Оглавление

Введение

Изучение тех или иных классов графов уже достаточно давно составляет содержание значительной части работ по теории графов и ее приложениям. Вместе с тем, с некоторого времени наметился устойчивый интерес к исследованию не отдельных классов графов, а именно целых семейств классов графов, обладающих некоторым общим свойством [3, 22]. Одной из фундаментальных научных проблем, на решение которых направлена часть этих работ и сама постановка которых выводит на такой высокий уровень общности, является задача анализа сложности задач на графах.

Развитие теории сложности вычислений способствовало формированию фактических стандартов эффективной разрешимости и «труднорешаемости». В соответствии с этой концепцией под быстрой (эффективной) разрешимостью данной массовой задачи понимается возможность ее решения на детерминированной машине Тьюринга за время, ограниченное полиномом от длины входных данных. В то же время, имеется ряд «неподдающихся» (называемых в теории сложности NP-полными) задач, для которых в настоящее время не получено быстрых алгоритмов. Справедливость известной гипотезы $P \neq NP$ означает, что таких алгоритмов вообще не существует. Некоторые результаты данной книги и цитируемых в ней работ также справедливы при выполнении этого неравенства. Это условие не будет включаться явно в формулировки соответствующих утверждений.

Многие задачи теории графов, представляющие определенный теоретический и практический интерес, являются NP-полными. Одним из возможных путей преодоления алгоритмической сложности этих задач является сужение — наложение дополнительных ограничений на рассматриваемый класс графов. Иногда учет этого обстоятельства, т.е. принадлежности только определенной части класса всех графов, приводит к созданию эффективных алгоритмов. В других случаях удается доказать NP-полноту задачи для графов из того или иного класса. Вместе с тем, рассмотрение именно представительных семейств классов графов, а не отдельных классов, придает процессу поиска «простых» и «сложных» классов определенную систематичность и позволяет ставить более общие задачи, а также надеяться на обнаружение явлений общего характера. Так, переходя к рассмотрению какого-либо такого семейства, можно ставить вопрос о нащупывании линии раздела между его «простыми» и «сложными» частями.

В настоящей монографии содержатся результаты исследования наследственных классов графов, нацеленного на решение указанной задачи демаркации. Наследственные классы, т.е. классы, замкнутые относительно изоморфизма и удаления вершин, образуют достаточно представительную совокупность — как показано в [3], это семейство является континуальным. С другой стороны, данные классы графов (и только они) допускают описание при помощи множества запрещенных порожденных подграфов.

Повышенный интерес именно к таким классам, особенно к тем из них, которые задаются конечным множеством запрещенных порожденных подграфов (называемых конечно определенными), не случаен. Так, в работе [24] было введено понятие граничного класса графов и обоснована его полезность для анализа сложности задач на графах в семействе конечно определенных классов графов. Именно, любой такой класс является «сложным» для данной задачи тогда и только тогда, когда он содержит некоторый граничный для этой задачи класс. Таким образом, выявление граничных классов графов представляет определенный интерес.

В работе [24] рассматривалась задача о независимом множестве, а также класс $\mathbf{T}$ — класс всех графов, у которых каждая компонента связности является деревом с не более чем 3 листьями. Там же было установлено, что этот класс является граничным для задачи о независимом множестве. Исследования по нахождению граничных классов были продолжены в статьях [25, 26], в которых помимо класса $\mathbf{T}$ рассматривался еще и класс $\mathbf{D}$, а также задачи, для которых эти классы являются граничными. Класс $\mathbf{D}$ состоит из графов, каждая компонента связности которых является либо простым путем, либо получается отождествлением всех вершин треугольника с тремя концевыми вершинами трех простых путей.

В первой главе этой книги исследуются общие свойства задач на графах, для которых два указанных класса являются граничными. Внимание именно к этому вопросу обусловлено тем обстоятельством, что к настоящему времени доказана граничность класса $\mathbf{T}$ для 9 задач, а класса $\mathbf{D}$ для 5 задач. В данной главе понятие граничного класса уточняется и доказывается критерий граничности произвольного класса графов. Здесь также формулируются условия граничности двух рассматриваемых классов графов и на их основе к известным случаям граничности этих классов добавляется определенное количество новых. Большинство из данных примеров принадлежат списку Гэри и Джонсона [7]. В первой главе решается вопрос о мощности множества задач на графах, для которых классы $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$ — граничные одновременно. Именно, конструктивным образом доказывается, что оно несчетно. Наконец, указываются первые примеры задач, для которых классы, состоящие из графов, дополнительных к графам из $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$, являются граничными. Результаты первой главы опубликованы в работах [5, 12, 16, 20].

До сих пор неизвестно, существуют ли граничные классы для задачи о независимом множестве, отличные от класса $\mathbf{T}$. Вопрос о существовании таких классов эквивалентен вопросу о существовании такого графа $G \in \mathbf{T}$, что эта задача в наследственном классе графов, определяемом запрещенным порожденным подграфом G, не является полиномиально разрешимой [24]. О трудности проблемы говорит тот факт, что в настоящее время не известен сложностной статус указанного класса даже для случая $G = P_5$.

Вопросу о единственности класса $\mathbf{T}$ в семействе наследственных подклассов класса планарных графов, как граничного для задачи о независимом множестве, посвящена вторая глава. В этой главе вводится понятие относительного граничного класса, обобщающее понятие просто граничного класса. Класс $\mathbf{T}$ является относительным граничным в рассматриваемом случае. Единственность класса $\mathbf{T}$ эквивалентна доказательству того, что для любого $G \in \mathbf{T}$ задача о независимом множестве в классе планарных графов, не содержащих порожденного подграфа G, полиномиально разрешима. Хотя и здесь этого доказать не удается, имеется более значительный прогресс к достижению намеченной цели, чем в общем случае. Именно, во второй главе устанавливается полиномиальная разрешимость рассматриваемой задачи для бесконечного количества различных классов графов исследуемого типа. Эти результаты опубликованы в [4, 10, 11, 13, 27, 28].

Третья глава книги посвящена количественным вопросам теории граничных классов. Повышенный интерес к этой проблематике вызван выдвинутой в работе [25] гипотезой о существовании задач на графах с бесконечным множеством граничных классов. Первую часть данной главы составляет конструктивное доказательство этого предположения. Именно, для каждой из задач о 3-раскраске (вершинного и реберного варианта) указывается континуальная совокупность граничных классов графов. Там же показывается, что задачи на графах с множеством граничных классов такой мощности образуют несчетное множество. Полученные здесь результаты позволили существенно расширить совокупность классов графов, граничных хотя бы для одной задачи. Ранее она состояла из нескольких классов.

Вторая часть, в основном, посвящена обзору известных случаев полного описания множества относительных граничных классов. Эти сведения могут быть полезными при оценках мощности множества просто граничных классов или при выдвижении предположений о его строении. Данная часть завершается полным указанием рассматриваемой совокупности для ряда новых случаев. Полученные в третьей главе результаты опубликованы в [14, 15, 17, 19, 20].

Наследственный класс графов, определяемый бесконечным минимальным множеством запрещенных порожденных подграфов и содержащий некоторый граничный класс, не обязательно будет «сложным». Таким образом, для решения задачи демаркации в решетке всех наследственных классов необходимо помимо граничных опираться и на другие «экстремальные» классы. Естественными кандидатами в их число являются максимальные «простые» и минимальные «сложные» классы, т.е. тупиковые классы графов соответствующей сложности из рассматриваемой решетки. Использование понятия максимального «простого» класса графов оказывается безрезультатным. Так, в работе [24] было установлено, что ни один «простой» класс не является максимальным «простым» (правда, в [24] это утверждается только про задачу о независимом множестве, но все рассуждения из данной работы легко переносятся и на общий случай).

Четвертая глава монографии нацелена на исследование существования минимальных «сложных» классов. Основополагающим мотивом обращения к данному вопросу являлось отсутствие какой-либо информации о таких классах графов. В первой части главы рассматривается задача распознавания принадлежности наследственному классу графов и показывается, что для любой такой NP-полной задачи нет ни одного минимального «сложного» класса. В частности, это верно при любом фиксированном $k \geq 3$ для обеих задач о k-раскраске. Вторая часть посвящена доказательству минимальности некоторых классов для задач о списковом ранжировании. Данные классы графов для этих задач являются еще и граничными. Тем самым получен ответ на выдвинутое в работе [25] предположение о существовании «сложных» граничных классов, поскольку все известные до этого граничные классы являлись «простыми». Результаты, полученные в четвертой главе, опубликованы в работах [18, 21].

Автор монографии выражает глубокую и искреннюю признательность издательству Lambert Academic Publishing за неоценимую помощь при публикации данного издания.

Глава 1

Критерий граничности и его применения

1.1 Терминология и обозначения

В данном разделе вводится ряд понятий и обозначений, которые будут использоваться на протяжении этой работы. Все основные понятия теории графов, которые в этой и последующих главах не приводятся, можно найти, например, в [8, 9, 23].

1.1.1 Множества, графы и подграфы

Все рассматриваемые в книге графы являются абстрактными и обыкновенными одновременно, т.е. конечными непомеченными неориентированными графами без петель и кратных ребер. Множество вершин и множество ребер графа G будем обозначать через V (или $V(G)$) и E (или $E(G)$) соответственно.

Для некоторых специальных графов используются следующие обозначения (n — число вершин):

- P_n — простой путь,
- C_n — простой цикл,
- K_n — полный граф,
- $K_{p,q}$ — полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и q вершинами в другой доле,
- $K_4 - e$ — граф, получаемый из K_4 удалением одного (произвольного) ребра.

Через $\overline{G}$ обозначается граф, дополнительный к G. Объединение графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин обозначается через $G_1 \oplus G_2$. Граф kG изоморфен графу $\underbrace{G \oplus G \oplus \ldots \oplus G}_{\text{k слагаемых}}$. К примеру, граф $3C_4$ имеет три компоненты связности, каждая из которых изоморфна циклу длины 4.

Графом ребер графа G (обозначение $L(G)$) называется такой граф, множество вершин которого находится во взаимно однозначном соответствии с множеством ребер графа G и любые две вершины $L(G)$ являются смежными тогда и только тогда, когда в G соответствующие им ребра имеют общую вершину.

Граф называется *реберным*, если он изоморфен графу ребер некоторого графа. Например, граф K_5 является реберным графом, т.к. он изоморфен графу $L(K_{1,5})$. Граф называется *кубическим*, если степени всех его вершин равны 3.

Мостом B_k называется граф, получаемый соединением вершин степени 2 двух копий графа P_3 простым путем длины k. *Гантель* H_k — граф, получаемый соединением двух вершин из разных экземпляров графа K_3 простым путем длины k. Очевидно, что при любом натуральном k выполнено соотношение $H_k = L(B_{k+1})$. *Триодом* $T_{i,j,k}$ называется дерево, имеющее одну вершину степени 3 и ровно три листа, находящихся от вершины степени 3 на расстояниях i, j, k соответственно. Граф $D_{i,j,k}$ является графом ребер графа $T_{i+1,j+1,k+1}$.

Граф $G' = (V', E')$ является *подграфом* графа $G = (V, E)$, если выполнены включения $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. Подграф некоторого графа называется *порожденным*, если любые две вершины подграфа смежны тогда и только тогда, когда эти вершины являются смежными в исходном графе. Таким образом, любой подграф получается из графа удалением вершин и ребер, а порожденный подграф удалением только вершин (имея в виду, что операция удаления вершины подразумевает удаление самой вершины и инцидентных ей ребер). Подграф графа G, порожденный множеством вершин $U \subseteq V(G)$, будем обозначать через $G[U]$.

Термин «максимальное множество» («максимальный граф») применительно к множествам (или графам) с каким-либо свойством всюду означает максимальное по включению множество (или максимальный по включению граф) с этим свойством. Термин «наибольшее множество» применительно к множествам с каким-либо свойством всюду означает множество наибольшей мощности с этим свойством. Понятия «минимальное множество» и «наименьшее множество» определяются по аналогии.

1.1.2 Множества вершин и метрические характеристики

В работе приняты следующие обозначения: $N(x)$ — окрестность вершины x; $N[x] = N(x) \cup \{x\}$ — замкнутая окрестность вершины x; $N_2(a)$ — множество вершин, находящихся на расстоянии 2 от вершины a; $N(a, b)$ — множество вершин, смежных с вершинами a и b одновременно; $d(x, y)$ — расстояние между вершинами x и y; $diam(G)$ — диаметр графа G.

1.1.3 Классы графов

Класс графов $\mathbf{X}$ называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин и *сильно наследственным*, если он замкнут как относительно удаления вершин, так и относительно удаления ребер. Хорошо известно, что любой наследственный класс $\mathbf{X}$ может быть задан множеством своих запрещенных порожденных подграфов $\mathbf{S}$. При этом принята запись $\mathbf{X} = Free(\mathbf{S})$. Для наследственного класса $\mathbf{X}$ через $Forb(\mathbf{X})$ обозначается минимальное множество запрещенных порожденных подграфов. Для любого наследственного класса это множество определяется единственным образом. Если $Forb(\mathbf{X})$ конечно, то класс $\mathbf{X}$ называется *конечно определенным.*

Рассмотрим несколько классических примеров наследственных классов графов, некоторые из которых играют заметную роль в дальнейшем изложении:

- **Planar** — класс планарных графов. Теорема Понтрягина-Куратовского, полностью характеризующая множество $Forb(\mathbf{Planar})$ как класс графов, гомеоморфных графам K_5 и $K_{3,3}$, является примером описания через запрещенные подграфы класса графов, изначально определенного иначе.

- **Bipartite** — класс двудольных графов. Теорема Кенига полностью описывает множество $Forb(\mathbf{Bipartite})$, как множество всех простых циклов нечетной длины.

- **Perfect** — класс *совершенных* графов, т.е. класс графов, в которых для каждого порожденного подграфа G найдутся такие порожденные подграфы K_s и $\overline{K_t}$ подграфа G, что $st \geq |V(G)|$. Это пример наследственного класса графов, для которого задача нахождения минимального множества запрещенных порожденных подграфов оказалась трудной. Данная задача была недавно решена и было показано, что $Forb(\mathbf{Perfect})$ совпадает с множеством $\{C_{2k+1}, \overline{C_{2k+1}}, k > 1\}$ [32].

- **TO** — класс транзитивно ориентируемых графов. Граф называется *транзитивно ориентируемым*, если после ориентирования ребер он становится изоморфным графу некоторого транзитивного отношения. Класс **TO** является собственным подклассом класса совершенных графов. Но, в отличие от класса **Perfect**, задача определения множества $Forb(\mathbf{TO})$ оказалась более простой. Это бесконечное множество было полностью описано в [38].

- $\mathbf{Deg}(d)$ — класс всех графов, степени вершин которых не превосходят d. Ясно, что для любого d множество $Forb(\mathbf{Deg}(d))$ содержится в множестве графов, у которых число вершин не превосходит $d+2$ и хотя бы одна вершина имеет степень, равную $d+1$. Таким образом, для любого d множество $Forb(\mathbf{Deg}(d))$ конечно.

- **Line** — класс всех реберных графов. Минимальное множество запрещенных порожденных подграфов для этого класса известно — оно полностью описывается при доказательстве теоремы 8.4 монографии [23] и состоит в точности из 9 графов.

Из шести приведенных примеров наследственных классов только два последних являются конечно определенными классами.

С произвольным классом $\mathbf{X}$ связаны следующие обозначения классов графов:

1. $L(\mathbf{X})$ — множество графов, изоморфных графам ребер графов класса $\mathbf{X}$.

2. $\mathbf{X}^+$ — множество графов, каждая компонента связности которых принадлежит классу $\mathbf{X}$.

3. $\mathbf{X}^c$ — множество связных графов, принадлежащих классу $\mathbf{X}$.

4. $[\mathbf{X}]$ — *наследственное замыкание класса* $\mathbf{X}$ множество графов, изоморфных порожденным подграфам графов из $\mathbf{X}$.

5. $co(\mathbf{X})$ — множество графов, являющихся дополнительными к графам из $\mathbf{X}$.

1.2 П-граничные классы графов

К настоящему времени накоплено огромное количество результатов о полиномиальной разрешимости и о NP-полноте разнообразных задач на графах во многих классах графов. Методы получения такого рода результатов могут быть самими разнообразными, но можно выделить два распространенных подхода:

1. Поиск более широких «простых» классов, объемлющих ранее известные.

2. Поиск NP-полных сужений для известных «сложных» случаев.

При рассмотрении целых семейств классов графов можно поставить целью выявление пределов, до которых возможны расширения полиномиальной сложности и сужения с «противоположным» сложностным статусом. Рассмотрение именно представительных семейств придает процессу поиска указанной границы определенную систематичность и позволяет надеяться на обнаружение фактов общего характера. Некоторые полученные и цитируемые в книге утверждения эти надежды в какой-то мере оправдывают.

Если графы из заданного семейства образуют решетку, то естественным подходом при решении задачи демаркации является поиск максимальных «простых» и минимальных «сложных» элементов решетки. Вопрос о таких максимальных элементах в семействе наследственных классов графов для классической задачи о независимом множестве исследовался В. Е. Алексеевым [24]. Напомним, что *независимым множеством* в графе называется непустое множество попарно несмежных вершин. Задача о независимом множестве (задача НМ) состоит в нахождении для данного графа наибольшего независимого множества.

Для задачи НМ интуитивные понятия «простого» и «сложного» класса в работе [24] формализуются следующим образом. Наследственный класс графов называется НМ-*сложным*, если задача о независимом множестве NP-полна для графов из этого класса, и НМ-*простым*, если она решается за полиномиальное время. При этом не предполагается, что есть эффективный (полиномиальный) алгоритм решения задачи распознавания принадлежности к классу и даже того, что эта задача алгоритмически разрешима. Считается, что алгоритм получает на вход только графы из данного класса и на выходе выдает их наибольшие НМ.

В. Е. Алексеев показал [24], что для задачи НМ не существует ни одного максимального НМ-простого класса. На самом деле его рассуждения верны для любой задачи на графах. Вопрос о существовании минимальных НМ-сложных классов в [24] не был решен и до сих пор является открытым. Вместе с тем, автором данной книги были найдены примеры конкретных задач на графах, для которых минимальных классов такого рода не существует (изложение этих результатов оставим до четвертой главы). Таким образом, использование естественной идеи решения задачи разграничения для задачи НМ и некоторых других задач на графах оказывается безрезультатным. В то же время, опираясь на понятие граничного класса графов, задачу демаркации в семействе конечно определенных классов графов можно решить до конца.

Наследственный класс $\mathbf{X}$ называется НМ-*предельным*, если существует такая бесконечная последовательность $\mathbf{X}_1 \supseteq \mathbf{X}_2 \supseteq \ldots$ НМ-сложных классов графов, что $\mathbf{X} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{X}_i$. Заметим, что любой НМ-сложный класс является НМ-предельным. Минимальный НМ-предельный класс называется НМ-*граничным*.

Понятие НМ-граничного класса было введено в работе [24], в которой также была доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Конечно определенный класс является* НМ-*сложным тогда и только тогда, когда в нем содержится какой-либо* НМ-*граничный класс.*

Теорема 1.1 раскрывает значение понятия НМ-граничного класса графов и показывает, что при известном множестве НМ-граничных классов имеет место полное описание всех конечно определенных НМ-сложных классов. Таким образом, выявление НМ-граничных классов вызывает определенный интерес.

В той же работе [24] доказано, что некоторый конкретный класс графов является НМ-граничным. Это класс $\mathbf{T}$, состоящий из лесов, у которых степени вершин не превосходят 3, а в каждой компоненте связности имеется не более одной вершины степени 3.

Отметим, что теорема 1.1 оказывается неверной для наследственных классов, у которых минимальное множество запрещенных порожденных подграфов бесконечно. Контрпримером является НМ-простой класс всех деревьев, содержащий класс $\mathbf{T}$.

В [24] было замечено, что понятие граничного класса может быть соответствующим образом сформулировано для произвольной NP-полной задачи на графах и что теорема 1.1 справедлива для любой такой задачи. Из этого наблюдения следует, что для любой NP-полной задачи на графах существует хотя бы один граничный класс.

В работе [26] это понятие было применено к задаче о доминирующем множестве и доказана граничность трех классов, двумя из которых являются классы $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D} = L(\mathbf{T})$.

В [25] понятие граничного класса распространяется на любую NP-полную задачу на графах Π и доказывается, что класс $\mathbf{T}$ является граничным также для задач о независимом доминирующем множестве, о порожденном паросочетании, о наибольшем цикле, о наибольшем пути, о реберном доминирующем множестве, о разобщенном множестве, о P_3-факторе и что класс $\mathbf{D}$ является граничным для первых четырех из указанных семи задач. В большинстве своем, общий план этих доказательств включает предварительное установление того факта, что та или иная задача полиномиально разрешима для любого сильно наследственного класса, не включающего класс $\mathbf{T}$.

Недостатком приведенных выше определений является то, что игнорируется возможность существования классов промежуточной сложности, для которых задача Π не является ни NP-полной, ни полиномиально разрешимой [43]. Если нас интересуют классы графов, в которых задача решается эффективно или для которых такого решения не существует, то правильнее было бы определить Π-сложный класс как класс, не являющийся Π-простым. Именно такой позиции мы придерживаемся на протяжении всей работы. Соответственно новое содержание приобретают понятия предельного и граничного класса, хотя их определения остаются прежними. Следующая теорема является обобщенным аналогом теоремы 1.1 и может быть доказана почти также.

Теорема 1.2. *Конечно определенный класс является Π-сложным тогда и только тогда, когда в нем содержится какой-либо Π-граничный класс.*

Если некоторый класс является Π-предельным при старом определении Π-сложного класса, то он Π-предельный и при новом. Для граничных классов это, вообще говоря, не так. Однако, граничность в новом смысле классов $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$ для всех случаев из [25] сохраняется. Это легко показать, практически полностью повторяя соответствующие доказательства из работы [25].

Тот факт, что установлена граничность именно классов $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$ для целого ряда задач, отражает, по-видимому, однообразие применявшегося до сих пор подхода к доказательству граничности. Вместе с тем интересно было бы выявить общие черты задач, для которых эти классы являются граничными. Это изучение, по существу, составляет дальнейшее содержание первой главы настоящей книги. Данное исследование мы начнем с доказательства критерия граничности произвольного класса графов и условий граничности классов $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$. Полученные инструменты доказательства граничности $\mathbf{T}$ и

$\mathbf{D}$ являются более простыми, чем используемые в работах [24, 25, 26]. Остальная часть первой главы демонстрирует применение данных результатов к поиску новых случаев граничности этих классов и классов $co(\mathbf{T}), co(\mathbf{D})$.

1.3 Критерий граничности

Теорема 1.3. Π-*предельный класс* $\mathbf{A}$ *является* Π-*граничным тогда и только тогда, когда для каждого* $G \in \mathbf{A}$ *существует такое конечное множество графов* $\mathbf{X} \subseteq Forb(\mathbf{A})$, *что класс* $Free(\mathbf{X} \cup \{G\})$ *является* Π-*простым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, условие не выполняется, т.е. существует такой граф $G \in \mathbf{A}$, что для любого конечного множества $\mathbf{X} \subseteq Forb(\mathbf{A})$ класс $Free(\mathbf{X} \cup \{G\})$ является Π-сложным. Занумеруем графы из $Forb(\mathbf{A})$ натуральными числами: $Forb(\mathbf{A}) = \{H_1, H_2, \ldots\}$. Каждый из классов $\mathbf{Y}_n = Free(\{H_1, H_2, \ldots, H_n, G\})$ является Π-сложным. Т.к. при любом n справедливо включение $\mathbf{Y}_{n+1} \subseteq \mathbf{Y}_n$, то класс $\mathbf{Y} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{Y}_n = \mathbf{A} \cap Free(\{G\}) \subset \mathbf{A}$ является Π-предельным. Следовательно, класс $\mathbf{A}$ — не Π-граничный.

Предположим теперь, что условие выполняется и $\mathbf{B}$ — наследственный класс, являющийся собственным подмножеством класса $\mathbf{A}$. Покажем, что тогда класс $\mathbf{B}$ не является Π-предельным. Пусть $G \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$, $\mathbf{X}$ — конечное подмножество множества $Forb(\mathbf{A})$, для которого класс $Free(\mathbf{X} \cup \{G\})$ является Π-простым. Допустим, $\mathbf{Y}_1 \supseteq \mathbf{Y}_2 \supseteq \ldots$ — любая такая последовательность, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{Y}_n = \mathbf{B}$. В этой последовательности найдется класс $\mathbf{Y}_n$, не содержащий графа G и всех графов из $\mathbf{X}$. Так как $\mathbf{Y}_n$ является подмножеством Π-простого класса $Free(\mathbf{X} \cup \{G\})$, то он сам Π-простой. Следовательно, в любой убывающей последовательности, сходящейся к $\mathbf{B}$, имеется Π-простой класс, поэтому $\mathbf{B}$ — не Π-предельный. Теорема доказана.

1.4 Условия граничности классов T и D

1.4.1 Применение критерия граничности к рассматриваемым классам графов

Для $k \geq 1$, $p \geq 1$, $b \geq 4$ через $\mathbf{U}(k,p,b)$ обозначим класс $Free(\{B_i : 1 \leq i \leq b\} \cup \{C_i : 3 \leq i \leq b\} \cup \{K_{1,4}, kT_{p,p,p}\})$, а через $\mathbf{W}(k,p,b)$ обозначим множество графов $Free(\{H_i : 1 \leq i \leq b-1\} \cup \{C_i : 4 \leq i \leq b\} \cup \{K_{1,3}, K_4, K_4 - e, L(B_1), kD_{p,p,p}\})$.

Лемма 1.1[23]. *Пусть* G_1 *и* G_2 *- связные графы, причем графы* $L(G_1)$ *и* $L(G_2)$ *являются изоморфными. Тогда графы* G_1 *и* G_2 *изоморфны всегда, кроме случая, когда один из них* $K_{1,3}$, *а другой* K_3.

В следующей лемме устанавливается связь между введенными классами графов.

Лемма 1.2. *При любых* $k \geq 1, p \geq 1, b \geq 4$ *справедливо равенство* $\mathbf{W}(k,p,b) = L(\mathbf{U}(k,p+1,b))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $k \geq 1$, $p \geq 1$, $i \geq 2$ имеют место равенства $L(B_i) = H_{i-1}$, $L(C_{i+1}) = C_{i+1}$, $L(kT_{p+1,p+1,p+1}) = kD_{p,p,p}$. Ясно, что $L(K_{1,4}) = K_4$, $L(D_{0,0,1}) = K_4 - e$. Пусть $G \in L(\mathbf{U}(k,p+1,b))$, тогда из указанных равенств, предыдущей леммы и того, что граф $K_{1,3}$ не является реберным графом (теорема 8.4 из [23]), следует, что $G \in \mathbf{W}(k,p,b)$. Таким образом, справедливо включение $\mathbf{W}(k,p,b) \supseteq L(\mathbf{U}(k,p+1,b))$. Покажем, что обратное включение также справедливо. Пусть $G \in \mathbf{W}(k,p,b)$. Ясно, что степень каждой вершины этого графа не превосходит 3. Хотя бы один из графов множества $\{K_{1,3}, K_4 - e\}$ является порожденным подграфом в любом из 9 запрещенных порожденных подграфов класса реберных графов, список которых можно найти в теореме 8.4 монографии [23]. Поэтому $Free(\{K_{1,3}, K_4 - e\}) \subseteq \mathbf{Line}$, т.е. граф G является реберным графом. Этот граф можно считать связным в виду того, что $\mathbf{W}(k,p,b)^c \subseteq \mathbf{W}(k,p,b)$. Пусть $G = L(H)$. Если $G = K_3$, то $H = K_{1,3} \in \mathbf{U}(k,p+1,b)$. Если $G \neq K_3$, то из предыдущей леммы следует, что граф H определяется единственным образом. Из указанных равенств и той же леммы 1.1 следует, что $H \in \mathbf{U}(k,p+1,b)$. Поэтому справедливо включение $\mathbf{W}(k,p,b) \subseteq L(\mathbf{U}(k,p+1,b))$. Лемма доказана.

Легко видеть, что множество $Forb(\mathbf{T})$ состоит из всех циклов, всех мостов и графа $K_{1,4}$. Легко также проверить, что множество $Forb(\mathbf{D})$ состоит из всех циклов длины не менее чем 4, всех гантель и графов $K_{1,3}$, K_4, $K_4 - e$, $L(B_1)$. Отметим, что $\mathbf{U}(k,p,b) = Free(\mathbf{X}_{k,p,b} \cup \{kT_{p,p,p}\})$ и $\mathbf{W}(k,p,b) = Free(\mathbf{Y}_{k,p,b} \cup \{kD_{p,p,p}\})$, где $\mathbf{X}_{k,p,b} \subset Forb(\mathbf{T})$ и $\mathbf{Y}_{k,p,b} \subset Forb(\mathbf{D})$, $kT_{p,p,p} \in \mathbf{T}$ и $kD_{p,p,p} \in \mathbf{D}$. Применительно к классам $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$ теорема 1.3 дает следующий критерий.

Теорема 1.4. *Класс* $\mathbf{T}$ (*или* $\mathbf{D}$) *является* Π-*граничным тогда и только тогда, когда он* Π-*предельный и для любых* $k \geq 1$ *и* $p \geq 1$ *существует такое* $b \geq 4$, *что класс* $\mathbf{U}(k,p,b)$ ($\mathbf{W}(k,p,b)$ *для класса* $\mathbf{D}$) *является* Π-*простым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, класс $\mathbf{T}$ является Π-граничным. По теореме 1.3 для любых $k \geq 1$ и $p \geq 1$ существует такое конечное множество графов $\mathbf{X} \subseteq Forb(\mathbf{T})$, что класс $Free(\mathbf{X} \cup \{kT_{p,p,p}\})$ является Π-простым. Пусть b — максимум длин циклов и мостов, содержащихся в $\mathbf{X}$ (если $\mathbf{X}$ не содержит циклов и мостов, то полагаем $b = 0$). Тогда $\mathbf{U}(k,p,max(4,b)) \subseteq Free(\mathbf{X} \cup \{kT_{p,p,p}\})$, следовательно, класс $\mathbf{U}(k,p,max(4,b))$ будет являться Π-простым.

Допустим, что для любых $k \geq 1$ и $p \geq 1$ найдется такое $b \geq 4$, что класс $\mathbf{U}(k,p,b)$ является П-простым. Очевидно, что любой граф $G \in \mathbf{T}$ при некоторых $k \geq 1$ и $p \geq 1$ является порожденным подграфом графа $kT_{p,p,p}$. Таким образом, для любого $G \in \mathbf{T}$ при некоторых $k \geq 1$, $p \geq 1$, $b \geq 4$ имеет место включение $Free(\mathbf{X}_{k,p,b} \cup \{G\}) \subseteq \mathbf{U}(k,p,b)$.

Справедливость второй части утверждения теоремы легко показать по аналогии с проведенным рассуждением. Теорема доказана.

Получим еще несколько достаточных условий граничности классов $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$. Для $k \geq 1$ через $\mathbf{U}(k)$ обозначим множество графов, принадлежащих классу $Free(\{C_3, \ldots, C_{3+k}, B_1, \ldots, B_k\}) \cap \mathbf{Deg}(3)$.

Вершину степени 3 назовем *внутренней*, если не существует пути, соединяющего ее с вершиной степени 1, в котором все промежуточные вершины имеют степень 2. Обозначим через $\mathbf{V}(k)$ $(k \geq 0)$ множество всех графов, у которых степени вершин не превосходят 3 и имеется не более k внутренних вершин.

Лемма 1.3. *Если для любого $k \geq 1$ класс $\mathbf{U}(k)$ является П-сложным, а класс $\mathbf{V}(k-1)$ П-простым, то класс $\mathbf{T}$ является П-граничным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при любом $k \geq 1$ класс $\mathbf{U}(k)$ является наследственным (и даже сильно наследственным), $\mathbf{U}(k) \supseteq \mathbf{U}(k+1)$ и $\mathbf{T} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{U}(n)$, то класс $\mathbf{T}$ является П-предельным. Пусть $k \geq 1$ и $p \geq 1$. Положим $b = 2p+4$ и покажем, что $\mathbf{U}(k,p,b) \subseteq \mathbf{V}(k-1)$. Пусть $G \in \mathbf{U}(k,p,b)$. Ясно, что степени вершин графа G не превосходят 3. Расстояние между любыми вершинами степени 3 в этом графе не может быть меньше $2p+2$, иначе образовался бы порожденный мост длины не более $2p+1$ или порожденный цикл длины не более $2p+4$. Допустим, что в нем есть k внутренних вершин. Каждая из них принадлежит порожденному подграфу $T_{p,p,p}$, причем эти подграфы не имеют общих вершин и нет ребер, соединяющих вершины одного такого подграфа с вершинами другого. Но тогда эти k подграфов вместе образуют порожденный подграф $kT_{p,p,p}$. Получили противоречие. Значит, $G \in \mathbf{V}(k-1)$.

Таким образом, при любых $k \geq 1$ и $p \geq 1$ класс $\mathbf{U}(k,p,2p+4)$ является П-простым. Отсюда и из теоремы 1.4 следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Если для любого $k \geq 1$ класс $L(\mathbf{U}(k))$ является П-сложным, а класс $L(\mathbf{V}(k-1) \cap Free(\{C_3, B_1\}))$ является П-простым, то класс $\mathbf{D}$ является П-граничным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку при любом $k \geq 1$ класс $\mathbf{U}(k)$ сильно наследственный, то класс графов $L(\mathbf{U}(k))$ является наследственным. Т.к. $L(\mathbf{U}(1)) \supseteq L(\mathbf{U}(2)) \supseteq \ldots$ и $\mathbf{D} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} L(\mathbf{U}(k))$, то класс $\mathbf{D}$ является П-предельным. Для $k \geq 1$ и $p \geq 1$ положим $b = 2p+$

6 и покажем, что $\mathbf{W}(k,p,b) \subseteq L(\mathbf{V}(k-1) \cap Free(\{C_3, B_1\}))$. Рассмотрим произвольный граф $G \in \mathbf{W}(k,p,b)$. Из леммы 1.2 следует, что для некоторого графа $H \in \mathbf{U}(k,p+1,b)$ выполнено соотношение $G = L(H)$. Ясно, что степень каждой вершины в графе H не превосходит 3. Расстояние между любыми двумя вершинами степени 3 в графе H не менее $2p+4$, т.к. в противном случае образуется либо порожденный мост длины не более $2p+3$, либо порожденный цикл длины не более $2p+6$. Граф H не может содержать более чем $k-1$ внутренних вершин, т.к. из рассуждений предыдущей леммы следовало бы, что он содержит порожденный $kD_{p,p,p}$. Таким образом, $H \in \mathbf{V}(k-1) \cap Free(\{C_3, B_1\})$. Значит, для любых $k \geq 1$ и $p \geq 1$ при $b = 2p+6$ класс $\mathbf{W}(k,p,b)$ является П-простым. Из теоремы 1.4 следует, что класс $\mathbf{D}$ является П-граничным. Лемма доказана.

1.4.2 Понятие древесной ширины графа и доказательство достаточного условия граничности классов T и D

Древесная ширина является полезной числовой характеристикой графов при исследовании сложности различных задач на графах. Это обусловлено тем, что для любой наперед заданной константы некоторые задачи полиномиально разрешимы в классе графов, у которых древесная ширина ограничена этой константой (много информации по этому поводу можно найти в [30]). Имея в виду данное обстоятельство, целесообразно использовать понятие древесной ширины при формулировке условий граничности. Одно из них доказывается в данном подразделе.

Древесной декомпозицией графа G называется пара (T,W), где T — дерево, $W \subseteq 2^{V(G)}$ и с каждой вершиной v дерева T связан элемент W_v множества W так, что выполняются следующие условия:

1). $V(G) = \bigcup\limits_{v \in V(T)} W_v$.

2). Для каждого ребра $(a,b) \in E(G)$ существует некоторая вершина v дерева T, что a и b принадлежат W_v.

3). Для каждой вершины $a \in V(G)$ множество $\{v \in V(T) : a \in W_v\}$ образует связное поддерево в дереве T.

Шириной древесной декомпозиции (T,W) называется величина $tw(T,W) = max_{v \in V(T)}(|W_v| - 1)$ и *древесной шириной графа* G называется величина $tw(G) = min(tw(T,W))$, где минимум берется по всевозможным древесным декомпозициям (T,W) графа G.

Лемма 1.5[45]. *Для любых графов $G_1 \in \mathbf{T}$ и $G_2 \in \mathbf{D}$ и любого натурального числа d существует такое число $t = t(G_1, G_2, d)$, что древесная ширина графов класса*

$Free(\{G_1, G_2\}) \cap \mathbf{Deg}(d)$ *ограничена числом* t.

Лемма 1.6[44]. *Пусть для некоторого числа* d *справедливо включение* $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Deg}(d)$, *тогда древесная ширина графов класса* $\mathbf{X}$ *ограничена некоторым числом* $t_1 = t_1(\mathbf{X}, d)$ *тогда и только тогда, когда древесная ширина графов класса* $L(\mathbf{X})$ *ограничена некоторым числом* $t_2 = t_2(\mathbf{X}, d)$.

Обозначим через $\mathbf{TW}(\infty, t)$ множество графов, древесная ширина которых не превосходит t. Пусть $\mathbf{TW}(d, t)$ — класс графов $\mathbf{TW}(\infty, t) \cap \mathbf{Deg}(d)$.

Лемма 1.7. *Если класс* $\mathbf{T}$ *является* Π*-предельным и для любого* t *задача* Π *полиномиально разрешима в классе* $\mathbf{TW}(3, t) \cap Free(\{C_3\})$, *то класс* $\mathbf{T}$ *является* Π*-граничным. Если класс* $\mathbf{D}$ *является* Π*-предельным и для любого* t *задача* Π *полиномиально разрешима в классе* $L(\mathbf{TW}(3, t)) \cap \mathbf{Deg}(3)$, *то класс* $\mathbf{D}$ *является* Π*-граничным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный граф $G \in \mathbf{T}$. Графы $K_{1,4}$ и C_3 принадлежат множеству $Forb(\mathbf{T})$. Т.к. $C_3 \in \mathbf{D}$ и $Free(\{G, K_{1,4}, C_3\}) = Free(\{G, C_3\}) \cap \mathbf{Deg}(3)$, то из леммы 1.5 следует, что древесная ширина графов из $Free(\{G, K_{1,4}, C_3\})$ ограничена числом t, поэтому $Free(\{G, K_{1,4}, C_3\}) \subseteq \mathbf{TW}(3, t) \cap Free(\{C_3\})$. Из теоремы 1.3 следует, что $\mathbf{T}$ является Π-граничным.

Рассмотрим произвольный граф $G \in \mathbf{D}$. Графы $K_{1,3}$, K_4, $K_4 - e$, $L(B_1)$ принадлежат множеству $Forb(\mathbf{D})$. Поскольку $K_{1,3} \in \mathbf{T}$ и $\mathbf{X} = Free(\{G, K_{1,3}, K_4, K_4 - e, L(B_1)\}) \subseteq Free(\{G, K_{1,3}\}) \cap \mathbf{Deg}(3)$, то по лемме 1.5 древесная ширина графов из $\mathbf{X}$ ограничена числом t. Из теоремы 8.4 монографии [23] следует, что класс $\mathbf{X}$ состоит из реберных графов, т.е. для некоторого класса $\mathbf{Y}$ справедливо равенство $\mathbf{X} = L(\mathbf{Y})$. Поскольку $K_4 \notin \mathbf{X}$, то $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{Deg}(3)$. Из леммы 1.6 следует, что древесная ширина графов класса $\mathbf{Y}$ ограничена некоторым числом t^*, поэтому $\mathbf{X} \subseteq L(\mathbf{TW}(3, t^*)) \cap \mathbf{Deg}(3)$. Отсюда и из теоремы 1.3 следует, что $\mathbf{D}$ является Π-граничным. Лемма доказана.

1.5 Граничные классы для задачи о наибольшем подграфе

Говоря «задача о наибольшем подграфе», мы имеем в виду широкий круг задач распознавания. В данных задачах требуется определить, существует ли подграф заданного графа с некоторыми экстремальными свойствами. Часто такие задачи состоят в том, чтобы определить, ограничено ли снизу задаваемым числом значение числового параметра, характеризующего некоторые экстремальные подграфы заданного графа. Этой числовой характеристикой может быть наибольшее количество ребер в двудольных подграфах заданного графа или длина наибольшего цикла в его кубических подграфах и т.п.

В настоящем разделе рассматриваются конкретные варианты данной общей задачи. Результаты, полученные в предыдущем разделе, мы здесь применим при доказательстве граничности классов $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$ для таких задач.

Пусть $\mathbf{X}$ — некоторый класс графов, для которого существует какой-нибудь алгоритм распознавания принадлежности графа этому классу. Подграф некоторого графа, принадлежащий $\mathbf{X}$, будем называть $\mathbf{X}$-*подграфом*. $\mathbf{X}$-подграф некоторого графа будем называть *реберно наибольшим*, если он содержит наибольшее число ребер и *вершинно наибольшим*, если этот подграф является порожденным и содержит наибольшее количество вершин. Число ребер в реберно наибольшем $\mathbf{X}$-подграфе графа G обозначим через $m_{\mathbf{X}}(G)$, а количество вершин в вершинно наибольшем $\mathbf{X}$-подграфе графа G обозначим через $n_{\mathbf{X}}(G)$. В дальнейшем всегда будем считать, что $K_1 \in \mathbf{X}$, тогда $m_{\mathbf{X}}(G)$ определено для любого графа G. Если G не содержит ни одного порожденного $\mathbf{X}$-подграфа, то положим $n_{\mathbf{X}}(G) = 0$.

Задача о реберно наибольшем $\mathbf{X}$-подграфе, называемая далее задачей РНП[$\mathbf{X}$], состоит в том, чтобы по данным графу G и числу k определить, верно ли, что $m_{\mathbf{X}}(G) \geq k$. Задача о вершинно наибольшем $\mathbf{X}$-подграфе, называемая в дальнейшем задачей ВНП[$\mathbf{X}$], состоит в том, чтобы по задаваемым графу G и числу k определить, выполняется ли неравенство $n_{\mathbf{X}}(G) \geq k$.

1.5.1 Задача о реберно наибольшем X-подграфе

Напомним, что ребро графа называется *перешейком*, если при его удалении увеличивается число компонент связности. Операция добавления перешейка состоит в добавлении к графу ребра, соединяющего вершины из разных компонент связности. Операция s-кратного подразбиения ребра состоит в замене этого ребра путем длины $s+1$. Обратная операция s-слияния состоит в замене пути длины $s+1$, в котором все промежуточные вершины имеют степень 2, одним ребром.

Лемма 1.8. *Пусть* $\mathbf{X}$ *— класс графов, замкнутый относительно добавления и удаления изолированных вершин, добавления и удаления перешейков,* s*-подразбиения и* s*-слияния. Если граф* G' *получен из графа* G *путем* s*-подразбиения некоторого ребра, то* $m_{\mathbf{X}}(G') = m_{\mathbf{X}}(G) + s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, G' получен из G заменой ребра e путем P длины $s+1$. Пусть H — реберно наибольший $\mathbf{X}$-подграф графа G. Рассмотрим в графе G' подграф H', получающийся из H следующим образом. Если ребро e принадлежит H, то включаем в H' весь путь P, в противном случае включаем в H' весь этот путь, кроме одного (любого) ребра. Граф H' получается из графа H операцией s-подразбиения ребра e или добавлением изолированных вершин и перешейков, следовательно, принадлежит классу $\mathbf{X}$. Поэтому $m_{\mathbf{X}}(G') \geq m_{\mathbf{X}}(G) + s$.

Обратно, пусть H' — реберно наибольший $\mathbf{X}$-подграф графа G'. Так как $\mathbf{X}$ замкнут относительно добавления изолированных вершин, то можно считать, что H' содержит все вершины пути P. Поскольку $\mathbf{X}$ замкнут относительно добавления перешейков, то он содержит либо все ребра этого пути, либо все, кроме одного. В первом случае заменим этот путь одним ребром, во втором удалим из H' все ребра этого пути (они являются перешейками в H') и все его вершины, кроме концевых. Получим граф H, являющийся подграфом графа G и принадлежащий классу $\mathbf{X}$. Следовательно, $m_{\mathbf{X}}(G) \geq m_{\mathbf{X}}(G') - s$. Лемма доказана.

Теорема 1.5. *Пусть* $\mathbf{X}$ *— класс графов, замкнутый относительно добавления и удаления изолированных вершин, добавления и удаления перешейков, s-подразбиения и s-слияния при некотором s. Если класс* $\mathbf{Deg}(3)$ *является* РНП[$\mathbf{X}$]*-сложным, то класс* $\mathbf{T}$ *является* РНП[$\mathbf{X}$]*-граничным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторое $t \geq 1$. Пусть $G \in \mathbf{Deg}(3)$. Выполнив st-подразбиение каждого ребра графа G, получим граф $G' \in \mathbf{U}(st)$. По лемме 1.8 справедливо равенство $m_{\mathbf{X}}(G') = m_{\mathbf{X}}(G) + stm$, где m — число ребер в графе G. Поэтому задача РНП[$\mathbf{X}$] для графов из класса $\mathbf{Deg}(3)$ полиномиально сводится к той же задаче для графов из $\mathbf{U}(st)$. Следовательно, класс $\mathbf{U}(k)$ является РНП[$\mathbf{X}$]-сложным при любом k. Поэтому класс $\mathbf{T}$ является РНП[$\mathbf{X}$]-предельным.

Докажем теперь, что класс $\mathbf{V}(k)$ при любом k является РНП[$\mathbf{X}$]-простым. Пусть $G \in \mathbf{V}(k)$. Если в G есть вершина степени 1, то инцидентное ей ребро принадлежит любому реберно наибольшему $\mathbf{X}$-подграфу графа G (ввиду замкнутости $\mathbf{X}$ относительно добавления изолированных вершин и перешейков). Поэтому можно считать, что в G каждая вершина имеет степень 2 или 3. Все вершины степени 3 в этом графе — внутренние, поэтому в нем имеется не более k таких вершин. Если G' — граф, получаемый из графа G однократным применением операции s-слияния, то по лемме 1.8 $m_{\mathbf{X}}(G) = m_{\mathbf{X}}(G') + s$. Таким образом, задача РНП[$\mathbf{X}$] для графов из $\mathbf{V}(k)$ полиномиально сводится к той же задаче для графов из множества $\mathbf{Y}(k, s) \subseteq \mathbf{V}(k)$, состоящего из графов, в которых нет вершин степени 1, имеется не более k вершин степени 3 и к которым неприменима операция s-слияния. В таком графе длина любого пути, в котором все промежуточные вершины имеют степень 2, не превосходит s. Иначе говоря, это графы, которые можно получить из кубических графов с не более чем k вершинами заменой каждого ребра путем длины не более s. Число вершин в таком графе не превосходит $\frac{k(3s-1)}{2}$. Следовательно, при фиксированных k и s множество $\mathbf{Y}(k, s)$ конечно. Поскольку существует алгоритм проверки принадлежности графа классу $\mathbf{X}$, то при любом k класс $\mathbf{V}(k)$ является П-простым.

Из леммы 1.3 следует, что класс $\mathbf{T}$ является РНП[$\mathbf{X}$]-граничным. Теорема доказана.

Лемма 1.9. *Для любого графа* $G \in Free(\{C_3\})$ *имеет место равенство* $m_{\mathbf{TO}}(G) = m_{\mathbf{Bipartite}}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G_1 — реберно наибольший двудольный подграф графа G. Ясно, что граф G_1 является транзитивно ориентируемым (т.к. его ребра можно ориентировать так, что стоки окажутся в одной доле, а источники в другой доле). Поэтому $m_{\mathbf{TO}}(G) \geq m_{\mathbf{Bipartite}}(G)$.

Пусть G_2 — реберно наибольший **TO**-подграф графа G. Понятно, что G_2 не содержит треугольников. Т.к. для любого $k > 1$ цикл C_{2k+1} не принадлежит классу **TO**, то G_2 является двудольным графом. Поэтому $m_{\mathbf{TO}}(G) \leq m_{\mathbf{Bipartite}}(G)$. Лемма доказана.

Основным результатом этого подраздела является следующее утверждение.

Теорема 1.6. *Класс* $\mathbf{T}$ *является* РНП[**Planar**]-*граничным,* РНП[**Bipartite**]-*граничным,* РНП[**Perfect**]-*граничным и* РНП[**TO**]-*граничным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что класс $\mathbf{Deg}(3)$ является РНП[**Planar**]-сложным [37] и РНП[**Bipartite**]-сложным [7]. Поскольку задачи РНП[**Bipartite**] и РНП[**Perfect**] в классе $\mathbf{Deg}(3) \cap Free(\{C_3\})$ совпадают (это легко следует из описания множества $Forb(\mathbf{Perfect})$), то класс $\mathbf{Deg}(3)$ является РНП[**Perfect**]-сложным. Если для классов **Planar**, **Bipartite** и **Perfect** положить $s = 2$, то для этих классов выполняются все условия теоремы 1.5. Таким образом, класс $\mathbf{T}$ является граничным для задач РНП[**Planar**], РНП[**Bipartite**] и РНП[**Perfect**].

Т.к. класс $\mathbf{Deg}(3)$ является РНП[**Bipartite**]-сложным, то из доказательства теоремы 1.5 следует, что при любом k класс $\mathbf{U}(k)$ является РНП[**Bipartite**]-сложным. Данное обстоятельство и лемма 1.9 означают, что класс $\mathbf{T}$ является РНП[**TO**]-предельным. Для любого фиксированного t класс $\mathbf{TW}(3,t)$ является РНП[**Bipartite**]-простым [30]. Отсюда, из леммы 1.7 и из леммы 1.9 следует граничность класса $\mathbf{T}$ для задачи РНП[**TO**]. Теорема доказана.

1.5.2 Задача о вершинно наибольшем X-подграфе

Некоторые результаты, полученные ранее, можно распространить на случай задачи ВНП[$\mathbf{X}$]. Действительно, практически аналогично лемме 1.8 и теореме 1.5 можно доказать следующие утверждения.

Лемма 1.10. *Пусть* $\mathbf{X}$ *— наследственный класс графов, замкнутый относительно добавления изолированных вершин, добавления перешейков,* s*-подразбиения и* s*-слияния. Если граф* G' *получен из графа* G s*-подразбиением некоторого ребра, то* $n_{\mathbf{X}}(G') = n_{\mathbf{X}}(G) + s$.

Теорема 1.7. *Пусть* $\mathbf{X}$ *— наследственный класс графов, замкнутый относительно добавления изолированных вершин, добавления перешейков,* s*-подразбиения и* s*-слияния при некотором* s*. Если класс* $\mathbf{Deg}(3)$ *является* ВНП[$\mathbf{X}$]*-сложным, то класс* $\mathbf{T}$ *является* ВНП[$\mathbf{X}$]*-граничным.*

Операция создания треугольника в графе G состоит в добавлении к графу G вершины a и двух ребер, соединяющих вершину a с двумя соседними вершинами b и c степени не более 2, которые не принадлежат ни одному треугольнику графа G. Для класса $\mathbf{D}$ также справедлив некоторый аналог теорем 1.6 и 1.7. Именно, имеет место теорема 1.8.

Теорема 1.8. *Пусть* $\mathbf{X}$ *— наследственный класс графов, замкнутый относительно создания треугольников, добавления изолированных вершин, добавления перешейков,* s*-подразбиения ребер, не принадлежащих треугольникам, и* s*-слияния при некотором* s*. Если класс* $L(\mathbf{U}(1))$ *является* ВНП[$\mathbf{X}$]*-сложным, то класс* $\mathbf{D}$ *является* ВНП[$\mathbf{X}$]*-граничным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы похоже на соответствующие рассуждения из теоремы 1.6. Зафиксируем натуральное число k и рассмотрим произвольный граф $G \in L(\mathbf{U}(1))$. Выполним sk-подразбиение всех ребер графа G, которые не принадлежат треугольникам, и получим некоторый граф $G' \in L(\mathbf{U}(1+ks))$. Из леммы 1.10 следует, что $n_{\mathbf{X}}(G') = n_{\mathbf{X}}(G) + ksm^*$, где m^* — количество ребер графа G, не принадлежащих его треугольникам. Поэтому при любом k задача ВНП[$\mathbf{X}$] в классе $L(\mathbf{U}(1))$ полиномиально эквивалентна той же задаче в классе $L(\mathbf{U}(1+ks))$. Таким образом, класс $L(\mathbf{U}(k))$ является ВНП[$\mathbf{X}$]-сложным при любом натуральном k, следовательно, класс $\mathbf{D}$ является ВНП[$\mathbf{X}$]-предельным.

Покажем, что класс $L(\mathbf{V}(k) \cap Free(\{C_3, B_1\}))$ является ВНП[$\mathbf{X}$]-простым при любом k. Пусть $G \in L(\mathbf{V}(k) \cap Free(\{C_3, B_1\}))$. Ввиду замкнутости класса $\mathbf{X}$ относительно создания треугольников, добавления изолированных вершин и перешейков любая вершина степени 1 и любая вершина степени 2, которая принадлежит некоторому треугольнику графа G, принадлежат любому вершинно наибольшему $\mathbf{X}$-подграфу графа G. Таким образом, можно считать, что в графе G любая вершина имеет степень 2 или 3, причем все вершины степени 3 являются внутренними. Можно также считать, что к графу G не применима операция s-слияния (т.к. по лемме 1.10 задача о вершинно наибольшем $\mathbf{X}$-подграфе полиномиально сводима к таким графам). Значит, задача ВНП[$\mathbf{X}$] полиномиально сводится к той же задаче для графов из класса $\mathbf{Y}(k,s)$. При доказательстве теоремы 1.5 показано, что при фиксированных k и s множество $\mathbf{Y}(k,s)$ является конечным. Следовательно, по лемме 1.3 класс $\mathbf{D}$ является ВНП[$\mathbf{X}$]-граничным. Теорема доказана.

Полезным методом исследования сложности задач на графах является доказательство полиномиальной эквивалентности некоторой задачи в классе $\mathbf{X}$ другой задаче в классе $L(\mathbf{X})$. Это обстоятельство нам особенно полезно, т.к. интуитивно очевидна связь между задачей РНП[$\mathbf{X}$] в некотором классе графов и задачей ВНП[$L(\mathbf{X})$] для графов, изоморфных графам ребер графов этого класса. Более формально данная связь устанавливается в следующей лемме.

Лемма 1.11. *Пусть класс $\mathbf{X}$ состоит из связных графов и существует алгоритм распознавания принадлежности заданного графа этому классу. Тогда в любом классе графов $\mathbf{Y}$ задача* РНП[$\mathbf{X}$] *полиномиально эквивалентна задаче* ВНП[$L(\mathbf{X})$] *в классе $L(\mathbf{Y})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что в любом классе графов задачи РНП[$\mathbf{X}$] и ВНП[$L(\mathbf{X})$] полиномиально эквивалентны соответствующим задачам оптимизации.

Пусть $H \in \mathbf{Y}$ и $G \in L(\mathbf{Y})$, причем $G = L(H)$. Графы G и H можно считать связными. Ясно, что задача РНП[$\mathbf{X}$] для графов K_3, $K_{1,3}$ и задача ВНП[$L(\mathbf{X})$] для графа K_3 решается за O(1) время. Поэтому можно предполагать, что $G \neq K_3$, $H \neq K_3$, $H \neq K_{1,3}$. Тогда из леммы 1.1 следует, что один из графов множества $\{G, H\}$ однозначно определяет другой. Понятно, что граф G может быть построен из H за полиномиальное время. Обратно, граф H может быть построен из G за полиномиальное время [50].

Очевидно, что граф ребер любого $\mathbf{X}$-подграфа графа H является порожденным $L(\mathbf{X})$-подграфом графа G. Поэтому $n_{L(\mathbf{X})}(G) \geq m_{\mathbf{X}}(H)$. Рассмотрим два случая. Если $n_{L(\mathbf{X})}(G) \leq 3$, то $m_{\mathbf{X}}(H) \leq 3$. Понятно, что этом случае число $m_{\mathbf{X}}(H)$ вычисляется за полиномиальное время. Если $n_{L(\mathbf{X})}(G) > 3$, то любой вершинно наибольший $L(\mathbf{X})$-подграф графа G отличен от графа C_3. Тогда из леммы 1.1 следует, что H содержит некоторый $\mathbf{X}$-подграф, число ребер которого не менее чем $n_{L(\mathbf{X})}(G)$. Таким образом, если $n_{L(\mathbf{X})}(G) > 3$, то $m_{\mathbf{X}}(H) = n_{L(\mathbf{X})}(G)$.

Из проделанных рассуждений следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 1.12. *Пусть H — связный граф из класса $\mathbf{U}(k)$ и $G = L(H)$. Тогда для любого k граф G является планарным тогда и только тогда, когда граф H является планарным, граф G является совершенным тогда и только тогда, когда H является двудольным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Т.к. при любом k класс $\mathbf{U}(k)$ не содержит треугольников, то из леммы 1.1 следует, что граф H определяется по графу G единственным образом.

Понятно, что степени вершин в графах G и H не превосходят 3, поэтому оба эти графа не содержат подграфов, гомеоморфных K_5. Легко проверить, что граф ребер графа $K_{3,3}$ не является планарным (т.к. его можно стянуть к $K_{3,3}$), поэтому граф ребер любого графа, гомеоморфного $K_{3,3}$, также не является планарным. Тогда из леммы 1.1 следует, что если граф G является планарным, то граф H также является планарным. Обратное утверждение легко проверяется непосредственным построением плоской укладки графа G по плоской укладке графа H.

Ясно, что при $s > 1$ граф G не содержит порожденных подграфов $\overline{C_{2s+1}}$. Т.к. при любом $i \geq 3$ имеет место равенство $L(C_i) = C_i$, то из той же леммы 1.1 следует, что граф G является совершенным тогда и только тогда, когда граф H является двудольным. Лемма доказана.

Обозначим через **Path** класс всех простых путей, а через **Cycle** класс всех простых циклов. Эти классы графов используются далее при доказательстве основного результата настоящего подраздела.

Теорема 1.9. *Класс* $\mathbf{T}$ *является граничным для задач* ВНП[**Planar**], ВНП[**Bipartite**], ВНП[**Perfect**], *а класс* $\mathbf{D}$ *является граничным для задач* ВНП[**Planar**], ВНП[**Perfect**], ВНП[**Path**] *и* ВНП[**Cycle**].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что класс $\mathbf{Deg}(3)$ является ВНП[**Planar**]-сложным [36] и ВНП[**Bipartite**]-сложным [39]. Так как в классе $\mathbf{Deg}(3) \cap Free(\{C_3\})$ задачи ВНП[**Bipartite**] и ВНП[**Perfect**] совпадают, то класс $\mathbf{Deg}(3)$ является ВНП[**Perfect**]-сложным. Если для классов **Planar**, **Bipartite**, **Perfect** в условиях теоремы 1.7 положить $s = 2$, то для этих классов выполняются все ее требования. Таким образом, из теоремы 1.7 следует, что класс $\mathbf{T}$ является ВНП[**Planar**]-граничным, ВНП[**Bipartite**]-граничным, ВНП[**Perfect**]-граничным.

Из результатов предыдущего подраздела следует, что класс $\mathbf{U}(1)$ является РНП[**Planar**]-сложным и РНП[**Bipartite**]-сложным. Отсюда и двух предыдущих лемм следует, что класс $L(\mathbf{U}(1))$ является ВНП[**Planar**]-сложным и ВНП[**Perfect**]-сложным. Если положить $s = 2$, то для классов **Planar** и **Perfect** выполняются все условия теоремы 1.8. Поэтому класс $\mathbf{D}$ является граничным для задачи ВНП[**Planar**] и задачи ВНП[**Perfect**].

Понятно, что выполняются равенства $L(\mathbf{Path}) = \mathbf{Path}$ и $L(\mathbf{Cycle}) = \mathbf{Cycle}$. В работе [25] показано, что при любом k класс $\mathbf{U}(k)$ является как РНП[**Path**]-сложным, так и РНП[**Cycle**]-сложным. Из леммы 1.11 следует, что при любом k класс $L(\mathbf{U}(k))$ является ВНП[**Path**]-сложным и ВНП[**Cycle**]-сложным. Поэтому класс $\mathbf{D}$ является предельным для задач ВНП[**Path**] и ВНП[**Cycle**]. При любом фиксированном t класс $\mathbf{TW}(3, t)$ является РНП[**Path**]-простым и РНП[**Cycle**]-простым [30]. Отсюда, из леммы 1.7 и леммы 1.11

следует граничность класса $\mathbf{D}$ для задач ВНП[**Path**] и ВНП[**Cycle**]. Теорема доказана.

1.5.3 Задача о наибольшем связном подграфе

В предыдущих подразделах исследовались граничные классы для двух вариантов задачи о наибольшем подграфе — задач РНП[**X**] и ВНП[**X**]. Существуют и другие частные случаи этой общей задачи, не вписывающиеся в рамки ранее рассмотренных. В данном подразделе речь идет о граничности классов $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$ для таких задач.

Задача о реберно наибольшем связном подграфе ограниченной степени, называемая в дальнейшем задачей РНСПОС, состоит в том, чтобы по задаваемым графу G, числам d и k определить, содержит ли граф G подграф из $\mathbf{Deg}(d)^c$, число ребер которого не менее чем k. Задача о вершинно наибольшем связном подграфе ограниченной степени, называемая в дальнейшем задачей ВНСПОС, состоит в том, чтобы по задаваемым графу G, числам d и k определить, содержит ли граф G порожденный подграф из $\mathbf{Deg}(d)^c$, число вершин которого не менее чем k.

Лемма 1.13. *Для любого связного реберного графа $G \in \mathbf{Deg}(3)$, отличного от простого цикла и графа K_4, выполнено неравенство $n_{\mathbf{Path}}(G) \geq n_{\mathbf{Cycle}}(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C — наибольший порожденный цикл графа G. Т.к. граф G отличен от цикла, то существует вершина x, не принадлежащая C и смежная хотя бы с одной вершиной цикла C. Если длина цикла C равна 3, то вершина x не может быть смежна сразу со всеми тремя его вершинами. Следовательно, граф G содержит порожденный подграф P_3. Далее будем считать, что длина C не менее чем 4. Вершина x не может быть смежна ровно с одной вершиной цикла C, т.к. иначе образовался бы порожденный подграф $K_{1,3}$ и граф G не был бы реберным. Рассмотрим два возможных случая:

1. Вершина x смежна ровно с двумя вершинами цикла C. Эти вершины обязательно должны быть смежными, иначе снова образуется порожденный подграф $K_{1,3}$. Таким образом, вершина x смежна с двумя смежными вершинами v_1 и v_2. Но тогда граф G содержит путь длины $n_{\mathbf{Cycle}}$, порожденный вершиной x и всеми вершинами C, кроме v_1.

2. Вершина x смежна с тремя вершинами v_1, v_2, v_3 цикла C. Понятно, что эти вершины обязательно должны быть последовательными, иначе снова образуется порожденный подграф $K_{1,3}$. Будем считать, что $(v_1, v_2) \in E(G)$ и $(v_2, v_3) \in E(G)$. Пусть a и b — такие вершины цикла C, что $a \neq v_2$, $b \neq v_2$ и $(a, v_1) \in E(G)$, $(b, v_3) \in E(G)$. Тогда вершины x, v_1, v_2, v_3, a, b образуют порожденный подграф графа G, не являющийся реберным [23], независимо от того, совпадают ли вершины a и b. Поэтому и сам

граф G не является реберным. Лемма доказана.

Теорема 1.10. *Класс* $\mathbf{T}$ *является* РНСПОС-*граничным, а класс* $\mathbf{D}$ *является* ВНСПОС-*граничным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Понятно, что пары задач РНСПОС и РНП[$\mathbf{Deg}(2)^c$], ВНСПОС и ВНП[$\mathbf{Deg}(2)^c$] в классе графов $\mathbf{Deg}(3)$ являются парами полиномиально эквивалентных задач. Очевидно, что для любого графа $G \in \mathbf{Deg}(3)$ выполнены равенства $m_{\mathbf{Deg}(2)^c} = max(m_{\mathbf{Path}}, m_{\mathbf{Cycle}})$ и $n_{\mathbf{Deg}(2)^c} = max(n_{\mathbf{Path}}, n_{\mathbf{Cycle}})$. Т.к. при любом k справедливо включение $L(\mathbf{U}(k)) \subseteq \mathbf{Deg}(3)$, то из леммы 1.13 следует, что задача ВНП[$\mathbf{Path}$] для графов из $L(\mathbf{U}(k))$ полиномиально сводима к задаче ВНП[$\mathbf{Deg}(2)^c$] для графов того же класса. Поскольку при любом k класс $L(\mathbf{U}(k))$ ВНП[$\mathbf{Path}$]-сложный, то класс $L(\mathbf{U}(k))$ является ВНП[$\mathbf{Deg}(2)^c$]-сложным. Т.к. $L(\mathbf{Deg}(2)^c) = \mathbf{Deg}(2)^c$, то из леммы 1.11 следует, что при любом k класс $\mathbf{U}(k)$ является РНП[$\mathbf{Deg}(2)^c$]-сложным. Таким образом, класс $\mathbf{T}$ является предельным для задачи РНСПОС, а класс $\mathbf{D}$ является предельным для задачи ВНСПОС.

При любом фиксированном t класс $\mathbf{TW}(3, t)$ является как РНП[$\mathbf{Path}$]-простым, так и РНП[$\mathbf{Cycle}$]-простым. Из проделанных рассуждений, леммы 1.7 и леммы 1.11 следует РНСПОС-граничность класса $\mathbf{T}$ и ВНСПОС-граничность класса $\mathbf{D}$. Теорема доказана.

1.5.4 Некоторые замечания

Нетрудно привести пример континуальной серии задач на графах, для каждой из которых классы $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$ являются граничными одновременно. Пусть $K_5^{(t)}$ — граф, получаемый из K_5 t-подразбиением каждого ребра, $\tilde{N}$ — произвольное подмножество множества натуральных чисел. Обозначим через $\mathbf{K}$ множество всех графов, гомеоморфных графу $K_{3,3}$, а через $\mathbf{M}_{\tilde{N}}$ множество $\{K_5^{(t)}, t \in \tilde{N}\}$. Рассмотрим задачу ВНП[$Free(\mathbf{K} \cup \mathbf{M}_{\tilde{N}})$]. Понятно, что для любого множества $\tilde{N}$ в классе $\mathbf{Deg}(3)$ задачи ВНП[$Free(\mathbf{K} \cup \mathbf{M}_{\tilde{N}})$] и ВНП[$\mathbf{Planar}$] совпадают. Из результатов предыдущего подраздела следует, что для любого k классы $\mathbf{U}(k)$ и $L(\mathbf{U}(k))$ являются ВНП[$\mathbf{Planar}$]-сложными, поэтому при любом $\tilde{N}$ классы $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$ являются ВНП[$Free(\mathbf{K} \cup \mathbf{M}_{\tilde{N}})$]-предельными. В теореме 1.9 показано, что классы $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$ являются ВНП[$\mathbf{Planar}$]-граничными. Т.к. при любых $k \geq 1$, $p \geq 1$, $b \geq 4$ выполняются включения $\mathbf{U}(k, p, b) \subseteq \mathbf{Deg}(3)$ и $\mathbf{W}(k, p, b) \subseteq \mathbf{Deg}(3)$, то из теоремы 1.4 следует, что при любом $\tilde{N}$ классы $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$ являются ВНП[$Free(\mathbf{K} \cup \mathbf{M}_{\tilde{N}})$]-граничными.

1.6 Применение понятия древесной ширины к поиску новых случаев граничности классов $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$

Понятие древесной ширины графа рассматривалось в четвертом разделе данной главы. Там же была обоснована полезность этого понятия при доказательстве граничности тех или иных классов графов. Основной результат подраздела 1.4.2 (лемма 1.7) уже применялся ранее при исследовании случаев граничности $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$ для некоторых вариантов задачи о наибольшем подграфе. В настоящем разделе при помощи данного утверждения устанавливается граничность этих классов для некоторых задач.

В следующих трех подразделах доказывается ряд лемм, необходимых для получения основного результата этого раздела.

1.6.1 Покрытия и разбиения

Вершинным покрытием графа называется такое подмножество его вершин, что любое ребро графа инцидентно хотя бы одной вершине из этого подмножества. Количество вершин в наименьшем вершинном покрытии графа G обозначим через $\beta(G)$. Задача о вершинном покрытии (задача ВП) состоит в том, чтобы для заданного графа G и числа k определить, выполняется ли неравенство $\beta(G) \leq k$.

Покрытием полными двудольными графами (ППДГ) графа G называется такое подмножество $\{V_1, V_2, \ldots, V_s\}$ множества $2^{V(G)}$, что выполняются следующие условия:

1. Для любого i подграф $G[V_i]$ является полным двудольным графом.
2. Для любого ребра e графа G существует такое подмножество V_j, что граф $G[V_j]$ содержит e.

Количество графов в наименьшем ППДГ графа G обозначим через $ccbs(G)$. Задача о покрытии полными двудольными графами, называемая далее задачей ППДГ, состоит в том, чтобы по заданным графу G и числу k определить, выполняется ли неравенство $ccbs(G) \leq k$.

Лемма 1.14. *Для любого k класс $\mathbf{U}(k)$ является* ППДГ*-сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим граф $G \in \mathbf{U}(k)$. Этот граф можно считать связным. Покажем, что $\beta(G) = ccbs(G)$. Пусть $\{V_1, V_2, \ldots, V_{ccbs(G)}\}$ — наименьшее ППДГ графа G. Очевидно, что при любом i граф $G[V_i]$ является либо графом K_2, либо графом $K_{1,2}$, либо графом $K_{1,3}$. Для любого i в графе $G[V_i]$ выберем вершину наибольшей степени. Понятно, что построенное множество будет вершинным покрытием графа G. Таким образом, $\beta(G) \leq ccbs(G)$.

Пусть $\{v_1, v_2, \ldots, v_{\beta(G)}\}$ — наименьшее вершинное покрытие графа G. Для каждой вершины v_i этого множества рассмотрим множество $V_i = N[v_i]$. Ясно, что при любом i граф $G[V_i]$ принадлежит множеству $\{K_2, K_{1,2}, K_{1,3}\}$. Поэтому множество $\{V_1, V_2, \ldots, V_{\beta(G)}\}$ является ППДГ графа G. Отсюда, $\beta(G) \geq ccbs(G)$. Из обоих неравенств заключаем, что $\beta(G) = ccbs(G)$.

При любом k класс $\mathbf{U}(k)$ является ВП-сложным [25]. Отсюда и из равенства $\beta(G) = ccbs(G)$ следует, что при любом k класс $\mathbf{U}(k)$ ППДГ-сложный. Лемма доказана.

Разбиением на пути длины два (2-РП) графа G называется такое разбиение множества $V(G)$ на подмножества $V_1, V_2, \ldots, V_k$, что для любого i граф $G[V_i]$ изоморфен графу P_3. Задача о разбиении на пути длины 2 (задача 2-РП) состоит в том, чтобы по задаваемому графу G определить, содержит ли этот граф 2-РП.

(k, j)-*разбиением* графа G называется такое разбиение множества $V(G)$ на подмножества $V_1, V_2, \ldots, V_r$, что при любом i выполнено неравенство $|V_i| \leq k$ и общее количество ребер, имеющих концы в разных подмножествах, не превосходит j. Задача о разбиении графа (задача РГ) состоит в том, чтобы по задаваемым графу G, числам k и j определить, имеет ли данный граф (k, j)-разбиение.

Лемма 1.15. *Для любого k класс $\mathbf{U}(k)$ является* РГ-*сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что в любом классе графов $\mathbf{X} \subseteq Free(\{C_3\})$ задача 2-РП полиномиально сводима к задаче РГ. Пусть $G \in \mathbf{X}$. Ясно, что необходимым условием существования 2-РП в графе G является равенство $|V(G)| = 3s$. Предположим, что граф G содержит $(3, |E(G)| - 2s)$-разбиение на подмножества $V_1, V_2, \ldots, V_s$. Понятно, что при любом i граф $G[V_i]$ содержит ровно 2 ребра. Т.к. при любом i справедливо неравенство $|V_i| \leq 3$, то при любом i граф $G[V_i]$ изоморфен графу P_3. Таким образом, граф G содержит 2-РП. Очевидно, что если граф G содержит 2-РП, то этот граф содержит и $(3, |E(G)| - 2s)$-разбиение.

Из проделанных рассуждений следует, что в любом классе $\mathbf{X} \subseteq Free(\{C_3\})$ задача 2-РП полиномиально сводима к задаче РГ. Т.к. при любом k класс $\mathbf{U}(k)$ является 2-РП-сложным [25], то этот класс является РГ-сложным. Лемма доказана.

(b, s)-*разбиением на деревья* графа G называется такое разбиение множества $V(G)$ на подмножества $V_1, V_2, \ldots, V_s$, что при любом i подграф $G[V_i]$ является деревом и содержит не более b вершин. Задача о лесе с ограниченными компонентами, называемая далее задачей ЛОК, состоит в том, чтобы по задаваемым графу G, числам b и k определить, имеет ли граф (b, s)-разбиение на деревья для некоторого $s \leq k$.

Лемма 1.16. *Для любого k класс* $\mathbf{U}(k)$ *является* ЛОК-*сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что задача 2-РП в любом классе графов $\mathbf{X}$ полиномиально сводима к задаче ЛОК для графов того же класса. Отсюда и того, что при любом k класс $\mathbf{U}(k)$ является 2-РП-сложным, следует, что при любом k класс $\mathbf{U}(k)$ является ЛОК-сложным. Лемма доказана.

Разбиением на клики графа G называется такое разбиение множества $V(G)$ на подмножества $V_1, V_2, \dots, V_r$, что для любого i граф $G[V_i]$ является полным. Количество клик в наименьшем разбиении на клики (т.е. разбиении с минимальным числом множеств) графа G обозначим через $cp(G)$. Задача о разбиении на клики (задача РК) для данного графа G состоит в том, чтобы по заданным графу G и числу k определить, выполняется ли неравенство $cp(G) \leq k$.

1.6.2 Множества вершин и ребер

Разобщенным множеством графа G называется подмножество его вершин, порождающее подграф из $\mathbf{Deg}(1)$. Количество вершин в наибольшем разобщенном множестве графа G обозначим через $ds(G)$. Задача о разобщенном множестве (задача РМ) состоит в том, чтобы по заданным графу G и числу k определить, выполняется ли неравенство $ds(G) \geq k$.

Лемма 1.17. *Для любого s класс* $L(\mathbf{U}(s))$ *является* РМ-*сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = L(H)$ и $H \in \mathbf{U}(s)$. Обозначим через j^* такое наименьшее число, что граф H содержит $(3, j^*)$-разбиение на подмножества $V_1, V_2, \dots, V_r$.

Очевидно, что задача РМ в любом наследственном классе графов $\mathbf{X}$ полиномиально сводима к той же задаче в классе $\mathbf{X}^c$. Аналогичное замечание верно и для задачи РГ. Поэтому графы G и H можно считать связными. Ясно, что задача РМ для графа C_3 и задача РГ для графа $K_{1,3}$ решается за полиномиальное время. Таким образом, можно считать, что $G \neq C_3$, $H \neq K_{1,3}$. Тогда из леммы 1.1 следует, что любой граф из множества $\{G, H\}$ однозначно определяет другой. Граф G может быть построен из графа H за полиномиальное время и граф H может быть построен из G за полиномиальное время [50].

Ясно, что множество вершин графа G, соответствующих множеству $\bigcup\limits_{i=1}^{r} E(H[V_i])$, является разобщенным множеством графа G. Понятно также, что $|\bigcup\limits_{i=1}^{r} E(H[V_i])| = |E(H)| - j^*$. Таким образом, $ds(G) \geq |E(H)| - j^*$.

Рассмотрим M — наибольшее разобщенное множество графа G и построим $(3, |E(H)| -$

$ds(G))$-разбиение графа H. Пусть $H^{'}$ — такой подграф графа H, что $G[M]$ изоморфен $L(H^{'})$. Каждая компонента связности графа $H^{'}$ изоморфна либо графу P_2, либо графу P_3. Подмножества $(3, |E(H)| - ds(G))$-разбиения графа H соответствуют либо компонентам связности $H^{'}$, либо отдельным элементам из $V(H) \setminus V(H^{'})$. Отсюда, $j^* \leq |E(H)| - ds(G)$.

Из доказательства леммы 1.15 следует, что при любом s класс $\mathbf{U}(s)$ является РГ-сложным даже для случая $k = 3$. Отсюда и из проделанных рассуждений следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Независимым реберным доминирующим множеством (НРДМ) графа $G = (V, E)$ называется такое множество попарно несмежных ребер $E^{'} \subseteq E$, что любое ребро из множества $E \setminus E^{'}$ смежно хотя бы с одним ребром из $E^{'}$. Количество ребер в наименьшем НРДМ графа G будем обозначать через $eids(G)$. Задача о независимом реберном доминирующем множестве (задача НРДМ), называемая в [7] и в [30] задачей о минимальном по мощности максимальном паросочетании, состоит в том, чтобы по заданным графу G и числу k определить, выполняется ли неравенство $eids(G) \leq k$.

Лемма 1.18. *Пусть граф $G^{'}$ получен из графа G 3-подразбиением произвольного ребра, тогда $eids(G^{'}) = eids(G) + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что при 3-подразбиении ребра $e = (a, b)$ в граф G были введены три новые вершины a_1, c_1, b_1, где $(a, a_1) \in E(G^{'})$, $(a_1, c_1) \in E(G^{'})$, $(c_1, b_1) \in E(G^{'})$, $(b_1, b) \in E(G^{'})$. Пусть $E^{'}(G)$ — наименьшее НРДМ графа G. Построим некоторое НРДМ графа $G^{'}$. Если $e \in E^{'}(G)$, то удаляем ребро e из $E^{'}(G)$ и добавляем ребра (a, a_1) и (b_1, b). Если $e \in E^{'}(G)$, то в $E^{'}(G)$ имеется ребро, инцидентное либо a, либо b. В первом случае к $E^{'}(G)$ добавляем ребро (c_1, b_1), во втором случае к $E^{'}(G)$ добавляем ребро (a_1, c_1). В результате выполнения этих операций получается некоторое НРДМ графа $G^{'}$, состоящее из $eids(G) + 1$ ребер. Поэтому имеет место неравенство $eids(G^{'}) \leq eids(G) + 1$.

Докажем выполнение обратного неравенства. Пусть $E^{'}(G^{'})$ — наименьшее НРДМ графа $G^{'}$. Построим некоторое НРДМ графа G. Ясно, что в $E^{'}(G^{'})$ обязательно содержится хотя бы одно из ребер (a, a_1), (a_1, c_1), (c_1, b_1), (b_1, b). Тогда возможны только следующие случаи:

1. Если $(a, a_1) \in E^{'}(G^{'})$ и $(b_1, b) \in E^{'}(G^{'})$, то удаляем из $E^{'}(G^{'})$ ребра (a, a_1),(b_1, b) и добавляем ребро e.

2.а. Если $(a, a_1) \in E^{'}(G^{'})$, $(c_1, b_1) \in E^{'}(G^{'})$ и $E^{'}(G^{'})$ не содержит ребер, инцидентных вершине b, то удаляем из $E^{'}(G^{'})$ ребра (a, a_1), (c_1, b_1) и добавляем ребро e.

2.б. Если $(a, a_1) \in E^{'}(G^{'})$, $(c_1, b_1) \in E^{'}(G^{'})$ и $E^{'}(G^{'})$ содержит ребра, инцидентные вершине b, то во множестве инцидентных вершине a ребер (кроме (a, a_1)) находим ребро e^*, не инцидентное ни одному ребру из $E^{'}(G^{'}) \setminus \{(a, a_1)\}$. Такое ребро существует, т.к.

в противном случае множество $E^{'}(G^{'})$ не является минимальным — из него можно удалить ребра (a, a_1), (c_1, b_1) и добавить ребро (a_1, c_1). Удаляем из $E^{'}(G^{'})$ ребра (a, a_1), (c_1, b_1) и добавляем ребро e^*.

3. Если $(a_1, c_1) \in E^{'}(G^{'})$, $(b_1, b) \in E^{'}(G^{'})$, то рассмотрение этого случая симметрично случаям 2.а. и 2.б.

4. Если среди ребер (a, a_1), (a_1, c_1), (c_1, b_1), (b_1, b) в $E^{'}(G^{'})$ входит только одно ребро, то удаляем это ребро из $E^{'}(G^{'})$.

После выполнения операций получается некоторое НРДМ графа $G^{'}$, состоящее из $eids(G) + 1$ ребер, отсюда $eids(G) \geq eids(G^{'}) - 1$. Лемма доказана.

Лемма 1.19. *При любом k класс $\mathbf{U}(k)$ является* НРДМ*-сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G_s — граф, получаемый из графа $G \in \mathbf{Deg}(3)$ $3s$-подразбиением каждого ребра. Тогда $eids(G_s) = eids(G) + s|E(G)|$. Т.к. $G_s \in \mathbf{U}(3s)$, то задача НРДМ в классе графов $\mathbf{Deg}(3)$ полиномиально эквивалентна той же задаче в классе $\mathbf{U}(3s)$. Класс $\mathbf{Deg}(3)$ является НРДМ-сложным [7]. Таким образом, при любом k класс $\mathbf{U}(k)$ является НРДМ-сложным. Лемма доказана.

1.6.3 Задача о непересекающихся путях

Множество путей $\{Path_1, Path_2, \ldots, Path_k\}$ некоторого графа G будем называть НП$(s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_k, t_k)$*-системой*, если любые два его пути не имеют общих вершин и при любом i путь $Path_i$ соединяет вершины s_i и t_i графа G. Задача о непересекающихся путях (задача НП) состоит в том, чтобы по задаваемым графу G, его вершинам $s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_k, t_k$ определить, содержит ли граф НП$(s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_k, t_k)$-систему.

Лемма 1.20. *При любом r класс $\mathbf{U}(r)$ является* НП*-сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in \mathbf{Deg}(3)$ и граф G_r получается из графа G заменой каждого ребра путем длины $r+1$. Ясно, что для графа G и его вершин $s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_k, t_k$ НП$(s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_k, t_k)$-система существует тогда и только тогда, когда такая система существует для графа G_r и его вершин $s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_k, t_k$. Поскольку $G_r \in \mathbf{U}(r)$, то задача НП в классе графов $\mathbf{Deg}(3)$ полиномиально сводима к той же задаче в классе $\mathbf{U}(r)$. Отсюда следует, что при любом r класс $\mathbf{U}(r)$ является НП-сложным, т.к. класс $\mathbf{Deg}(3)$ является НП-сложным [47]. Лемма доказана.

1.6.4 Новые случаи граничности классов $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$

Основным результатом данного раздела является следующее утверждение.

Теорема 1.11. *Класс* $\mathbf{T}$ *является* ППДГ-*граничным,* РГ-*граничным,* ЛОК-*граничным,* НРДМ-*граничным,* НП-*граничным, а класс* $\mathbf{D}$ *является* РК-*граничным и* РМ-*граничным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 1.14, 1.15, 1.16, 1.19, 1.20 следует, что класс $\mathbf{T}$ является предельным для задач ППДГ, РГ, ЛОК, НРДМ, НП соответственно, а из леммы 1.17 следует, что класс $\mathbf{D}$ является предельным для задачи РМ. В доказательстве теоремы 11 работы [25] показано, что $\mathbf{D}$ является РК-предельным.

Известно, что при любом фиксированном t класс графов $\mathbf{TW}(3,t)$ является ППДГ-простым [30], РГ-простым [30], ЛОК-простым [30], НРДМ-простым [30], НП-простым [52], РК-простым [30]. Из работы [25] и работы [33] следует, что при любом t класс $\mathbf{TW}(3,t)$ является РМ-простым. Отсюда и из леммы 1.7 следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

1.7 О граничности классов $co(\mathbf{T})$ и $co(\mathbf{D})$

В некоторых случаях граничные классы можно получать, переходя к рассмотрению графов, являющихся дополнительными к графам некоторого граничного класса. Особенно просто эта идея работает для пар *комплементарных задач*, т.е. таких двух задач, что для любого класса $\mathbf{X}$ одна из них полиномиально эквивалентна другой в классе $co(\mathbf{X})$. Именно, если Π_1 и Π_2 — пара комплементарных задач и $\{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots\}$ — все множество Π_1-граничных классов, то множество всех Π_2-граничных классов совпадает с $\{co(\mathbf{B}_1), co(\mathbf{B}_2), \ldots\}$.

Классическим примером пары комплементарных задач являются задачи о независимом множестве и о наибольшей клике (последняя для заданного графа состоит в том, чтобы найти в нем наибольшую клику). Поскольку класс $\mathbf{T}$ является НМ-граничным классом, то класс $co(\mathbf{T})$ является граничным для задачи о наибольшей клике.

Другим примером пары комплементарных задач являются задачи о разбиении на клики и о вершинной раскраске (последняя еще называется задачей о хроматическом числе). *Хроматическим числом графа* G называется такое минимальное k, для которого существует разбиение множества $V(G)$ на k независимых подмножеств. Задача о вершинной раскраске состоит в том, чтобы для заданного графа G и числа k определить, верно ли, что его хроматическое число не больше k. Класс $\mathbf{D}$ является РК-граничным (теорема 1.11). Поэтому класс $co(\mathbf{D})$ является граничным для задачи о вершинной раскраске.

Оставшаяся часть этого раздела посвящена еще одной демонстрации идеи дополнительности — доказательству того, что класс $co(\mathbf{T})$ является граничным для задачи об ахроматическом числе графа.

Разбиение множества вершин графа на подмножества называется *ахроматическим*, если любое подмножество является независимым, а объединение любых двух подмножеств уже нет. *Ахроматическим числом графа* G (обозначаемом через $ach(G)$) называется такое максимальное число k, что существует ахроматическое разбиение вершин этого графа на k подмножеств. Задача об ахроматическом числе графа (задача АХЧ) для заданных графа G и числа k состоит в том, чтобы определить, выполняется ли неравенство $ach(G) \leq k$.

Лемма 1.21. *Для любого графа* $G \in Free(\{\overline{C}_3\})$ *справедливо равенство* $ach(G) = |V(G)| - eids(\overline{G})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала множество $E^{'}$ — произвольное наименьшее НРДМ графа $\overline{G}$. Понятно, что множество вершин в этом графе, не инцидентных ребрам из $E^{'}$, является независимым множеством (в противном случае некоторое ребро графа $\overline{G}$ не доминируется ни одним ребром из $E^{'}$). Вместе с тем, для любого ребра $e = (x, y) \in E(\overline{G})$ и любой вершины $z \in V(\overline{G})$, не инцидентной e, либо $(x, z) \notin E(\overline{G})$, либо $(y, z) \notin E(\overline{G})$. Таким образом, существует ахроматическое разбиение множества $V(G)$ на подмножества $V_1, V_2, \ldots, V_{|V(G)|-eids(\overline{G})}$. Подмножества $V_1, V_2, \ldots, V_{eids(\overline{G})}$ соответствуют парам вершин, инцидентным ребрам из $E^{'}$, а $V_{eids(\overline{G})+1}, V_{eids(\overline{G})+2}, \ldots, V_{|V(G)|-eids(\overline{G})}$ соответствуют одиночным вершинам, не ицидентным таким ребрам. Отсюда следует, что $ach(G) \geq |V(G)| - eids(\overline{G})$.

Обратное неравенство может быть легко доказано по аналогии с проведенными рассуждениями с использованием соображений дополнительности. Отсюда следует, что $ach(G) = |V(G)| - eids(\overline{G})$. Лемма доказана.

Теорема 1.12. *Класс* $co(\mathbf{T})$ *является* АХЧ-*граничным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку при любом k класс $\mathbf{U}(k)$ является НРДМ-сложным и $\mathbf{U}(k) \subseteq Free(\{C_3\})$, то из предыдущей леммы следует, что класс $co(\mathbf{U}(k))$ является АХЧ-сложным при любом k. Т.к. $co(\mathbf{U}(1)) \supseteq co(\mathbf{U}(2)) \supseteq \ldots$ и $co(\mathbf{T}) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} co(\mathbf{U}(i))$, то класс $co(\mathbf{T})$ является АХЧ-предельным. Докажем его граничность. Предположим противное, т.е. что существует АХЧ-граничный класс $\mathbf{B}$, являющийся собственным подклассом класса $co(\mathbf{T})$. Поскольку $\mathbf{B} \subseteq Free(\{\overline{C}_3\})$, то в любой сходящейся к $\mathbf{B}$ монотонной последовательности из сложных классов найдется класс, являющийся подклассом $Free(\{\overline{C}_3\})$. Отсюда и из леммы 1.21 следует, что класс $co(\mathbf{B})$ является НРДМ-предельным. Получаем противоречие с предположением, поскольку $co(\mathbf{B}) \subset \mathbf{T}$, а $\mathbf{T}$ — НРДМ-граничный класс (теорема 1.11). Таким образом, $co(\mathbf{T})$ — АХЧ-граничный класс. Теорема доказана.

Глава 2

НМ-граничные классы относительно класса планарных графов

2.1 Гипотеза В. Е. Алексеева и ее варианты

В предыдущей главе было рассмотрено понятие П-граничного класса графов и обоснована его полезность (теорема 1.2) при анализе сложности задач на графах. Там же к известным случаям граничности классов графов **T** и **D** было добавлено несколько новых. Наряду с этими результатами — описаниями фрагментов множества граничных классов для различных задач на графах интересно было бы получить полное такое описание хотя бы для одной задачи. Направление поиска таких задач подсказано результатами работы [24]. В этой работе было впервые введено понятие граничного класса графов (в старом смысле) и доказано, что класс **T** является граничным (в старом смысле) для задачи о независимом множестве. Таким образом, задачу НМ можно считать пионерской и при новом понимании граничного класса.

Напомним, что независимым множеством в обыкновенном графе называется множество попарно несмежных вершин. Задача о независимом множестве состоит в нахождении в данном графе наибольшего независимого множества.

Возможно, что класс **T** является единственным НМ-граничным. Доказательство этого предположения В. Е. Алексеева эквивалентно доказательству того факта, что для любого $G \in \mathbf{T}$ класс $Free(\{G\})$ является НМ-простым [24]. О трудности проблемы говорит тот факт, что в настоящее время неизвестен сложностной статус задачи о независимом множестве для классов $Free(\{P_5\})$ и $Free(\{T_{1,2,2}\})$. Однако, НМ-простота классов графов $Free(\{P_4\})$ [34] и $Free(\{T_{1,1,2}\})$ [2] дает некоторую надежду на то, что гипотеза В. Е. Алексеева справедлива.

В то же время, если рассматривать какое-либо собственное подсемейство семейства наследственных классов графов, то можно надеяться на исчерпывающее решение проблемы. Так, в [24] доказано, что среди сильно наследственных классов графов класс

$\mathbf{T}$ является единственным НМ-граничным.

При сужениях тех или иных задач на графах естественным образом возникает понятие относительного граничного класса, обобщающее понятие просто граничного класса.

2.1.1 Относительные Π-граничные классы

Пусть $\mathbf{Y}$ — какой-нибудь Π-сложный класс. Наследственный класс графов $\mathbf{X}$ назовем Π-*граничным относительно класса* $\mathbf{Y}$, если существует такая последовательность $\mathbf{X}_1 \supseteq \mathbf{X}_2 \supseteq \ldots$ Π-сложных подклассов класса $\mathbf{Y}$, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{X}_i = \mathbf{X}$. Минимальный Π-предельный относительно $\mathbf{Y}$ класс назовем Π-*граничным относительно* $\mathbf{Y}$ *классом.* Класс $\mathbf{X}$ называется *конечно определенным относительно* $\mathbf{Y}$, если $\mathbf{X} = \mathbf{Y} \cap Free(\mathbf{M})$, где $\mathbf{M}$ — некоторое конечное множество графов.

Для относительных граничных классов справедлив аналог теоремы 1.2, который может быть доказан почти также.

2.1.2 Рассматриваемый случай

Класс $\mathbf{T}$ является НМ-граничным относительно **Planar** классом. Доказательство этого факта почти дословно повторяет соответствующее доказательство из [24]. Предположение В. Е. Алексеева может быть перенесено на случай НМ-граничных классов относительно **Planar**. Данная глава настоящего издания посвящена вопросу о единственности класса $\mathbf{T}$, как НМ-граничного относительно класса планарных графов.

Рассмотрение именно такого случая подсказано результатами работы [44]. В этой работе исследовались граничные классы для задачи о доминирующем множестве (задачи ДМ) относительно класса планарных графов. Там же было показано, что это множество исчерпывается классами $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$. Однако, множество ДМ-граничных классов графов не совпадает с множеством $\{\mathbf{T}, \mathbf{D}\}$. Так, в работе [26] описан ДМ-граничный класс, отличный от классов $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$.

Нет никакой гарантии, что множество НМ-граничных классов совпадает с множеством НМ-граничных классов относительно класса планарных графов. Несмотря на это обстоятельство, единственность класса $\mathbf{T}$, как НМ-граничного относительно **Planar**, может служить косвенным подтверждением справедливости гипотезы В. Е. Алексеева.

Вопрос о существовании НМ-граничных относительно **Planar** классов, отличных от класса $\mathbf{T}$, эквивалентен вопросу о существовании такого $G \in \mathbf{T}$, что класс **Planar** $\cap$ $Free(\{G\})$ является НМ-сложным. Хотя единственность класса $\mathbf{T}$ и в рассматриваемом случае доказать не удается, имеется более значительный прогресс к достижению этой цели, чем в случае НМ-граничных классов. Именно, удается показать НМ-простоту некоторых классов графов указанного вида. Изложение данных результатов составляет содержание оставшейся части этой главы монографии.

2.2 О сложности задачи НМ в классе планарных графов, не содержащих длинных порожденных путей

В данном разделе для произвольного k рассматривается задача НМ в классе графов $\mathbf{Planar} \cap Free(\{P_k\})$. Далее будет показано, что при любом фиксированном k этот класс является НМ-простым.

Лемма 2.1. *При любом фиксированном d планарные графы, диаметр которых не превосходит d, образуют класс графов с полиномиально разрешимой задачей* НМ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [51], что древесная ширина любого планарного графа с радиусом r не превосходит $3r + 1$. Известно также [30], что для любого фиксированного t задача НМ полиномиально разрешима за линейное от числа вершин время в классе графов $\mathbf{TW}(\infty, t)$. Из этих двух утверждений следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Утверждение леммы 2.1 можно существенно усилить. Так, из работ [29, 51] следует, что для любого фиксированного k задача НМ в классе графов $\{G \in \mathbf{Planar} : diam(G) < k \log_2(|V(G)|)\}$ полиномиально разрешима.

Очевидно, что для любого k диаметр произвольного связного графа из $\mathbf{Planar} \cap Free(\{P_k\})$ не превосходит k. Отсюда и из предыдущей леммы следует, что при любом фиксированном k класс $\mathbf{Planar} \cap Free(\{P_k\})$ является НМ-простым.

2.3 Полиномиальный алгоритм решения задачи НМ в классе планарных графов без порожденного подграфа $T_{1,1,i}$.

2.3.1 Некоторые определения и вспомогательные результаты

Предположим, что имеется плоский граф G. Определим понятие внешнепланарности графа G. Из плоской укладки этого графа удалим вершины, принадлежащие внешней грани. Множество этих вершин обозначим через V_1. С оставшейся укладкой будем выполнять аналогичную операцию до тех пор, пока множество вершин не станет пустым. В результате мы получим разбиение множества вершин графа G на подмножества $V_1, V_2, \dots, V_k$, которые будем называть *уровнями*. Величина k называется *внешнепланарностью* графа G, которая далее обозначается через $outpl(G)$.

Граф называется *внешнепланарным*, если он изоморфен некоторому плоскому графу единичной внешнепланарности.

Разделяющая клика графа — множество вершин, порождающее полный подграф, удаление которого приводит к увеличению числа компонент связности. *C-блоком* [24] называется максимальный порожденный подграф данного графа, не имеющий разделяющей клики. Пусть $\mathbf{K}$ — некоторый класс графов, тогда обозначим через $[\mathbf{K}]_C$ множество всех графов, у которых каждый C-блок принадлежит $\mathbf{K}$.

Лемма 2.2[24]. *Если* $\mathbf{X}$ — НМ-*простой класс графов, то* $[\mathbf{X}]_C$ *также является* НМ-*простым.*

Обозначим через $[\mathbf{K}]^r$ множество всех графов, из которых можно удалить не более r вершин так, чтобы получился граф из $\mathbf{K}$. Очевидно, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Если* $\mathbf{K}$ — НМ-*простой класс, то для любого фиксированного* r *класс* $[\mathbf{K}]^r$ *является* НМ-*простым.*

Лемма 2.4. *Если* $G \in Free(\{T_{1,1,i}\})^c$ $(i \geq 2)$, *то либо* $G \in Free(\{T_{1,1,1}\})$, *либо* $diam(G) < 2i + 3$.

Доказательство. Предположим, что граф G не принадлежит классу $Free(\{T_{1,1,1}\})$, тогда G содержит порожденный подграф $T_{1,1,1}$. В этом порожденном подграфе вершины степени 1 обозначим через x_1, x_2, x_3, а вершину степени 3 обозначим через y. Рассмотрим вершину z, наиболее удаленную от y, и кратчайший простой путь $P = (v_1, v_2, \ldots, v_s)$, где $v_1 = y, v_s = z$. Покажем, что $s \leq i+2$. Предположим, что $s \geq i+3$. Возможны два случая:

1. Одна из вершин x_1, x_2, x_3 принадлежит этому пути. Пусть, для определенности, это вершина x_3 (т.е. $v_2 = x_3$). Рассмотрим вершину x_1. Вершина x_1 не может быть смежна с вершиной v_i, для которой $i \geq 4$ (иначе в графе G существовал бы более короткий путь из y в v_s чем P). То же верно для вершины x_2. Если ни одна из вершин x_1, x_2 не смежна с вершиной v_3, то граф G содержит порожденный подграф $T_{1,1,i}$ (порожден вершинами $x_1, x_2, y, v_2, \ldots, v_{i+1}$). Если хотя бы одна из вершин x_1, x_2 смежна с вершиной v_3 (пусть, для определенности, это вершина x_1), то граф G содержит порожденный множеством вершин $\{x_1, x_3, v_3, \ldots, v_{i+3}\}$ подграф $T_{1,1,i}$.

2. Ни одна из вершин x_1, x_2, x_3 не принадлежит пути P. По тем же причинам, что и в пункте 1, ни одна из вершин x_1, x_2, x_3 не смежна с такой вершиной v_i, что $i \geq 4$. Если ровно одна из вершин x_1, x_2, x_3 смежна с вершиной v_3 (пусть это будет вершина x_1), то граф G содержит порожденный подграф $T_{1,1,i}$ (порожден вершинами

$x_2, x_3, y, x_1, v_3, \ldots, v_{i+1}$). Если две из вершин x_1, x_2, x_3 смежны с вершиной v_3 (пусть это вершины x_1 и x_2), то G содержит порожденный вершинами $x_1, x_2, v_3, \ldots, v_{i+3}$ подграф $T_{1,1,i}$. Остается рассмотреть случай, когда ни одна из вершин x_1, x_2, x_3 не смежна с v_3. Понятно, что если не более чем одна из вершин x_1, x_2, x_3 смежна с v_2, то граф G содержит порожденный подграф $T_{1,1,i}$. Предположим, что среди этих трех вершин не менее двух (пусть это будут x_1 и x_2) смежны с v_2. Тогда граф G содержит порожденный подграф $T_{1,1,i}$ (порожден множеством вершин $\{x_1, x_2, v_2, \ldots, v_{i+2}\}$).

Мы показали, что для любой вершины t неравенство $d(y,t) \leq i+1$ является справедливым. Из неравенства треугольника следует, что для любых двух вершин u, v справедливо неравенство $d(u,v) \leq d(u,y) + d(y,v) \leq 2i+2$. Лемма доказана.

Заметим, что из полученных результатов следует НМ-простота класса **Planar** $\cap$ $Free(\{T_{1,1,i}\})$ при любом фиксированном i. Действительно, для данного графа G за время $O(n^4)$ ($n = |V(G)|$) можно определить, принадлежит ли этот граф классу $Free(\{T_{1,1,1}\})$. Очевидно, что компоненты связности графа G можно найти за время $O(n^2)$. Задачу НМ для графов класса $Free(\{T_{1,1,1}\})$ можно решить за время $O(n^7)$ [48]. Отсюда и из лемм 2.1, 2.4 следует, что для любого фиксированного i задачу о независимом множестве в классе графов **Planar** $\cap$ $Free(\{T_{1,1,i}\})$ можно решить за время $O(n^7)$.

В следующем подразделе будет доказан тот же самый результат, но без использования понятия древесной ширины графа. Именно, для решения задачи НМ в классе планарных графов без порожденного подграфа $T_{1,1,i}$ будет предложен некоторый полиномиальный алгоритм.

Из леммы 2.4 легко следует лемма 2.5.

Лемма 2.5. *Если G — связный граф и $G \in$ **Planar** $\cap$ $(Free(\{T_{1,1,i}\}) \setminus Free(\{T_{1,1,1}\}))$ $(i \geq 2)$, то $outpl(G) < 2i+3$.*

Лемма 2.6. *Класс внешнепланарных графов является* НМ-*простым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы 2.6 следует из леммы 2.2, т.к. внешнепланарный граф с более чем двумя вершинами, не имеющий разделяющих клик, является простым циклом. Лемма доказана.

Если граф $G \in$ **Planar** не содержит разделяющих клик, а V_1 — первый уровень G, то граф $G[V_1]$ является простым циклом. Для каждой вершины $x \in V(G) \setminus V_1$ через $N(x, V_1)$ обозначим множество всех вершин из V_1, смежных с x. Пусть $deg(x, V_1) = |N(x, V_1)|$. Для каждой вершины $x \in V(G) \setminus V_1$ через $m(x)$ обозначим наибольшее количество последовательных вершин из V_1, не смежных с x.

Лемма 2.7. *Пусть граф $G \in$ **Planar** $\cap Free(T_{1,1,i})$ $(i \geq 2)$, $outpl(G) > 1$, G не содержит разделяющих клик и V_1 — первый уровень G. Тогда, если для некоторой вершины $x \in V(G) \setminus V_1$ выполнено неравенство $deg(x, V_1) > 5$, то $m(x) < i + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда существуют такие последовательно стоящие вершины $a, v_1, \ldots, v_s, b$ $(s \geq i + 1)$ первого уровня графа G, что среди этих вершин x смежна только с a и b. Т.к. $deg(x, V_1) > 5$, то в $N(x, V_1) \setminus \{a, b\}$ существуют такие вершины c и d, что вершины a, c, d являются попарно несмежными. При этом граф G содержит порожденный множеством вершин $\{c, d, x, a, v_1, \ldots, v_{i-1}\}$ подграф $T_{1,1,i}$. Получаем противоречие. Лемма доказана.

2.3.2 Эффективный алгоритм решения задачи НМ в рассматриваемом случае

Обозначим через $\mathbf{Q}_{i,r}$ подмножество класса **Planar** $\cap Free(T_{1,1,i})$, состоящее из графов внешнепланарности не более чем r. Понятно, что при любых i и r класс $\mathbf{Q}_{i,r}$ является наследственным. В основе доказательства следующей леммы лежит алгоритмический прием, базирующийся на общем методе «разделяй и властвуй». Этот прием может оказаться полезным при решении разнообразных задач в классе планарных графов.

Лемма 2.8. *Для любых фиксированных натуральных i и r класс $\mathbf{Q}_{i,r}$ является НМ-простым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Класс $Free(\{T_{1,1,1}\})$ является НМ-простым. Отсюда следует, что при любом r класс $\mathbf{Q}_{1,r}$ является НМ-простым.

Пусть $i \geq 2$. Доказательство леммы проведем индукцией по r при фиксированном значении i. Из леммы 2.6 следует, что для любого фиксированного i класс $\mathbf{Q}_{i,1}$ является НМ-простым.

Предположим, что для любого фиксированного i класс $\mathbf{Q}_{i,r}$ является НМ-простым. Покажем, что это утверждение справедливо для класса $\mathbf{Q}_{i,r+1}$. Пусть G — связный граф из $\mathbf{Q}_{i,r+1}$. Можно считать, что $G \notin Free(\{T_{1,1,1}\})$. Из леммы 2.2 следует, что граф G можно считать C-блоком. Тогда из леммы 2.4 следует, что $diam(G) < 2i + 3$. Пусть V_1 — первый уровень графа G. Если $|V_1| \leq 2i + 3$, то $G \in [\mathbf{Q}_{i,r}]^{2i+3}$. Из леммы 2.3 следует, что класс $[\mathbf{Q}_{i,r}]^{2i+3}$ НМ-простой. Далее будем считать, что $|V_1| > 2i + 3$.

Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_t$ — все вершины из V_1 и пусть они покрашены в черный цвет. Рассмотрим вершины v_1 и $v_{[t/2]}$. Пусть P — произвольный простой путь из v_1 в $v_{[t/2]}$. Понятно, что длина этого пути не больше $2i + 2$. Рассмотрим всевозможные независимые множества подграфа, порожденного множеством вершин этого пути. Для каждого такого множества S рассмотрим граф $G'(S) = G[(V(G) \setminus (N(S) \cup V(P))]$, где $V(P)$ — множество вершин пути P, $N(S)$ — множество тех вершин графа G, которые смежны хотя бы с одной вершиной из множества S. Ясно, что зная решение задачи НМ для графов $G'(S)$ для всех S, можно за время $O(1)$ найти решение задачи НМ для графа G. Пусть $G_1(S), \dots, G_p(S)$ — те компоненты связности графа $G'(S)$, которые имеют внешнепланарность, равную $r+1$ (остальные компоненты принадлежат классу $\mathbf{Q}_{i,r}$). Если множество S содержит такую вершину x, что $deg(x, V_1) > 5$, то ввиду леммы 2.7 каждый из этих графов содержит не более чем i черных вершин. Таким образом, каждый из этих графов принадлежит НМ-простому классу $[\mathbf{Q}_{i,r}]^i$. Если такой вершины не найдется, то $p \leq 5|S| \leq 10i + 15$. Каждый из графов $G_1(S), \dots, G_p(S)$ содержит не более $[t/2]+1$ черных вершин, причем в каждом из них на первом уровне все черные вершины стоят последовательно. К каждому из этих графов применимы те же действия, что и к графу G (т.е. если рассматриваемый граф $G_i(S)$ не принадлежит ни классу $Free(\{T_{1,1,1}\})$, ни классу $[\mathbf{Q}_{i,r}]^{2i+3}$, то концы пути P_i следует выбирать по следующему правилу — на первом уровне графа $G_i(S)$ такие две вершины, что одна из них является черной, делящей последовательно стоящие черные вершины на две «дуги», отличающиеся не более чем на одну вершину.)

Таким образом, всю процедуру решения задачи НМ для графа G можно представить в виде дерева решений. Листья этого дерева соответствуют графам из классов $[\mathbf{Q}_{i,r}]^{2i+3} \setminus Free(\{T_{1,1,1}\})$ и $Free(\{T_{1,1,1}\})$. Внутренние узлы дерева соответствуют графам, не принадлежащим классу $Free(\{T_{1,1,1}\})$, содержащим не менее $2i+3$ черных вершин и имеющим внешнепланарность, равную $r+1$. Т.к. множество черных вершин каждый раз делится на две почти равные части, то высота данного дерева ограничена сверху величиной $\lceil \log_2(n) \rceil$.

Оценим в дереве решений общее количество внутренних узлов. Каждый внутренний узел имеет не более чем $c = (10i+15)2^{2i+3}$ непосредственных потомков, являющихся внутренними узлами. Таким образом, общее количество внутренних узлов в дереве решений не превосходит $c^{\lceil \log_2(n) \rceil + 1}$, т.е. ограничено полиномом от n. Общее число потомков каждого внутреннего узла, являющихся листьями, не превосходит n. Поэтому число узлов в дереве решений ограничено сверху полиномом от n. Лемма доказана.

Основным результатом этого раздела является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Для любого фиксированного i класс* $\mathbf{Planar} \cap Free(\{T_{1,1,i}\})$ *является* НМ-*простым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы следует из лемм 2.5 и 2.8, т.к. любой связный граф из $\mathbf{Planar} \cap Free(\{T_{1,1,i}\})$ принадлежит либо НМ-простому классу $Free(\{T_{1,1,1}\})$, либо НМ-простому классу $\mathbf{Q}_{i,2i+2}$. Теорема доказана.

2.4 О сложности задачи о независимом множестве в классе планарных графов без порожденного подграфа $T_{1,2,k}$

В настоящем разделе будет показано, что для любого фиксированного k класс **Planar**$\cap$ $Free(\{T_{1,2,k}\})$ является НМ-простым. Доказательство основано на некотором свойстве задачи о независимом множестве в классе планарных графов без порожденной *звезды* S_i, т.е. графа, получаемого подразбиением каждого ребра графа $K_{1,i}$. Это свойство излагается и доказывается в следующем подразделе.

2.4.1 Планарные графы, не содержащие больших порожденных звезд

Для любого $i \geq 3$ неизвестно, является ли класс **Planar** $\cap$ $Free(\{S_i\})$ НМ-простым или НМ-сложным. В этом подразделе будет только доказано, что для произвольного фиксированного i задача НМ в классе графов **Planar** $\cap$ $Free(\{S_i\})$ полиномиально эквивалентна той же задаче для графов из этого класса, степени вершин которых ограничены некоторой константой, зависящей только от i. Этот факт будет затем использован при доказательстве основного результата настоящего раздела. Он понадобится также в следующем разделе для доказательства основного утверждения всей главы.

На первом этапе нашим главным алгоритмическим инструментом будут сжатия, описанные в работе [1]. *Сжатием* называется отображение множества вершин графа в себя, не являющееся автоморфизмом, при котором любые две различные несмежные вершины переходят в различные и несмежные. Таким образом, сжатие преобразует граф в его порожденный подграф, при этом, очевидно, сохраняется размер наибольшего независимого множества. Здесь мы будем использовать только сжатия первого и второго порядков, т.е. такие, при которых все вершины, кроме одной или двух, остаются неподвижными.

Сжатие φ первого порядка записывается в виде $\binom{a}{b}$, это означает, что $\varphi(a) = b$, а остальные вершины неподвижны. Такое преобразование действительно является сжатием тогда и только тогда, когда $N(b) \setminus \{a\} \subseteq N(a) \setminus \{b\}$.

Преобразование $\binom{a\ b}{c\ d}$ ($\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$, остальные неподвижны) является сжатием второго порядка, если

- $c \neq d$;
- в графе есть ребра (a, c) и (b, d) и нет ребер (a, b) и (c, d);
- каждая вершина, смежная с вершиной c, кроме a и b, смежна и с a;

- каждая вершина, смежная с вершиной d, кроме a и b, смежна и с b.

Граф назовем *несжимаемым*, если для него нет сжатий первого и второго порядка. Несжимаемый подграф данного графа, получающийся из него последовательностью сжатий первого и второго порядка, называется *2-основой* графа. Граф может иметь несколько 2-основ (например, у графа C_4 их две), но, как показано в [1], все они изоморфны. Очевидно, 2-основа графа может быть найдена за полиномиальное время.

Лемма 2.9. *Пусть G — несжимаемый граф из* $\mathbf{Planar} \cap Free(\{S_i\})$*, a и b — его вершины, $d(a,b) = 2$. Тогда $|N(a) \cap N(b)| \leq 4i + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вершину $x \in N(a) \cap N(b)$ назовем

- *особой*, если каждая смежная с x вершина, кроме a и b, принадлежит $N(a) \cap N(b)$;
- *a-чистой* (*b-чистой*), если существует вершина, смежная с x и несмежная с вершиной a (с вершиной b).

Отметим, что каждая вершина из $N(a) \cap N(b)$ принадлежит к одной из этих трех категорий. Оценим число вершин каждого типа.

Допустим, имеется четыре особые вершины. Тогда, ввиду планарности графа G, среди них найдутся две несмежные. Пусть это вершины x и y. Но тогда отображение $\binom{a\ b}{x\ y}$ является сжатием. Следовательно, имеется не больше трех особых вершин.

Допустим, имеется $2i$ a-чистых вершин. Рассмотрим какую-нибудь плоскую укладку графа G. Она определяет циклическое упорядочение ребер, инцидентных каждой вершине, а следовательно, и смежных вершин. Пусть $x_1, \ldots, x_{2i}$ — a-чистые вершины, расположенные в циклическом порядке, определяемом данной укладкой, относительно вершины a. Пусть y_j — произвольная вершина, смежная с x_j и несмежная с a. Некоторые из вершин множества $\{y_1, y_2, \ldots, y_{2i}\}$ могут совпадать, но вершины $y_1, y_3, y_5, \ldots, y_{2i-1}$ попарно различны и не смежны между собой. Тогда множество $\{a, x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{2i-1}, y_1, y_3, y_5, \ldots, y_{2i-1}\}$ порождает подграф S_i. Таким образом, имеется не более $2i-1$ a-чистых и не более $2i-1$ b-чистых вершин, а всего не более $4i+1$ вершин в $N(a) \cap N(b)$. Лемма доказана.

Лемма 2.10. *В несжимаемом графе из* $\mathbf{Planar} \cap Free(\{S_i\})$ *степень каждой вершины не превосходит $16i^2 - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a — вершина степени d в несжимаемом графе $G \in \mathbf{Planar} \cap Free(\{S_i\})$. Рассмотрим двудольный подграф H, образованный множествами вершин $A = N(a)$, $B = N_2(a)$ и всеми ребрами графа G, соединяющими вершины из A

с вершинами из B. Пусть π — мощность наибольшего паросочетания, а β — мощность наименьшего вершинного покрытия графа H. По теореме Кенига $\pi = \beta$.

Если вершина $x \in A$ не смежна ни с одной вершиной из B, то отображение $\binom{a}{x}$ является сжатием. Следовательно, каждая вершина из A смежна хотя бы с одной вершиной из B и в графе H имеется d ребер, попарно не имеющих общих вершин в множестве A. По лемме 2.9 каждая вершина из множества B имеет в графе H степень не более $4i+1$. Значит, для того, чтобы покрыть эти d ребер, требуется не менее $\frac{d}{4i+1}$ вершин. Следовательно, $\pi \geq \frac{d}{4i+1}$.

Возьмем в графе H какое-либо паросочетание с π ребрами и рассмотрим планарный граф H', полученный из графа H стягиванием всех ребер этого паросочетания. Если $d \geq (4i+1)(4i-1)+1$, то в графе H' не менее $4i$ вершин. Из теоремы о четырех красках следует, что в графе H' имеется независимое множество, состоящее из i вершин. Вершинам этого множества в графе H соответствуют $2i$ ребер, образующие вместе с инцидентными им вершинами порожденный подграф iK_2. Но тогда эти $2i$ вершин вместе с вершиной a порождают в графе G звезду S_i. Лемма доказана.

2.4.2 Планарные графы без порожденного подграфа $T_{1,2,k}$

В работе [46] доказано, что для любых фиксированных Δ и k класс всех графов, у которых степени вершин не превосходят Δ и которые не содержат $T_{1,k,k}$ в качестве порожденного подграфа, НМ-простой. Отсюда и из леммы 2.10 следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.11. *Класс* **Planar** $\cap$ $Free(\{T_{1,2,2}\})$ *является* НМ-*простым.*

Далее доказывается более общий результат.

Теорема 2.2. *При любом фиксированном k класс* **Planar** $\cap$ $Free(\{T_{1,2,k}\})$ *является* НМ-*простым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть связный граф $G \in$ **Planar** $\cap$ $Free(\{T_{1,2,k}\})$. Из леммы 2.2 следует, что граф G можно считать C-блоком. Если в этом графе нет порожденного подграфа $T_{1,2,2}$, то можно к нему применить полиномиальный алгоритм для класса **Planar** $\cap$ $Free(\{T_{1,2,2}\})$, существующий согласно лемме 2.11. Далее покажем, что если в графе G имеется порожденный подграф $T_{1,2,2}$, то его радиус не превосходит $k+2$.

Пусть в графе G имеется подграф $T_{1,2,2}$, порожденный множеством вершин $S = \{a, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2\}$ и имеющий ребра (a, b_1), (a, b_2), (a, b_3), (b_1, c_1), (b_2, c_2). Докажем, что в графе G расстояние от вершины a до любой другой вершины не превосходит $k+2$. Пусть d — вершина, не принадлежащая множеству S. Среди кратчайших путей, соединяющих вершины a и d, выберем путь, проходящий через наибольшее число вершин множества S.

Очевидно, таких вершин не может быть больше трех. Пусть $P = (x_0, x_1, \dots, x_t)$ — этот путь, $x_0 = a$, $x_t = d$. Ребро, не принадлежащее пути P и соединяющее вершину этого пути с вершиной из S, будем называть *хордой.* Если (x_i, y) — хорда ($y \in S$), то $i \le 3$, иначе получился бы более короткий путь из a в d. Предположим, что $t \ge k+3$. Рассмотрим различные варианты взаимоотношений пути P с вершинами из S.

1. Путь P проходит через три вершины множества S. Имеется два эквивалентных варианта, рассмотрим один из них: $x_1 = b_1$, $x_2 = c_1$.

   1.1. Хорды отсутствуют. Тогда множество S вместе с вершинами $x_3, \dots, x_k$ порождает $T_{1,2,k}$.

   1.2. Имеются хорды. Тогда единственной хордой может быть только (c_2, x_3). Если есть хорда (c_2, x_3), то вершины $c_2, x_1, x_2, \dots, x_{k+3}$ порождают подграф $T_{1,2,k}$.

   В дальнейшем будем рассматривать только один из ряда аналогичных случаев и перечислять вершины, которые нужно удалить для того, чтобы оставшиеся вершины множества S вместе с вершинами пути P (не обязательно всеми) порождали подграф $T_{1,2,k}$. Например, в случае 1.2 нужно удалить вершины a, b_2, b_3.

2. Путь P проходит через две вершины множества S, причем $x_1 = b_1$. Если хорды отсутствуют, удаляем b_3 и c_2. Если есть хорда из вершины x_3 в какую-нибудь из вершин c_1, c_2, то получается путь той же длины из a в d, проходящий через три вершины множества S. Наличие хорды из x_3 в какую-нибудь из вершин b_2, b_3 привело бы к образованию более короткого пути из a в d чем P. Следовательно, могут быть только хорды из вершины x_2.

   2.1. Есть хорда (x_2, c_2). Удаляем вершины b_2, b_3, c_1.

   2.2. Нет хорды (x_2, c_2), есть хорда (x_2, b_2). Удаляем вершины a, b_3, c_1.

   2.3. Нет хорд (x_2, c_2) и (x_2, b_2), есть хорда (x_2, b_3). Если есть хорда (x_2, c_1), то удаляем вершины b_1, b_2, c_2, а если ее нет, удаляем a, b_2, c_2.

   2.4. Нет хорд (x_2, c_2), (x_2, b_2), (x_2, b_3). Удаляем вершину c_1.

3. Путь P проходит через вершину b_3 и не существует путей той же длины из a в d, проходящих через b_1 или b_2. Если нет хорд, то удаляем c_1. Хорд из вершины x_3 быть не может по тем же причинам, что и в пункте 2. Значит, могут быть только хорды из вершины x_2. Если такая хорда соединяет x_2 с одной из вершин b_1, b_2, то образуется путь той же длины, проходящий через эту вершину. Остается рассмотреть хорды (x_2, c_1) и (x_2, c_2). Если есть обе эти хорды, то удаляем вершины a, b_2, b_3, а если есть только хорда (x_2, c_1), то удаляем a, b_2, c_2.

4. Путь P не содержит ни одной вершины из множества $S \setminus \{a\}$. Если нет хорд, удаляем b_1 и c_1. По тем же причинам, что и выше, не может быть хорд из вершины x_3, а из вершины x_2 хорды могут быть только в c_1 и в c_2. Если есть только одна из этих хорд, то удаляем вершину x_1, а если есть обе, удаляем x_1, a, b_2, b_3. Остается рассмотреть случай, когда есть только хорды из вершины x_1.

   4.1. Есть хорда (x_1, b_1), нет хорд (x_1, b_2), (x_1, b_3). Если есть хорда (x_1, c_2), то удаляем вершины a, b_3, c_1, а если ее нет, удаляем b_1, c_1.

   4.2. Есть хорда (x_1, b_3), нет хорд (x_1, b_1), (x_1, b_2). Если есть хорда (x_1, c_1), то удаляем вершины a, b_2, c_2, а если ее нет, удаляем b_3, c_2.

   4.3. Есть хорды (x_1, b_1) и (x_1, b_2), нет хорды (x_1, b_3). Если есть хорда (x_1, c_1), то удаляем вершины b_1, b_2, c_2, а если ее нет, удаляем a, b_3, c_2.

   4.4. Есть хорды (x_1, b_1) и (x_1, b_3), нет хорды (x_1, b_2). Если есть хорда (x_1, c_1), то удаляем вершины b_1, b_3, c_2, а если ее нет, удаляем a, b_2, c_2.

   4.5. Есть хорды (x_1, b_1), (x_1, b_2), (x_1, b_3). В этом случае в графе имеются три треугольника, содержащие ребро (a, x_1). В плоской укладке каждое ребро инцидентно не более чем двум граням. Следовательно, в любой плоской укладке хотя бы один из этих треугольников не является границей грани. Но тогда он является разделяющей кликой.

Итак, радиус графа G не превосходит $k + 2$. Отсюда и из леммы 2.1 вытекает справедливость теоремы 2.2. Теорема доказана.

2.5 Полиномиальная разрешимость задачи НМ в классе планарных графов, не содержащих больших порожденных яблок

Яблоком A_k называется граф, получаемый из цикла длины k добавлением одной вершины, смежной с произвольной его вершиной. В данном разделе для любого $s \geq 3$ рассматривается задача о независимом множестве в классе $\mathbf{Planar} \cap Free(\{A_s, A_{s+1}, \ldots\})$. Далее будет показана НМ-простота этого класса при любом фиксированном $s \geq 3$. Данное утверждение является основным результатом настоящей главы. Отсюда легко следует, что при любых фиксированных i и j класс $\mathbf{Planar} \cap Free(\{T_{1,i,j}\})$ является НМ-простым. Для доказательства этого факта достаточно заметить, что $\mathbf{Planar} \cap Free(\{T_{1,i,j}\}) \subseteq \mathbf{Planar} \cap Free(\{A_{i+j+1}, A_{i+j+2}, \ldots\})$.

2.5.1 Минорно безапексные графы большой древесной ширины

В этом подразделе речь идет об определенном свойстве графов, не содержащих произвольных апексных графов в качестве минора. Это свойство нам понадобится для доказательства основного результата.

Граф называется *апексным*, если удаление некоторой его вершины приводит к планарному подграфу. Например, граф K_5 является апексным, поскольку удаление любой его вершины приводит к планарному подграфу K_4. Граф H называется *минором* графа G, если H может быть получен из графа G операциями удаления вершин и ребер, а также операциями стягивания ребра. Если граф H не является минором графа G, то G называется *H-безминорным*. Скажем, из критерия Вагнера следует, что любой планарный граф является как K_5-безминорным, так и $K_{3,3}$-безминорным.

В [27] доказано следующее утверждение.

Лемма 2.12. *Для любого фиксированного апексного графа H и любых фиксированных натуральных чисел k, s, d существует такое натуральное число $N = N(H, k, s, d)$, что для любого H-безминорного графа G древесной ширины не менее чем N и любого его непустого подмножества вершин S ($|S| \leq s$) граф G содержит простой цикл C, обладающий следующими двумя свойствами:*

- *каждая вершина графа G не смежна с некоторыми k последовательными вершинами цикла C.*
- *расстояние между S и C (т.е. наименьшее среди попарных расстояний между двумя вершинами, одна из которых принадлежит S, а другая C) не менее чем d.*

2.5.2 Доказательство основного результата

Теорема 2.3 является основным результатом этой главы.

Теорема 2.3. *Для любого фиксированного $k \geq 3$ задача* НМ *в классе* $\mathbf{Planar} \cap Free(\{A_k, A_{k+1}, \ldots\})$ *полиномиально разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in \mathbf{Planar} \cap Free(\{A_k, A_{k+1}, \ldots\})$. Не уменьшая общности можно считать, что граф G является несжимаемым и не содержит разделяющих клик. Если $G \in Free(\{S_{11}\})$, то из леммы 2.10 следует, что степень каждой вершины графа G не превосходит 1935. Известно [46], что для любых фиксированных d и k класс графов $\mathbf{Deg}(d) \cap Free(\{A_k, A_{k+1}, \ldots\})$ является НМ-простым. Таким образом, можно считать, что граф G содержит порожденный подграф S_{11}. Вершину степени 11 этого подграфа обозначим через a, вершины степени 2 обозначим через $b_1, b_2, \ldots, b_{11}$, а вершины степени 1 обозначим через $c_1, c_2, \ldots, c_{11}$. Будем считать, что $(b_1, c_1) \in E(G), (b_2, c_2) \in E(G), \ldots, (b_{11}, c_{11}) \in E(G)$.

Пусть $N = N(K_5, 6k-14, 23, [\frac{k}{2}]+3)$ — число, определенное в лемме 2.12. Покажем, что древесная ширина графа G не превосходит N. Предположим противное. Пусть S — множество вершин звезды S_{11}. Тогда из леммы 2.12 следует, что граф G содержит простой цикл C, для которого выполняются два следующих свойства:

- каждая вершина графа G не смежна с некоторыми $6k-14$ последовательными вершинами цикла C.
- расстояние между S и C не менее чем $[\frac{k}{2}]+3$.

Центральное место в доказательстве теоремы 2.3 занимает утверждение 1.

Утверждение 1. *Граф G содержит простой цикл, проходящий через вершину a и некоторые вершины цикла C.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Т.к. G не содержит разделяющих клик, то этот граф является двусвязным. Таким образом, существуют два непересекающиеся по вершинам простых пути, соединяющие вершину a с некоторыми двумя вершинами цикла C. Пусть $P_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ и $P_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_q)$ — два простых пути, где вершины x_1 и y_1 смежны с вершиной a, а вершины x_p и y_q смежны с некоторыми вершинами из C. Можно считать, что суммарная длина путей P_1 и P_2 минимально возможная. Это означает, что среди вершин путей P_1 и P_2 вершина a смежна только с x_1 и y_1. Аналогично, ни одна из вершин этих путей, кроме x_p и y_q, не смежна ни с одной из вершин цикла C. Для доказательства утверждения 1 нам понадобятся еще четыре утверждения.

В справедливости утверждения 2 легко убедиться непосредственной проверкой.

Утверждение 2. *Любая из вершин графа G смежна не более чем с 4 вершинами цикла C. Более того, если вершина v графа G смежна ровно с 2 вершинами цикла C, то либо эти вершины стоят последовательно, либо между ними находится ровно 1 вершина. Если v смежна ровно с 3 вершинами из C, то эти три вершины стоят последовательно. Если v смежна ровно с 4 вершинами цикла C, то эти вершины можно разбить на 2 пары смежных вершин.*

Утверждение 3. *Множество вершин цикла C, которые смежны с вершиной x_p, состоит в точности из двух смежных вершин. Это же верно и для вершины y_q.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что вершина x_p смежна хотя бы с двумя вершинами цикла C. Рассмотрим максимальный путь P', образованный последовательными вершинами цикла C, с каждой из которых вершина x_p не смежна. Данный путь содержит не менее чем $6k-14$ вершин. Из максимальности пути P' следует, что существуют такие различные вершины u и v цикла C, каждая из которых смежна с вершиной x_p и с одной из концевых вершин пути P'. Если вершины u и v являются несмежными, то для некоторого $s \geq k$ граф G содержит порожденный вершинами пути P' и вершинами u, v, x_p, x_{p-1} подграф A_s. Последнее невозможно, поэтому вершины u и v являются смежными. Отсюда следует справедливость первой части утверждения 3. Вторая часть утверждения может быть доказана по аналогии с первой. Утверждение доказано.

Утверждение 4. *Существует вершина цикла C, которая смежна только с одной из вершин множества $\{x_p, y_q\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда из утверждения 3 следует, что существуют две такие последовательные вершины u и v цикла C, каждая из которых смежна с x_p и y_q. Т.к. граф G является C-блоком, то в любой плоской укладке G одна из вершин множества $\{x_p, y_q\}$ расположена внутри цикла C, другая снаружи этого цикла. Но тогда существуют два пути, соединяющие вершину a с двумя вершинами C, суммарная длина которых меньше суммарной длины P_1 и P_2. Получаем противоречие. Утверждение доказано.

Любое ребро графа G, соединяющее вершину пути P_1 с вершиной пути P_2, назовем (P_1, P_2)-*хордой.*

Утверждение 5. *Если граф G содержит (P_1, P_2)-хорды, то (x_1, y_1) — единственная (P_1, P_2)-хорда.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (x_i, y_j) — (P_1, P_2)-хорда, отличная от (x_1, y_1), для которой величина $i + j$ принимает максимально возможное значение. Т.к. G не содержит больших порожденных яблок, то x_i смежна с y_{j-1} и y_j смежна с x_{i-1} (считаем, что $x_0 = y_0 = a$). Отсюда следует, что $i > 1$ и что $j > 1$. Рассмотрим цикл C', образованный вершинами $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p, y_j, y_{j+1}, \ldots, y_q$ и частью вершин цикла C. В любой плоской укладке G одна из вершин множества $\{x_{i-1}, y_{j-1}\}$ расположена внутри цикла C', другая снаружи. Это невозможно, т.к. противоречит выбору путей P_1 и P_2 (см. утверждение 4). Утверждение доказано.

Продолжим доказательство утверждения 1. Из утверждения 5 следует, что если (x_1, y_1) не является (P_1, P_2)-хордой, то желаемый цикл образуется вершиной a, вершинами путей P_1 и P_2, а также не менее чем $3k - 7$ последовательными вершинами цикла C. Поэтому можно считать, что $(x_1, y_1) \in E(G)$. Обозначим через C' простой цикл, образованный вершинами путей P_1, P_2 и некоторыми последовательными вершинами цикла C, которые образуют простой путь P' длины не менее чем $3k-6$.

Т.к. G не содержит разделяющих клик, то среди вершин $b_1, b_2, \ldots, b_{11}$ существует вершина z_1, не смежная ни с x_1, ни с y_1. Покажем, что z_1 не смежна ни с одной вершиной цикла C'. Поскольку суммарная длина путей P_1 и P_2 минимально возможная, то вершина z_1 не смежна ни с одной из вершин множества $\{x_3, x_4, \ldots, x_p, y_3, y_4, \ldots, y_q\}$. Легко проверить, что z_1 не смежна также ни с x_2, ни с y_2 (ввиду того, что граф G не содержит больших порожденных яблок).

Поскольку граф G не содержит разделяющих клик, то в графе $G[V(G) \setminus \{a, x_1, y_1\}]$ существует путь, одна из концевых вершин которого совпадает с z_1, а другая смежна с некоторой вершиной цикла C'. Пусть $P_3 = (z_1, z_2, \ldots, z_r)$ — кратчайший среди таких путей. Понятно, что $r > 1$. Из утверждения 2 следует, что вершина z_r не может быть смежна с 5 вершинами пути P'. Поэтому из того же утверждения 2 следует, что существует не менее чем $k-3$ последовательных вершин пути P', не смежных с вершиной z_r. Значит, существуют $k-3$ последовательных вершин цикла C', каждая из которых не смежна с z_r. По аналогии с утверждением 3 можно показать, что множество вершин цикла C', которые смежны с вершиной z_r, состоит в точности из двух смежных вершин. Аналогично утверждению 4 можно показать, что либо $(z_r, x_1) \notin E(G)$, либо $(z_r, y_1) \notin E(G)$. По аналогии с утверждением 5 можно показать, что единственным ребром, инцидентным вершине a и некоторой вершине пути P_3, может быть только ребро (a, z_2). Таким образом, граф G имеет простой цикл, содержащий вершину a и некоторые вершины цикла C. Первое утверждение доказано.

Вернемся к непосредственному доказательству теоремы. Пусть $C^* = (a, v_1, v_2, \ldots, v_s)$ — простой цикл, содержащий вершину a и часть вершин цикла C. Вершины цикла C^*, принадлежащие циклу C, обозначим через $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j$. Т.к. расстояние между S и C не менее чем $[\frac{k}{2}]+3$, то ни одна из вершин $b_1, b_2, \ldots, b_{11}$ не смежна ни с одной из вершин множества $\{v_{i-[\frac{k}{2}]}, v_{i-[\frac{k}{2}]+1}, \ldots, v_{[\frac{k}{2}]+j}\}$. Ясно, что среди вершин $b_1, b_2, \ldots, b_{11}$ не менее девяти вершин не принадлежат циклу C^*. Среди этих девяти вершин не менее пяти не смежны ни с v_1, ни с v_s (в противном случае либо ребро (v_s, a), либо ребро (a, v_1) принадлежит трем треугольникам, поэтому граф G содержит разделяющую клику). Не уменьшая общности можно считать, что вершины $b_1, b_2, \ldots, b_5$ принадлежат циклу C^* и каждая из них не смежна ни с v_1, ни с v_s. Поскольку граф G не содержит больших порожденных яблок, то ни одна из вершин $b_1, b_2, \ldots, b_5$ не может быть смежна ни с одной из вершин множества $\{v_3, v_4, \ldots, v_{i-[\frac{k}{2}]-1}, v_{[\frac{k}{2}]+j+1}, v_{[\frac{k}{2}]+j+2}, \ldots, v_{s-2}\}$. По тем же причинам ни одна из этих пяти вершин не может быть одновременно смежна и с v_2 и с v_{s-1} или одновременно несмежна ни с v_2, ни с v_{s-1}. Таким образом, либо вершина v_2, либо вершина v_{s-1} смежна с тремя из рассматриваемых пяти вершин. Можно считать, что вершина v_2 смежна с тремя такими вершинами. Тогда в любой плоской укладке графа G среди данных трех вершин существуют такие вершины b_i и b_j, что вершина b_j лежит внутри цикла (a, b_i, v_2, v_1). Рассмотрим 2 возможных случая:

1. $(c_j, v_2) \notin E(G)$. Тогда вершины цикла C^*, кроме v_1, а также вершины b_j и c_j образуют большое порожденное яблоко.

2. $(c_j, v_2) \in E(G)$. Тогда вершины цикла C^*, кроме v_1, а также вершины b_i и c_j образуют большое порожденное яблоко.

Таким образом, предположив, что древесная ширина графа G не менее чем N, мы пришли к противоречию. Поэтому $tw(G) < N$. Отсюда следует, что при любом фиксированном k класс **Planar** $\cap\, Free(\{A_k, A_{k+1}, \ldots\})$ является НМ-простым. Теорема доказана.

Глава 3

Оценки мощности множества граничных классов

3.1 Количественные аспекты теории граничных классов

Изучение структуры граничных классов графов для тех или иных задач является интересной исследовательской проблемой. Данное исследование путем явного указания граничных классов для конкретных задач составляет содержание ряда работ и первой главы настоящей монографии. На настоящее время имеется достаточное количество результатов такого рода. В то же время, существуют задачи на графах, для которых до сих пор не удавалось найти ни одного граничного класса. К числу последних можно отнести задачи о гамильтоновом цикле, о вершиной 3-раскраске, о реберной 3-раскраске, о наибольшей клике и т.п. Тем не менее, если рассматривать не только проблему выявления, то некоторые результаты о множестве граничных классов для таких задач удается получить. Так, в работе [25] рассматривался вопрос о мощности этого множества для некоторых задач на графах.

Количество граничных классов для той или иной задачи является интересной характеристикой. Из теоремы 1.2 следует, что этот параметр задачи Π можно рассматривать как меру сложности описания всех конечно определенных Π-сложных классов графов. До настоящего времени ни для одной задачи не была известна мощность множества граничных классов. Поэтому представлялось целесообразным получение именно оценок этой величины.

Первую нижнюю оценку мощности множества граничных классов для любой NP-полной задачи на графах доставляет та же теорема 1.2. Из этой теоремы следует, что для любой такой задачи существует хотя бы один граничный класс. Для некоторых конкретных задач данная оценка может быть усилена. Так, в работе [25] показано, что для задачи о гамильтоновом цикле существует не менее 5 граничных классов. Аналогичная оценка справедлива и для задачи о вершинной 3-раскраске [25]. При этом ни одного конкретного граничного класса для них найдено не было. Данные оценки послужили основанием для выдвижения гипотезы о существовании задачи на графах, для которой множество граничных классов является бесконечным [25].

Первая часть настоящей главы посвящена доказательству этого предположения. Именно, для задачи о вершинной 3-раскраске удается найти континуальное множество классов графов, каждый из которых является граничным для этой задачи. Удается также указать континуальное множество граничных для задачи о реберной 3-раскраске классов. Значение этих результатов состоит также и в том, что существенно расширяется множество классов графов, граничность которых удается доказать хотя бы для одной задачи. Ранее это множество состояло в точности из пяти классов графов, четыре из которых рассматривались в первой главе (это $\mathbf{T}, \mathbf{D}, co(\mathbf{T}), co(\mathbf{D})$), а описание пятого можно найти в [26]. Наконец, приводится континуальная последовательность задач на графах, для каждой из которых множество граничных классов имеет мощность континуума.

К настоящему времени ни для одной задачи на графах не доказана конечность множества граничных классов. Кроме гипотезы В. Е. Алексеева автору неизвестны даже предположения о конечности этого множества для других задач. Таким образом, проблема доказательства верхних оценок оказывается сложной.

В то же время, для некоторых случаев удается полностью описывать все множество относительных граничных классов, а не только доказывать его конечность. Так, для задач о доминирующем множестве, о независимом доминирующем множестве, о порожденном паросочетании классы $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$ являются единственными Π-граничными относительно класса **Planar** [44]. Таким образом, вопрос о верхних оценках мощности множества относительных граничных классов иногда может быть решен явным его указанием (эти сведения также могут быть полезны при выдвижении гипотез о структуре множества просто граничных классов). Получение подобного рода полных описаний для некоторых новых случаев составляет содержание второй части данной главы.

3.2 Задачи с континуальным множеством граничных классов

3.2.1 Задача о вершинной 3-раскраске

Напомним, что хроматическим числом графа называется минимальное число k, для которого множество его вершин можно разбить на k независимых множеств, называемых *цветными классами*. Задача о вершинной k-раскраске (задача k-ВР) для данного графа состоит в том, чтобы определить, является ли этот граф вершинно k-раскрашиваемым (т.е. что его хроматическое число не больше k).

Введем понятие замены ребра графом G, содержащим ровно 2 вершины степени 2. *Операция замены ребра* $e = (a, b)$ некоторого графа графом G состоит в удалении этого ребра с последующим отождествлением вершины a с одной вершиной степени 2 графа G и вершины b с другой вершиной степени 2 графа G. Считаем, что граф G содержит автоморфизм, переводящий вершины степени 2 друг в друга, поэтому получившийся граф не зависит от того, какая именно вершина степени 2 графа G отождествляется с вершиной a.

Пусть B — граф, получаемый добавлением одной вершины к графу P_5 и всех ребер, соединяющих эту вершину с вершинами данного пути, а $\tilde{B}$ — граф, получаемый из графа $2K_3$ добавлением двух ребер, не имеющих общих вершин.

Для произвольной бинарной последовательности $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$ назовем *π-гирляндой* граф, получаемый из простого пути P_{2k+1} заменой каждого его ребра. Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ i-е и $(2k+1-i)$-е ребра этого пути заменяются графом $K_4 - e$, если $\pi_i = 0$, или графом B, если $\pi_i = 1$.

Введем понятие *π-преобразования вершины*. Пусть окрестность вершины v некоторого графа состоит из четырех вершин x_1, x_2, y_1, y_2, причем порожденный этими четырьмя вершинами подграф содержит ровно два ребра (x_1, x_2) и (y_1, y_2). Применение π-преобразования к вершине v состоит в том, что:

1. Вершину v заменяем на две вершины v_1 и v_2. Вершину v_1 соединяем ребрами с вершинами x_1, x_2, а вершину v_2 с вершинами y_1, y_2.
2. Вершину v_1 отождествляем с одной вершиной степени 2 π-гирлянды, а вершину v_2 отождествляем с другой такой вершиной.

Обозначим через $\mathbf{K}$ множество 4-регулярных графов класса $Free(K_{1,3}, K_4, K_4 - e)$. Пусть $G \in \mathbf{K}$. Ясно, что окрестность любой вершины v этого графа представляет собой граф $2K_2$. *π_V-преобразованием графа G* является последовательное применение π-преобразования к всем вершинам, окрестности которых изоморфны графу $2K_2$ и которые не содержатся в порожденном подграфе $K_4 - e$. Заметим, что в получившемся графе нет вершин, окрестность которых порождает подграф $2K_2$. Обозначим через G_{π_V} граф, получаемый π_V-преобразованием из графа G. Все множество таким образом сформированных графов из графов класса $\mathbf{K}$ обозначим через $\mathbf{K}_\pi$.

Легко видеть, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Граф $G \in \mathbf{K}$ является вершинно 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда для любой конечной бинарной последовательности π граф G_{π_V} является вершинно 3-раскрашиваемым.*

Для произвольной конечной бинарной последовательности π через D_π будем обозначать граф, получаемый отождествлениями трех вершин степени 2, принадлежащих трем копиям π-гирлянды, с тремя различными вершинами графа C_3. Для произвольной бесконечной бинарной последовательности ($Bin(\infty)$-последовательности) $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots\}$ через $\mathbf{D}_\pi$ обозначим множество графов $[\bigcup_{k=1}^{\infty}\{D_{\pi^{(k)}}\}]^+$, где $\pi^{(k)} = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$.

Лемма 3.2. *Для любой $Bin(\infty)$-последовательности π класс $\mathbf{D}_\pi$ является* 3-ВР-*предельным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [42], что задача 3-ВР для графов класса $\mathbf{K}$ является NP-полной. Отсюда и из леммы 3.1 следует, что для любого i эта задача NP-полна в классе $\mathbf{K}_{\pi^{(i)}}$. Поэтому при любом s класс $\mathbf{X}_s = [\bigcup_{j=s}^{\infty}\mathbf{K}_{\pi^{(j)}}]$ является 3-ВР-сложным. Докажем справедливость равенства $\mathbf{D}_\pi = \bigcap_{j=1}^{\infty}\mathbf{X}_j$.

Для произвольного графа $G \in \mathbf{D}_\pi$ существуют такие натуральные числа n и k, что для любого $j \geq k$ граф G является порожденным подграфом графа $nD_{\pi^{(j)}}$. Очевидно, что для любых n, k, s граф $nD_{\pi^{(k)}}$ принадлежит классу $\mathbf{X}_s$ (поскольку при любом s класс $\mathbf{X}_s$ является наследственным). Таким образом, произвольный граф $G \in \mathbf{D}_\pi$ принадлежит классу $\bigcap_{j=1}^{\infty}\mathbf{X}_j$. Поэтому имеет место включение $\mathbf{D}_\pi \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty}\mathbf{X}_j$.

Рассмотрим произвольный граф $G \in \bigcap_{j=1}^{\infty}\mathbf{X}_j$. Тогда существует такая бесконечная монотонно возрастающая последовательность $\{j_d\}$, что для любого натурального d граф G принадлежит классу $[\mathbf{K}_{\pi^{(j_d)}}]$. Отсюда, положив $d = |V(G)| + 1$, заключаем, что для некоторых n и $k < d$ граф G является порожденным подграфом графа $nD_{\pi^{(k)}}$. Таким образом, граф G принадлежит классу $\mathbf{D}_\pi$. Поэтому справедливо включение $\mathbf{D}_\pi \supseteq \bigcap_{j=1}^{\infty}\mathbf{X}_j$. Лемма доказана.

Пусть $\mathbf{X}$ — некоторый наследственный класс графов, тогда обозначим через $\mathbf{X}^{(k)}$ множество графов класса $\mathbf{X}$, содержащих только вершины степени не менее чем k.

Лемма 3.3. *Если класс $\mathbf{X}$ является k-*ВР*-сложным, то класс $[\mathbf{X}^{(k)}]$ является k-*ВР*-сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in \mathbf{X}$ и G содержит вершину v степени не более чем $k-1$, $G' = G[V(G) \setminus \{v\}]$. Очевидно, граф G является вершинно k-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таким свойством обладает граф G'. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Пусть $\mathbf{B}$ — k-*ВР*-граничный класс и граф $G_1 \in \mathbf{B}$ содержит вершину x степени не более чем $k-1$. Тогда существует такой граф $G_2 \in \mathbf{B}$, что G_1 является порожденным подграфом графа G_2, а вершина x в графе G_2 имеет степень, равную k.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Т.к. $\mathbf{B}$ — k-ВР-граничный класс, то существуют такие наследственные k-ВР-сложные классы $\mathbf{B}_1 \supseteq \mathbf{B}_2 \supseteq \ldots$, что $\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathbf{B}_i = \mathbf{B}$. Пусть $\mathbf{B}'_i = [\mathbf{B}_i^{(k)}]$.

Ясно, что $\mathbf{B}'_1 \supseteq \mathbf{B}'_2 \supseteq \ldots$ и что при любом i класс $\mathbf{B}'_i$ является k-ВР-сложным. Поэтому, если $\mathbf{B}' = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathbf{B}'_i$, то класс $\mathbf{B}'$ является предельным для задачи k-ВР. Т.к. $\mathbf{B}'_i \subseteq \mathbf{B}_i$ для любого i, то $\mathbf{B}' \subseteq \mathbf{B}$, но $\mathbf{B}$ — минимальный k-ВР-предельный класс, поэтому $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$.

Т.к. $G_1 \in \mathbf{B}$, то $G_1 \in \mathbf{B}'$. Тогда $G_1 \in \mathbf{B}'_1, G_1 \in \mathbf{B}'_2, \ldots$. По построению класса $\mathbf{B}'_i$ для любого i существует такой граф $G_2^i \in \mathbf{B}'_i$, что G_1 порожден в G_2^i, а вершина x имеет степень, равную k. Пусть граф G_2^i является наименьшим с этим свойством, тогда $|V(G_2^i)| - |V(G_1)| < k+1$. Пусть $\mathbf{M} = \{G_2^1, G_2^2, \ldots\}$. Очевидно, $\mathbf{M}$ — конечное множество. Поэтому существует граф G_2, принадлежащий $\mathbf{B}'_s$ для бесконечно многих значений s. Отсюда и из включения $\mathbf{B}'_1 \supseteq \mathbf{B}'_2 \supseteq \ldots$ следует, что $G_2 \in \mathbf{B}'_i$ для любого i, т.е. $G_2 \in \mathbf{B}$. Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Пусть $G \in Free(\{K_{1,s}\})$ — произвольный вершинно k-раскрашиваемый граф. Тогда $G \in \mathbf{Deg}((k-1)(s-1))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x — произвольная вершина графа G. Рассмотрим окрестность этой вершины и любую вершинную k-раскраску графа G. Понятно, что мощность пересечения любого цветного класса и окрестности вершины x не превосходит $s-1$. Отсюда следует, что $deg(x) \leq (k-1)(s-1)$. Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Для любого k-ВР-граничного класса $\mathbf{B}$ либо $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{T}$, либо $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{D}$, либо $\mathbf{B} \supseteq \{K_{1,s}, s \in \{1, 2, \ldots\}\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда для некоторых натуральных чисел s, p, q, i, j справедливо включение $\mathbf{B} \subseteq Free(\{K_{1,s}, pT_{i,i,i}, qD_{j,j,j}\})$. Пусть $\mathbf{B}_1 \supseteq \mathbf{B}_2 \supseteq \ldots$ — произвольная сходящаяся к $\mathbf{B}$ последовательность k-ВР-сложных классов графов. Т.к. $\mathbf{B} \subseteq Free(\{K_{1,s}, pT_{i,i,i}, qD_{j,j,j}\})$, то существует такое r^*, что для любого $r > r^*$ справедливо включение $\mathbf{B}_r \subseteq Free(\{K_{1,s}, pT_{i,i,i}, qD_{j,j,j}\})$. Для любого r рассмотрим класс графов $\mathbf{B}'_r = \mathbf{B}_r \cap \mathbf{Deg}((k-1)(s-1))$. Из леммы 3.5 следует, что при любом $r > r^*$ все графы из $\mathbf{B}_r \setminus \mathbf{B}'_r$ не являются вершинно k-раскрашиваемыми. Поэтому при любом $r > r^*$ задача k-ВР в классе графов $\mathbf{B}_r$ полиномиально эквивалента той же задаче в классе $\mathbf{B}'_r$.

Известно [30], что для любых заданных натуральных чисел d и t класс $\mathbf{TW}(d,t)$ является k-ВР-простым. Отсюда и из леммы 1.5 следует, что при любом $r > r^*$ класс $\mathbf{B}'_r$ является k-ВР-простым. Значит, при любом $r > r^*$ класс $\mathbf{B}_r$ является k-ВР-простым. Получаем противоречие с граничностью класса $\mathbf{B}$. Таким образом, предположение неверно. Лемма доказана.

Лемма 3.7. *Пусть для некоторой бесконечной бинарной последовательности π и некоторого 3-ВР-граничного класса $\mathbf{B}$ выполняется включение $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{D}_\pi$, причем для некоторого k граф $kD_{1,1,1}$ принадлежит классу $\mathbf{B}$. Тогда $[\bigcup_{i=1}^{\infty}\{kD_{\pi^{(i)}}\}] \subseteq \mathbf{B}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, тогда для некоторого i граф $kD_{\pi(i)}$ не принадлежит классу $\mathbf{B}$.

Рассмотрим граф $G \in \mathbf{B}$ — максимальный по включению порожденный подграф графа $kD_{\pi(i)}$, содержащий порожденный подграф $kD_{1,1,1}$. Очевидно, что граф G обязательно содержит вершину x степени не более чем 2, которая в графе $kD_{\pi(i)}$ имеет степень не менее чем 3. Тогда из доказательства леммы 3.4 следует, что в классе $\mathbf{B}$ существует такой граф G', в котором граф G является собственным порожденным подграфом и $deg(x) \geq 3$. Поэтому граф G не является максимальным по включению. Получаем противоречие. Таким образом, исходное предположение неверно. Лемма доказана.

Основной результат этого подраздела составляет следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Для любой бесконечной бинарной последовательности* π *класс* $\mathbf{D}_\pi$ *является* 3-ВР*-граничным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что имеет место включение $\mathbf{D}_\pi \subseteq Free(\{K_{1,4}, T_{2,2,2}\})$. Таким образом, если для некоторого 3-ВР-граничного класса $\mathbf{B}$ выполнено включение $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{D}_\pi$, то $\mathbf{B} \not\supseteq \{K_{1,s}, s \in \{1, 2, \ldots\}\}$ и $\mathbf{B} \not\supseteq \mathbf{T}$. Из леммы 3.6 следует, что при любом k граф $kD_{1,1,1}$ принадлежит классу $\mathbf{B}$. Тогда из леммы 3.7 следует, что при любом k выполнено включение $[\bigcup_{i=1}^{\infty}\{kD_{\pi(i)}\}] \subseteq \mathbf{B}$. Поэтому $\mathbf{D}_\pi \subseteq \mathbf{B}$. Таким образом, $\mathbf{B} = \mathbf{D}_\pi$, т.е. класс $\mathbf{D}_\pi$ является 3-ВР-граничным. Теорема доказана.

Ясно, что для различных $Bin(\infty)$-последовательностей π_1 и π_2 классы $\mathbf{D}_{\pi_1}$ и $\mathbf{D}_{\pi_2}$ различны. Отсюда и из предыдущей теоремы следует, что множество $\mathbf{\Phi}_1 = \{\mathbf{D}_\pi : \pi$ — $Bin(\infty)$-последовательность$\}$ является континуальным множеством попарно различных 3-ВР-граничных классов графов. Поэтому и само множество всех 3-ВР-граничных классов континуально.

3.2.2 Задача о реберной 3-раскраске

В предыдущем подразделе было указано континуальное множество конкретных классов графов, каждый из которых является 3-ВР-граничным. Данный подраздел посвящен выявлению такого множества для задачи о реберной 3-раскраске. Подход к нахождению этого множества во многом схож с соответствующими рассуждениями для задачи 3-ВР.

Хроматическим индексом графа G называется хроматическое число графа $L(G)$. Иными словами, хроматический индекс графа — наименьшее число подмножеств, на которое можно разбить множество его ребер так, что любые два смежных ребра принадлежат различным подмножествам. Задача о реберной k-раскраске (задача k-РР) для заданного графа состоит в том, чтобы определить, является ли граф реберно k-раскрашиваемым (т.е. что его хроматический индекс не больше k).

Для произвольной бинарной последовательности π длины k назовем *π-связкой* граф, получаемый из простого пути P_{4k+2} заменами его ребер. Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ $2i$-е и $(4k + 2 - 2i)$-е ребра этого пути заменяются графом $K_4 - e$, если $\pi_i = 0$, или графом $\tilde{B}$, если $\pi_i = 1$.

π_E-преобразованием графа G является операция замены каждого ребра этого графа π-связкой. Обозначим через G_{π_E} граф, получаемый π_E-преобразованием из графа G. Очевидно, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.8. *Для любой конечной бинарной последовательности π граф G_{π_E} является реберно 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда граф G является реберно 3-раскрашиваемым.*

Введем понятие *$\triangle$-преобразования вершины*. Пусть окрестность вершины x некоторого графа состоит в точности из трех попарно несмежных вершин y_1, y_2, y_3. Применение $\triangle$-преобразования к вершине x состоит в том, что:

1. Вершина x заменяется на три попарно смежные вершины x_1, x_2 и x_3.
2. Добавляются ребра $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

Пусть G — произвольный граф класса $\mathbf{Deg}(3)$. *$\triangle$-преобразование графа G* состоит в последовательном применении $\triangle$-преобразования к вершинам, окрестность которых порождает подграф $\overline{K}_3$. Ясно, что граф, полученный в результате $\triangle$-преобразования графа G, определяется однозначно. Обозначим этот граф через $(G)_\triangle$. Через $(\mathbf{X})_\triangle$ обозначим множество графов, получаемых в результате применения $\triangle$-преобразования к графам из $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Deg}(3)$.

Легко проверить, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.9. *Граф $G \in \mathbf{Deg}(3)$ является реберно 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф $(G)_\triangle$.*

Через $\mathbf{Z}_\pi$ обозначим множество графов, получаемых применением π_E-преобразования к графам класса $\mathbf{Deg}(3)$. Через $T^{'}_\pi$ будем обозначать граф, получаемый применением π_E-преобразования к графу $T_{1,1,1}$. Обозначим через $D^{'}_\pi$ граф $(T^{'}_\pi)_\triangle$. Для произвольной бесконечной бинарной последовательности π через $\mathbf{T}^{'}_\pi$ обозначим множество графов $[\bigcup_{k=1}^{\infty}\{T^{'}_{\pi(k)}\}]^+$, а через $\mathbf{D}^{'}_\pi$ обозначим класс графов $(\mathbf{T}^{'}_\pi)_\triangle$.

Лемма 3.10. *Для любой $Bin(\infty)$-последовательности π классы $\mathbf{T}'_\pi$ и $\mathbf{D}'_\pi$ являются* 3-РР-*предельными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что класс $\mathbf{Deg}(3) \cap Free(\{C_3\})$ является 3-РР-сложным [40]. Отсюда и из леммы 3.9 следует, что для любого k класс $[\mathbf{Z}_{\pi(k)}]$ является 3-РР-сложным. Таким образом, при любом k класс $\mathbf{X}_k = \bigcup_{j=k}^{\infty}[\mathbf{Z}_{\pi(j)}]$ является 3-РР-сложным. По аналогии с соответствующими рассуждениями леммы 3.2 можно показать справедливость равенства $\mathbf{T}'_\pi = \bigcap_{j=1}^{\infty}\mathbf{X}_j$. Отсюда следует, что класс $\mathbf{T}'_\pi$ — 3-РР-предельный.

Из проделанных рассуждений и леммы 3.9 следует, что при любом k класс $([\mathbf{Z}_{\pi(k)}])_\triangle$ является 3-РР-сложным. Поэтому для произвольного k класс $\mathbf{X}'_k = \bigcup_{j=k}^{\infty}[([\mathbf{Z}_{\pi(j)}])_\triangle]$ также является 3-РР-сложным. 3-РР-предельность класса $\mathbf{D}'_\pi$ следует из равенства $\mathbf{D}'_\pi = \bigcap_{j=1}^{\infty}\mathbf{X}'_j$, доказательство которого аналогично доказательству соответствующего равенства из предыдущего абзаца. Лемма доказана.

Вершину x некоторого графа G назовем 3-РР-*аннигилируемой*, если выполняется одно из следующих условий:

- $deg(x) \leq 1$;
- $deg(x) = 2$ и существует такая вершина y графа G, что $deg(y) \leq 2$ и $(x, y) \in E(G)$;
- $deg(x) = 2$ и x принадлежит некоторому порожденному подграфу $K_4 - e$ графа G;
- $deg(x) = 2$ и x принадлежит некоторому порожденному подграфу $\tilde{B}$ графа G.

Пусть $\mathbf{X}$ — наследственный класс графов. Через $\mathbf{X}^a$ обозначим множество графов класса $\mathbf{X} \cap \mathbf{Deg}(3)$, не содержащих 3-РР-аннигилируемых вершин.

Лемма 3.11. *Если класс $\mathbf{X}$ является* 3-РР-*сложным, то класс $[\mathbf{X}^a]$ является* 3-РР-*сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что ни один из графов класса $\mathbf{X} \setminus \mathbf{Deg}(3)$ не является реберно 3-раскрашиваемым. Оставшаяся часть доказательства аналогична доказательству леммы 3.3. Лемма доказана.

Лемма 3.12. *Пусть $\mathbf{B}$ —* 3-РР-*граничный класс и граф $G_1 \in \mathbf{B}$ содержит* 3-РР-*аннигилируемую вершину x. Тогда существует такой граф $G_2 \in \mathbf{B}$, что G_1 является порожденным подграфом графа G_2, а вершина x в графе G_2 не является* 3-РР-*аннигилируемой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Т.к. $\mathbf{B}$ — 3-РР-граничный класс, то существуют такие 3-РР-сложные классы $\mathbf{B}_1 \supseteq \mathbf{B}_2 \supseteq \ldots$, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{B}_i = \mathbf{B}$. Пусть $\mathbf{B}_i' = [\mathbf{B}_i^a]$. Аналогично соответствующим рассуждениям леммы 3.4 можно показать, что $\mathbf{B}' = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{B}_i' = \mathbf{B}$.

Пусть G_1 — такой граф класса $\mathbf{B}$, что в нем существует 3-РР-аннигилируемая вершина x. Тогда $G_1 \in \mathbf{B}_1'$, $G_1 \in \mathbf{B}_2'$, ... По построению класса $\mathbf{B}_i'$ для любого i существует такой граф $G_i' \in \mathbf{B}_i'$, что G_1 порожден в G_i' и вершина x в G_i' не является 3-РР-аннигилируемой. Рассмотрим следующие возможные случаи:

1. В графе G_i' вершина x имеет степень, равную 3. Тогда рассмотрим граф G_i'', получаемый из G_i' удалением всех вершин, не принадлежащих G_1 и отстоящих от x на расстоянии не менее чем 2. Понятно, что вершина x в графе G_i'' не является 3-РР-аннигилируемой и что $|V(G_i'')| - |V(G_1)| \leq 3$.

2. В графе G_i' вершина x имеет степень, равную 2. Поскольку вершина x в графе G_i' не является 3-РР-аннигилируемой, то x не принадлежит ни одному порожденному подграфу $K_4 - e$ графа G_i'. Рассмотрим граф G_i'', получаемый из G_i' удалением всех вершин, не принадлежащих G_1 и отстоящих от x на расстоянии не менее чем 3. Легко проверить, что вершина x в графе G_i'' не является 3-РР-аннигилируемой и что $|V(G_i'')| - |V(G_1)| < 7$.

Таким образом, для любого i существует такой граф $G_2^i \in \mathbf{B}_i'$, что G_1 порожден в G_2^i, $|V(G_2^i)| - |V(G_1)| < 7$ и вершина x в G_2^i не является 3-РР-аннигилируемой. Дальнейшие рассуждения проводятся по аналогии с леммой 3.4. Лемма доказана.

Лемма 3.13. *Любой k-РР-граничный класс содержит либо класс $\mathbf{T}$, либо класс $\mathbf{D}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть $\mathbf{B}_1 \supseteq \mathbf{B}_2 \supseteq \ldots$ — произвольная сходящаяся к k-РР-граничному класу $\mathbf{B}$ последовательность из k-РР-сложных классов графов. Поскольку ни один из графов класса $\mathbf{Deg}(k+1) \setminus \mathbf{Deg}(k)$ заведомо не является реберно k-раскрашиваемым, то можно считать, что при любом i выполняется включение $\mathbf{B}_i \subseteq \mathbf{Deg}(k)$. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям леммы 3.6 и используют тот факт, что для любых заданных чисел d и t класс $\mathbf{TW}(d,t)$ является k-РР-простым [30]. Лемма доказана.

Доказательство следующих лемм полностью аналогично доказательству леммы 3.7 и использует утверждение леммы 3.13.

Лемма 3.14. *Пусть для некоторой $Bin(\infty)$-последовательности π и некоторого 3-РР-граничного класса $\mathbf{B}$ выполняется включение $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{T}_\pi'$, причем для некоторого k*

граф $kT_{1,1,1}$ *принадлежит классу* $\mathbf{B}$*. Тогда* $[\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{kT'_{\pi(i)}\}] \subseteq \mathbf{B}$.

Лемма 3.15. *Пусть для некоторой* $Bin(\infty)$*-последовательности* π *и некоторого* 3-РР*-граничного класса* $\mathbf{B}$ *выполняется включение* $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{D}'_\pi$*, причем для некоторого* k *граф* $kD_{1,1,1}$ *принадлежит классу* $\mathbf{B}$*. Тогда* $[\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{kD'_{\pi(i)}\}] \subseteq \mathbf{B}$.

Основным результатом этого подраздела является теорема 3.2.

Теорема 3.2. *Для произвольной* $Bin(\infty)$*-последовательности* π *класс* $\mathbf{T}'_\pi$ *и класс* $\mathbf{D}'_\pi$ *являются* 3-РР*-граничными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что справедливы включения $\mathbf{T}'_\pi \subseteq Free(\{D_{1,1,1}\})$ и $\mathbf{D}'_\pi \subseteq Free(\{T_{1,1,1}\})$. Дальнейшее доказательство полностью аналогично рассуждениям теоремы 3.1 и использует леммы 3.14 и 3.15. Теорема доказана.

Ясно, что для различных бесконечных бинарных последовательностей π_1 и π_2 выполняются условия $\mathbf{T}'_{\pi_1} \neq \mathbf{T}'_{\pi_2}$ и $\mathbf{D}'_{\pi_1} \neq \mathbf{D}'_{\pi_2}$. Отсюда и из теоремы 3.2 следует, что множества $\mathbf{\Phi}_2 = \{\mathbf{T}'_\pi : \pi - Bin(\infty)\text{-последовательность}\}$ и $\mathbf{\Phi}_3 = \{\mathbf{D}'_\pi : \pi - Bin(\infty)\text{-последовательность}\}$ являются континуальными множествами попарно различных 3-РР-граничных классов графов. Поэтому и само множество всех 3-РР-граничных классов континуально.

3.2.3 Некоторые замечания

В теоремах 3.1 и 3.2 было установлено, что некоторые классы графов являются граничными для задач о 3-раскраске. Логически следующим за получением такого описания является вопрос о его полноте. Покажем, что полученные множества классов графов не совпадают с множеством граничных классов ни для одной из рассматриваемых задач.

Напомним, что в работе [42] показано, что класс $Free(\{K_4 - e\})$ является 3-ВР-сложным. Согласно теореме 1.2 конечно определенный класс $Free(\{K_4 - e\})$ должен содержать некоторый 3-ВР-граничный класс $\mathbf{B}$. Данный класс не может принадлежать множеству $\mathbf{\Phi}_1$, поскольку для любой $Bin(\infty)$-последовательности π класс $\mathbf{D}_\pi$ содержит граф $K_4 - e$. Таким образом, множество 3-ВР-граничных классов отлично от множества $\mathbf{\Phi}_1$.

Класс $\mathbf{Deg}(3) \cap Free(\{C_3\})$ является 3-РР-сложным [40]. Поскольку для любой $Bin(\infty)$-последовательности π ни класс $\mathbf{T}'_\pi$, ни класс $\mathbf{D}'_\pi$ не принадлежат классу $Free(\{C_3\})$, то существует 3-РР-граничный класс $\mathbf{B}_1$, не принадлежащий множеству $\mathbf{\Phi}_2 \cup \mathbf{\Phi}_3$. Из леммы 3.9 следует, что класс $(\mathbf{Deg}(3) \cap Free(\{C_3\}))_\triangle$ является 3-РР-сложным. Т.к. $(\mathbf{Deg}(3) \cap$

$Free(\{C_3\}))_\triangle \subseteq Free(\{K_{1,3}, K_4 - e, \tilde{B}\})$, то класс $Free(\{K_{1,3}, K_4 - e, \tilde{B}\})$ является 3-РР-сложным. Таким образом, существует 3-РР-граничный класс $\mathbf{B}_2 \subseteq Free(\{K_{1,3}, K_4 - e, \tilde{B}\})$. Из леммы 3.13 следует, что $\mathbf{B}_1 \neq \mathbf{B}_2$. Поэтому во множестве всех 3-РР-граничных классов существует два различных класса, не принадлежащих множеству $\mathbf{\Phi}_2 \cup \mathbf{\Phi}_3$.

Очевидно, что при любом k задача k-ВР и задача о разбиении на k клик (задача k-РК) являются комплементарными. Отсюда и из теоремы 3.1 следует, что для любой $Bin(\infty)$-последовательности π класс $co(\mathbf{D}_\pi)$ является 3-РК-граничным. Таким образом, множество граничных классов для каждой задач 3-ВР, 3-РР, 3-РК континуально. Вместе с тем, интересно было бы выяснить насколько представительны задачи на графах с континуальным множеством граничных классов. Покажем, что это множество задач несчетно.

Обозначим через $\mathbf{EColor}(3)$ множество всех реберно 3-раскрашиваемых графов, а через $\overline{\mathbf{EColor}}(3)$ множество графов, не являющихся реберно 3-раскрашиваемыми. Для произвольного бесконечного подмножества $\tilde{N} \subseteq \{5, 6, \ldots\}$ рассмотрим задачу ВНП[$\overline{\mathbf{EColor}}(3) \cap Free(\{K_s : s \in \tilde{N}\})$]=ВНП[$\overline{\mathbf{EColor}}(3, \tilde{N})$]. Понятно, что для любого $G \in \mathbf{Deg}(3)$ и любого $\tilde{N} \subseteq \{5, 6, \ldots\}$ справедливо равенство $n_{\overline{\mathbf{EColor}}(3,\tilde{N})}(G) = n_{\overline{\mathbf{EColor}}(3)}(G)$. Из наследственности класса $\mathbf{EColor}(3)$ следует, что для любого графа G выполнено либо равенство $n_{\overline{\mathbf{EColor}}(3)}(G) = |V(G)|$ (если $G \in \overline{\mathbf{EColor}}(3)$), либо равенство $n_{\overline{\mathbf{EColor}}(3)}(G) = 0$ (если $G \in \mathbf{EColor}(3)$). Таким образом, для любого подмножества $\tilde{N} \subseteq \{5, 6, \ldots\}$ задачи ВНП[$\overline{\mathbf{EColor}}(3, \tilde{N})$] и 3-РР в классе графов $\mathbf{Deg}(3)$ полиномиально эквивалентны. Аналогично лемме 3.10 можно показать, что для любой $Bin(\infty)$-последовательности π и любого бесконечного подмножества $\tilde{N} \subseteq \{5, 6, \ldots\}$ класс $\mathbf{T}'_\pi$ является ВНП[$\overline{\mathbf{EColor}}(3, \tilde{N})$]-предельным. Из критерия граничности (теорема 1.3) следует, что для любого $G \in \mathbf{T}'_\pi$ существует такое конечное множество графов $\mathbf{X} \subseteq Forb(\mathbf{T}'_\pi)$, что класс $Free(\mathbf{X} \cup \{G\})$ является 3-РР-простым. Понятно, что множество $Forb(\mathbf{Deg}(3))$ состоит в точности из 10 графов. Поэтому множество $[Forb(\mathbf{Deg}(3))]$ также конечно. Рассмотрим множество $\mathbf{X}' = \mathbf{X} \cup ([Forb(\mathbf{Deg}(3))] \cap Forb(\mathbf{T}'_\pi)) \subseteq Forb(\mathbf{T}'_\pi)$. Ясно, что $\mathbf{X}'$ — конечное множество. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что $Free(\mathbf{X}') \subseteq \mathbf{Deg}(3)$. Это означает, что класс $Free(\mathbf{X}' \cup \{G\})$ является ВНП[$\overline{\mathbf{EColor}}(3, \tilde{N})$]-простым. Отсюда и из теоремы 1.3 следует, что класс $\mathbf{T}'_\pi$ является ВНП[$\overline{\mathbf{EColor}}(3, \tilde{N})$]-граничным. Поэтому для любого бесконечного подмножества $\tilde{N} \subseteq \{5, 6, \ldots\}$ множество граничных классов для задачи ВНП[$\overline{\mathbf{EColor}}(3, \tilde{N})$] континуально.

3.3 Новые случаи полного описания множества относительных граничных классов

К настоящему времени ни для одной задачи на графах неизвестно полное описание множества граничных классов. Однако, для случая относительных граничных классов такие указания действительно имеют место. Все известные результаты такого рода опираются на лемму 3.16, формулировка которой состоит в следующем.

Лемма 3.16. *Пусть* $\{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, ..., \mathbf{B}_k\}$ *— некоторое подмножество множества* Π*-граничных относительно* $\mathbf{Y}$ *классов. Это подмножество совпадает со всем множеством тогда и только тогда, когда для любых графов* $G_1 \in \mathbf{B}_1, G_2 \in \mathbf{B}_2, \ldots, G_k \in \mathbf{B}_k$ *класс* $\mathbf{Y} \cap Free(\{G_1, G_2, \ldots, G_k\})$ *является* Π*-простым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Понятно, что для любых графов $G_1 \in \mathbf{B}_1, G_2 \in \mathbf{B}_2, \ldots, G_k \in \mathbf{B}_k$ и любого i класс $\mathbf{Y} \cap Free(\{G_1, G_2, \ldots, G_k\})$ не содержит класс $\mathbf{B}_i$. Поэтому класс $\mathbf{Y} \cap Free(\{G_1, G_2, \ldots, G_k\})$ — Π-простой.

Достаточность. Предположим, что существует Π-граничный относительно $\mathbf{Y}$ класс $\mathbf{B}$, не принадлежащий множеству $\{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, ..., \mathbf{B}_k\}$. Тогда существуют графы $G_1 \in \mathbf{B}_1 \setminus \mathbf{B}$, $G_2 \in \mathbf{B}_2 \setminus \mathbf{B}$,...,$G_k \in \mathbf{B}_k \setminus \mathbf{B}$, причем класс $\mathbf{Y} \cap Free(\{G_1, G_2, \ldots, G_k\})$ содержит $\mathbf{B}$. Таким образом, класс $\mathbf{Y} \cap Free(\{G_1, G_2, \ldots, G_k\})$ является Π-сложным. Получаем противоречие с предположением. Лемма доказана.

Лемма 3.16 была неявно использована в работе [25] при выдвижении некоторого предположения. В несколько измененной формулировке это предположение становится верным утверждением, смысл которого составляет лемма 3.17.

Лемма 3.17. *Если классы* $\mathbf{T}$ *и* $\mathbf{D}$ *являются* Π*-граничными относительно* $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{Deg}(d)$ *классами и для любого* t *класс* $\mathbf{TW}(d, t)$ *является* Π*-простым, то* $\mathbf{T}$ *и* $\mathbf{D}$ *— единственные* Π*-граничные относительно* $\mathbf{Y}$ *классы.*

Этот результат легко следует из леммы 1.5 и леммы 3.16. Заметим, что настоящая лемма неявным образом уже содержалась в работе [25] и это утверждение можно считать одним из результатов той работы. Таким образом, из результатов работы [25] следует единственность классов $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$, как граничных относительно $\mathbf{Deg}(d)$ ($d \geq 3$), для следующих задач на графах Π:

(1). задача о доминирующем множестве

(2). задача о независимом доминирующем множестве

(3). о порожденном паросочетании

(4). задача РНП[**Path**]

(5). задача РНП[**Cycle**]

Лемма 3.17 естественным образом подталкивает к рассмотрению тех случаев, когда $d = \infty$, т.е. классов графов $\mathbf{Y}$, степени вершин которых заранее не ограничены. К сожалению, обобщения леммы 3.17 на случай, когда $\mathbf{Y}$ совпадает с классом всех графов, могут оказаться несостоятельными. Так, для любого фиксированного t задача ДМ полиномиально разрешима в классе графов, древесная ширина которых не превосходит t. Напомним, что при этом множество всех ДМ-граничных классов отлично от $\{\mathbf{T}, \mathbf{D}\}$. Причина этого состоит в том, что для любого заданного числа t существуют такие графы $G_1 \in \mathbf{T}, G_2 \in \mathbf{D}$, для которых существует граф $G \in Free(\{G_1, G_2\})$, древесная ширина которого больше t.

Однако, если останавливаться на тех классах графов $\mathbf{Y}$, для которых выполняется аналог леммы 1.5, то ряд результатов о полном описании множества относительных граничных классов действительно удается получить. Так, в работе [44] для задач (1)–(3) было доказано утверждение о единственности классов $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$, как граничных относительно **Planar**. Результаты работ [25] и [44] можно легко применить для задач (4),(5) и показать, что для этих задач множество граничных относительно **Planar** классов тоже совпадает с $\{\mathbf{T}, \mathbf{D}\}$.

Итак, для определенных классов графов $\mathbf{Y}$ множество граничных относительно $\mathbf{Y}$ классов описывается классами $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$. В то же время, вызывает некоторый интерес поиск тех задач Π и тех классов графов, относительно которых имеется в точности один Π-граничный класс. Многие результаты такого рода незамедлительно следуют из ранее полученных. Из указанных выше результатов и результатов работы [25] следует, что для любого триода $T_{i,j,k}$ класс $\mathbf{D}$ является единственным РНП[**Path**]-граничным и является единственным РНП[**Cycle**]-граничным классом как относительно $\mathbf{Deg}(d) \cap Free(\{T_{i,j,k}\})$, так и относительно $\mathbf{Planar} \cap Free(\{T_{i,j,k}\})$. Аналогичное утверждение (для класса $\mathbf{T}$) справедливо для тех же задач и классов $\mathbf{Deg}(d) \cap Free(\{D_{i,j,k}\})$, $\mathbf{Planar} \cap Free(\{D_{i,j,k}\})$ при любых натуральных i, j, k.

Основным результатом этого раздела является следующая теорема.

Теорема 3.3. *Пусть Π_1 — произвольная задача на графах, которая полиномиально разрешима в любом сильно наследственном классе, не включающем класс $\mathbf{T}$. Если для любого класса графов $\mathbf{X}$ задача Π_1 в $\mathbf{X}$ полиномиально эквивалентна задаче Π_2 в классе $L(\mathbf{X})$ и класс $\mathbf{T}$ является Π_1-предельным, то $\mathbf{D}$ является единственным граничным классом относительно класса* **Line**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Понятно, что класс $\mathbf{D}$ является Π_2-предельным относительно класса **Line**. Покажем, что для любого $G \in \mathbf{D}$ реберные графы класса $Free(\{G\})$ образуют Π_2-простой класс. Отсюда и из аналога теоремы 1.2 для относительных граничных классов будет легко следовать, что класс $\mathbf{D}$ является граничным относительно **Line**. Тогда утверждение теоремы будет следовать из леммы 3.16.

Для любого графа $G \in \mathbf{D}$ существует такой граф $G' \in \mathbf{T}$, что $G = L(G')$. Обозначим через $\mathbf{M}(G')$ множество всевозможных графов, получаемых добавлением к графу G' хотя бы одного ребра. Понятно, что задача Π_2 в классе реберных графов класса $Free(\{G\})$ полиномиально сводима к задаче Π_1 в классе $Free(\mathbf{M}(G') \cup \{G'\})$. Поскольку класс $Free(\mathbf{M}(G') \cup \{G'\})$ является сильно наследственным, не включающим класс $\mathbf{T}$, то этот класс является Π_1-простым. Поэтому и реберные графы класса $Free(\{G\})$ образуют Π_2-простой класс. Теорема доказана.

Приведем примеры конкретных задач на графах, для которых класс $\mathbf{D}$ — единственный граничный класс относительно **Line**. Рассмотрим задачи ВНП[**Path**] и ВНП[**Cycle**]. Любой сильно наследственный класс, не включающий класс $\mathbf{T}$, является как РНП[**Path**]-простым, так и РНП[**Cycle**]-простым [25]. Из результатов леммы 1.11 следует, что для любого класса $\mathbf{X}$ задача РНП[**Path**] полиномиально эквивалентна задаче ВНП[**Path**] в классе $L(\mathbf{X})$. То же верно и для пары задач РНП[**Cycle**] и ВНП[**Cycle**]. Класс $\mathbf{T}$ является как РНП[**Path**]-граничным, так и РНП[**Cycle**]-граничным [25]. Поэтому из теоремы 3.3 следует, что для задач ВНП[**Path**] и ВНП[**Cycle**] относительно **Line** класс $\mathbf{D}$ является единственным граничным.

Глава 4

Минимальные сложные классы графов

4.1 Вопросы существования минимальных сложных элементов решетки наследственных классов графов

В начале первой главы данного издания была упомянута идея решения задачи разграничения в рассматриваемой решетке, основанная на понятиях максимального П-простого и минимального П-сложного классов графов. Напомним, что первый подход обречен на неудачу, поскольку В. Е. Алексеев, по–существу, показал, что для любой задачи на графах нет максимальных простых классов. Вместе с тем, до настоящего времени никаких результатов про минимальные сложные классы получено не было. Таким образом, отсутствие какой-либо информации о таких классах и результаты работы [24] подтолкнули к исследованиям для конечно определенных классов графов, т.е. к нахождению граничных классов.

Данная глава монографии посвящена изучению минимальных сложных классов и их связи с граничными. Однако, уже в вопросе существования между первыми и вторыми классами графов имеется принципиальное различие. Так, по аналогии с леммой 4 работы [24] можно показать, что любой П-сложный класс графов содержит некоторый П-граничный. Для минимальных сложных классов это утверждение оказывается неверным. Более того, существуют NP-полные задачи на графах, для которых нет ни одного минимального сложного класса. Именно, в первой части этой главы доказывается, что задача распознавания принадлежности любому наследственному классу графов является такой задачей.

Установление минимальности определенных классов графов для некоторых модификаций классических задач о раскраске составляет содержание второй части настоящей главы. Речь идет о задаче о вершинном списковом ранжировании (задаче ВСР) и задаче о реберном списковом ранжировании (задаче РСР), сформулированных в работах [35, 41]. Постановка первой задачи состоит в следующем: задан граф G и список $L^{V(G)} = \{L^{V(G)}(v_1), L^{V(G)}(v_2), \ldots, L^{V(G)}(v_n)\}$ $(V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\})$.

Множество $L^{V(G)}(v_i)$ (называемое *палитрой цветов вершин графа* G) является конечным множеством номеров разрешенных цветов для вершины v_i. Всюду далее номер цвета будет отождествляться с самим цветом, поэтому на множестве цветов из $L^{V(G)}$ естественным образом индуцируется отношение «быть больше». $L^{V(G)}$*-раскраской* называется такое отображение $c : V(G) \to \bigcup_{i=1}^{n} L^{V(G)}(v_i)$, что выполняются следующие два условия:

(1). Для любой вершины x число $c(x)$ принадлежит множеству $L^{V(G)}(x)$.

(2). Каждый путь, соединяющий две одноцветные вершины u и v, содержит такую вершину w, что $c(w) > c(u)$.

Задача ВСР для данного графа G и палитры цветов вершин $L^{V(G)}$ состоит в том, чтобы определить, имеет ли граф $L^{V(G)}$-раскраску. Понятия *палитры цветов ребер графа* G (обозначаемой через $L^{E(G)}$), $L^{E(G)}$*-раскраски* и задачи РСР определяются по аналогии.

Все найденные во второй части главы минимальные ВСР-сложные классы и минимальные РСР-сложные классы являются также и граничными классами для этих задач. Тем самым получен ответ на вопрос о существовании П-сложных граничных классов графов, поставленный в работе [25]. Этот вопрос оставался открытым, поскольку все известные до этого граничные классы (включая классы из первой и третьей глав) были простыми.

4.2 О несуществовании минимальных сложных классов для некоторых задач теории графов

Обозначим через РП[$\mathbf{X}$] задачу распознавания принадлежности классу графов $\mathbf{X}$.

Теорема 4.1. *Если* $\mathbf{X}$ — *наследственный класс графов, то любой* РП[$\mathbf{X}$]*-сложный класс не является минимальным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, тогда некоторый класс графов $\mathbf{Y}$ является минимальным РП[$\mathbf{X}$]-сложным. Ясно, что этот класс содержит граф G, не принадлежащий классу $\mathbf{X}$ (в противном случае класс $\mathbf{Y}$ был бы РП[$\mathbf{X}$]-простым). Пусть $\mathbf{Z} = \mathbf{Y} \setminus (\mathbf{Y} \cap Free(\{G\})$. Понятно, что класс $\mathbf{Z}$ состоит из графов, в каждом из которых граф G является порожденным. Т.к. класс графов $\mathbf{X}$ является наследственным и граф G не принадлежит этому классу, то любой граф из $\mathbf{Z}$ не принадлежит классу $\mathbf{X}$. Поэтому класс $\mathbf{Z}$ является классом с полиномиально разрешимой задачей РП[$\mathbf{X}$]. Отсюда следует, что задача РП[$\mathbf{X}$] в классе графов $\mathbf{Y} \setminus \mathbf{Z} = \mathbf{Y} \cap Free(\{G\})$ не является полиномиально разрешимой. Получаем противоречие с предположением. Таким образом, любой РП[$\mathbf{X}$]-сложный класс не является минимальным. Теорема доказана.

Приведем примеры конкретных задач на графах, которые являются задачами распознавания принадлежности наследственному классу графов. Граф G называется *графом пересечений кругов единичного радиуса*, если этот граф является графом пересечений кругов одинакового радиуса, принадлежащих одной плоскости. Класс таких графов является наследственным, который обозначим через **UDisk**. Класс всех графов является РП[**UDisk**]-сложным [31]. Таким образом, к задаче распознавания принадлежности классу **UDisk**, а также к уже упоминавшимся NP-полным при $k \geq 3$ задачам о вершинной k-раскраске [7] и о реберной k-раскраске [40], которые являются переформулировками задачи распознавания принадлежности классу графов, применима теорема 4.1.

Опишем несколько общих приемов получения задач, к которым применима указанная теорема. Во-первых, можно рассмотреть сужение NP-полной задачи оптимизации на задачу распознавания принадлежности такой же сложности. Эта задача распознавания состоит для заданного графа в том, чтобы определить, принадлежит ли данный граф наследственному классу графов, состоящему из тех графов, для которых значение оптимизационного критерия меньше заданной константы. Примером такого сужения являются задачи о k-раскраске для любого фиксированного $k > 2$. Во-вторых, можно перейти от рассмотрения задачи РП[$\mathbf{X}$], удовлетворяющей требованиям теоремы 4.1, к задаче распознавания принадлежности классу $co(\mathbf{X})$. Построенная таким образом задача распознавания принадлежности тоже будет удовлетворять всем условиям теоремы 4.1.

Дадим еще одну демонстрацию отсутствия минимальных сложных элементов в решетке, образованной наследственными подклассами некоторого сложного класса. *Ленточной шириной графа* G (обозначение $bw(G)$) называется минимальное число k, для которого существует такая биекция между $V(G)$ и $\{1, 2, \ldots, |V(G)|\}$, что смежным вершинам соответствуют числа, абсолютное значение разности которых не превосходит k. Задача о ленточной ширине графа G (задача ЛШ) состоит в том, чтобы по заданным графу G и числу k определить, выполняется ли неравенство $bw(G) < k$.

1-*гусеницей* называется дерево, в котором существует путь, содержащий все нелистовые вершины. *Циклической* 1-*гусеницей* называется граф, содержащий ровно один простой цикл, которому принадлежат все его нелистовые вершины. Классы **Caterpillar(1)** и **CCaterpillar**(1) являются наследственными замыканиями, соответственно, классов 1-гусениц и циклических 1-гусениц.

Лемма 4.1. *Для любого фиксированного k графы класса* **CCaterpillar**(1)*, содержащие цикл длины k, образуют класс с полиномиально разрешимой задачей* ЛШ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — граф, являющийся циклической 1-гусеницей и содержащий цикл, порожденный множеством вершин $V' = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Рассмотрим произвольное инъективное отображение $l : V' \to \{1, 2, \ldots, |V(G)|\}$ и для любого $1 \leq s \leq n-1$ построим двудольный граф $G_{l,s}$ следующим образом. Вершины первой доли совпадают с множеством вершин $V(G) \setminus V'$, а вершины второй доли отождествляются с числами из $\{1, 2, \ldots, |V(G)|\} \setminus \{l(v_1), l(v_2), \ldots, l(v_k)\}$. Для любой вершины x из первой доли определяется такая единственная вершина $v_x \in V'$, что $(x, v_x) \in E(G)$. Пусть $a = max(l(v_x) - s, 1)$ и $b = min(l(v_x) + s, n)$. Вершина x в графе $G_{l,s}$ смежна со всеми вершинами из второй доли, которые соответствуют числам из $\{a, a+1, \ldots, b-1, b\} \setminus \{l(v_1), l(v_2), \ldots, l(v_k)\}$.

Поскольку k является фиксированным, то построение всего множества описанных выше двудольных графов делается за полиномиальное время. Среди всех этих двудольных графов выберем те, у которых размер наибольшего паросочетания равен $|V(G)| - k$. Такой отбор можно провести за полиномиальное время, поскольку в классе **Bipartite** задача о наибольшем паросочетании полиномиально разрешима [6]. Обозначим через $\mathbf{K}$ множество отобранных двудольных графов. Для любого графа $G_{l,s} \in \mathbf{K}$ вычислим число $\gamma_{l,s} = max(s, |l(v_1) - l(v_2)|, |l(v_2) - l(v_3)|, \ldots, |l(v_{k-1}) - l(v_k)|, |l(v_k) - l(v_1)|)$. Понятно, что $bw(G)$ равна минимуму среди чисел $\gamma_{l,s}$, взятому по всем графам из $\mathbf{K}$. Таким образом, ленточная ширина графов из рассматриваемого класса вычисляется за полиномиальное время. Лемма доказана.

В следующей теореме будет показано, что ни один подкласс ЛШ-сложного класса **CCaterpillar**(1) [49] не является минимальным ЛШ-сложным.

Теорема 4.2. *Для любого* ЛШ-*сложного класса* $\mathbf{X} \subseteq$ **CCaterpillar**(1) *существует такой* ЛШ-*сложный класс* $\mathbf{Y}$, *что* $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что все графы класса **Caterpillar**(1) являются *интервальными*, т.е. графами пересечений интервалов прямой. Класс интервальных графов является ЛШ-простым [53], поэтому класс **Caterpillar**(1) является ЛШ-простым. Поскольку **Caterpillar**(1) = **CCaterpillar**(1)$\cap Free(\{C_3, C_4, \ldots\})$ и класс $\mathbf{X}$ является ЛШ-сложным, то для некоторого k класс $\mathbf{X}$ содержит граф C_k. Из предыдущей леммы следует, что в классе графов $\mathbf{X} \setminus (\mathbf{X} \cap Free(\{C_k\})$ задача ЛШ полиномиально разрешима. Поэтому класс $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \cap Free(\{C_k\})$ является ЛШ-сложным. Теорема доказана.

4.3 Вычислительная сложность задач о списковом ранжировании в некоторых классах графов

В этом и следующем разделах рассматриваются несколько классов графов, два из которых являются наследственными замыканиями множеств графов специального вида — комет и молотов. *Кометой* $Comet(i, j)$ $(i \geq 1,\ j \geq 1)$ называется граф, получаемый отождествлением вершины степени $i+1$ графа $K_{1,i+1}$ с одной из концевых вершин пути P_j. *Молотом* $Hammer(i, j)$ $(i \geq 1, j \geq 1)$ называется граф ребер графа $Comet(i, j+1)$. Классы **Comet** и **Hammer** — наследственные замыкания, соответственно, множества комет и множества молотов. Пусть $\mathbf{Comet}^{(1)}(k) = [\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{Comet(i,1), Comet(i,2), \ldots, Comet(i,k)\}]$, $\mathbf{Comet}^{(2)}(k) = [\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{Comet(1,i), Comet(2,i), \ldots, Comet(k,i)\}]$.

Лемма 4.2[35]. *В классе* **Path** *задачи* ВСР *и* РСР *полиномиально разрешимы.*

Лемма 4.3[35]. *Для любого фиксированного k множество лесов, имеющих не более чем k нелистовых вершин, является как* ВСР*-простым, так и* РСР*-простым.*

Лемма 4.4. *Задача* РСР *в любом классе графов* $\mathbf{X}$ *полиномиально эквивалентна задаче* ВСР *в классе* $L(\mathbf{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задан граф $G \in \mathbf{X}$ с палитрой цветов ребер $L^{E(G)}$. Построим (за полиномиальное время) граф $H = L(G)$ с палитрой $L^{V(H)}$, тождественной $L^{E(G)}$. Любой $L^{V(H)}$-раскраске соответствует $L^{E(G)}$-раскраска. Это следует из того, что любая последовательность ребер, образующая путь в графе G, превращается в последовательность вершин, образующую путь в графе $L(G)$. Верно и обратное: любая $L^{E(G)}$-раскраска при переходе к графу H превращается в $L^{V(H)}$-раскраску. В самом деле, последовательность ребер графа G, соответствующая последовательности вершин, образующей путь в графе H, не всегда является путем в G. Но в ней всегда найдется подпоследовательность, образующая путь, соединяющий первое и последнее ребро. Таким образом, задача РСР для класса $\mathbf{X}$ полиномиально сводится к задаче ВСР для класса $L(\mathbf{X})$.

Обратно, пусть дан граф $H \in L(\mathbf{X})$ с палитрой цветов вершин $L^{V(H)}$. Единственной причиной нарушения биективности соответствия между графами и их реберными графами является то, что $L(K_3) = L(K_{1,3}) = K_3$ (лемма 1.1). Обозначим через k количество компонент связности графа H, являющихся треугольниками, и пусть H' — его подграф, образованный всеми остальными компонентами связности. Тогда существует единственный граф G', для которого $H' = L(G')$ и он может быть найден по графу H' за полиномиальное время [50]. Понятно, что равенство $H = L(G)$ выполняется для тех и только тех графов G, которые получаются добавлением к графу G' k компонент связности, каждая из которых либо $K_{1,3}$, либо K_3. Таких графов (с точностью до изоморфизма) имеется ровно $k+1$ и среди них есть хотя бы один граф из $\mathbf{X}$. Каждому из этих графов естественным образом назначается палитра цветов ребер. Рассуждая как в предыдущем абзаце, приходим к выводу, что допустимая раскраска ребер каждого из этих графов определяет $L^{V(H)}$-раскраску и обратно. Отсюда следует, что задача ВСР для класса $L(\mathbf{X})$ полиномиально сводится к задаче РСР для класса $\mathbf{X}$. Лемма доказана.

Лемма 4.5. *Задачи* ВСР *и* РСР *в классе* **Cycle** *полиномиально разрешимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — произвольный связный граф и x — наибольший из цветов палитры $L^{V(G)}$. Ясно, что в любой $L^{V(G)}$-раскраске имеется не более одной вершины с цветом x. Понятно также, что если $L^{V(G)}$-раскраска существует, то существует такая $L^{V(G)}$-раскраска, в которой одна из вершин имеет цвет x.

Пусть $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и v — такая вершина графа G, что $x \in L^{V(G)}(v)$. Понятно, что если существует $L^{V(G)}$-раскраска, в которой $c(v) = x$, тогда существует и $L^{V(G')}$-раскраска, где $G' = G[V(G) \setminus \{v\}]$ и $L^{V(G')} = \{L^{V(G)}(v_1) \setminus \{x\}, L^{V(G)}(v_2) \setminus \{x\}, \ldots, L^{V(G)}(v_n) \setminus \{x\}\} \setminus \{L^{V(G)}(v) \setminus \{x\}\}$. Очевидно, что обратное утверждение также является верным. Таким образом, задача ВСР для графа G полиномиально сводится к той же задаче для графов из множества $\{G' = G[V(G) \setminus \{v\}] : x \in L^{V(G)}(v)\}$. Отсюда следует, что задача ВСР для класса **Cycle** полиномиально сводима к той же задаче для класса **Path**. Эти рассуждения очевидным образом распространяются и на задачу РСР. Теорема доказана.

Лемма 4.6. *Для любого фиксированного k класс* $\mathbf{Comet}^{(1)}(k)$ *является как* ВСР-*простым, так и* РСР-*простым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что для любого наследственного класса графов $\mathbf{X}$ задачи ВСР и РСР полиномиально сводимы к связным графам из $\mathbf{X}$. Очевидно, что любой связный граф $G \in \mathbf{Comet}^{(1)}(k)$ содержит не более чем k нелистовых вершин. Отсюда и из леммы 4.3 следует справедливость леммы 4.6. Лемма доказана.

Лемма 4.7. *Для любого фиксированного k класс* $\mathbf{Comet}^{(2)}(k)$ *является как* ВСР-*простым, так и* РСР-*простым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что при любом фиксированном k задача ВСР в классе $\mathbf{Comet}^{(2)}(k)$ полиномиально сводима к той же задаче в классе простых путей. Понятно, что любая компонента связности произвольного графа из $\mathbf{Comet}^{(2)}(k)$ является либо кометой, либо простым путем. Таким образом, можно рассматривать только кометы, принадлежащие классу $\mathbf{Comet}^{(2)}(k)$. Пусть G — любой граф такого вида, а $L^{V(G)}$ —

палитра цветов вершин графа G.

Рассмотрим множество $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ — множество вершин графа G степени 1, которые смежны с его вершиной v степени $s+1$. Через M обозначим декартово произведение $L^{V(G)}(v_1) \times L^{V(G)}(v_2) \times \ldots \times L^{V(G)}(v_s) \times L^{V(G)}(v)$. Для любого такого набора $(x_1, x_2, \ldots, x_s, x) \in M$, что $x \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ и x больше любых двух равных элементов из того же множества, рассмотрим частичную допустимую раскраску графа G, в которой $c(v_1) = x_1, c(v_2) = x_2, \ldots, c(v_s) = x_s, c(v) = x$. Рассмотрим максимальное по включению подмножество множества $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$, в котором любые две вершины имеют различные цвета. Будем считать, что это подмножество образовано вершинами $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_p}$, причем $x_{i_1} > x_{i_2} > \ldots > x_{i_p}$. Построим палитру цветов вершин простого пути $P = (u_1, u_2, \ldots, u_{|V(G)|+p-s})$. Для любого $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ множество $L^{V(P)}(u_j)$ равно $\{x_{i_j}\}$, $L^{V(P)}(u_{p+1}) = \{x\}$ и для любого $|V(G)| + p - s \geq j \geq p+2$ множество $L^{V(P)}(u_j)$ совпадает с $L^{V(G)}(w_j)$, где вершина $w_j \in V(G) \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_s, v\}$ в графе G отстоит на расстоянии $j - p - 1$ от центральной вершины v. Легко проверить, что любое расширение рассматриваемой частичной раскраски до некоторой $L^{V(G)}$-раскраски индуцирует некоторую $L^{V(P)}$-раскраску и наоборот. Поскольку $s \leq k$ и k является фиксированным, то мощность множества M ограничена некоторым полиномом от входных данных задачи ВСР. Таким образом, для любого фиксированного k задача ВСР в классе $\mathbf{Comet}^{(2)}(k)$ полиномиально сводима к той же задаче в классе простых путей.

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что при любом фиксированном k задача РСР в классе $\mathbf{Comet}^{(2)}(k)$ полиномиально сводима к задаче РСР в классе простых путей.

Из проведенных рассуждений и из леммы 4.2 следует, что при любом заданном k класс $\mathbf{Comet}^{(2)}(k)$ является ВСР-простым и РСР-простым. Лемма доказана.

Напомним, что звезда S_i — граф, получаемый подразбиением каждого ребра графа $K_{1,i}$. *Солнцем* называется граф ребер звезды. Пусть **Star** — наследственное замыкание множества звезд, а $\mathbf{Sun} = [L(\mathbf{Star})]$.

Лемма 4.8. *Класс* **Star** *является как* ВСР-*сложным, так и* РСР-*сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что утверждение леммы справедливо для задачи ВСР. Доказательство основано на сведении задачи о вершинном списковом ранжировании в классе деревьев высоты не более чем два (обозначаемом далее **THTree**) к той же задаче в классе **Star**. Пусть $G \in \mathbf{THTree}$. Корень дерева G будем обозначать через r, его нелистовых потомков обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ под множеством $\{y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_{j_i}^{(i)}\}$ будем понимать множество потомков вершины x_i. В работе [35] доказано, что класс **THTree** является сложным для задачи о вершинном списковом ранжировании даже для палитр цветов вершин специального вида (называемых далее *упрощенными*). Это такие палитры $L^{V(G)}$, у которых множества $L^{V(G)}(r)$, $L^{V(G)}(y_1^{(1)}), \ldots, L^{V(G)}(y_{j_1}^{(1)}), L^{V(G)}(y_1^{(2)}), \ldots, L^{V(G)}(y_{j_2}^{(2)}), \ldots, L^{V(G)}(y_1^{(p)}), \ldots,\ L^{V(G)}(y_{j_p}^{(p)})$ имеют мощность один и для которых $L^{V(G)}(x_1) = \{\alpha_1, \beta_1\}, L^{V(G)}(x_2) = \{\alpha_2, \beta_2\}, \ldots, L^{V(G)}(x_p) = \{\alpha_p, \beta_p\}$. Данные палитры также обладают тем свойством, что $L^{V(G)}(r)$ — наименьший среди цветов из $L^{V(G)}$ и тем свойством, что для любого $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ и любого $j \in \{1, 2, \ldots, j_i\}$ цвет из $L^{V(G)}(y_j^{(i)})$ больше α_i и меньше β_i.

Рассмотрим сужение задачи ВСР в классе **THTree** на палитры описанного выше вида. Пусть $G \in$ **THTree** и пусть $L^{V(G)}$ — упрощенная палитра цветов вершин этого графа. Можно считать, что разность любых двух различных цветов из $L^{V(G)}$ не меньше чем 2 (это предположение не уменьшает общности, поскольку в противном случае можно умножить каждый из цветов палитры на 2). Рассмотрим вершину x_1 графа G. Множество потомков x_1 произвольным образом разделим на два множества A, B, мощности которых отличаются не более чем на 1. Построим по графу G и палитре $L^{V(G)}$ граф G' и палитру $L^{V(G')}$ следующим образом. Удалим из G вершину x_1 и добавим вершины x_1', x_1'', x_1'''. Добавим также ребра $(r, x_1'), (r, x_1''), (r, x_1''')$, ребра, инцидентные x_1' и всевозможным вершинам из A, а также ребра, инцидентные x_2'' и всевозможным вершинам из B. Для любой вершины $x \in V(G) \cap V(G')$ выполняется равенство $L^{V(G)}(x) = L^{V(G')}(x)$. Пусть $\alpha = \alpha_1 + 1$ и $\beta = \beta_1 - 1$. Положим $L^{V(G')}(x_1') = \{\alpha_1, \beta\}, L^{V(G')}(x_1'') = \{\alpha, \beta_1\}, L^{V(G')}(x_1''') = \{\alpha, \beta\}$. Покажем, что $L^{V(G)}$-раскраска существует тогда и только тогда, когда существует $L^{V(G')}$-раскраска.

Предположим, что существует $L^{V(G')}$-раскраска. Возможны только следующие три случая:

1.1. $L^{V(G')}$-раскраска такова, что $c(x_1') = \alpha_1, c(x_1'') = \beta_1, c(x_1''') \in \{\alpha, \beta\}$. Окрасим вершину x_1 в цвет β_1, а цвет остальных вершин из $V(G) \setminus \{x_1\}$ совпадает с их цветом в $L^{V(G')}$-раскраске. Легко проверить, что построенное таким образом отображение является $L^{V(G)}$-раскраской.

1.2. $L^{V(G')}$-раскраска такова, что $c(x_1') = \alpha_1, c(x_1'') = \alpha, c(x_1''') = \beta$. Окрасим вершину x_1 в цвет α_1, а цвет остальных вершин из $V(G) \setminus \{x_1\}$ совпадает с их цветом в $L^{V(G')}$-раскраске. Легко проверить, что построенное таким образом отображение является $L^{V(G)}$-раскраской.

1.3. $L^{V(G')}$-раскраска такова, что $c(x_1') = \beta, c(x_1'') = \beta_1, c(x_1''') = \alpha$. Этот случай симметричен предыдущему.

Предположим, что существует $L^{V(G)}$-раскраска. Возможны только два случая:

2.1. $L^{V(G)}$-раскраска такова, что $c(x_1) = \alpha_1$. Построение $L^{V(G')}$-раскраски выполняется обратным образом к случаю 1.2.

2.2. $L^{V(G)}$-раскраска такова, что $c(x_1) = \beta_1$. Построение $L^{V(G')}$-раскраски выполняется обратным образом к случаю 1.3.

Итак, $L^{V(G)}$-раскраска существует тогда и только тогда, когда существует $L^{V(G')}$-раскраска, при этом палитра $L^{V(G')}$ остается упрощенной. Применяя описанную выше дихотомию достаточное число раз, мы получаем граф $G^* \in$ **Star**. Ясно, что вопрос о существовании $L^{V(G^*)}$-раскраски эквивалентен вопросу о существовании $L^{V(G)}$-раскраски. Заметим, что входные данные задачи ВСР для графа G^* ограничены сверху полиномом от входных данных той же задачи для графа G. Отсюда следует, что задача ВСР в классе **THTree** полиномиально сводима к той же задаче в классе **Star**.

Доказательство леммы для задачи РСР проводится по аналогии с задачей ВСР, поскольку класс **THTree** является сложным для задачи о реберном списковом ранжировании для упрощенных палитр [35] (для реберного случая под упрощенной палитрой понимается такая палитра, в которой ребра $(r, x_1), (r, x_2), \ldots, (r, x_p)$ имеют два допустимых цвета, им смежные и не инцидентные r ребра имеют один допустимый цвет и выполняется соответствующее строгое неравенство между допустимыми цветами). Лемма доказана.

4.4 Минимальные сложные классы графов для задач о списковом ранжировании

4.4.1 О связях между минимальными сложными и граничными классами

Теорема 4.3. *Если некоторый класс графов является* П*-сложным граничным классом, то этот класс является минимальным* П*-сложным классом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{X}$ — П-сложный граничный класс графов, который не является минимальным П-сложным. Тогда существует такой П-сложный класс графов $\mathbf{Y}$, что $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$. Класс $\mathbf{Y}$ является П-предельным классом. Получаем противоречие с тем, что $\mathbf{X}$ — П-граничный класс. Теорема доказана.

Автору неизвестно, верно ли обратное к теореме 4.3 утверждение. Однако, как показывает следующий результат, для конечно определенных классов графов такие критерии действительно имеют место.

Теорема 4.4. *Конечно определенный класс является* П*-граничным тогда и только тогда, когда он является минимальным* П*-сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{X}$ — конечно определенный класс графов, являющийся П-граничным. Из теоремы 1.2 следует, что $\mathbf{X}$ является П-сложным. Из теоремы 4.3 следует, что $\mathbf{X}$ является минимальным П-сложным классом.

Пусть теперь $\mathbf{X}$ — конечно определенный класс, являющийся минимальным П-сложным. Из теоремы 1.2 следует, что существует П-граничный класс $\mathbf{Y}$, содержащийся в $\mathbf{X}$. Предположим, что $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$, тогда существует граф $G \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y}$. Из той же теоремы 1.2 следует, что класс $\mathbf{X} \cap Free(\{G\})$ является П-сложным. Получаем противоречие с минимальностью класса $\mathbf{X}$. Таким образом, предположение неверно, т.е. $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$. Теорема доказана.

Далее будет доказано, что для рассматриваемых задач классы **Comet** и **Hammer** являются минимальными сложными классами, причем множества $Forb(\mathbf{Comet})$ и $Forb(\mathbf{Hammer})$ бесконечны. Показывается также, что классы **Star** и **Sun** являются конечно определенными минимальными сложными классами графов для тех же задач.

4.4.2 Наследственные замыкания комет и молотов

Лемма 4.9. *Имеют место равенства* $Forb(\mathbf{Comet}) = \{B_1, B_2, B_3, 2K_{1,3}, T_{1,2,2}, C_3, C_4, \ldots\}$ *и* $Forb(\mathbf{Hammer}) = \{L(B_1), H_1, 2K_3, D_{0,1,1}, K_{1,3}, K_4 - e, C_4, C_5, \ldots\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку каждый из графов множества $\mathbf{M}_1 = \{B_1, B_2, B_3, 2K_{1,3}, T_{1,2,2}, C_3, C_4, \ldots\}$ не принадлежит классу **Comet**, а каждый порожденный подграф любого из графов этого множества принадлежит **Comet**, то $Forb(\mathbf{Comet}) \supseteq \mathbf{M}_1$. Докажем, что $Free(\mathbf{M}_1) \subseteq \mathbf{Comet}$. Пусть $G \in Free(\mathbf{M}_1)$. Очевидно, что этот граф является лесом. Поскольку $G \in Free(\{B_1, B_2, B_3, 2K_{1,3}\})$, то в данном графе имеется не более одной вершины степени не менее чем 3. Если $G \in \mathbf{Deg}(2)$, то $G \in \mathbf{Comet}$. Т.к. $G \in Free(\{T_{1,2,2}\})$, то и в случае, когда $G \notin \mathbf{Deg}(2)$, граф G принадлежит классу **Comet**. Таким образом, справедливо включение $Free(\mathbf{M}_1) \subseteq \mathbf{Comet}$. Из полученных включений заключаем, что $Forb(\mathbf{Comet}) = \mathbf{M}_1$.

Включение $Forb(\mathbf{Hammer}) \supseteq \mathbf{M}_2 = \{L(B_1), H_1, 2K_3, D_{0,1,1}, K_{1,3}, K_4 - e, C_4, C_5, \ldots\}$ очевидно. Докажем, что $Free(\mathbf{M}_2) \subseteq \mathbf{Hammer}$, откуда будет следовать равенство $Forb(\mathbf{Hammer}) = \mathbf{M}_2$. Поскольку $Free(\{K_{1,3}, K_4 - e\}) \subseteq \mathbf{Line}$ (см. лемму 1.2), то $Free(\mathbf{M}_2)$ состоит из реберных графов. Таким образом, для некоторого класса графов $\mathbf{X}$ выполнено равенство $Free(\mathbf{M}_2) = L(\mathbf{X})$. Понятно, что если граф $G \in \mathbf{X}$ содержит цикл C_3, то в данном графе множество вершин этого цикла составляют компоненту связности. Ясно, что такая компонента является единственной. Заменим эту компоненту на граф $K_{1,3}$ и получим граф G'. Ясно, что $L(G) = L(G')$, причем $G' \in Free(\{2K_{1,3}\})$. Таким образом, можно предполагать, что $\mathbf{X} \subseteq Free(\{C_3\})$. Отсюда, из структуры множества

$\mathbf{M}_2$ и леммы 1.1 следует, что $\mathbf{X} \subseteq Free(\mathbf{M}_1) = \mathbf{Comet}$. Заметим, что $\mathbf{Comet}$ — сильно наследственный класс графов. Поэтому $L(\mathbf{Comet}) = [L(\mathbf{Comet})] = \mathbf{Hammer}$. Отсюда следует справедливость включения $Free(\mathbf{M}_2) \subseteq \mathbf{Hammer}$. Лемма доказана.

Теорема 4.5. *Класс* **Comet** *является как минимальным* BCP-*сложным, так и минимальным* PCP-*сложным. Класс* **Hammer** *является минимальным* BCP-*сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку класс **Comet** является как BCP-сложным [35], так и PCP-сложным [35], то этот класс является BCP-предельным и PCP-предельным. Из леммы 4.4 следует, что класс **Hammer** является BCP-сложным, а следовательно, BCP-предельным классом. Докажем граничность этих классов для соответствующих задач. Отсюда и из теоремы 4.3 будет следовать их минимальность.

Рассмотрим произвольный граф $G \in \mathbf{Comet}$. Понятно, что данный граф является порожденным подграфом некоторой кометы $Comet(i,j)$ при некоторых i,j. Пусть $\mathbf{M}_1 = \{B_1, B_2, B_3, 2K_{1,3}, T_{1,2,2}, C_3, C_4, C_5\} \subset Forb(\mathbf{Comet})$. Очевидно, что имеет место включение $Free(\mathbf{M}_1 \cup \{G\}) \subseteq Free(\mathbf{M}_1 \cup \{Comet(i,j)\})$. Легко проверить, что любая компонента связности произвольного графа из класса $Free(\mathbf{M}_1 \cup \{Comet(i,j)\})$ является либо простым путем, либо простым циклом, либо кометой. Тогда справедливо включение $Free(\mathbf{M}_1 \cup \{Comet(i,j)\}) \subseteq [\mathbf{Cycle} \cup \mathbf{Comet}^{(1)}(j) \cup \mathbf{Comet}^{(2)}(i)]^{+}$. Отсюда и из лемм 4.2, 4.5, 4.6, 4.7 следует, что класс $Free(\mathbf{M}_1 \cup \{G\})$ является как BCP-простым, так и PCP-простым. Из теоремы 1.3 следует, что класс **Comet** является как BCP-граничным, так и PCP-граничным.

Рассмотрим произвольный граф $G \in \mathbf{Hammer}$. Ясно, что этот граф является порожденным подграфом молота $Hammer(i,j)$ для некоторых i,j. Обозначим через $\mathbf{M}_2$ множество графов $\{L(B_1), H_1, 2K_3, D_{0,1,1}, K_{1,3}, K_4 - e, C_4, C_5\} \subset Forb(\mathbf{Hammer})$. Понятно, что класс $Free(\mathbf{M}_2 \cup \{G\})$ состоит из реберных графов, т.е. для некоторого класса графов $\mathbf{Y}$ выполнено равенство $L(\mathbf{Y}) = Free(\mathbf{M}_2 \cup \{G\})$. Легко проверить, что $\mathbf{Y} \subseteq Free((\mathbf{M}_1 \setminus \{C_3\}) \cup \{Comet(i,j+1), 2K_3, D_{0,0,1}, K_4 - e, K_4\})$. Нетрудно видеть, что любая компонента связности произвольного графа из $Free((\mathbf{M}_1 \setminus \{C_3\}) \cup \{Comet(i,j+1), 2K_3, D_{0,0,1}, K_4 - e, K_4\})$ является либо простым путем, либо простым циклом, либо кометой. Поэтому класс $\mathbf{Y}$ является PCP-простым. Отсюда и из леммы 4.4 следует, что класс $Free(\mathbf{M}_2 \cup \{G\})$ является BCP-простым. Таким образом, класс **Hammer** является BCP-граничным. Теорема доказана.

4.4.3 Наследственные замыкания звезд и солнц

Лемма 4.10. *Имеют место равенства* $Forb(\mathbf{Star}) = \{C_3, C_4, C_5, C_6, P_3 \oplus P_2, B_1\}$ *и* $Forb(\mathbf{Sun}) = \{K_{1,3}, K_4 - e, C_4, C_5, 2K_2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\mathbf{M}_1 = \{C_3, C_4, C_5, C_6, P_3 \oplus P_2, B_1\} \subseteq Forb(\mathbf{Star})$ и $\mathbf{M}_2 = \{K_{1,3}, K_4 - e, C_4, C_5, 2K_2\} \subseteq Forb(\mathbf{Sun})$. Докажем, что $Free(\mathbf{M}_1) \subseteq \mathbf{Star}$ и что $Free(\mathbf{M}_2) \subseteq \mathbf{Sun}$, откуда будет следовать утверждение леммы.

Покажем, что $Free(\mathbf{M}_1) \subseteq \mathbf{Star}$. Пусть $G \in Free(\mathbf{M}_1)$. Очевидно, что граф G является лесом. Если он является связным, то имеет диаметр не более чем 5 (поскольку $G \in Free(\{P_3 \oplus P_2\})$) и имеет не более одной вершины, степень которой больше чем 2 (поскольку $G \in Free(\{P_3 \oplus P_2, B_1\})$). Понятно, что если такая вершина существует, то расстояние от нее до любой другой вершины не превосходит 2. Отсюда следует, что $G \in \mathbf{Star}$. Ясно, что если G несвязен, то либо $G = k_1 P_2 \oplus k_2 P_1$ для некоторых k_1 и k_2, либо каждая компонента связности графа G, кроме одной, состоит из одной вершины. Из доказанного ранее следует, что эта компонента-исключение принадлежит классу $\mathbf{Star}$, откуда легко следует, что $G \in \mathbf{Star}$. Таким образом, $Free(\mathbf{M}_1) \subseteq \mathbf{Star}$.

Покажем теперь, что $Free(\mathbf{M}_2) \subseteq \mathbf{Sun}$. Ясно, что класс $Free(\mathbf{M}_2)$ состоит из реберных графов, т.е. для некоторого класса $\mathbf{X}$ выполнено равенство $Free(\mathbf{M}_2) = L(\mathbf{X})$. По аналогии с рассуждениями леммы 4.9 можно показать, что достаточно рассматривать только случай, когда $\mathbf{X} \subseteq Free(\{C_3\})$. Очевидно, что $\mathbf{X} \subseteq Free(\{C_4, C_5, C_6, 2P_3, P_6, T_{1,1,3}, B_1\})$. Из последних двух включений следует, что любой связный граф класса $\mathbf{X}$ принадлежит классу $\mathbf{Star}$. Эти же условия означают, что для произвольного несвязного графа G из того же класса и для некоторых p и q выполнено равенство $G = G^* \oplus pK_2 \oplus qK_1$, где G^* — связный граф из класса $\mathbf{Star}$. Очевидно, что в этом случае $L(G) \in [L(\mathbf{Star})]$. Таким образом, справедливы соотношения $Free(\mathbf{M}_2) = L(\mathbf{X}) \subseteq [L(\mathbf{Star})] = \mathbf{Sun}$, т.е. $Free(\mathbf{M}_2) \subseteq \mathbf{Sun}$. Лемма доказана.

Теорема 4.6. *Класс* **Star** *является минимальным* BCP-*сложным и минимальным* PCP-*сложным, а класс* **Sun** *является минимальным* BCP-*сложным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Леммы 4.4, 4.8 означают, что класс **Star** является BCP-сложным и PCP-сложным, а класс **Sun** является BCP-сложным. Докажем их минимальность.

Покажем сначала, что для любого графа G из **Star** класс $\mathbf{Star} \cap Free(\{G\})$ является как BCP-простым, так и PCP-простым. Отсюда будет следовать минимальность класса **Star** для задач BCP и PCP. Граф G является порожденным подграфом звезды S_i для некоторого i. Поэтому справедливо включение $\mathbf{Star} \cap Free(\{G\}) \subseteq \mathbf{Star} \cap Free(\{S_i\})$. Очевидно, что произвольная компонента связности любого графа из $\mathbf{Star} \cap Free(\{S_i\})$ имеет не более чем i нелистовых вершин. Отсюда и из леммы 4.3 следует, что для любого $G \in \mathbf{Star}$ задачи BCP и PCP в классе графов $\mathbf{Star} \cap Free(\{G\})$ полиномиально разрешимы.

Докажем теперь, что для любого графа $G \in \mathbf{Sun}$ класс $\mathbf{Sun} \cap Free(\{G\})$ является BCP-простым. Понятно, что существует такой граф $H \in \mathbf{Star}$, что G является порожденным подграфом графа $L(H)$. Отсюда следует справедливость цепочки включений $\mathbf{Sun} \cap$

$Free(\{G\}) \subseteq [L(\mathbf{Star})] \cap Free(\{L(H)\}) \subseteq [L(\mathbf{Star} \cap Free(\{H\}))]$. Класс $\mathbf{Star} \cap Free(\{H\})$ — PCP-простой. Ясно, что и подграфы графов из этого класса образуют PCP-простой класс. Отсюда и из леммы 4.4 следует, что класс $[L(\mathbf{Star} \cap Free(\{H\}))]$ является BCP-простым. Таким образом, для любого $G \in \mathbf{Sun}$ класс $\mathbf{Sun} \cap Free(\{G\})$ является BCP-простым. Поэтому **Sun** — минимальный BCP-сложный класс. Теорема доказана.

Литература

[1] Алексеев В. Е. О сжимаемых графах // В сб. Проблемы кибернетики, вып. 36, 1979. — Стр. 23–32.

[2] Алексеев В. Е. Полиномиальный алгоритм для нахождения наибольших независимых множеств в графах без вилок // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. — 1999. — Т.6, №4. — Стр. 3–19.

[3] Алексеев В. Е. Исследование количественных и сложностных характеристик наследственных классов графов: диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.09 — «дискретная математика и математическая кибернетика». — Нижний Новгород, 2002. — 113 Стр.

[4] Алексеев В. Е., Малышев Д. С. Классы планарных графов с полиномиально разрешимой задачей о независимом множестве // Дискретный анализ и исследование операций. — 2008. — Том 15, №1. — Стр. 3–10.

[5] Алексеев В. Е., Малышев Д. С. Критерий граничности и его применения // Дискретный анализ и исследование операций. — 2008. — Том 15, №6. — Стр. 3–11.

[6] Алексеев В. Е., Таланов В. А. Графы. Модели вычислений. Алгоритмы. — Н.Новгород: Из-во Нижегородского университета, 2005. — 308 Стр.

[7] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 Стр.

[8] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. — М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 384 Стр.

[9] Зыков А. А. Основы теории графов. — М.: Наука, 1987. — 383 Стр.

[10] Малышев Д. С. Граничные классы для задачи о независимом множестве в классе планарных графов // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Раздел «Математика». — 2007. — №6. — Р. 165–168.

[11] Малышев Д. С. Граничные классы относительно класса планарных графов для задачи о независимом множестве // Материалы VI молодежной научной школы по

дискретной математике и ее приложениям (Москва, 16–21 апреля 2007 г.), часть II. — Стр. 16–20.

[12] Малышев Д. С. Граничные классы для задач на графах // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Раздел «Математическое моделирование и оптимальное управление». — 2008. — №6. — Р. 141–146.

[13] Малышев Д. С. О единственности граничного класса для задачи о независимом множестве в классе планарных графов // Материалы XV международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2008» (Москва, 9–12 апреля 2008 г.), секция «Вычислительная Математика и Кибернетика». — Стр. 43–44.

[14] Малышев Д. С. О бесконечности множества граничных классов для задачи о 3-раскраске // Тезисы докладов XV международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 2–7 июня 2008 г.). — Стр. 79.

[15] Малышев Д. С. О бесконечности множества граничных классов в задаче о реберной 3-раскраске // Дискретный анализ и исследование операций. — 2009.— Т.16, №1. — Стр. 37–43.

[16] Малышев Д. С. Граничные классы графов для некоторых задач распознования // Дискретный анализ и исследование операций. — 2009.— Т.16, №2. — Стр. 85–94.

[17] Малышев Д. С. Континуальные множества граничных классов графов для задач о раскраске // Дискретный анализ и исследование операций. — 2009. — Т.16. (принято к публикации).

[18] Малышев Д. С. О минимальных сложных классах графов // Дискретный анализ и исследование операций. — 2009. — Т.16. (принято к публикации).

[19] Малышев Д. С. О количестве граничных классов в задаче о 3-раскраске // Дискретная математика. — 2009. — Т. 21. (принято к публикации).

[20] Малышев Д. С. О недавних результатах в теории граничных классов графов // Материалы VIII международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Моск. обл., 6–9 апреля 2009 г.). — Стр. 132–136.

[21] Малышев Д. С. О минимальных сложных элементах решетки наследственных классов графов // Материалы VII молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 18–23 мая 2009 г.) (в печати).

[22] Сорочан С. В. Исследование количественных характеристик наследственных классов ориентированных и цветных графов: диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — «дискретная математика и математическая кибернетика». — Нижний Новгород, 2006. — 149 Стр.

[23] Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1982. — 301 Стр.

[24] Alekseev V. E. On easy and hard classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Applied Mathematics. — 2004. — V. 132. — P. 17–26.

[25] Alekseev V. E., Boliac R., Korobitsyn D. V., Lozin V. V. NP-hard graph problems and boundary classes of graphs // Theoretical Computer Science. — 2007. — V. — 389. — P. 219–236.

[26] Alekseev V. E., Korobitsyn D. V., Lozin V. V. Boundary classes of graphs for the dominating set problem // Discrete Mathematics. — 2004. — V. 285. — P. 1–6.

[27] Alekseev V. E., Lozin V. V., Malyshev D. S., Millanic M. The maximum independent set problem in planar graphs // Mathematical Foundations of Computer Science (Torun, 25–29 August 2008). Proc. in Lecture Notes in Computer Science. — V. — 5162. — P. 96–107.

[28] Alekseev V. E., Malyshev D. S. Planar graph classes with the independent set problem solvable in polynomial time // (Russian) translation in Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2009. — V. 3, №1. — P. 1–5.

[29] Arnborg S., Proskurowski A. Linear time algorithms for NP-hard problems, restricted to partial k-trees // Discrete Applied Mathematics. — 1989. — V. 23. — P. 11–24.

[30] Bodlaender H. L. Dynamic programming on graphs with bounded treewidth // Automata, Languages and Programming (Tampere, 11–15 July 1988). Proc. in Lecture Notes in Computer Science. — 1988. — V. 317. — P. 105–118.

[31] Breu H., Kirkpatrick D.G. Unit disk graph recognition is NP-hard // Computational Geometry. — 1998. — V. 9. — P. 3–24.

[32] Chudnovsky M., Robertson N., Seymour P., Thomas R. The strong perfect graph theorem // Ann. of Math. — 2006. — V. 164. — P. 51–229.

[33] Courcelle B., Makowsky J. A., Rotics U. Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width // Theory Comput. Syst. — 2000. — V. 33. — P. 125–150.

[34] Corneil D. G., Perl Y., Stewart L. K. A linear recognition algorithm for cographs // SIAM J. Comput. — 1985. — V. 14. — P. 926–934.

[35] Dereniowski D. The complexity of list ranking of trees // Ars Combinatoria. — 2008. — V. 86. — P. 97–114.

[36] Faria L., Figueiredo C. H., Gravier S., Mendonça C. F. X., Stolfi J. On maximum planar induced subgraphs // Discrete Applied Mathematics. — 2006. — V. 154. — P. 1774–1782.

[37] Faria L., Figueiredo C. H., Mendonça C. F. X. Splitting number is NP-complete // Discrete Applied Mathematics. — 2001. — V. 108. — P. 65–83.

[38] Gallai T. Transitiv orientierbare graphen // Acta Math. Acad. Sci. Hung. — 1967. — V. 18. — P. 25–66.

[39] Hladky J. Structural properties of graphs — probabilistic and deterministic point of view (Biparite subgraphs in a random cubic graph) // Bachelor's degree thesis, Department of Applied Mathematics, Charles University in Prague, 2006.

[40] Holyer I. The NP-completeness of edge-coloring // SIAM J. Comput. — 1981. — V. 10, №4. — P. 718–720.

[41] Jamison R.E. Coloring parameters associated with rankings of graphs // Congressus Numerantum. — 2003. — V. 164. — P. 111–127.

[42] Kochol M., Lozin V., Randerath B. The 3-colorability problem on graphs with maximum degree four// SIAM J.Comput. — 2003. — V. 32, №5. — P. 1128–1139.

[43] Ladner R. E. The computational complexity of provability in systems of modal prepositional logic // SIAM J. Comput. — 1977. — V. 6. — P. 467–480.

[44] Lozin V. V. Boundary classes of planar graphs // Combinatorics, Probability and Computing. — 2008. — V. 17. — P. 287–295.

[45] Lozin V. V., Rautenbach D. On the band-, tree- and clique-width of graphs with bounded vertex degree // Discrete Mathematics. — 2004. — V. 18. — P. 195–206.

[46] Lozin V. V., Millanic M. Maximum independent sets in graphs of low degree // Proceedings of the ACM-SIAM symposium on descrete algorithms (New Orleans, 7–9 January 2007). — P. 874–880.

[47] Middendorf M., Pfeiffer F. On the complexity of the disjoint path problem // Combinatorica. — 1993. — V. 13, № 1. — P. 97–107.

[48] Minty G. J. On maximal independent sets in claw-free graphs // J. Combin Theory, Series B. — 1980. — V. 28, №3. — P. 284–304.

[49] Muradian D. The bandwidth minimization problem for cyclic caterpillars with hairs length 1 is NP-complete // Theoretical Computer Science. — 2003. — V. 307. — P. 567–572.

[50] Roussopoulos N. A $max\{m, n\}$ algorithm for determining the graph H from its line graph G // Information Processing Letters. — 1973. — V. 2, № 4. — P. 108–112.

[51] Robertson N., Seymour P. Graph minors. III. Planar tree-width // J. Combin. Theory, Series B. — 1986. — V. 41. — P. 92–114.

[52] Scheffler P. A practical linear algorithm for vertex disjoint path in graphs with bounded treewidth // Technical report № 396, Department of Mathematics, Technische Universität Berlin. — 1994. — P. 21.

[53] Sprague A.P. An $O(nlogn)$-algorithm for bandwidth of interval graphs // J. Discr. Math. — 1994. — V. 9. — P. 213–220.