ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2012, том 446, № 2, с. 145–148

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.9

БОЗЕ-КОНДЕНСАТ В *D*-МЕРНОМ СЛУЧАЕ, В ЧАСТНОСТИ ПРИ $D = 2$ И $D = 1$

© 2012 г. Академик **В. П. Маслов**

Поступило 08.06.2012 г.

В 1925 г. Эйнштейн, изучая работу Бозе, открыл явление, которое назвал бозе-конденсатом. Современное изложение этого открытия содержится в книге [1]. Существенным моментом в этом изложении является определение энтропии бозе-газа. Это определение связано с размерностью с помощью так называемого числа состояний (ячеек – cells), которое в книге [1] обозначается G_j. Далее рассматривается задача о минимуме энтропии с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа при двух ограничениях: числа частиц и энергии. Число состояний G_j определяется из формулы, которая у математиков называется соотношением Вейля и подробно изложена в книге [2] в главе “Квазиклассический случай” в параграфе “Несколько степеней свободы”. $2D$-мерное фазовое пространство разбивается на решетку и G_j определяется из формулы

$$G_j = \frac{\Delta p_i \Delta q_j}{(2\pi h)^D}. \tag{1}$$

Неопределенные множители Лагранжа выражаются через температуру и химпотенциал газа.

Далее в учебнике [1], следуя Эйнштейну, совершается предельный переход при $N \to \infty$, который позволяет перейти от сумм к интегралам. Затем в параграфе “Вырожденный бозе-газ” выделяется точка, которая отвечает энергии, равной нулю. Эта точка и является точкой бозе-конденсата, на которой при температуре ниже так называемой температуры вырождения T_d (degeneracy temperature) скапливаются лишние частицы, превышающие некоторое значение $N_d \gg 1$. Теоретическое открытие этой точки предвосхитило целый ряд экспериментов, которые это подтвердили не только для жидкого гелия, но и для ряда металлов и даже для водорода.

С математической точки зрения выделение точки в интеграле некорректно, если эта точка не является δ-функцией. В частности, для двумерного случая эта некорректность приводит к сформулированной в различных учебниках “теореме" о том, что в двумерном случае бозе-конденсата нет.

В настоящей работе мы избавимся от этой математической некорректности и покажем, что как в двумерном, так и в одномерном случае бозе-конденсат есть, если такая точка определена корректно.

Основная идея автора для обоснования возникновения бозе-конденсата в D-мерном случае заключается в согласовании химпотенциала $\mu \to 0$ и числа частиц $N \to \infty$ при переходе к пределу.

Только в случае, когда предел при $\mu \to 0$ зависит от $N \to \infty$, явление, связанное с точкой конденсата, имеет место.

Если мы принимаем это замечательное открытие Эйнштейна для трехмерного случая и обосновываем его математически корректно, то точно так же математически корректным является бозе-конденсат в двумерном случае, на котором мы остановимся особенно подробно.

Итак, мы рассмотрим случай, когда величина $N \gg 1$, но не равна бесконечности. В учебнике Квасникова [3] в параграфе “Идеальный газ в случае парастатистики” приводится задача (33), отвечающая конечной парастатистике:

$$n_j = \frac{1}{\exp\left\{\dfrac{\varepsilon_j - \mu}{T}\right\} - 1} - \frac{k+1}{\exp\left\{(k+1)\dfrac{\varepsilon_j - \mu}{T}\right\} - 1}, \tag{2}$$

$$n_j = \frac{N_j}{G_j}.$$

В нашем случае $k = N_d$, а точка конденсата $\varepsilon_0 = 0$.

Очевидно из (1), что G_j связано с D-мерной лебеговой мерой и по координатам Δq_j в пределе в пространстве размерности 3 дает объем V, а в пространстве размерности 2 – площадь Q. Переход по импульсам Δp_j также справедлив при $N \to \infty$, $\mu > \delta > 0$, где δ сколь угодно мало.

Разлагая (2) в точке $\varepsilon_0 = 0$ по малому параметру $x = \dfrac{\mu N_d}{T_d}$, где N_d – число частиц, отвечающее вы-

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

рождению, а T_d – температура вырождения, обозначая $\xi = -\frac{\mu}{T_d}$, получим

$$n_0 = \left\{ \frac{1}{\exp\left\{\frac{-\mu}{T}\right\} - 1} - \frac{N_d + 1}{\exp\left\{(N_d + 1)\frac{-\mu}{T}\right\} - 1} \right\} =$$

$$= \frac{e^{\xi N_d} - 1 - (N_d + 1)(e^{\xi} - 1)}{(e^{\xi} - 1)(e^{2N_d} - 1)} =$$

$$= \frac{N_d}{2} \frac{1 + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \ldots}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{4!} + \ldots} =$$

$$= \frac{N_d}{2}\left(1 - \frac{x}{3} - \frac{11}{24}x^2 - 0.191x^3 - \ldots\right). \quad (3)$$

Так, если $x \to 0$, то $n_0 = \frac{N_d}{2}$ и, значит, число частиц в конденсате при $T = T_d$ не превосходит $\frac{N_d}{2}$. Если $x = 1.57$, то $n_0 \approx \frac{N_d}{10}$. Это, разумеется, сказывается на температуре вырождения, поскольку она выражается только через число надконденсатных частиц $\tilde{N}_d$, а не через общее число частиц N_d, равное сумме $\tilde{N}_d$ и числа частиц в конденсате.

Согласно концепции Эйнштейна, при $T = T_d$ в конденсате находится $o(N_d)$ частиц. Но даже такое скопление дает δ-функцию, правда, с малым коэффициентом (в двумерном случае это $\frac{\tilde{N}_d}{\ln N_d}$, т.е. $o(N_d)$).

Для того чтобы увязать понятие бозе-статистики, приведенное в [1], с симметрическими решениями N-частичного уравнения Шредингера, т.е. прямой суммы N невзаимодействующих гамильтонианов, соответствующих уравнению Шредингера, и симметрическими решениями для их спектра, удобнее сопоставить ячейкам кратности спектра уравнения Шредингера по способу, описанному в [4].

Мы рассмотрим нерелятивистский случай, когда гамильтониан системы H равен $\frac{p^2}{2m}$, где p – импульс.

Сопоставление G_i с кратностями спектра уравнения Шредингера дает соответствие между симметрическими по перестановке частиц собственными функциями N-частичного уравнения Шредингера с комбинаторными выкладками бозе-статистики, приведенными в книге [1].

Одночастичная ψ-функция удовлетворяет свободному уравнению Шредингера с условиями Дирихле на стенках сосуда. Согласно классической формуле Куранта,

$$\lambda_j \sim \frac{2h^2}{m}\left(\frac{\pi^{D/2}\Gamma(D/2 + 1)}{V}\right)^{2/D} j^{2/D} \quad \text{при } j \to \infty, \quad (4)$$

где D – размерность пространства в силу того, что спектральная плотность имеет асимптотику

$$\rho(\lambda) = \frac{Vm^{D/2}\lambda^{D/2}}{\Gamma(D/2 + 1)(2\pi)^{D/2}h^D}(1 + o(1)) \quad \text{при } \lambda \to \infty. \quad (5)$$

Асимптотика (4) является естественным обобщением этой формулы.

Именно этим соответствием мы устанавливаем связь между комбинаторикой Бозе-Эйнштейна [1] и определением для N-частичного уравнения Шредингера и кратностью спектра одночастичного уравнения Шредингера.

Спектр одночастичного уравнения Шредингера без учета потенциала взаимодействия с точностью до множителя совпадает со спектром оператора Лапласа. Рассмотрим его спектр для отрезка, квадрата и D-мерного куба с нулевыми граничными условиями. Он, очевидно, будет состоять из суммы одномерных.

На прямой мы отложим точки $i = 0, 1, 2, \ldots$, на осях координат x, y плоскости точки $x = i = 0, 1, 2, \ldots$; $y = j = 0, 1, 2, \ldots$ Мы сопоставим этому множеству точек (i, j) точки на прямой – натуральный ряд $l = 1, 2, \ldots$

Сопоставим каждой точке пару точек i и j по правилу $i + j = l$. Число таких точек n_l равно $l + 1$. Это двумерный случай.

Рассмотрим трехмерный случай. Положим на оси $z = k = 0, 1, 2, \ldots$, т.е. положим $i + j + k = l$. В этом случае число точек n_l будет равно

$$n_l = \frac{(l + 1)(l + 2)}{2}.$$

Нетрудно проверить для D-мерного случая, что последовательность кратностей числа вариантов $i = \sum_{k=1}^{D} m_k$, где m_k – любые натуральные числа, имеет вид

$$q_i(D) = \frac{(i + D - 2)!}{(i - 1)!(D - 1)!}, \quad \text{если } D = 2, \quad q_i(2) = i. \quad (6)$$

Трехмерному случаю $D = 3$ отвечает следующая задача теории чисел (см. [1]):

$$\sum N_i = N, \quad \varepsilon\sum\frac{(i+2)!}{i!6}N_i = E, \quad \frac{E}{\varepsilon} = M. \qquad (7)$$

Обозначим $M = \frac{E_d}{\varepsilon_1}$, где ε_1 – коэффициент в формуле (4) при $j = 1$. Находим E_d:

$$E_d = \int_0^\infty \frac{\frac{|p|^2}{2m}d\varepsilon}{e^{\frac{|p|^2}{2m}/T_d} - 1}, \qquad (8)$$

где

$$d\varepsilon = \frac{|p|^2}{2m}\frac{dp_1\ldots dp_D dV_D}{(2\pi h)^D}. \qquad (9)$$

Отсюда получаем коффициент α в формуле

$$E_d = \alpha T_d^{2+\gamma}\zeta(2+\gamma)\Gamma(2+\gamma). \qquad (10)$$

Связь между температурой вырождения и надконденсатным числом $\tilde{N}_d$ при $\mu > \delta > 0$ (δ сколь угодно мало) для $D > 2$ находится стандартным образом. При этом число частиц в конденсате зависит от способа стремления $\mu \to 0$ и $N_d \to \infty$.

При $D \le 2$ задача сводится к теории чисел. Остановимся более подробно на двумерном случае. Имеет место теорема Эрдёша для системы двух диофантовых уравнений

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_i = N, \quad \sum_{i=1}^{\infty} iN_i = M. \qquad (11)$$

Максимальное число решений этой системы достигается при выполнении соотношения

$$N_d = c^{-1}M_d^{1/2}\lg M_d + aM_d^{1/2} + o(M_d^{1/2}), \quad c = \pi\sqrt{2/3}, \qquad (12)$$

а коэффициент a определяется формулой $\frac{c}{2} = e^{-ca/2}$.

Если в задаче (11) число N увеличивать, а M оставлять постоянным, то число решений будет убывать. Отсюда следует, что если суммы (11) отсчитывать от нуля, а не от единицы, т.е.

$$\sum_{i=0}^{\infty} iN_i = M - N, \ldots, \quad \sum_{i=0}^{\infty} N_i = N, \qquad (13)$$

то число решений не будет убывать, а будет оставаться постоянным.

На самом деле дело обстоит иначе.

Постараемся объяснить этот эффект бозе-конденсата по-другому. Задача Эрдёша–Ленера [5], как автор уже писал (см. [6]), эквивалентна задаче о разложении числа M_d на $N \le N_d$ слагаемых. Разложение M_d на одно слагаемое дает только один вариант. Разложение M_d на M_d слагаемых тоже дает только один вариант – в виде суммы единиц. Значит, где-то в промежутке должен быть хотя бы один максимум вариантов. Эрдёш его вычислил [7].

Разложим число 5 на два слагаемых. Получим: $3 + 2 = 4 + 1$. Итого два варианта (это проблема “partitio numerorum” problem). Если мы включим также 0, то получим три варианта: $5 + 0 = 3 + 2 = 4 + 1$. Таким образом, включение нуля дает возможность сказать, что мы разлагаем число на $k \le n$ слагаемых. Действительно, разложение числа 5 на три слагаемых включает все предыдущие варианты: $5 + 0 + 0$, $3 + 2 + 0$, $4 + 1 + 0$ и добавляет новые варианты уже без нуля.

Таким образом, при разложении числа 5 на три слагаемых число нулей равно 4. Это значит, что при решении уравнения (12)

$$\sum_{i=0}^{\infty} N_i = 3, \quad \sum_{i=0}^{\infty} iN_i = 5 \qquad (14)$$

в конденсате оказывается 4 частицы, т.е. больше, чем число частиц $N = 3$. В данном случае максимальное число вариантов разложения (их два) числа 5 на N слагаемых достигается при $N = 2$ и $N = 3$ (два значения для максимального числа вариантов надконденсатных N).

В одном из максимумов в конденсате оказывается одна частица, а в другом – 4. Для идеального двумерного бозе-газа асимптотика числа частиц в конденсате посчитана по просьбе автора Г.И. Архиповым. Она имеет порядок $\frac{\tilde{N}_d}{\ln\tilde{N}_d}$ и не оказывает существенного влияния на T_d при $\tilde{N}_d \to \infty$. Для числа частиц $N \sim 100$ число вариантов может быть посчитано на компьютере.

Максимум при этом не сильно изменится [5]; зато число вариантов не будет изменяться: нули, т.е. бозе-конденсат позволяет максимуму оставаться постоянным, и энтропия никогда не будет убывать – выйдет после достижения максимума на константу. Это замечательное свойство энтропии и позволяет построить в общем случае неограниченную теорию вероятностей [8].

Перейдем к физическому определению.

Отметим прежде всего, что не изменяя точности под знаком логарифма, можно заменить $\lg M_d$ на $\frac{1}{2}\lg\frac{\tilde{N}_d}{Q}$. Тогда

$$\sqrt{M_d} = \frac{2\tilde{N}_d/Q}{c^{-1}\lg(\tilde{N}_d/Q) + a} + o\left(\frac{\tilde{N}_d}{Q}\right). \qquad (15)$$

В нашем случае $\frac{\tilde{N}_d}{Q}$ отвечает надконденсатному числу частиц.

Согласно формуле (10), в двумерном случае мы должны положить $\gamma = 0$ и найти коэффициент α. Далее (15) дает связь $\tilde{N}_d$ и T_d в силу того, что частицы в конденсате равны $o(\tilde{N}_d)$.

Перейдем к случаю $D = 1$. Автор с помощью функции

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \qquad (16)$$

доказал, что для $D < 2$ зависимость надкритического значения $\tilde{N}_d$ пропорциональна T_d. Заслуга нахождения коэффициента пропорциональности принадлежит В.Е. Назайкинскому, который получил важное неравенство для $F(x)$ и нашел, в частности, для $D = 1$, что коэффициент пропорциональности равен $\zeta\left(\frac{3}{2}\right)$.

Далее повторяем процедуру двумерного случая нахождения параметра α.

Подробнее о бозе-конденсате в одномерном случае см. [11–13].

З а м е ч а н и е 1. Автор изучал связь экономики при наступлении кризиса с бозе-конденсатом, который отвечает банкротству [9]. Продолжая принцип соответствия, предложенный учеником Гиббса, экономистом Ирвингом Фишером (основной закон экономики), где число денег M соответствует числу частиц N, автор предложил сопоставить химпотенциал отрицательному значению номинального процента, что отвечает правилу Фридмана.

Эмиссия денег сопровождала падение номинального процента до 0.5% в такой зависимости, что значение n_0 оказывалось равным $N_d^{1-D/2}$, где D – число степеней свободы, которое может быть дробным (в нашем случае это – размерность) [8].

В работе Е.М. Апфельбаума и В.С. Воробьева [10] с учетом параметра де Боера (de Boer) эмпирически посчитаны значения Z_c для гелия,

$$Z_c = \frac{\zeta\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{D}{2}\right)},$$

что, согласно правилу автора, позволяет определить число степеней свободы D и проверить на эксперименте, имеет ли место подобное эмпирическое соотношение между n_0 и N_d в термодинамике. Имеется в виду, что бозе-газ неидеальный (т.е. рассматривается уравнение Шредингера с потенциалом) и значение числа $x = \frac{\mu N_d}{T_d}$ отражает взаимодействие между частицами подобно тому, как Zeno line отражает взаимодействие между частицами в классической термодинамике [11].

Автор выражает благодарность профессорам Г.И. Архипову, В.С. Воробьеву и В.Н. Чубарикову за постоянные дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Физматлит, 2003.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1976.
3. *Квасников И.А.* Термодинамика и статистическая физика: Теория равновесных систем. М.: УРСС, 2002. Т. 2.
4. *Маслов В.П.* // Функцион. анализ и его прил. 2003. Т. 37. № 2. С. 16–27.
5. *Erdös P., Lehner J.* // Duke Math. J. 1941. T. 8. № 2. P. 335–345.
6. *Maslov V.P.* // Rus. J. Math. Phys. 2012. V. 19. № 1. P. 63–100.
7. *Erdös P.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1946. V. 52. P. 185–188.
8. *Maslov V.P.* // Math. Notes. 2012. V. 91. № 5. P. 603–609.
9. *Maslov V.P.* // Math. Notes. 2009. V. 85. № 1. P. 146–150.
10. *Apfelbaum E.M., Vorob'ev V.S.* // J. Phys. Chem. B. 2009. V. 113. № 11. P. 3521–3526.
11. *Maslov V.P.* // Rus. J. Math. Phys. 2011. V. 18. № 4. P. 363–370.
12. *Maslov V.P.* // Rus. J. Math. Phys. 2012. V. 19. № 2. P. 163–175.
13. *Maslov V.P.* // Math. Notes. 2012. V. 91. № 6. P. 893–894.