КВАЗИСПРАВЕДЛИВЫЙ ДЕЛЁЖ С НЕСКОЛЬКИМИ УЧАСТНИКАМИ

А.А. Рубчинский

Международная лаборатория выбора и анализа решений НИУ «Высшая школа экономики»

и университет «Дубна», arubchinsky@yahoo.com

**1. Введение**

В середине 1990-х годов американскими учёными Брамсом и Тэйлором была предложе-на новая модель разрешения конфликтов. В этой модели конфликт состоит в разногласиях сразу по нескольким вопросам (пунктам), причём важность этих пунктов для различных участников, вообще говоря, различна. Именно эти различия позволяют предложить такой ва-риант улаживания конфликта, при котором каждый получает то, что его больше устраивает по его собственной оценке. В книге (Cohen, 1994), посвящённой переговорам, утверждается: «Успешный подход к переговорам заключается в выяснении того, что в действительности нужно противной стороне, и в доведении до её сознания того, каким образом она могла бы добиться желаемого, не мешая мне получить своё».

Предложенное уже в первых работах на эту тему формальное определение справедливо-го дележа требует одновременного выполнения условий равноценности, отсутствия зависти и эффективности. В то же время, как при наличии неделимых пунктов, так и для числа участ-ников конфликта, бóльшего двух, наличие справедливых дележей не гарантируется. Много-численные примеры этому при неделимости некоторых пунктов для двух участников приве-дены в работах Rubchinsky, 2009 и Rubchinsky, 2010, а при делимости всех пунктов для бóль-шего числа участников − в книге Brams and Taylor, 1999 и цитируемых в ней статьях Willson, 1998 и Reijnierse and Potters, 1998. В качестве выхода из такого положения в обоих случаях предлагаются различные модификации самого определения справедливого дележа. При этом «положительными» результатами являются доказательства наличия справедливых (в том или ином смысле) дележей, а также алгоритмы их нахождения.

В книге Brams and Taylor, 1999 уже относительно трёх «классических» условий спра-ведливости говорится, что выбор тех из них, которые можно отбросить, является неформаль-ным и определяемым конкретной ситуацией. В публикациях по этой теме обычно обсужда-ются и предлагаются те или иные модификации условий справедливости, а затем доказыва-ются утверждения о существовании (при рассматриваемых модификациях) справедливых де-лежей. Естественно, справедливые (в том или ином смысле) дележи, вообще говоря, могут оказаться различными. Однако множество, на котором рассматривается соответствующие оптимизационные задачи, во всех случаях является одним и тем же – множеством всех допус-тимых дележей. Определение структуры этого множества при любом числе участников и при любом распределении делимых и неделимых пунктов оказывается важным «техническим» этапом при поиске справедливых в любом смысле дележей. Поэтому анализ множества всех дележей, нахождение его характерных точек, паретовской границы и т.д., представляется важной задачей. Именно ей и посвящена настоящая работа.

Для выделения концов утверждений и доказательств используется знак ■

**2. Основные понятия и обозначения**

Введём необходимые формальные понятия и обозначения, следуя в основном изложе-нию в Rubchinsky, 2010. Предположим, что всего имеется *L* делимых и *M* неделимых пунк-тов. Занумеруем пункты так, чтобы сначала шли делимые пункты, а потом – неделимые. Слу-чаи *L*=0 (делимые пункты отсутствуют) и *M*=0 (неделимые пункты отсутствуют) не исключа-ются. Число участников обозначим через *m*.

Сами участники независимо друг от друга определяют числа *aij* – относительные важ-ности *i*-го пункта для *j*-го участника, *i*=1, ..., *L*+*M*; *j*=1, ..., *m*. Матрица *A*=(*aij*) называется мат-рицей важности. Предполагается, что эти важности нормированы, в том смысле, что сумма важностей является одной и той же для всех участников, т.е.

$\sum\_{i=1}^{L}a\_{ij}$ + $\sum\_{i=L+1}^{L+M}a\_{ij}$=*D* (*j*=1, ...,*m*). (1)

Обычно считается, что число *D* = 100, что позволяет интерпретировать важность *aij* как про-цент значимости *i*-го пункта для *j*-го участника. Число *D* и значимости *aij*, предполагаются целыми числами.

Каждый делёж *x* может быть представлен в виде пары 〈*x*,*σ*〉, где матрица *x* = (*xij*) (*i*=1, ..., *L*; *j*=1, ..., *m*), матрица *σ*=(*σij*) (*i*=1, ..., *M*; *j*=1, ..., *m*). Для всех элементов матрицы *x* выполнено неравенство 0≤*xij*≤1 (*xij* есть доля *i*-го пункта, доставшаяся *j*-му участнику), а для всех элемен-тов матрицы *σ* выполнено *σij*{0,1} (*σij*=1 означает, что (*i*+*L*)-ый пункт целиком достался *j*-му участнику). Для всех строк матрицы *x* выполнено равенство: $\sum\_{j=1}^{m}x\_{ij}$=1 (*i*=1, ..., *L*), а для всех строк матрицы *σ* выполнено равенство $\sum\_{j=1}^{m}σ\_{ij}$=1 (*i*=1, ..., *M*). Для любого дележа 〈*x*,*σ*〉 поло-жим

$g\_{j}^{d}$(*x*)=$\sum\_{i=1}^{L}a\_{ij}x\_{ij}$(*j*=1, ...,*m*), (2a)

$g\_{j}^{w}$(*σ*)=$\sum\_{i=1}^{M}a\_{L+i,j}σ\_{ij}$(*j*=1, ...,*m*), (2b)

*gj*(*x*,*σ*) =$g\_{j}^{d}$(*x*)+$g\_{j}^{w}$(*σ*)(*j*=1, ..., *m*). (3)

Формулы (2), (3) означают, что общий доход любого участника является суммой двух слагае-мых – дохода $g\_{j}^{d}$(*x*) от делимых пунктов и дохода $g\_{j}^{w}$(*σ*) от неделимых пунктов. Переходя от индивидуальных доходов к векторным, введём в рассмотрение векторы $g^{d}$(*y*)= ($g\_{1}^{d}$(*y*), … , $g\_{m}^{d}$(*y*)), $g^{w}$(*σ*)=($g\_{1}^{w}$(σ), …,$g\_{m}^{w}$(*σ*)), *g*(*x*,*σ*)=(*g*1(*x*,*σ*), …, *gm*(*x*,*σ*)), определяющие доходы всех учас-тников от делимых и неделимых пунктов. Переходя от доходов, соответствующих конкрет-ным дележам 〈*x*,*σ*〉, к множеству всех дележей *Z*, положим *Gd***=**{*gd*(*x*)**|**〈*x*,*σ*〉$ϵ$*Z*}, *Gw***=** {*gw*(*σ*)**|**〈*x*,*σ*〉$ϵ$ *Z*}, *G*={*g*(*x*,*σ*)**|**〈*x*,*σ*〉$ϵ$*Z*}. Множество *G* представляет собой множество всех возможных вектор-ных доходов при всех возможных дележах 〈*x*,*σ*〉$ϵ$*Z*. Оно называется ***множеством достижи-мости***, поскольку каждый векторный доход *g*$ϵ$*G* может быть получен как результат некото-рого дележа. По построению, множество достижимости *G* является образом множества всех платежей *Z* при линейном отображении, определяемом формулами (2), (3).

Учитывая, что в любом дележе распределение любого пункта между участниками мо-жет быть выбрано независимо от распределений других пунктов, получаем важное равенство

*G*=*Gd***+***Gw*, где *G* является множеством достижимости,

**3. Модифицированные условия справедливости**

**иоптимизационные постановки задач поиска справедливых дележей**

Напомним содержательно важные свойства дележей. Эти свойства реально относятся не к исходным дележам, а к соответствующим им векторным доходам. Именно в этих терминах они и будут формулироваться, а сам исходный делёж 〈*x*,*σ*〉, определяющий доход *g*(*x*,*σ*), будет в большинстве формул опускаться. Доход *g*$\in $*G* называется ***пропорциональным***, если

*gj* ≥ *D* **⁄** *m* (*j* = 1, ..., *m*), (4) т.е. каждый из *m* участников получает не менее *m*-ой части от максимально возможной сум-мы в *D* баллов по своей собственной оценке;

***равноценным***, если

*gp* = *gq* (*p*, *q*=1, ..., *m*), (5)

т.е. все получают поровну по своим собственным оценкам;

***эффективным***, если

*g*$ϵ$*GP*, (6)

т.е. вектор *g* недоминируем по Парето никаким другим вектором *h*; это означает, что если до-ход *hi* у некоторого участника больше, чем доход *gi*, то какой-то другой участник обязатель-но получит меньше;

***свободным от зависти***, если для любых *j*, *p* = 1, ..., *m*, *j* ≠ *p*

*gj*≥ $\sum\_{i=1}^{L}a\_{ij}x\_{ip}$+ $\sum\_{i=1}^{M}a\_{L+i,j}σ\_{ip}$, (7)

т.е. доход *j*-го участника по его собственной оценке не может быть меньше дохода любого другого участника по оценке того же *j*-го участника (здесь компоненты дележа 〈*x*,*σ*〉 относят-ся к *p*-ому участнику).

Остановимся на формуле (7) подробнее. В отличие от предшествующих формул (4)–(6), в неё компоненты дележа 〈*x*,*σ*〉 входят в явном виде. Однако в пространстве доходов *m*×(*m*–1) линейных неравенств (7) определяют ровно столько же линейных неравенств

(*αjp*, *g*)≥*βjp* (*j*, *p*=1, ..., *m*, *j* ≠*p*) (8)

относительно переменных *gj* (*j*=1,...,*m*), причём коэффициенты неравенств – компоненты век-торов *αjp* – и их правые части *βjp* выражаются линейно через элементы исходной матрицы важностей *a* средствами стандартной линейной алгебры.

Таким образом, «классические» содержательные свойства дележей формулируются в виде формальных условий на доходы в линейном евклидовом пространстве *Em* размерности *m*. Пропорциональность следует из отсутствия зависти, так что можно ограничиться тремя свойсвами.

Делёж называется ***справедливым***, если соответствующий ему доход одновременно рав-ноценен, эффективен и свободен от зависти. В книге Brams and Taylor, 1996 рассмотрены справедливые дележи при делимости всех пунктов и числе участников, равным двум. Они су-ществуют для любой матрицы важности *А* и легко находятся предложенным авторами мето-дом «подстраивающегося победителя». Однако при трёх участниках этот метод неприменим и (как уже указывалось) справедливые дележи могут отсутствовать.

В разделе «Распространение на троих и более участников» в 5-ой главе книги Brams and Taylor, 1999 рассмотрены три варианта отказа от одного из трёх «классических» условий справедливости и установлено наличие решения при выполнении любых двух условий.

Приведём шесть модифицированных постановок задач поиска справедливого (в том или ином смысле) дележа в виде задач оптимизации на множестве достижимости *G*. Это воз-можно сделать именно потому, что основные свойства дележей представлены как свойства соответствующих им доходов (см. (4), (5), (6) и (8)).

1. Справедливым называется делёж, обладающий свойствами равноценности и эффек-тивности. В силу этих свойств все такие дележи максимизируют доход одного участника. Для поиска справедливых (в этом смысле) дележей можно решать задачу оптимизации 1:

*g*1→ $max\_{g\in G}$

при условиях

*gj*=*g*1 (*j*=2, ..., *m*),

(*g*1, …, *gm*) $\in $*GP* (паретовской границе множества *G*).

В случае делимости всех пунктов (*M*=0) доказательство существования решений задачи 1 и метод их нахождения приведены в работе Willson, 1998.

2. Справедливым называется делёж, обладающий свойствами эффективности и отсутст-вия зависти. Такую задачу можно рассматривать как задачу оптимизации 2:

max*jgj*− min*jgj*→$min\_{g\in G}$

при условиях

(*g*1, …, *gm*)$\in $*GP*,

(*αjp*,*g*)≥*βjp* (*j*, *p*=1, ..., *m*, *j*≠*p*).

В случае делимости всех пунктов (*M*=0) доказательство существования решений задачи 2 и метод их нахождения приведены в статье Reijnierse and Potters, 1998.

3. Справедливым называется делёж, обладающий свойствами равноценности и отсутст-вия зависти. Такую задачу можно рассматривать как задачу оптимизации 3:

*g*1→$max\_{g\in G}$

при условиях

*gj*=*g*1(*j*=2, ..., *m*),

(*αjp*,*g*)≥*βjp* (*j*, *p*=1, ..., *m*, *j*≠*p*).

В случае делимости всех пунктов (*M*=0) доказательство существования решений задачи 3 и метод их нахождения приведены в разделе «Распространение на троих и более участников» в 5-ой главе книги Brams and Taylor, 1999.

 Заметим, что при отказе от условия делимости всех пунктов существование решений задач 1 – 3 не гарантируется. Однако во всех случаях условия задачи оптимизации совпадают с требуемыми свойствами, поэтому все справедливые (в том или ином смысле) дележи с гарантией совпадают с некоторыми точками из множества достижимости, определяемыми указанными условиями.

4. Справедливым называется делёж, обладающий свойством эффективности и максими-зирующий выражение min*jgj* на паретовской границе *GP* множестве достижимости *G*. Такая задача уже сформулирована как задача оптимизации (задача оптимизации 4):

min*jgj*→$max\_{g\in G}$

при условии

(*g*1, …, *gm*)$\in $*GP*.

5. Справедливым называется делёж, обладающий свойством эффективности и миними-зирующий выражение max*jgj*−min*jgj*на паретовской границе *GP* множестве достижимости *G*. Такая задача уже сформулирована как задача оптимизации (задача оптимизации 5):

(max*jgj*−min*jgj*)→$min\_{g\in G}$

при условии

(*g*1, …, *gm*)$\in $*GP*.

6. Справедливым называется делёж, обладающий свойством равноценности и максими-зирующий выражение *g*1 на множестве достижимости *G*. Такая задача уже сформулирована как задача оптимизации (задача оптимизации 6):

*g*1→$max\_{g\in G}$

при условиях

*gj*=*g*1 (*j*=2, ..., *m*).

В работе Rubchinsky, 2009 при *m*=2 установлено существования дележей с требуемыми свойствами в задачах 4 и 5 и показано, что в задаче 6 их существование не гарантировано.

Рассмотрим теперь целевые функции и условия во всех 6-и приведённых задачах опти-мизации совместно. Целевые функции имеют один из следующих трёх видов: *g*1, max*jgj*− min*jgj*, min*jgj*. Условия имеют один из следующих трёх видов: *gj*=*g*1 (*j*=2, ..., *m*), (*αjp*,*g*)≥*βjp* (*j*, *p*=1, ..., *m*, *j*≠*p*), (*g*1, …, *gm*)$\in $*GP* (паретовской границе множества *G*).

Заметим, что все данные целевые функции являются линейными на множествах

*Uπ* = {*g*$\in $*Em***|** $g\_{i\_{1}}$≤ $g\_{i\_{2}}$ ≤ … ≤ $g\_{i\_{m}}$,(*i*1, *i*2, …, *im*) = *π*}. (9)

Множества *Uπ* являются выпуклыми многогранными конусами, так как вместе с любой точ-кой *g*$\in $*Uπ* для любого неотрицательного числа *λ* точка *λg*$\in $*Uπ*. Общий подход к решению по-ставленных в этом разделе оптимизационных задач рассматривается в следующем разделе.

**4. Построение универсального множества для задач оптимизации 1 – 6**

Формула *G*=*Gd***+***Gw* из раздела 2 даёт достаточно грубое представление о структуре мно-жества достижимости, но всё же позволяет получить следующее

**Утверждение 1.** Множество достижимости *G* является объединением выпуклых много-гранников, полученных из одного и того же выпуклого многогранника *Gd* параллельным пе-реносом на векторы, образующие конечное множество *Gw*■

Все рассмотренные в предыдущем разделе задачи оптимизации 1 – 6 являются задачами оптимизации на данном множестве *G* указанного типа. По построению, множество *Gw* являет-ся конечным множеством векторов из *Em*: *Gw*={$g\_{1}^{w}$, …, $g\_{T}^{w}$}. Обозначим через *G*(*i*,*π*) пересече-ние множества *Gd*+$g\_{i}^{w}$ с множеством *Uπ*, определённым формулой (9), и с множествами, опре-деляемыми условиями вида (5) и (8). Все пересекающиеся множества являются выпуклыми многогранниками, в силу чего их пересечение *G*(*i*,*π*) также является выпуклым многогранни-ком. По построению, каждый из этих многогранников содержится в одном из множеств *Uπ*. В конце раздела 3 утверждалось, что на множествах *Uπ* все рассматриваемые целевые функции линейны. Следовательно, то же самое верно для содержащихся в них выпуклых многогран-ников *G*(*i*,*π*). Обозначим через *V*(*i*,*π*) конечное множество вершин *G*(*i*,*π*). Напомним, что ре-шение линейной задачи оптимизации на выпуклом многограннике совпадает с одной из его вершин. Поэтому проведёнными рассуждениями доказано следующее

**Утверждение 2.** Решение любой из рассмотренных в разделе 3 задач справедливого дележа, представленных в виде задач оптимизации 1 – 6, содержится в конечном множестве

*V*(*А*) = $\bigcup\_{π}^{}\bigcup\_{i}^{T}V(i,π)$■ (10)

Таким образом, *V*(*А*) – это универсальное конечное множество, зависящее только от са-мой задачи, но не от используемого определения справедливости. При этом оно всегда содер-жит точки (доходы), соответствующие справедливым (в различном смысле) дележам.

Вычислительная сложность предложенной процедуры построения универсального мно-жества приближённо определяется следующим образом. В рассматриваемой модели есть три параметра, влияющие на количество операций: число участников *m*, число пунктов *n* = *L* + *M* и число *D*, равное сумме важностей всех пунктов. Естественно, что перебор присутствует. Но экспоненциальная оценка есть только по параметру *m*. В частности, один алгоритм связан с необходимостью просмотра всех перестановок длины *m*.Однако ориентируясь на реальные ситуации, можно считать, что число участников не превосходит 5-6, поэтому перебор по *m* весьма невелик. Построение множеств *Gd* и *Gw* имеет (очень грубую) степенную оценку*Dm*-1. Наконец, число пунктов *n* вообще не входит в оценки: во всех случаях, в которых рассматриваются делимые пункты, неделимые пункты или все пункты, число операций оценивается предыдущими оценками, зависящими от *m* и *D*. Заметим, что подавляющее большинство множеств *G*(*i*, *π*) оказываются пустыми, что также сильно влияет (в сторону уменьшения) на время выполнения алгоритмов.

**Заключение**

В работе рассмотрена наиболее общая ситуация в рамках модели справедливого дележа, предложенной Брамсом и Тэйлором и развитая в работах других учёных. Именно, предпола-гается любое число участников при наличии как делимых, так и неделимых пунктов. При этих условиях установлена общая структура множества достижимости и разработан алго-ритм, позволяющий найти конечное множество в пространстве доходов, названное универ-сальным множеством. Это название определяется тем, что такое множество содержит реше-ния задачи о справедливом дележе для самых разнообразных представлениях о справедливос-ти, во всяком случае – для всех, упомянутых к настоящему моменту в литературе, и любых их комбинациях.

Дальнейшее развитие связано с двумя основными направлениями. Первое направление находится в рамках той же модели Брамса-Тэйлора. Представляется целесообразным:

- Разработать диалоговую программную систему, реализующую предложенные алгорит-мы, и провести на ней серьёзные вычислительные эксперименты.

- Рассмотреть важный вопрос о нахождении таких решений, которые обеспечивали бы минимальное число реальных актов деления. В частности, при отсутствии неделимых пунктов число актов деления не превышает *m*−1, что установлено в уже цитированной работе Willson, 1998. Однако при наличии неделимых пунктов этот вопрос ранее не ставился.

- Рассмотреть реальные ситуации, в которых применение подхода, основанного на спра-ведливых дележах, представляется полезным и перспективным. В частности, возможно ис-пользование этих идей при распределении финансирования на различные цели между регио-нами.

Второе направление связано с модификациями самой модели. Основная цель возмож-ных модификаций – уменьшение требований к информации, запрашиваемой у участников, с одновременной возможностью получения содержательно понятных и глубоких результатов. Это требует дальнейшего анализа ряда конфликтных ситуаций и поиска адекватных им моде-лей распределительного типа, возможно, за счёт учёта многокритериальности при оценке участниками различных пунктов.

Автор благодарит Международную лабораторию анализа и выбора решений за частич-ную поддержку (проекты ЦФИ 53.0 и 55.0).

**Литература**

1. Cohen, Herb. You Can Negotiate Anything. ZebraBooks, 1994 (русский перевод: Герб Коэн. Обо всём можно договориться. М.: АСТ, 2010).

2. Brams, S.J., Taylor, A.D. Fair Division. Cambridge University Press. 1996.

3. Brams, S.J., Taylor, A.D. The Win-Win Solution. W.W. Norton & Company, 1999 (русский перевод: С.Д. Брамс, А.Д. Тэйлор. Делим по справедливости. М.: СИНТЕГ, 2002).

4. Rubchinsky A. Fair Division with Divisible and Indivisible Items: Working paper WP7/2009/05. Moscow: NRU Higher School of Economics, 2009, 44 p.

5. Rubchinsky A. Brams-Taylor Model of Fair Division for Divisible and Indivisible Items.Mathe-matical Social Science, vol. 60, Issue 1, 2010, pp. 1-14.

6. Willson, S.J. Fair Division Using Linear Programming. Preprint, Department of Mathematics, Iowa State University, 1998.

7. Reijnierse, J.H., Potters, J.A.M. On Finding an Envy-Free Pareto-Optimal Decision. Mathemati-cal Programming 83, No 2, 1998, pp. 291-311.