

Об определении функции предпочтений в задаче рейтингования при отсутствии компенсаций

В. А. Калягин, В. В. Чистяков¹

1 Введение

Задача рейтингования состоит в ранжировании объектов по известным наборам их оценок. Ранжирование объектов удобно осуществлять с помощью так называемой функции предпочтений, которая определена на множестве всех возможных наборов оценок. Из двух объектов с заданными наборами оценок предпочтительнее тот, для которого функция предпочтений (ранг) имеет большее значение. Если предположить, что оценки могут компенсировать друг друга (низкая оценка по одному признаку может быть компенсирована высокой оценкой по другому признаку), то функции предпочтений задачи рейтингования можно построить используя взвешенные суммы оценок. Так, например, известные правило суммирования или усреднения оценок или правило голосования Борда носят компенсаторный характер ([2, § 4.2], [8, § 2.2]): низкие оценки можно компенсировать средними или высокими оценками.

Однако имеются ситуации, когда компенсация одних оценок другими невозможна (незнание правовых аспектов бизнеса не может быть компенсировано, например, хорошим знанием иностранного языка). В этом случае возникает нетривиальная задача ранжирования (рейтингования) объектов по имеющемуся векторному набору признаков с учетом некомпенсаторного характера оценок. Эта задача получила название задачи

¹НФ ГУ-ВШЭ, Факультет Бизнес-Информатики и Прикладной Математики.
E-mails: kalia@hse.nnov.ru (В. А. Калягин), czeslaw@mail.ru (В. В. Чистяков).

агрегирования. Задача агрегирования рассматривалась многими авторами с различных точек зрения. Классической работой в этой области является [7], в которой впервые были рассмотрены проблемы аксиоматического построения локальных правил агрегирования предпочтений и которая развивалась затем в различных направлениях (см. [1]). Модели нелокального агрегирования рассматривались в значительном числе работ, из которых упомянем [9]. В [3]–[6] предложена новая концепция — некомпенсаторное агрегирование для случая оценок с тремя возможными значениями. В частности, в [3]–[5] впервые применен аксиоматический подход для описания свойств функций предпочтений, представляющих введенное в этих работах “пороговое правило” сравнения альтернатив. Основой предложенного в [3]–[5] порогового правила является сравнение альтернатив по числу низких оценок. Ситуация, в которой определяющим фактором сравнения является наличие низких оценок, довольно часто встречается в задачах управления социальными системами. Так, при оценке качества или совершенства альтернатив наличие в альтернативе низких оценок играет большую, часто определяющую “негативную” роль в следующих ситуациях: качество знаний, качество продуктов производства, качество бытового обслуживания, проводимость электронных схем и сетей, проходимость или пропускная способность дорог и т. д.

В настоящей работе развивается аксиоматический подход к определению функции предпочтений в задаче рейтингования при отсутствии компенсаций. Мы исследуем особенности пороговых переходов в общем случае некомпенсаторного агрегирования на основе сравнения альтернатив по низким оценкам для произвольного числа оценок $m \geq 3$. Как результат мы получаем новую определяющую систему аксиом для функции

предпочтений, показываем, что нужная функция предпочтений существует и предлагаем явный эффективный способ ее вычисления.

2 Формальная постановка задачи

Предположим, что каждый объект оценивается $n \geq 2$ агентами (члены коллектива) и каждый агент выставляет объекту одну из оценок из набора $1, 2, \dots, m$, $m \geq 3$. Схематически это можно отобразить следующим образом:

$$\begin{array}{ll} \text{Множество агентов} & \text{Множество оценок} \\ N = \{1, 2, \dots, n\} \ni i & \longmapsto x_i \in M = \{1, 2, \dots, m\} \end{array}$$

Набор $x = (x_1, \dots, x_n)$ — мнение коллектива N относительно объекта — будем называть альтернативой. Множество всех альтернатив имеет вид:

$$A = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in M \text{ для всех } i \in N\}.$$

Задача агрегирования на A : полностью и непротиворечиво упорядочить A так, чтобы корректно отражалось коллективное мнение агентов из N . *Рейтингование или ранжирование на A* — это «связное» транзитивное антирефлексивное бинарное отношение W на A . Оно называется *представимым при помощи функции* $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$, если

$$\forall x, y \in A : xWy \iff \varphi(x) > \varphi(y).$$

Такая функция φ называется *функцией предпочтений*, соответствующей упорядочиванию W . Отметим, что функция предпочтений определена неоднозначно. Любая строго возрастающая функция от функции предпочтений тоже является функцией предпочтений.

Введем естественные отношения частичного порядка \succeq и \succ на A :

$$(x \succeq y) \iff (x_i \geq y_i \quad \forall i \in N),$$

$$(x \succ y) \iff (x \succeq y) \quad \text{и} \quad (\exists i \in N : x_i > y_i).$$

Очевидно, что при любом способе агрегирования (компенсаторном или нет) любая функция предпочтений сохраняет естественные отношения порядка (выбор коллектива очевиден). Так, например, из двух альтернатив $(1, 2, 1, 3, 1)$ и $(1, 3, 2, 3, 2)$ вторая предпочтительнее при любом определении предпочтений. Однако это отношение порядка не решает задачу агрегирования на A , т. к. не все альтернативы $x, y \in A$ сравнимы (частичный порядок). В частности, альтернативы $(1, 2, 1, 3, 1)$ и $(1, 1, 2, 3, 1)$ нельзя сравнить с помощью отношений \succeq и \succ .

Существует много различных способов дополнить естественный частичный порядок на множестве альтернатив до полного. В настоящей работе в качестве общей модели некомпенсаторного агрегирования рассматривается правило сравнения альтернатив по числу низких оценок, исследованное в [3]–[5] для случая $m = 3$. Для $j \in M$ обозначим через $v_j(x)$ число оценок j в $x \in A$. Ясно, что $v_1(x) + \dots + v_m(x) = n$. Обозначим через W следующее *правило сравнения двух альтернатив по числу низких оценок*: альтернатива x лучше альтернативы y (xWy), если в ней меньше самых плохих оценок ($v_1(x) < v_1(y)$). Если же число самых плохих оценок одинаково ($v_1(x) = v_1(y)$), то x лучше, чем y , если $v_2(x) < v_2(y)$, и так далее. Формально это правило формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned}
& xWy \iff \\
& v_1(x) < v_1(y) \\
& \text{или} \\
& v_1(x) = v_1(y) \text{ и } v_2(x) < v_2(y) \\
& \text{или} \\
& v_1(x) = v_1(y) \text{ и } v_2(x) = v_2(y) \text{ и } v_3(x) < v_3(y) \\
& \text{или} \\
& \dots \quad \dots \quad \dots \\
& \text{или} \\
& v_1(x) = v_1(y) \text{ и } \dots \text{ и } v_{m-2}(x) = v_{m-2}(y) \text{ и } v_{m-1}(x) < v_{m-1}(y).
\end{aligned}$$

Основной задачей настоящей работы является: описать аксиоматические свойства функций предпочтений φ для правила сравнения альтернатив по числу низких оценок W и найти их явное аналитическое представление.

3 Аксиомы функции предпочтений и явная формула

Прежде всего заметим, что согласно определению правило сравнения W безразлично к двум альтернативам x и y с одинаковым набором значений $v_j(x) = v_j(y)$, $j = 1, 2, \dots, m - 1$. Это означает, что любая функция предпочтений φ для W обладает свойством

$$\text{если } x, y \in A \text{ и } v(x) = v(y), \text{ то } \varphi(x) = \varphi(y),$$

где положено $v(x) = (v_1(x), v_2(x), \dots, v_{m-1}(x))$. Такое свойство можно интерпретировать как анонимность оценок агентов из N . Это замечание позволяет сформулировать первую аксиому функции предпочтений отношения W :

$$\text{Аксиома А1: } x, y \in A \text{ и } v(x) = v(y) \implies \varphi(x) = \varphi(y).$$

В соответствии с этой аксиомой все множество альтернатив разбивается на классы эквивалентности по правилу

$$x \sim y \iff v(x) = v(y).$$

Чтобы облегчить работу с классом эквивалентности, содержащим альтернативу x , выделим в нем “главный” представитель x^* , координаты которого упорядочены в неубывающем порядке: $x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^*$ или

$$x^* = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{v_1(x)}, \underbrace{(2, \dots, 2)}_{v_2(x)}, \dots, \underbrace{(m, \dots, m)}_{v_m(x)}.$$

Элемент x^* называется *монотонным представителем* x ; он определен однозначно. Если некоторая функция предпочтений удовлетворяет аксиоме **A1**, то любые другие ее свойства достаточно проверить на монотонных представителях классов эквивалентности.

Следующим важным свойством любого правила агрегирования является его совместимость с естественными порядками на множестве альтернатив. Можно показать, что это свойство выполнено для отношения W (несмотря на всю очевидность этого факта его доказательство нетривиально). Отсюда выводится вторая аксиома функции предпочтений

Аксиома A2: $x, y \in A$ и $x \succ y \implies \varphi(x) > \varphi(y)$.

Наиболее сложным в анализе свойств функции предпочтений является анализ “пороговых переходов” при сравнении альтернатив по числу низких оценок. Для пояснения проблемы рассмотрим пример упорядочения по правилу сравнения альтернатив по числу низких оценок W при $n = m = 4$. В этом случае число классов эквивалентности (различных монотонных представителей) равно 35. Имеем следующий порядок на множестве монотонных представителей:

$(1, 1, 1, 1)_1, (1, 1, 1, 2)_2, (1, 1, 1, 3)_3, (1, 1, 1, 4)_4,$
 $(1, 1, 2, 2)_5, (1, 1, 2, 3)_6, (1, 1, 2, 4)_7,$
 $(1, 1, 3, 3)_8, (1, 1, 3, 4)_9, (1, 1, 4, 4)_{10},$
 $(1, 2, 2, 2)_{11}, (1, 2, 2, 3)_{12}, (1, 2, 2, 4)_{13},$
 $(1, 2, 3, 3)_{14}, (1, 2, 3, 4)_{15}, (1, 2, 4, 4)_{16},$
 $(1, 3, 3, 3)_{17}, (1, 3, 3, 4)_{18}, (1, 3, 4, 4)_{19}, (1, 4, 4, 4)_{20},$
 $(2, 2, 2, 2)_{21}, (2, 2, 2, 3)_{22}, (2, 2, 2, 4)_{23},$
 $(2, 2, 3, 3)_{24}, (2, 2, 3, 4)_{25}, (2, 2, 4, 4)_{26},$
 $(2, 3, 3, 3)_{27}, (2, 3, 3, 4)_{28}, (2, 3, 4, 4)_{29}, (2, 4, 4, 4)_{30},$
 $(3, 3, 3, 3)_{31}, (3, 3, 3, 4)_{32}, (3, 3, 4, 4)_{33}, (3, 4, 4, 4)_{34}, (4, 4, 4, 4)_{35}.$

Альтернативы в каждой строке упорядочены согласно естественному порядку \succ . Переход от строки к строке осуществляется по правилу сравнения числа плохих оценок и называется пороговым переходом. Пороговые переходы происходят после альтернатив с индексами 4, 7, 10, 13, 16, 19, 23, 26, 30. Для полного описания функции предпочтений остается сформулировать аксиомы пороговых переходов. Тщательный анализ этих переходов позволяет обнаружить замечательную регулярность в хаотическом наборе переходных индексов. Это находит свое выражение в следующем наборе аксиом (формулировка дана для $m = 4$):

Аксиома А3: $x, y \in A, v_1(x) = v_1(y), v_2(x) + 1 = v_2(y) \neq n - v_1(y),$
 $v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) = n$ и $v_1(y) + v_2(y) + v_4(y) = n \implies \varphi(x) > \varphi(y).$

Аксиома А4: $x, y \in A, v_1(x) + 1 = v_1(y) \neq n, v_1(x) + v_2(x) = n$ и
 $v_1(y) + v_4(y) = n \implies \varphi(x) > \varphi(y).$

Аксиома А3 выделяет первую группу пороговых переходов (для $n = 4$ они соответствуют индексам 4, 10, 20). Аксиома А4 выделяет вторую группу пороговых переходов (для $n = 4$ они соответствуют индексам

7, 13, 16, 19, 23, 26). В общем случае $m \geq 3$ выделяется $m - 2$ вида пороговых переходов, каждый из которых описывается соответствующей аксиомой A_k , $k = 3, 4, \dots, m$. Основным математическим результатом работы является следующая

Теорема. *Функция φ на множестве альтернатив A является функцией предпочтений отношения W тогда и только тогда, когда для нее выполнены аксиомы $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_m$.*

Кроме того, построена явная функция предпочтений для правила сравнения альтернатив по числу низких оценок: функция вида

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^m C_{n-(v_1(x)+\dots+v_i(x))+m-i-1}^{m-i}, \quad x \in A,$$

удовлетворяет всем аксиомам A_1 – A_m функции предпочтений и ее значение $\varphi(x)$ совпадает с рангом альтернативы x в общей последовательности упорядоченных альтернатив $\{x^*\}$. Здесь через C_n^k обозначены биномиальные коэффициенты и положено $C_k^{k+1} = 0$ при $k = 0, 1, \dots, m-1$, и $C_{-1}^0 = 1$. Проверка выполнения аксиом для предъявленной функции предпочтений является тонкой задачей и составляет содержание отдельной публикации.

4 Заключение

В работе проведено полное теоретическое исследование функций предпочтений в задаче рейтингования для правила сравнения альтернатив по числу низких оценок. Особенностью полученных результатов является тот факт, что предложенный метод позволяет определять ранг каждой альтернативы в общей последовательности. Это дает новый способ оценки близости (или удаленности) различных альтернатив. В частности, на

основе построенной функции предпочтений может быть разработана новая методика рейтингования студентов, дополняющая существующую в ГУ-ВШЭ и построенную на компенсаторной основе. В этом случае ранг (место) студента в общем рейтинге по 8 предметам и 10 оценкам (от 1 до 10) определяется в огромном наборе альтернатив (всего 24310 позиций), что позволяет более адекватно сравнить его успехи и неудачи с другими. Интересным приложением работы может служить разработка новой методики оценки кредитного рейтинга клиентов банка, альтернативной существующей методике логистической регрессии (также построенной на компенсаторной основе). Имеются и другие приложения.

Авторы выражают благодарность Ф. Т. Алескерову за привлечение нашего внимания к обсуждаемой проблеме агрегирования и поддержку.

Работа выполнена при поддержке гранта Центр-Филиалы Государственного университета Высшая школа экономики (проект 06-06-0002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Aleskerov F. *Arrovian Aggregation Models*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [2] Алескеров Ф. Т., Хабина Э. Л., Шварц Д. А. *Бинарные отношения, графы и коллективные решения*. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2006.
- [3] Алескеров Ф. Т., Якуба В. И. *Об одном методе агрегирования ранжировок специального вида*. II-я Международ. конфер. по проблемам управления. Тез. докл. М.: ИПУ РАН, 2003, с. 116.
- [4] Алескеров Ф. Т., Якуба В. И. *Метод порогового агрегирования трехградационных ранжировок*. ДАН. 2007. Т. 413. 2. С. 181–183.

- [5] Aleskerov F., Yakuba V., Yuzbashev D. *A 'threshold aggregation' of three-graded rankings.* // Math. Social Sci. 2007. V. 53. P. 106–110.
- [6] Алескеров Ф. Т., Юзбашев Д. А., Якуба В. И. *Пороговое агрегирование трехградационных ранжировок.* Автоматика и телемеханика. 2007. 1. С. 147–152.
- [7] Arrow K. J. *Social Choice and Individual Values.* Yale University Press, 2nd ed., 1963. Перевод: Эрроу К. Дж. *Коллективный выбор и индивидуальные ценности.* М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2004.
- [8] d'Aspremont C., Gevers L. *Social welfare functionals and interpersonal comparability.* In: Handbook of Social Choice and Welfare (K. Arrow, A. Sen and K. Suzumura, eds.). Vol. 1. Elsevier, Amsterdam, 2002. P. 459–541.
- [9] Moulin H. *Axioms of Cooperative Decision Making.* Cambridge: Cambridge University Press, 1988.