Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. В. Романов, Параболическое уравнение с нелокальной диффузией без гладкого инерциального многообразия, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 4, 578–587

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 85.141.212.199
9 октября 2014 г., 19:43:39

Математические заметки

Том 96 выпуск 4 октябрь 2014

УДК 517.95

Параболическое уравнение с нелокальной диффузией без гладкого инерциального многообразия

А. В. Романов

В статье предъявляется семейство интегро-дифференциальных уравнений параболического типа с нелокальной диффузией на окружности, не обладающих гладким инерциальным многообразием.

Библиография: 17 названий.

DOI: 10.4213/mzm10405

Введение. Теория инерциальных многообразий представляет собой наиболее радикальную реализацию восходящего к Хопфу [1] представления о конечномерном поведении при большом времени решений распределенных эволюционных систем с диссипацией. Имеется в виду, что финальная динамика диссипативной системы с бесконечным числом степеней свободы может контролироваться, в том или ином смысле, конечным числом параметров. Основным объектом исследования при этом оказывается класс полулинейных параболических уравнений с гильбертовым фазовым пространством. Парадокс ситуации состоит в том, что, с одной стороны, установить наличие инерциального многообразия до сих пор удается лишь для узкого класса подобных задач, а с другой стороны, примеры гарантированного отсутствия такого многообразия строятся не без труда и выглядят достаточно искусственно. Во всяком случае, до сих пор не были известны подобные примеры для реальных задач математической физики. Здесь делается шаг в данном направлении, а именно, предъявляется семейство интегро-дифференциальных уравнений параболического типа с нелокальной диффузией на окружности, не обладающих гладким инерциальным многообразием.

1. Предварительные сведения. Речь идет об эволюционных уравнениях вида

$$\partial_t u = -Au + F(u) \tag{1.1}$$

с линейной и нелинейной частью A и F в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве X, снабженном нормой $\|\cdot\|$. Общая теория таких уравнений изложена в книге [2]. Замкнутый линейный оператор A в X с плотной областью определения $\mathscr{D}(A)$ называют *секториальным*, если порождаемая им полугруппа $\{e^{-At}\}_{t>0}$ аналитична; при этом спектр $\sigma(A)$ лежит в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \delta$. Свойство секториальности устойчиво относительно ограниченных возмущений. Предполагая

© А. В. Романов, 2014

без потери общности, что $\delta > 0$, обозначим через $\{X^\alpha\}_{\alpha\geqslant 0}$ соответствующую оператору A гильбертову полушкалу пространств, где $X^\alpha = \mathscr{D}(A^\alpha)$ и $\|u\|_\alpha = \|A^\alpha u\|$ для $u \in X^\alpha$. При этом

$$X^0 = X, \qquad X^1 = \mathscr{D}(A), \qquad X^\beta \subset X^\alpha \quad \text{для} \quad \beta > \alpha.$$

Исходим далее из следующих основных предпосылок относительно (1.1).

Условие (H1). Линейный оператор A секториален, его резольвента компактна, и спектр $\sigma(A)$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \delta > 0$.

Условие (H2). При некотором $\theta \in [0,1)$ нелинейная функция F действует из X^θ в X и справедлива оценка

$$\|F(u) - F(v)\| \leqslant L(r)\|u - v\|_\theta \qquad \text{для} \quad \|u\|_\theta \leqslant r, \quad \|v\|_\theta \leqslant r.$$

Условие (H3). Уравнение (1.1) порождает непрерывный диссипативный полупоток $\{\Phi_t\}_{t\geqslant 0}$ в пространстве X^θ.

Диссипативность разрешающего полупотока означает, что

$$\sup \lim_{t\to+\infty} \|\Phi_t u\|_\theta \leqslant a$$

равномерно относительно u из ограниченных множеств в X^θ. Обозначаем через B_r замкнутый шар $\|u\|_\theta \leqslant r$ в фазовом пространстве X^θ и назовем шар B_a *поглощающим*. Число θ именуем *показателем нелинейности* уравнения (1.1). Вложения $X^\beta \subset X^\alpha$ при $0 \leqslant \alpha < \beta$ плотны и компактны; в частности,

$$\|u\|_\alpha \leqslant C(\alpha,\beta)\|u\|_\beta \qquad \text{для} \quad u \in X^\beta.$$

В условиях (H1)–(H3) легко установить (используя построения [2; теорема 3.3.6]) компактность эволюционных операторов Φ_t при $t > 0$.

В реальных задачах оператор A часто оказывается самосопряженным, а условие компактности его резольвенты характерно для случая параболических уравнений с частными производными в ограниченных областях $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Множество $U \subset X^\theta$ *инвариантно*, если

$$\Phi_t U = U \qquad \text{для} \quad t > 0.$$

Глобальным аттрактором $\mathscr{A}$ полупотока $\{\Phi_t\}_{t\geqslant 0}$ называем [3], [4] совокупность всех целых (существующих при $t \in (-\infty,+\infty)$) ограниченных траекторий бесконечномерной динамической системы (1.1) в фазовом пространстве X^θ. Глобальный аттрактор (далее просто *аттрактор*) представляет собой связное компактное (в силу компактности эволюционных операторов Φ_t) инвариантное множество в X^θ и равномерно притягивает шары пространства X^θ при $t \to +\infty$. В частности, аттрактор $\mathscr{A}$ содержит все возможные предельные режимы разрешающего полупотока: точки покоя, циклы, инвариантные торы и т.д. Согласно *свойству сглаживания* параболического уравнения $\Phi_t X^\theta \subset X^1$ при $t > 0$, поэтому всякое инвариантное множество (а значит, и аттрактор) принадлежит пространству X^1.

Изменим (без потери регулярности типа Lip или C^k, $1 \leqslant k \leqslant \infty$) функцию $F(u)$ вне втягивающего шара B_a таким образом, чтобы новая функция $\widetilde{F}(u)$ была тождественно равна нулю вне шара B_{a+1}. Подобная процедура "урезания", подробно описанная в [4], позволяет перейти к наследующему финальную динамику (1.1) уравнению $u_t = -Au + \widetilde{F}(u)$ с глобально липшицевой функцией $\widetilde{F}(u)$ и диссипативным фазовым полупотоком в X^θ. Считая, что все это уже проделано и возвращаясь к первоначальному обозначению $F(u)$, исходим в дальнейшем из условия

$$\|F(u) - F(v)\| \leqslant L\|u - v\|_\theta \tag{1.2}$$

на нелинейную компоненту уравнения (1.1). При этом [2] фазовый полупоток $\{\Phi_t\}$ наследует гладкость функции $F(u)$.

Условия (H1), (H2) обеспечивают локальную по $t > 0$ разрешимость уравнения (1.1) в X^θ. Техническим, но важным моментом является диссипативность соответствующей динамической системы.

Лемма 1. *Если справедливы предположения* (H1), (H2) *и выполнено* $\|F(u)\| \leqslant M$ *для* $u \in X^\theta$, *то уравнение* (1.1) *диссипативно в* X^θ.

Доказательство. Запишем (1.1) в виде интегрального уравнения Дюамеля

$$u(t) = e^{-At}u(0) + \int_0^t e^{-A(t-\tau)}F(u(\tau))\,d\tau.$$

Поскольку $\operatorname{Re}\sigma(A) > \delta > 0$, с помощью известных оценок

$$\|e^{-At}u\|_\theta \leqslant Ce^{-\delta t}\|u\|_\theta, \quad \|e^{-At}u\|_\theta \leqslant Ct^{-\theta}e^{-\delta t}\|u\| \qquad \text{для} \quad u \in X^\theta$$

находим

$$\|u(t)\|_\theta \leqslant Ce^{-\delta t}\|u(0)\|_\theta + CM\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)}(t-\tau)^{-\theta}\,d\tau.$$

Как видим, норма $\|u(t)\|_\theta$ остается ограниченной на области существования решения $u(t)$, откуда следует [2; теорема 3.3.4] его продолжимость на $[0, \infty)$. Тем самым, исходное уравнение обладает втягивающим шаром $B_a \subset X^\theta$ радиуса

$$a = CM\int_0^\infty e^{-\delta s}s^{-\theta}\,ds$$

и лемма доказана.

2. Инерциальные многообразия. Будем рассматривать полулинейные параболические уравнения вида (1.1) с самосопряженным линейным оператором A, нелинейной функцией $F \in C^1(X^\theta, X)$, $0 \leqslant \theta < 1$, и разрешающим полупотоком $\{\Phi_t\}_{t\geqslant 0}$ в фазовом пространстве X^θ. Инерциальное многообразие – это гладкая или липшицева конечномерная инвариантная поверхность $\mathscr{M} \subset X^\theta$, содержащая аттрактор $\mathscr{A}$ и экспоненциально притягивающая все решения $u(t)$ при большом времени.

Большинство известных (начиная с основополагающих работ [5], [6]) методов построения n-мерного инерциального многообразия требуют условия спектрального скачка

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > kL(\lambda_{n+1}^\theta + \lambda_n^\theta), \tag{2.1}$$

где L – константа из неравенства (1.2), λ_n – упорядоченные по неубыванию (с учетом кратности) собственные числа оператора A и k – некоторая абсолютная постоянная.

Известно [7], [8], что в случае $\mathscr{M} \in \mathrm{Lip}$ можно взять $k = 1$, причем [8] данное значение нельзя уменьшить. Построение C^1-гладкого инерциального многообразия обычно предполагает чуть большие значения k, однако есть основания считать (см. [9; с. 17]), что и в этом случае, на самом деле, оптимальной постоянной является $k = 1$.

Как показано в [8], оценка (2.1) с $k = 1$ позволяет построить n-мерное липшицево инерциальное многообразие уравнения (1.1) в виде

$$\mathscr{M} = \{u \in X^\theta : u = y + h(y),\ y \in P_n X^\theta\},$$

где P_n – спектральный проектор оператора A, отвечающий части спектра $\{\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n\}$ и $h\colon P_n X^\theta \to (I - P_n)X^\theta$ с $I = \mathrm{id}$, причем

$$\|h(y) - h(y')\|_\theta \leqslant d\|y - y'\|_\theta \qquad \text{для} \quad y, y' \in P_n X^\theta.$$

В этой ситуации всякому $u \in X^\theta$ соответствует $\overline{u} \in \mathscr{M}$ такое, что

$$\|\Phi_t u - \Phi_t \overline{u}\|_\theta \leqslant C\|u - \overline{u}\|_\theta e^{-\gamma t} \qquad \text{при} \quad t > 0 \quad \text{с} \quad \gamma = \lambda_{n+1} - \lambda_{n+1}^\theta L > 0.$$

Постоянная C не зависит от $u, \overline{u}$. Поскольку многообразие $\mathscr{M}$ инвариантно, то $\mathscr{M} \subset X^1$.

Предельная динамика динамической системы $\{\Phi_t\}_{t \geqslant 0}$ с фазовым пространством X^θ полностью описывается *инерциальной формой*

$$y_t = -Ay + P_n F(y + h(y)), \qquad y \in P_n X^\theta,$$

представляющей собой обыкновенное дифференциальное уравнение в $P_n X^\theta \simeq \mathbb{R}^n$. При этом говорят об *асимптотической n-мерности* исходного уравнения (1.1).

С помощью условия спектрального скачка (2.1) существование инерциального многообразия для диссипативного уравнения (1.1) с фиксированной линейной частью A и произвольной нелинейной функцией F, удовлетворяющей условию Липшица (1.2), удается установить в предположении “разреженности спектра”

$$\sup_{n \geqslant 1} \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+1}^\theta + \lambda_n^\theta} = \infty. \tag{2.2}$$

Если линейная часть $-A$ параболического уравнения (1.1) представляет собой оператор Лапласа Δ со стандартными краевыми условиями в $L^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, то данные условия становятся ограничительными благодаря известной асимптотике $\lambda_n \sim cn^{2/m}$ собственных чисел $\lambda_n \in \sigma(-\Delta)$. Попытки обойти условие (2.2) приводят к успеху (см., например, [10], [11]) лишь в отдельных специальных случаях. К настоящему времени асимптотическая конечномерность не установлена даже для столь простых задач как параболическое уравнение вида

$$u_t = u_{xx} + f(x, u, u_x)$$

на окружности или уравнение реакции-диффузии

$$u_t = u_{xx} + f(x, u)$$

со стандартными краевыми условиями в круге.

С другой стороны, крайне мало известно о примерах отсутствия инерциального многообразия для эволюционных уравнений (1.1). В работе [12] система двух связанных одномерных параболических псевдо-дифференциальных уравнений без гладкого инерциального многообразия была построена на основе следующих соображений. Обозначаем через $F'(u)$ производную Фреше гладкого отображения $F\colon X^\theta \to X$ в точках $u \in X^\theta$. Линейные операторы $F'(u)$ действуют непрерывно из X^θ в X, т.е. $F'(u) \in \operatorname{End}(X^\theta, X)$, и условие Липшица (1.2) равносильно оценке

$$\|F'(u)\|_{\mathrm{op}} \leqslant L \qquad \text{для} \quad u \in X^\theta.$$

Пусть $\sigma(T(u))$ – спектр неограниченного линейного оператора $T(u) = F'(u) - A$ в X с областью определения X^1. Поскольку

$$F'(u) = F'(u)A^{-\theta}A^\theta \qquad \text{с} \quad \theta < 1,$$

где $F'(u)A^{-\theta} \in \operatorname{End} X$, то (см. [2; п. 1.4]) оператор $-T(u)$ наследует от оператора A свойство секториальности, а также свойство компактности резольвенты. Тем самым, $\sigma(T(u))$ состоит из конечнократных собственных значений. Если $l(u)$ – число (с учетом алгебраической кратности) положительных собственных значений в множестве $\sigma(T(u))$, то $l(u) < \infty$. Пусть, наконец, E – это совокупность стационарных точек $u \in X^\theta$ уравнения (1.1), для которых спектр $\sigma(T(u))$ не содержит вещественных собственных чисел $\lambda \leqslant 0$.

Лемма 1 (см. [12]). *Если аттрактор $\mathscr{A}$ уравнения (1.1) с нелинейной функцией $F \in C^1(X^\theta, X)$ содержится в некотором гладком инвариантном конечномерном многообразии $\mathscr{M} \subset X^\theta$, то для любых точек $u_1, u_2 \in E$ число $l(u_1) - l(u_2)$ четно.*

Отметим, что требуемое в [12] условие гиперболичности стационарных точек $u \in E$ оказывается избыточным. На основе модификации леммы 1 в недавних работах [9], [13] получена общая конструкция абстрактного уравнения (1.1) с нелинейной компонентой $F \in C^\infty$ и показателем нелинейности $\theta = 0$ без гладкого инерциального многообразия. Там же с помощью других (более деликатных) соображений построено уравнение вида (1.1) с $F \in C^\infty$, не допускающее даже липшицева инерциального многообразия. Эти результаты, по-видимому, могут быть обобщены на общий случай показателя нелинейности $\theta \in [0, 1)$. Контрпримеры [9], [12], [13] не слишком естественны, хотелось бы предъявить какое-либо физически значимое полулинейное параболическое уравнение, не обладающее свойством асимптотической конечномерности. Эта задача решается ниже. Отметим, что в менее совершенной форме соответствующий пример анонсирован автором еще в докладе [14].

3. Основной результат. Через H^ν, $\nu \geqslant 0$, обозначаем обобщенные L^2-пространства Соболева [15] вещественных функций на единичной окружности Γ; при этом полагаем $H^0 = H = L^2(\Gamma)$. Оператор дифференцирования $\partial_x u = u_x$ непрерывен из $H^{\nu+1}$ в H^ν, причем $\partial_x\colon H^1 \to H_0$, где H_0 – подпространство функций в $L^2(\Gamma)$ с нулевым средним по Γ. Для $\nu > 1/2$ имеют место непрерывные вложения

$$H^\nu \subset C(\Gamma), \qquad H^{\nu+1} \subset C^1(\Gamma).$$

Рассмотрим интегро-дифференциальное параболическое уравнение

$$u_t = ((I + B)u_x)_x + f(x, u, u_x), \tag{3.1}$$

где $x \in \Gamma$. Ограниченные линейные операторы $I = \mathrm{id}$ и $B = B^*$ действуют в гильбертовом пространстве H с нормой $\|\cdot\|$, а определенная на $\Gamma \times \mathbb{R}^2$ функция $f(x,s,p)$ предполагается бесконечно гладкой, но не аналитической. Оператор $I + B$ играет здесь роль нелокального коэффициента диффузии. Более точно, полагаем

$$(Bh)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|\sin\frac{x+y}{2}\right| h(y)\,dy$$

и, кроме того,

$$(Jh)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{x+y}{2} h(y)\,dy$$

для $h \in H$. Оператор J связан с сингулярным интегральным оператором Гильберта

$$(\mathscr{G}h)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{y-x}{2}\, h(y)\,dy$$

соотношением $(Jh)(x) = (\mathscr{G}h)(-x)$, $h \in H$. Известно [16; гл. 6], что $\mathscr{G}1 = 0$ и

$$\mathscr{G}\colon\ \cos nx \to -\sin nx, \qquad \mathscr{G}\colon\ \sin nx \to \cos nx$$

для целых $n \geqslant 1$, а значит, $J1 = 0$ и

$$J\colon\ \cos nx \to \sin nx, \qquad J\colon\ \sin nx \to \cos nx \tag{3.2}$$

для таких n.

Интегральные операторы J, B обладают следующими свойствами:

а) $J \in \operatorname{End} H$ и $J^2 = I$ на H_0;

б) $B \in \operatorname{End}(H, H^1)$ и $\partial_x B = J$ на H.

Ясно, что $J^* = J$, $B^* = B$, оператор B компактен в H и

$$B\colon\ \cos nx \to -\frac{1}{n}\cos nx, \qquad B\colon\ \sin nx \to \frac{1}{n}\sin nx$$

при $n \geqslant 1$. Как видим, оператор B сохраняет подпространство H_0, причем сужение B на H_0 имеет минимальное собственное число равное -1. Таким образом, самосопряженный оператор $I + B$ неотрицателен в H_0 и его можно трактовать как вырожденный нелокальный “коэффициент диффузии” в эволюционном уравнении (3.1).

Чтобы записать уравнение (3.1) в стандартной форме (1.1) принимаем:

$$Au = u - u_{xx} \qquad \text{с} \quad \mathscr{D}(A) = H^2$$

и

$$F(u) = u + (Bu_x)_x + f(x,u,u_x). \tag{3.3}$$

Положим $X = H$, $X^\alpha = \mathscr{D}(A^\alpha)$ для $\alpha > 0$. Самосопряженный положительный линейный оператор A в X обладает компактной резольвентой, и $X^\alpha = H^{2\alpha}$. Заметим, что оператор A имеет простое собственное число $\lambda_0 = 1$ и двукратные собственные числа $\lambda_n = n^2 + 1$, $n \geqslant 1$, поэтому условие разреженности спектра (2.2) не выполняется даже при минимально возможном в этой ситуации значении показателя нелинейности $\theta = 1/2$.

Сформулируем главное утверждение данной статьи.

Теорема 1. *При подходящем выборе функции $f(x,s,p) \in C^\infty$ уравнение (3.1) порождает гладкий диссипативный полупоток в X^θ, $\theta \in (3/4,1)$, причем аттрактор этого уравнения не содержится ни в каком инвариантном конечномерном C^1-многообразии $\mathscr{M} \subset X^\theta$.*

Доказательство начнем с построения функции $f(x,s,p)$ и вывода заявленных свойств разрешающего полупотока. Фиксируем произвольное значение $\theta \in (3/4,1)$. Вложения $X^\theta \subset C^1(\Gamma) \subset C(\Gamma) \subset X$ непрерывны, поэтому для произвольной функции $f \in C^\infty(\Gamma \times \mathbb{R}^2)$ отображение $u \to f(x,u,u_x)$, а значит, и нелинейная компонента $F(u)$ в (3.3), принадлежат классу $C^\infty(X^\theta, X)$. Кроме того, функция $F\colon X^\theta \to X$ удовлетворяет условию Липшица на ограниченных множествах в X^θ. Таким образом, для эволюционного уравнения (3.1) выполнены предположения (H1), (H2) с показателем нелинейности θ. Диссипативность этого уравнения будет обеспечена выбором специальной структуры для функции f.

Положим

$$\begin{aligned} f(x,s,p) &= g(x,s,p) - 2\varepsilon p\cos x + \varepsilon s \sin x, \\ g(x,s,p) &= (\kappa + 2\varepsilon\cos x)\omega(s)w(p) + \varepsilon\gamma(s) + \varepsilon\eta(s)(1-\sin x) + \xi(s) \end{aligned} \tag{3.4}$$

с $\varepsilon, \kappa \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $|\kappa| > 1$. Предполагаем, что функции $\omega, \gamma, \eta, \xi \in C^\infty(\mathbb{R})$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} \omega(z) = z, \quad \gamma(z) = 2z^3 - 3z^2, \quad \eta(z) = 2z^2 - z^3, \quad \xi(z) = 0, \qquad |z| \leqslant 1, \\ \omega(z) = 0, \quad \gamma(z) = 0, \quad \eta(z) = 0, \quad \xi(z) = -z, \qquad |z| \geqslant 2. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Отметим, что $\partial_x B\,\partial_x = J\,\partial_x$ на $X^{1/2}$ и $J\,\partial_x \in \operatorname{End}(X^{1/2}, X)$.

Представим временно правую часть (3.1) в виде $F_1(u) - A_\varepsilon u$, где

$$A_\varepsilon = A - J\,\partial_x - \varepsilon D, \qquad D = -2\cos x\,\partial_x + \sin x, \qquad \mathscr{D}(A_\varepsilon) = \mathscr{D}(A) = X^1$$

и $F_1(u) = u + g(x,u,u_x)$. Будем рассматривать несамосопряженный оператор A_ε как возмущение самосопряженного оператора $A_0 = A - J\,\partial_x$ с $\mathscr{D}(A_0) = X^1$.

Для $u \in X^1$ справедливо неравенство

$$\|Du\| \leqslant \frac{29}{3}\|u\| + \frac{2}{3}\|A_0 u\|, \tag{3.6}$$

легко получаемое из понятных оценок

$$\begin{gathered} \|u_x\|^2 \leqslant 9\|u\|^2 + \frac{1}{16}\|u_{xx}\|^2, \qquad \|u_x\| \leqslant 3\|u\| + \frac{1}{4}\|u_{xx}\|, \qquad \|u_{xx}\| \leqslant \|u\| + \|Au\|, \\ \|Au\| \leqslant \|A_0 u\| + \|Ju_x\|, \qquad \|Du\| \leqslant 2\|u_x\| + \|u\| \end{gathered}$$

и равенства $\|Ju_x\| = \|u_x\|$. В терминологии [17] неравенство (3.6) означает A_0-ограниченность оператора D и (при малых ε) гарантирует замкнутость оператора A_ε.

Поскольку $A_0 1 = 1$ и с учетом соотношений (3.2)

$$A_0\colon\ \cos nx \to (1+n+n^2)\cos nx, \qquad A_0\colon\ \sin nx \to (1-n+n^2)\sin nx \tag{3.7}$$

для $n \geqslant 1$, спектр оператора A_0 состоит из двукратных собственных чисел $\lambda_n^{(0)} = 1 + n + n^2$ с собственными подпространствами

$$X_n = \{\cos nx, \sin(n+1)x\}, \qquad n \geqslant 0,$$

образующими ортогональный базис в X. Пусть Q_n – соответствующие двумерные спектральные проекторы в X. Оператор A_0 имеет компактную резольвенту $R_\lambda(A_0)$. Как видим из [17; гл. 4, теорема 3.17], неравенство (3.6) обеспечивает компактность резольвенты $R_\lambda(A_\varepsilon)$ и непрерывность резольвентного множества $\rho(A_\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Кроме того, стандартные оценки на резольвенту замкнутых операторов гарантируют равномерную на компактах в $\rho(A_0)$ сходимость по норме $R_\lambda(A_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} R_\lambda(A_0)$. Согласно формулам теории возмущений [17; гл. 8, теорема 2.6] собственные числа оператора $A_\varepsilon = A_0 - \varepsilon D$ имеют вид

$$\lambda_n^\pm = \lambda_n^{(0)} + \varepsilon\mu_n^\pm + o(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0,$$

где $\mu_n^\pm$ – собственные числа двумерных операторов $Q_n D Q_n$. Прямые вычисления приводят (в указанных базисах подпространств X_n) к матричным представлениям

$$Q_0 D Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_n D Q_n = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{2n+1}{2} \\ -\dfrac{2n+1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad n \geqslant 1,$$

откуда

$$\lambda_0^\pm = 1 \pm i\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} + o(\varepsilon), \qquad \lambda_n^\pm = (1+n+n^2) \pm i\varepsilon\frac{2n+1}{2} + o(\varepsilon). \tag{3.8}$$

При малых ε спектр A_ε лежит в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \delta > 0$ и $(A - A_\varepsilon)A^{-1/2} \in \operatorname{End} X$. Из последнего свойства выводим [2; п. 1.4], что оператор A_ε секториален в X и $\mathscr{D}(A_\varepsilon^\alpha) = X^\alpha$ для всех $\alpha \geqslant 0$.

Так как $|s + g(x,s,p)| \leqslant \mathrm{const}$ на $\Gamma \times \mathbb{R}^2$, то $F_1 \colon X^{1/2} \to X$ и $\|F_1(u)\| \leqslant \mathrm{const}$ на $X^{1/2}$. Выбранная конструкция функции $g(x,s,p)$ обеспечивает оценки $|g_s| \leqslant \mathrm{const}$ и $|g_p| \leqslant \mathrm{const}$ на $\Gamma \times \mathbb{R}^2$, а значит, и глобальное условие Липшица

$$\|F_1(u) - F_1(v)\| \leqslant L\|u - v\|_{1/2} \qquad \text{для} \quad u, v \in X^{1/2}.$$

Поскольку $\theta > 1/2$, то благодаря непрерывности вложения $X^\theta \subset X^{1/2}$ отсюда следует, что $\|F_1(u)\| \leqslant \mathrm{const}$ на X^θ и $F_1 \in \operatorname{Lip}(X^\theta, X)$. Лемма 1 гарантирует диссипативность уравнения (3.1) в фазовом пространстве X^θ, так что для этого уравнения выполнены все предположения (H1)–(H3) с показателем нелинейности θ.

Вернемся теперь к записи уравнения (3.1) с нелинейной компонентой $F(x)$ вида (3.3) и структурой (3.4), (3.5) для функции $f(x,s,p)$. Линейный оператор $J\,\partial_x + \varepsilon D$ действует непрерывно из $X^{1/2}$ в X и, тем более, из X^θ в X, следовательно, $F \in \operatorname{Lip}(X^{1/2}, X)$ и $F \in \operatorname{Lip}(X^\theta, X)$.

Перейдем теперь к доказательству второй части теоремы 1. Линеаризация $T(u) = F'(u) - A$ векторного поля $F(u) - Au$ уравнения (3.1) в точке $u \in X^\theta$ представляет

собой (см. выше, п. 2) замкнутый неограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве X с компактной резольвентой и плотной областью определения X^1. Данный оператор действует на функции $h \in X^1$ по правилу

$$T(u)h = h_{xx} + Jh_x + g_s(x,u,u_x)h + g_p(x,u,u_x)h_x + \varepsilon Dh.$$

Соотношения (3.5) влекут равенства

$$g(x,0,0) = 0, \qquad g(x,1,0) = -\varepsilon \sin x, \qquad g_s(x,0,0) = g_p(x,0,0) = 0,$$
$$g_s(x,1,0) = \varepsilon(1-\sin x), \qquad g_p(x,1,0) = \kappa + 2\varepsilon \cos x.$$

Так как $D1 = \sin x$, то $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ – стационарные решения уравнения (3.1). При этом

$$T(u_0) = \partial_{xx} + J\,\partial_x + \varepsilon D, \qquad T(u_1) = \partial_{xx} + J\,\partial_x + \kappa\,\partial_x + \varepsilon.$$

Из равенства $T(u_0) = I - A_\varepsilon$ и формул (3.8) следует, что спектр $\sigma(T(u_0))$ является чисто невещественным. С другой стороны, как видим из (3.7), оператор $T(u_1) = I - A_0 + \kappa\,\partial_x + \varepsilon$ сохраняет взаимно-ортогональные подпространства

$$Y_n = \{\cos nx, \sin nx\}, \qquad n \geqslant 1,$$

в X и записывается в каждом из них матрицей

$$\begin{pmatrix} -n^2 - n + \varepsilon & -\kappa n \\ \kappa n & -n^2 + n + \varepsilon \end{pmatrix},$$

имеющей собственные значения

$$-n^2 + \varepsilon \pm i\,dn \qquad \text{с} \quad d = (\kappa^2 - 1)^{1/2} > 0.$$

Так как $T(u_1) = \varepsilon$, то вещественная часть спектра $\sigma(T(u_1))$ состоит из единственного простого собственного числа $\varepsilon > 0$.

Итак, при заданном выборе функции $f(x,s,p)$ вида (3.4), (3.5) и достаточно малых ε спектры σ_0, σ_1 линеаризации $T(u)$ векторного поля $F(u) - Au$ уравнения (3.1) в стационарных точках $u_0, u_1 \in X^\theta$ обладают следующими свойствами:

$$\sigma_0 \cap \mathbb{R} = \varnothing, \qquad \sigma_1 \cap \mathbb{R} = \{\varepsilon\},$$

где ε – простое положительное собственное значение. Если обозначить через $l(u)$ число (с учетом кратности) положительных собственных значений в спектре оператора $T(u)$ для $u \in X^\theta$, то $l(u_0) = 0$ и $l(u_1) = 1$. Тем самым, согласно лемме 1 аттрактор полулинейного параболического уравнения (3.1) не содержится ни в каком гладком инвариантном конечномерном многообразии $\mathscr{M} \subset X^\theta$, и теорема 1 доказана полностью.

Утверждение данной теоремы остается справедливым с заменой фазового пространства X^θ, $\theta \in (3/4, 1)$, на $X^{1/2} = H^1$, если использовать ослабленную версию [10; с. 813] понятия дифференцируемости нелинейных отображений (см. также [12; определение 1.1]).

Автор благодарен рецензенту за предложенную им форму локального возмущения εD для векторного поля уравнения (3.1). Первоначально вместо этого рассматривалось нелокальное возмущение в виде линейного компактного интегрального оператора, что делало конструируемый пример параболического уравнения без гладкого инерциального многообразия существенно менее естественным.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] E. Hopf, “A mathematical example displaying features of turbulence”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **1**:4 (1948), 303–322.

[2] Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985.

[3] А. В. Бабин, М. И. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений*, Наука, М., 1989.

[4] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Appl. Math. Sci., **68**, Springer, New York, 1997.

[5] R. Mañé, “Reduction semilinear parabolic equations to finite dimensional C^1-flows”, *Geometry and Topology*, Lecture Notes in Math., **597**, Springer, New York, 1977, 361–378.

[6] C. Foias, G. R. Sell, R. Temam, “Variétés inertielles des équations différentielles dissipatives”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I*, **301**:5 (1985), 139–141.

[7] M. Miklavčič, “A sharp condition for existence of an inertial manifold”, *J. Dynam. Differential Equations*, **3**:3 (1991), 437–456.

[8] А. В. Романов, “Точные оценки размерности инерциальных многообразий для нелинейных параболических уравнений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:4 (1993), 36–54.

[9] S. Zelik, *Inertial Manifolds and Finite-Dimensional Reduction for Dissipative PDEs*, 2013, arXiv: math.AP/1303.4457.

[10] J. Mallet-Paret, G. R. Sell, “Inertial manifolds for reaction diffusion equations in higher space dimensions”, *J. Amer. Math. Soc.*, **1**:4 (1988), 805–866.

[11] J. Vukadinovic, “Global dissipativity and inertial manifolds for diffusive Burgers equations with low-wavenumber instability”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **29**:1 (2011), 327–341.

[12] А. В. Романов, “Три контрпримера в теории инерциальных многообразий”, *Матем. заметки*, **68**:3 (2000), 439–447.

[13] А. Еден, С. В. Зелик, В. К. Калантаров, “Контрпримеры к регулярности проекций Мане в теории аттракторов”, *УМН*, **68**:2 (2013), 3–32.

[14] А. В. Романов, “О конечномерной динамике параболических уравнений”, *Нелинейный динамический анализ* (*NDA*'2). *Второй международный конгресс. Тезисы докладов*, Изд-во МАИ, М., 2002, 195.

[15] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.

[16] П. П. Забрейко, А. И. Кошелев, М. А. Красносельский, С. Г. Михлин, Л. С. Раковщик, В. Я. Стеценко, *Интегральные уравнения*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1968.

[17] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

А. В. Романов
Московский государственный институт электроники и математики – Высшая школа экономики
E-mail: av.romanov@hse.ru

Поступило 14.08.2013
Исправленный вариант 15.02.2014