия многообразия M^n, $x \in (N_1 \cap N_2)$, D_1 – локально нормальное дополнение к N_1 в точке x и $q\colon M^n \to D_1$ – естественная проекция вдоль N_1. Положим $g = q|_{N_2}$. Говорят, что многообразия N_1 и N_2 имеют *квази-трансверсальное пересечение* в точке x, если пространство $\operatorname{Coker} g_x$ гомеоморфно $\mathbb{R}$ и выполняется одно из нижеприведенных условий:

a) $\dim N_1 + \dim N_2 \geqslant n$ и квадратичный дифференциал g_{xx} невырожден;

b) $\dim N_1 + \dim N_2 = n - 1$ и $T_xN_1 \cap T_xN_2 = \{0\}$.

Для типичного множества дуг ξ диффеоморфизм ξ_b, $b \in B(\xi)$, с точностью до направления движения по дуге претерпевает одну из описанных ниже бифуркаций. На поясняющих рисунках двойными стрелками схематично изображены направления движения с экспоненциальным сжатием и растяжением, а одинарными стрелками выделены направления движения по центральному многообразию негиперболической точки.

Перейдем непосредственно к описанию возможных типов бифуркаций.

1) Все периодические орбиты диффеоморфизма ξ_b гиперболические, за исключением одной орбиты $\mathcal{O}_p$ точки p периода k, для которой все собственные значения $(Df^k)_p$ по модулю отличны от 1, кроме одного $\lambda = 1$. Устойчивые и неустойчивые многообразия различных периодических орбит диффеоморфизма ξ_b пересекаются трансверсально и $W^{\mathrm{s}}_p \cap W^{\mathrm{u}}_p = \{p\}$. Переход через ξ_b сопровождается слиянием и дальнейшим исчезновением гиперболических периодических точек одного и того же периода. Такая бифуркация называется *седло-узловой* (см. рис. 3).

2) Все периодические орбиты диффеоморфизма ξ_b гиперболические, за исключением одной $\mathcal{O}_p$ периода k, для которой все собственные значения $(Df^k)_p$ по модулю отличны от 1, кроме одного $\lambda = -1$. Устойчивые и неустойчивые многообразия различных периодических орбит диффеоморфизма ξ_b пересекаются трансверсально и

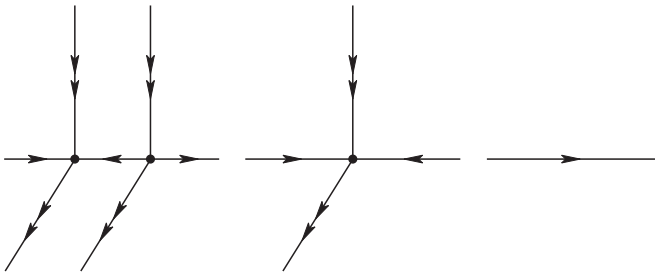

Рис. 3. Бифуркация седло-узел

$W^{\mathrm{s}}_p \cap W^{\mathrm{u}}_p = \{p\}$. При переходе через ξ_b вдоль центрального многообразия аттрактор[5] становится репеллером и рождается периодическая гиперболическая орбита периода $2k$. Такая бифуркация называется *удвоением периода* (см. рис. 4).

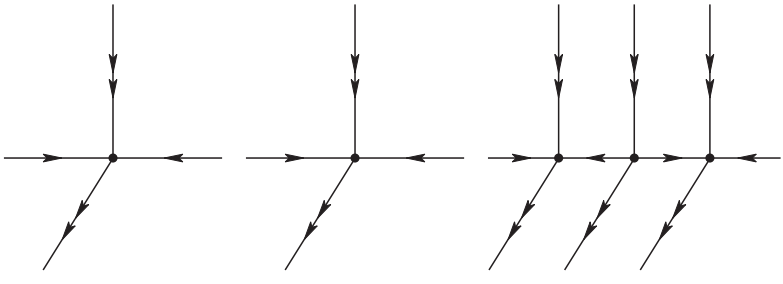

Рис. 4. Бифуркация удвоения периода

3) Все периодические орбиты диффеоморфизма ξ_b гиперболические, за исключением одной $\mathcal{O}_p$ периода k, для которой все собственные значения $(Df^k)_p$ по модулю отличны от 1, кроме одной пары комплексно сопряженных λ, $\bar{\lambda}$, где $\lambda = e^{i\theta}$, $0 < \theta < \pi$. Устойчивые и неустойчивые многообразия различных периодических орбит диффеоморфизма ξ_b пересекаются трансверсально и $W^{\mathrm{s}}_p \cap W^{\mathrm{u}}_p = \{p\}$. При переходе через ξ_b аттрактор становится репеллером и вблизи него появляется инвариантная окружность. Такая бифуркация называется *бифуркацией Хопфа* или *бифуркацией Неймарка–Сакера* (см. рис. 5).

4) Все периодические орбиты диффеоморфизма ξ_b гиперболические, их устойчивые и неустойчивые многообразия имеют трансверсальные пересечения всюду, кроме одной траектории, вдоль которой пересечение является квази-трансверсальным. Такая бифуркация называется *бифуркацией гетероклинического касания* (см. рис. 6).

[5]Компактное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором диффеоморфизма* $f\colon M^n \to M^n$, если существует окрестность V множества A такая, что $f(V) \subset V$ и $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(V)$. Такая окрестность называется *захватывающей*. Множество $R \subset M^n$ называется *репеллером* для f, если оно является аттрактором для f^{-1}.

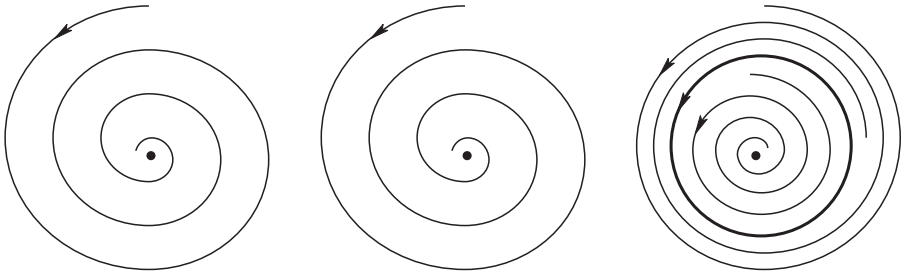

Рис. 5. Бифуркация Хопфа или Неймарка–Сакера

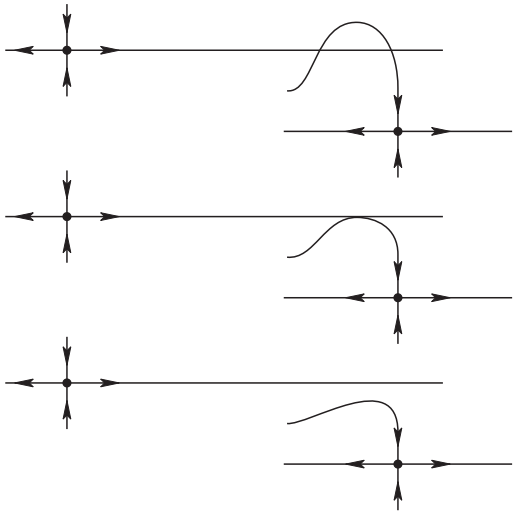

Рис. 6. Бифуркация гетероклинического касания

3. Соотношение между ручными сепаратрисами и простыми дугами

3.1. Условие ручности одномерной сепаратрисы. Этот пункт мы начнем с необходимых для понимания определений и утверждений; исчерпывающую информацию по нижеприведенному материалу можно найти в главе 2.1 книги [6].

Пусть $f \in MS(M^3)$ и σ – седловая точка f такая, что неустойчивая *сепаратриса* ℓ^{u}_σ не участвует в гетероклинических пересечениях. Тогда $\mathrm{cl}(\ell^{\mathrm{u}}_\sigma)\setminus(\ell^{\mathrm{u}}_\sigma\cup\sigma)=\{\omega\}$, где ω – стоковая периодическая точка. Для установления типа вложения сепаратрисы ℓ^{u}_σ используется переход к пространству орбит.

Положим

$$V_\omega = W^{\mathrm{s}}_{\mathcal{O}_\omega}\setminus\mathcal{O}_\omega \qquad \text{и} \qquad \widehat{V}_\omega = V_\omega/f.$$

Тогда естественная проекция $p_\omega\colon V_\omega\to\widehat{V}_\omega$ является накрытием. Поскольку диффеоморфизм $f^{\mathrm{per}(\omega)}|_{W^{\mathrm{s}}_\omega}$ топологически сопряжен с гомотетией в $\mathbb{R}^3$, то многообразие $\widehat{V}_\omega$ гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$. Поскольку W^{u}_σ является гладким подмногообразием M^3 и диффеоморфизм $f^{\mathrm{per}(\sigma)}|_{W^{\mathrm{u}}_\sigma}$ топологически сопряжен с гомотетией

в $\mathbb{R}^{\dim W^{\mathrm{u}}_\sigma}$, то множество $\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_\sigma = p_\omega(\ell^{\mathrm{u}}_\sigma)$ является *гомотопически нетривиальным* гладким подмногообразием многообразия $\widehat{V}_\omega$, т.е. $i_{\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_\sigma *}(\pi_1(\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_\sigma)) \neq 0$, где $i_{\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_\sigma}\colon \widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_\sigma \to \widehat{V}_\omega$ – отображение включения.

В случае $\dim W^{\mathrm{u}}_\sigma = 1$ многообразие $\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_\sigma$ является *узлом* (гомеоморфным образом окружности). Узел $\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_\sigma$ называется *тривиальным*, если существует гомеоморфизм $\widehat{\varphi}\colon \widehat{V}_\omega \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ такой, что

$$\widehat{\varphi}(\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_\sigma) = \{x\} \times \mathbb{S}^1 \qquad \text{для некоторого} \quad x \in \mathbb{S}^2.$$

Утверждение 1. *Если узел $\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_\sigma$ является тривиальным в $\widehat{V}_\omega$, то одномерная сепаратриса ℓ^{u}_σ является ручной и имеет тот же период, что и сток ω.*

Доказательство. Первая часть утверждения следует из теоремы 4.2.2 книги [6], в силу которой сепаратриса ℓ^{u}_σ является ручно вложенной в M^3 тогда и только тогда, когда узел $\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_\sigma$ является тривиальным в $\widehat{V}_\omega$. Для доказательства второй части заметим, что согласно предложению 4.1.2 книги [6] узел $\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_\sigma$ является тривиальным тогда и только тогда, когда существует его трубчатая окрестность $N(\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_\sigma)$ в многообразии $\widehat{V}_\omega$ такая, что многообразие $\widehat{V}_\omega \setminus N(\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_\sigma)$ гомеоморфно заполненному тору (многообразию, гомеоморфному многообразию $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$). Отсюда следует, что для тривиального узла $\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_\sigma$ группа $i_{\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_\sigma *}(\pi_1(\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_\sigma))$ изоморфна $\mathbb{Z}$. Так как многообразие $\widehat{V}_\omega$ гомеоморфно факторпространству $(W^{\mathrm{s}}_\omega \setminus \omega)/f^{\mathrm{per}(\omega)}$, то в силу теоремы о монодромии существует дуга $\gamma \subset \ell^{\mathrm{u}}_\sigma$ с началом в точке x и концом в точке $f^{\mathrm{per}(\omega)}(x)$, которая является поднятием узла $\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_\sigma$. Таким образом, $f^{\mathrm{per}(\omega)}(\ell^{\mathrm{u}}_\sigma) = \ell^{\mathrm{u}}_\sigma$. Поскольку $\omega \in \mathrm{cl}(\ell^{\mathrm{u}}_\sigma)$, то $\mathrm{per}(\ell^{\mathrm{u}}_\sigma) \geqslant \mathrm{per}(\omega)$, а значит, сепаратриса ℓ^{u}_σ имеет тот же период, что и сток ω.

Аналогичный результат имеет место для устойчивой седловой сепаратрисы в области отталкивания источника α.

3.2. Характеристические пространства. Пусть $f \in MS(M^3)$. Напомним, что мы обозначили через Ω^q_f, $q = 0, 1, 2, 3$, множество периодических точек p таких, что $\dim W^{\mathrm{u}}_p = q$, положили

$$A_f = W^{\mathrm{u}}_{\Omega^0_f \cup \Omega^1_f}, \qquad R_f = W^{\mathrm{s}}_{\Omega^3_f \cup \Omega^2_f}, \qquad V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f).$$

В книге [6] пространство орбит $\widehat{V}_f = V_f/f$ названо *характеристическим пространством*. Обозначим через $p_f\colon V_f \to \widehat{V}_f$ естественную проекцию. Известно (см., например, теорему 1.2 работы [12]), что характеристическое пространство является простым многообразием[6].

Утверждение 2. *Для диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ условие разделенности аттрактора A_f и репеллера R_f 2-сферой равносильно тому, что пространство $\widehat{V}_f$ диффеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.*

Доказательство. *Необходимость.* Разделенность аттрактора A_f и репеллера R_f диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ 2-сферой означает, что существует гладкая 2-сфера $\Sigma_f \subset V_f$ такая, что A_f и R_f принадлежат различным компонентам связности

[6]Гладкое 3-многообразие называется *простым*, если оно либо *неприводимо* (любая гладкая 2-сфера ограничивает в нем 3-шар), либо гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

$M^3 \setminus \Sigma_f$. Тогда сфера Σ_f не ограничивает 3-шар в V_f и, следовательно, многообразие V_f не является неприводимым. В силу теоремы 3.15 в [13] многообразие $\widehat{V}_f$ также не является неприводимым. Согласно теореме 1.2 работы [12] $\widehat{V}_f$ диффеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Достаточность. Пусть многообразие $\widehat{V}_f$ диффеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Тогда многообразие V_f диффеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ посредством некоторого диффеоморфизма $\beta\colon V_f \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Зафиксируем координату $r \in \mathbb{R}$ и положим $\Sigma_f = \beta^{-1}(\mathbb{S}^2 \times \{r\})$. По построению 2-сфера Σ_f делит многообразие V_f на две некомпактные компоненты связности, при этом многообразие $M^3 = V_f \cup A_f \cup R_f$ компактно. Поскольку множества A_f и R_f связны и не пересекаются, то они принадлежат различным компонентам связности множества $M^3 \setminus \Sigma_f$. Следовательно, 2-сфера Σ_f является искомой.

Пусть теперь $f \in MS_0(M^3)$. Для седловой точки σ диффеоморфизма f обозначим через $W^2_\sigma(W^1_\sigma)$ двумерное (одномерное) инвариантное многообразие σ. Положим $\widehat{W}^2_\sigma = p_f(W^2_\sigma)$. Тогда множество $\widehat{W}^2_\sigma$ является гомотопически нетривиальным гладким тором (гомотопически нетривиальной бутылкой Клейна) в многообразии $\widehat{V}_f$, если диффеоморфизм $f^{\mathrm{per}(\sigma)}$ сохраняет (меняет) ориентацию W^2_σ (см., например, предложение 2.1.5 книги [6]). Положим

$$\widehat{W}^2_f = \bigcup_{\sigma \in (\Omega^1_f \cup \Omega^2_f)} \widehat{W}^2_\sigma.$$

Выберем семейство $\{N(\widehat{W}^2_\sigma),\ \sigma \in (\Omega^1_f \cup \Omega^2_f)\}$ попарно непересекающихся трубчатых окрестностей[7] поверхностей $\{\widehat{W}^2_\sigma,\ \sigma \in (\Omega^1_f \cup \Omega^2_f)\}$.

В случае, когда многообразие $\widehat{V}_f$ диффеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, для установления типа вложения сепаратрис нам понадобятся следующие топологические факты.

Факт 1. Любой гомотопически нетривиальный гладкий тор в многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ ограничивает в нем заполненный тор (см., например, предложение 4.1.1 книги [6]).

Факт 2. Собственно вложенная в многообразие X ориентируемая поверхность[8] F, не являющаяся 2-сферой, несжимаема[9] тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}(i_{F*}) = 0$, где $i_F\colon F \to X$ – отображение включения [14].

Факт 3. Если 3-многообразие X неприводимо, тогда двумерный тор $T \subset X$, не лежащий в 3-шаре, является сжимаемым тогда и только тогда, когда он ограничивает заполненный тор в X [14; упражнение 6].

---

[7] *Трубчатая окрестность тора* – это многообразие, диффеоморфное $\mathbb{T}^2 \times (0,1)$, и, соответственно, ее граница состоит из двух торов. *Трубчатая окрестность бутылки Клейна* – это локально тривиальное расслоение над бутылкой Клейна со слоем интервал, ее граница состоит из одного тора.

[8] Поверхность F называется *собственно вложенной* в многообразие X, если $\partial X \cap F = \partial F$.

[9] Собственно вложенная в X поверхность F называется *сжимаемой* в X в одном из следующих двух случаев:

1) существует нестягиваемая простая замкнутая кривая $c \subset \mathrm{int}\, F$ и гладко вложеннный 2-диск $D \subset \mathrm{int}\, X$ такой, что $D \cap F = \partial D = c$;

2) существует 3-шар $B \subset \mathrm{int}\, X$ такой, что $F = \partial B$.

Поверхность F называется *несжимаемой* в X, если она не является сжимаемой в X.

Факт 4. Многообразие диффеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ тогда и только тогда, когда оно получается из двух гладких заполненных торов, склейкой их границ посредством диффеоморфизма, переводящего меридиан[10] в меридиан (см., например, предложение 7.1 книги [15]).

Замечание 1. Пусть T – гомотопически нетривиальный гладкий тор на многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. В силу факта 1 тор T ограничивает заполненный тор G, меридиан которого мы будем называть *меридианом* тора T. При этом, если тор T ограничивает два заполненных тора, то в силу факта 4 меридиан одного из них является меридианом другого.

Утверждение 3. *Пусть диффеоморфизм $f \in MS_0(M^3)$ отличен от диффеоморфизма "источник-сток" и его характеристическое пространство $\widehat{V}_f$ диффеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Тогда существует седловая точка σ_* такая, что хотя бы одна компонента связности множества $\widehat{V}_f \setminus N(\widehat{W}^2_{\sigma_*})$ является заполненным тором, не пересекающимся с множеством $\widehat{W}^2_f$.*

Доказательство. В силу факта 1 для любой седловой точки σ хотя бы одна компонента связности множества $\widehat{V}_f \setminus N(\widehat{W}^2_\sigma)$ является заполненным тором. Поскольку седловых точек конечное число и бутылка Клейна не вкладывается в заполненный тор[11], то для доказательства утверждения достаточно показать, что любой гомотопически нетривиальный в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ тор T, лежащий в гомотопически нетривиальном в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ заполненном торе G, ограничивает в G заполненный тор.

Пусть a и b – образующие фундаментальной группы тора T. Поскольку тор является гомотопически нетривиальным в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, то с точностью до перестановки образующих $i_{T*}([a]) \neq 0$ и $i_{T*}([b]) = 0$, где $i_T \colon T \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ – отображение включения. Пусть c – образующая фундаментальной группы заполненного тора G. Поскольку заполненный тор G также является гомотопически нетривиальным в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, то $i_{G*}([c]) \neq 0$, где $i_G \colon G \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ – отображение включения, откуда следует, что $\operatorname{Ker}(i_{G*}) = 0$. Обозначим через $j_T \colon T \to G$ отображение включения. Тогда $i_T = i_G j_T$ и, следовательно, $i_{T*} = i_{G*} j_{T*}$. Поскольку $\operatorname{Ker}(i_{T*}) \neq 0$ и $\operatorname{Ker}(i_{G*}) = 0$, то $\operatorname{Ker}(j_{T*}) \neq 0$. В силу факта 2 тор T является сжимаемым в G. Поскольку $j_{T*}([a]) \neq 0$, то T не лежит в 3-шаре в G, откуда в силу факта 3 получаем, что тор T ограничивает заполненный тор в G.

Утверждение 4. *Пусть диффеоморфизм $f \in MS_0(M^3)$ отличен от диффеоморфизма "источник-сток", характеристическое пространство $\widehat{V}_f$ диффеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ и σ_* – седловая точка, удовлетворяющая заключению утверждения 3. Если $\dim W^{\mathrm{u}}_{\sigma_*} = 1$ ($\dim W^{\mathrm{s}}_{\sigma_*} = 1$), то существует стоковая точка ω_* (источниковая точка α_*) такая, что пересечение*

$$\widehat{V}_{\omega_*} \cap p_{\omega_*}(W^{\mathrm{u}}_{\Omega^1_f \cup \Omega^2_f}) \qquad (\widehat{V}_{\alpha_*} \cap p_{\alpha_*}(W^{\mathrm{s}}_{\Omega^1_f \cup \Omega^2_f}))$$

состоит из одного тривиального узла $\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_{\sigma_*}$ ($\widehat{\ell}^{\mathrm{s}}_{\sigma_*}$).

[10] Двумерный диск d в заполненном торе G называется *меридианным*, если $\partial G \cap d = \partial d$ и ∂d не ограничивает диск в ∂G. Граница меридианного диска называется *меридианом*.

[11] Если предположить, что бутылка Клейна вкладывается в заполненный тор, то она вкладывается и в $\mathbb{R}^3$, что неверно.

Доказательство. Положим для определенности, что $\dim W^{\mathrm{u}}_{\sigma_*} = 1$. Положим

$$V_0 = \bigcup_{\omega\in\Omega^0_f} V_\omega \qquad \text{и} \qquad \widehat{V}_0 = \bigcup_{\omega\in\Omega^0_f} \widehat{V}_\omega.$$

Тогда каждая компонента связности многообразия $\widehat{V}_0$ диффеоморфна $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$. Для понимания перехода от многообразия V_f к многообразию V_0 заметим, что $V_0\setminus W^{\mathrm{u}}_{\Omega^1_f} = V_f\setminus W^{\mathrm{s}}_{\Omega^1_f}$. Для точки $\sigma\in\Omega^1_f$ положим

$$N_\sigma = p_f^{-1}(N(\widehat{W}^2_\sigma))\cup W^{\mathrm{u}}_{\mathcal{O}_\sigma}.$$

По построению N_σ – f-инвариантная окрестность периодической орбиты $\mathcal{O}_\sigma$, содержащая $W^{\mathrm{s}}_{\mathcal{O}_\sigma}\cup W^{\mathrm{u}}_{\mathcal{O}_\sigma}$ (см. рис. 8 и доказательство существования такой окрестности в [6; теорема 2.1.2]). Положим

$$N_{\Omega^1_f} = \bigcup_{\sigma\in\Omega^1_f} N_\sigma.$$

Тогда имеет место равенство $V_0\setminus N_{\Omega^1_f} = V_f\setminus N_{\Omega^1_f}$.

Положим $\widehat{W}^1_\sigma = p_0(W^1_\sigma)$. Множество $\widehat{W}^1_\sigma$ является парой узлов (узлом) в многообразии $\widehat{V}_0$, если диффеоморфизм $f^{\mathrm{per}(\sigma)}$ сохраняет (меняет) ориентацию W^1_σ (см., например, предложение 2.1.5 книги [6]). Положим $N(\widehat{W}^1_\sigma) = p_0(N_\sigma)$, тогда $N(\widehat{W}^1_\sigma)$ – трубчатая окрестность многообразия $\widehat{W}^1_\sigma$. Положим

$$\widehat{N}^2_{\Omega^1_f} = p_f(N_{\Omega^1_f}), \qquad \widehat{N}^1_{\Omega^1_f} = p_0(N_{\Omega^1_f}).$$

Из равенства $V_0\setminus N_{\Omega^1_f} = V_f\setminus N_{\Omega^1_f}$ следует, что многообразие $p_0(V_0\setminus N_{\Omega^1_f})$ гомеоморфно многообразию $p_f(V_f\setminus N_{\Omega^1_f})$. Откуда получаем, что $\widehat{V}_0\setminus\widehat{N}^1_{\Omega^1_f}$ гомеоморфно $\widehat{V}_f\setminus\widehat{N}^2_{\Omega^1_f}$.

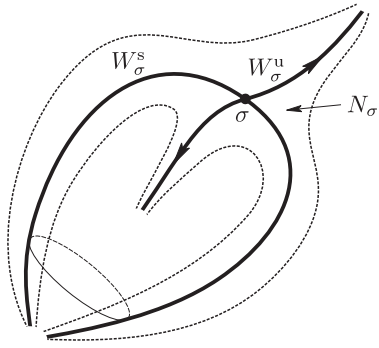

Рис. 7. f-Инвариантная окрестность седловой точки σ

Переход от многообразия $\widehat{V}_f$ к многообразию $\widehat{V}_0$ состоит в удалении $\widehat{N}^2_{\Omega^1_f}$ из $\widehat{V}_f$ и приклеивании к каждой границе полученного многообразия заполненного тора в силу диффеоморфизма, переводящего меридиан в меридиан. Схематически описанный переход изображен на рис. 8 (a) (рис. 8 (b)). Поскольку в силу утверждения 3

существует компонента связности G множества $\widehat{V}_f \setminus N(\widehat{W}^2_{\sigma_*})$, гомеоморфная заполненному тору и не пересекающаяся с множеством $\widehat{W}^2_f$, то, приклеив к G компоненту связности $N(\widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_{\sigma_*})$ множества $N(\widehat{W}^1_{\sigma_*})$, гомеоморфную заполненному тору, получим компоненту связности $\widehat{V}_{\omega_*}$ множества $\widehat{V}_0$ такую, что пересечение

$$\widehat{V}_{\omega_*} \cap p_{\omega_*}(W^{\mathrm{u}}_{\Omega^1_f \cup \Omega^2_f}) = \widehat{\ell}^{\mathrm{u}}_{\sigma_*}.$$

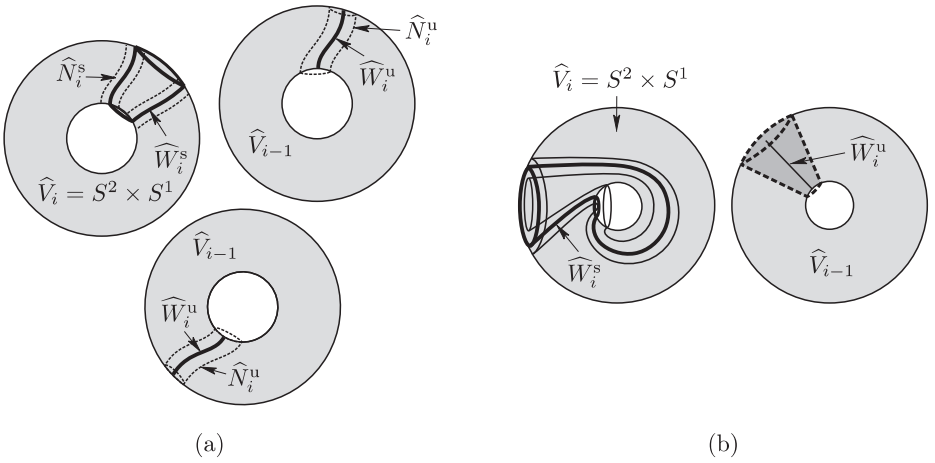

Рис. 8. Переход от пространства $\widehat{V}_i$ к пространству $\widehat{V}_{i-1}$

3.3. Существование простой дуги, уменьшающей число периодических орбит.

Утверждение 5. *Пусть диффеоморфизм $f \in MS_0(M^3)$ отличен от диффеоморфизма "источник-сток" и характеристическое пространство $\widehat{V}_f$ гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Тогда неблуждающее множество диффеоморфизма f содержит узловую точку (источник или сток), в бассейне которой (области притяжения или отталкивания) лежит в точности одна сепаратриса седловой точки, при этом эта сепаратриса является одномерной и ручной.*

Доказательство. Существование узловой точки с искомыми свойствами непосредственно устанавливается последовательным применением утверждений 3, 4 и 1.

Утверждение 6. *Если для диффеоморфизма $f \in MS_0(M^3)$ его неблуждающее множество содержит узловую точку, в бассейне которой лежит в точности одна сепаратриса седловой точки, и при этом эта сепаратриса является одномерной и ручной, то существует простая дуга с единственным бифуркационным значением, соединяющая диффеоморфизм f с диффеоморфизмом $f' \in MS_0(M^3)$ таким, что неблуждающее множество f' содержит на одну седловую орбиту меньше по сравнению с неблуждающим множеством f.*

Доказательство. Обозначим через σ седловую точку и через ℓ_σ – ее сепаратрису, удовлетворяющую условиям утверждения. Возможны два случая:

1) $f^{\mathrm{per}(\sigma)}(\ell) = \ell$;
2) $f^{\mathrm{per}(\sigma)}(\ell) \neq \ell$.

В первом случае существование искомой простой дуги устанавливается с помощью бифуркации седло-узел методом, подробно описанным в разделе 4.3.2 книги [6] (см. также [7]) для случая $\mathrm{per}(\sigma) = 1$ и легко обобщающимся на случай $\mathrm{per}(\sigma) > 1$. Во втором случае построение искомой простой дуги для $\mathrm{per}(\sigma) = 1$ описано в [16] с помощью бифуркации удвоения периода и также легко обобщается на случай $\mathrm{per}(\sigma) > 1$.

4. Критерий принадлежности диффеоморфизма Морса–Смейла без гетероклинических пересечений классу I_{NS}

Доказательство теоремы 1 базируется на следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть диффеоморфизмы $f, f' \in MS_0(M^3)$ соединяются простой дугой. Тогда пространства $\widehat{V}_f$, $\widehat{V}_{f'}$ гомеоморфны.*

Доказательство. Не уменьшая общности, будем считать, что существует простая дуга ξ_t с единственным бифуркационным значением ξ_b, соединяющая диффеоморфизмы $f, f' \in MS_0(\mathbb{S}^3)$. Тогда для $t_1, t_2 < b$ или $t_1, t_2 > b$ диффеоморфизмы ξ_{t_1} и ξ_{t_2} топологически сопряжены и, следовательно, пространства орбит $\widehat{V}_{\xi_{t_1}}$ и $\widehat{V}_{\xi_{t_2}}$ гомеоморфны. Заметим, что из определения простой дуги следует, что либо $|\Omega^0_{\xi_0}| = |\Omega^0_{\xi_t}|$, либо $|\Omega^3_{\xi_0}| = |\Omega^3_{\xi_t}|$ для любого $t \in [0,1]$, где $|\cdot|$ означает мощность множества. Положим для определенности $|\Omega^0_{\xi_0}| = |\Omega^0_{\xi_t}|$ (во втором случае рассуждения аналогичные). Тогда $|\Omega^1_{\xi_0}| = |\Omega^1_{\xi_t}|$ и множество $A_{\xi_t} = W^{\mathrm{u}}_{\Omega^0_{\xi_t} \cup \Omega^1_{\xi_t}}$ является аттрактором для любого $t \in [0,1]$. Положим

$$V_{\xi_t} = W^{\mathrm{s}}_{A_{\xi_t} \cap \Omega_{\xi_t}} \setminus A_{\xi_t} \qquad \text{и} \qquad \widehat{V}_{\xi_t} = V_{\xi_t}/\xi_t.$$

Покажем, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что многообразия $\widehat{V}_{\xi_t}$ и $\widehat{V}_{\xi_b}$ гомеоморфны для $b \leqslant t \leqslant b + \varepsilon$. Аналогично показывается, что существует $\widetilde{\varepsilon} > 0$ такое, что многообразия $\widehat{V}_{\xi_t}$ и $\widehat{V}_{\xi_b}$ гомеоморфны для $b - \widetilde{\varepsilon} \leqslant t \leqslant b$, что и завершит доказательство леммы.

Методами работы [12] для аттрактора A_{ξ_b} можно построить гладкую захватывающую окрестность Q, являющуюся заполненной поверхностью. Выберем трубчатую окрестность N поверхности $\xi_b(\partial Q)$ так, что $N \cap \partial Q = \varnothing$. Положим $S_t = \xi_t(\partial Q)$ для $t \in [b,1]$. Покажем, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $S_t \subset N$ и поверхность S_t разделяет края многообразия N для $b \leqslant t \leqslant b + \varepsilon$.

Для этого положим

$$g_t = \xi_t \xi_b^{-1}|_{S_b} \colon S_b \to S_t \qquad \text{для} \quad t \in [b,1].$$

По теореме Тома о продолжении изотопии (см., например, теоремы 8.1.3 и 8.1.4 в книге [17]) существует $\varepsilon > 0$ и гладкая изотопия

$$\{G_t \colon M^3 \to M^3,\ t \in [b, b+\varepsilon]\}$$

такая, что $G_b = \mathrm{id}$,

$$G_t|_{S_b} = g_t|_{S_b}, \quad G_t|_{M^3 \setminus N} = \mathrm{id}\,|_{M^3 \setminus N} \qquad \text{для любого} \quad t \in [b, b+\varepsilon].$$

Тогда $G_t(N) = N$ и $G_t(S_b) = S_t$, откуда следует, что поверхность S_t разделяет края многообразия N для $b \leqslant t \leqslant b + \varepsilon$.

Положим

$$K_{\xi_t} = Q \setminus \operatorname{int} \xi_t(Q).$$

Тогда K_{ξ_t} является фундаментальной областью[12] действия диффеоморфизма ξ_t на V_{ξ_t}. Тогда пространство орбит $\widehat{V}_{\xi_t}$ гомеоморфно топологическому пространству, полученному из K_{ξ_t} отождествлением его границ в силу диффеоморфизма ξ_t (см., например, утверждение 10.2.22 в книге [6]). Покажем, что множества K_{ξ_t} и K_{ξ_b} гомеоморфны посредством некоторого гомеоморфизма $h_t\colon K_{\xi_b} \to K_{\xi_t}$ такого, что

$$h_t|_{\partial Q} = \operatorname{id}|_{\partial Q} \qquad \text{и} \qquad h_t|_{\xi_b(\partial Q)} = g_t,$$

что и завершит доказательство леммы.

Положим

$$R = K_{\xi_b} \setminus N \qquad \text{и} \qquad P_t = \operatorname{cl}(K_{\xi_t} \setminus R).$$

Тогда $K_{\xi_t} = R \cup P_t$. Положим $S = R \cap P_t$ и $S_t = \xi_t(\partial Q)$. По построению S, S_t – диффеоморфные поверхности. Более того, поскольку поверхность S_t разделяет края многообразия N для $b \leqslant t \leqslant b + \varepsilon$, то P_t диффеоморфно многообразию $S \times [0,1]$ (см., например, следствие 3.2 в [18] или теорему 3.3 в [19]). При этом можно построить непрерывное по $t \in [b, b+\varepsilon]$ семейство диффеоморфизмов $\nu_t\colon P_t \to S \times [0,1]$ таких, что $\nu_t(s) = \{s\} \times [0,1]$ для $s \in S$. Положим

$$\mu_t = \nu_t g_t \nu_b^{-1}|_{S\times\{1\}}\colon S \times \{1\} \to S \times \{1\}.$$

По построению отображение μ_t изотопно тождественному отображению, откуда следует, что существует диффеоморфизм

$$q_t\colon S \times [0,1] \to S \times [0,1],$$

тождественный на $S \times \{0\}$ и совпадающий с μ_t на $S \times \{1\}$. Тогда отображение h_t, являющееся тождественным на R и совпадающее с диффеоморфизмом $\nu_t^{-1} q_t \nu_b$ на P_b, является искомым.

Доказательство теоремы 1. Докажем теперь теорему 1, т.е. докажем, что диффеоморфизм $f \in MS_0(\mathbb{S}^3)$ принадлежит классу I_{NS}, если и только если аттрактор A_f и репеллер R_f разделяются 2-сферой.

Необходимость. Пусть диффеоморфизм $f \in MS_0(\mathbb{S}^3)$ принадлежит классу I_{NS}. Поскольку для диффеоморфизма "источник-сток" $g\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ характеристическое пространство $\widehat{V}_g$ гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ (см., например, теорему 2.2.1 в [6]), то в силу леммы 1 характеристическое пространство $\widehat{V}_f$ гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Тогда из утверждения 2 следует, что аттрактор A_f и репеллер R_f разделяются 2-сферой.

[12] *Фундаментальной областью действия отображения g на X* называется замкнутое множество $D_g \subset X$, для которого существует множество $\widetilde{D}_g$ со следующими свойствами:

1) $\operatorname{cl}(\widetilde{D}_G) = D_G$;
2) $g^k(\widetilde{D}_G) \cap \widetilde{D}_G = \varnothing$ для всех $k \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$;
3) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} g^k(\widetilde{D}_g) = X$.

Достаточность. Пусть аттрактор A_f и репеллер R_f диффеоморфизма $f \in MS_0(\mathbb{S}^3)$ разделяются 2-сферой. Тогда в силу утверждения 5 неблуждающее множество диффеоморфизма f содержит седловую точку, одномерные сепаратрисы l_1, l_2 которой лежат в бассейнах узловых точек (стоков или источников) a_1, a_2 соответственно; при этом $a_1 \neq a_2$ и хотя бы одна из сепаратрис l_1, l_2 является ручной и имеет тот же период, что и соответствующий узел. Согласно утверждению 6 существует простая дуга с одной бифуркацией типа седло-узел или удвоение периода между диффеоморфизмом f и некоторым диффеоморфизмом $f' \in MS_0(\mathbb{S}^3)$, имеющим на одну седловую орбиту меньше, чем f. Согласно лемме 1 характеристическое пространство $\widehat{V}_{f'}$ гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ и в силу утверждения 2 аттрактор $A_{f'}$ и репеллер $R_{f'}$ диффеоморфизма f' разделяются 2-сферой. Продолжая процесс, мы построим искомую дугу.

5. Пример диффеоморфизма $f \in MS_0(\mathbb{S}^3)$, не принадлежащий классу I_{NS}

В действительности такой диффеоморфизм f является связной суммой двух диффеоморфизмов Пикстона, как показано на рис. 1. В силу леммы 1 и утверждения 2 для доказательства того, что он не соединяется простой дугой с диффеоморфизмом “источник-сток”, достаточно показать, что его характеристическое пространство $\widehat{V}_f$ не гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Для этого заметим, что диффеоморфизм f может быть реализован методами работы [20] из абстрактной схемы $S = (\widehat{V}, T^{\mathrm{s}}, T^{\mathrm{u}})$, имеющей следующую структуру. Пусть на многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ задан узел γ (см. рис. 9, где изображена развертка узла γ). Выберем трубчатую окрестность $V(\gamma)$ узла γ и склеим две копии многообразий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus \operatorname{int} V(\gamma)$ вдоль граничных торов в силу тождественного отображения. Полученное многообразие есть $\widehat{V}$, а границы трубчатой окрестности места склейки суть двумерные торы T^{s}, T^{u}. По построению каждый из торов не ограничивает заполненный тор в многообразии $\widehat{V}$, что в силу факта 1 означает, что многообразие $\widehat{V}$ не гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Поскольку $\widehat{V}$ гомеоморфно $\widehat{V}_f$, то утверждение доказано.

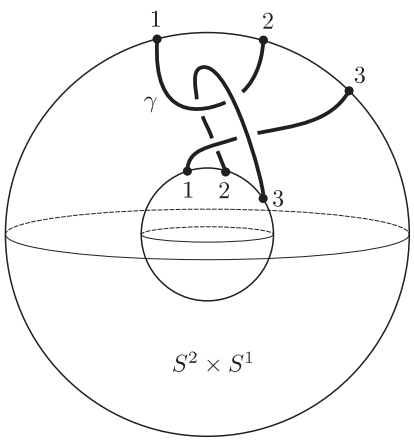

Рис. 9. Реализация диффеоморфизма f

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] J. Palis, C. C. Pugh, “Fifty problems in dynamical systems”, *Dynamical Systems – Warwick* 1974, Lecture Notes in Math., **468**, Springer-Verlag, Berlin, 1975, 345–353.

[2] S. Newhouse, M. M. Peixoto, “There is a simple arc joining any two Morse–Smale flows”, *Trois études en dynamique qualitative*, Asterisque, **31**, Soc. Math. France, Paris, 1976, 15–41.

[3] S. Matsumoto, “There are two isotopic Morse–Smale diffeomorphism which can not be joined by simple arcs”, *Invent. Math.*, **51**:1 (1979), 1–7.

[4] P. R. Blanchard, “Invariants of the NPT isotopy classes of Morse–Smale diffeomorphisms of surfaces”, *Duke Math. J.*, **47**:1 (1980), 33–46.

[5] D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.

[6] В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, РХД, Ижевск, 2011.

[7] Х. Бонатти, В. З. Гринес, В. С. Медведев, О. В. Починка, “Бифуркации диффеоморфизмов Морса–Смейла с дико вложенными сепаратрисами”, *Динамические системы и оптимизация*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Тр. МИАН, **256**, Наука, М., 2007, 54–69.

[8] C. Bonatti, V. Z. Grines, “Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3”, *J. Dynam. Control Systems*, **6**:4 (2000), 579–602.

[9] J. Palis, “Arcs of dynamical systems: bifurcations and stability”, *Dynamical Systems – Warwick* 1974, Lecture Notes in Math., **468**, Springer-Verlag, Berlin, 1975, 48–53.

[10] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub, “Invariant Manifolds”, Lecture Notes in Math., **583**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[11] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов*, Наука, М., 1982.

[12] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О. В. Починка, “Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла”, *Дифференциальные уравнения и топология. II*, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, **271**, МАИК, М., 2010, 111–133.

[13] A. Hatcher, *Notes on Basic* 3-*Manifold Topology*, `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3M.pdf`.

[14] W. D. Neumann, *Notes on Geometry and* 3-*Manifolds*, `http://www.math.columbia.edu/~neumann/preprints/budfinal.pdf`.

[15] А. Т. Фоменко, *Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы*, РХД, Ижевск, 1999.

[16] О. В. Починка, А. А. Романов, “Бифуркация удвоения периода на простой дуге, соединяющей диффеоморфизмы Пикстона”, *Журнал СВМО*, **14**:3 (2012), 74–79.

[17] М. Хирш, *Дифференциальная топология*, Мир, М., 1979.

[18] F. Waldhausen, “On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large”, *Ann. of Math.* (2), **87**:1 (1968), 56–88.

[19] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “Новые соотношения для систем Морса–Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами”, *Матем. сб.*, **194**:7 (2003), 25–56.

[20] C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pécou, “Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Topology*, **43**:2 (2004), 369–391.

В. З. Гринес
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: vgrines@yandex.ru

Поступило
20.02.2013

О. В. Починка
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru