О включении в поток диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности, большей двух

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, О. В. Починка

Пусть M^n – гладкое связное замкнутое многообразие M^n размерности n, $\mathrm{Diff}^r(M^n)$ – пространство всех диффеоморфизмов на M^n гладкости C^r, $r \geqslant 1$. Напомним, что диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}^1(M^n)$ называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если выполняются следующие условия:

- неблуждающее множество $\Omega(f)$ конечно и состоит из гиперболических периодических точек;
- устойчивые и неустойчивые многообразия периодических точек пересекаются трансверсально.

Будем говорить, что диффеоморфизм $f\colon M^n \to M^n$ включается в топологический (гладкий) поток, если существует топологический (гладкий) поток X^t на M^n такой, что f является сдвигом на единицу времени вдоль траекторий потока X^t. Из работ [1], [2], в которых доказана структурная устойчивость диффеоморфизмов Морса–Смейла, следует, что для любого многообразия M^n существует открытое в $\mathrm{Diff}^1(M^n)$ множество диффеоморфизмов Морса–Смейла, включающихся в топологический поток. Палис доказал в [1] следующие необходимые условия включения диффеоморфизма f Морса–Смейла в топологический поток:

1) множество $\Omega(f)$ совпадает с множеством $Fix(f)$ неподвижных точек;
2) ограничение диффеоморфизма f на каждое инвариантное многообразие любой неподвижной точки $p \in \Omega(f)$ сохраняет его ориентацию;
3) если для различных седловых точек $p, q \in \Omega(f)$ пересечение $W^s(p) \cap W^u(q)$ непусто, то каждая его компонента связности не является замкнутым множеством.

Более того, он показал, что при $n = 2$ эти условия являются достаточными. В этой же работе была поставлена проблема нахождения соответствующих условий в случае большей размерности.

Следует отметить, что проблема в гладкой ситуации значительно отличается от топологической. Так в работе [3] доказано, что множество C^2-диффеоморфизмов, включающихся в C^1-гладкий поток, нигде не плотно в пространстве диффеоморфизмов Морса–Смейла.

В настоящей заметке получены необходимые и достаточные условия включения в топологический поток сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла, объединенных в класс $G_k(M^n)$ $(n > 2)$ следующими условиями, выполняющимися для любого $f \in G_k(M^n)$:

1) $\Omega(f) = \mathrm{Fix}(f)$;
2) множество седловых точек состоит в точности из $k > 0$ седловых неподвижных точек[1], причем устойчивое многообразие $W^s(\sigma)$ любой седловой неподвижной точки $\sigma \in \Omega(f)$ имеет размерность $n - 1$;

Работа выполнена при поддержке правительства Российской Федерации (грант 11.G34.31.0039), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-12056-офи-м-2011, 12-01-00672-а) и гранта Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

[1] Если $k = 0$, то $\Omega(f)$ состоит в точности из одного стока и одного источника, все диффеоморфизмы с таким неблуждающим множеством вкладываются в топологический поток.

3) для любых двух различных седловых точек $p,q\in\Omega(f)$ пересечение $W^s(p)\cap W^u(q)$ пусто.

Из условий, выделяющих класс $G_k(M^n)$, следует, что неблуждающее множество любого диффеоморфизма $f\in G_k(M^n)$ содержит в точности один источник и $k+1$ стоковую точку, а несущее многообразие M^n диффеоморфно n-сфере. Отметим, что любой диффеоморфизм $f\in G_k(M^n)$ удовлетворяет всем необходимым условиям включения в поток, сформулированным выше.

Теорема 1. *Если $n\geqslant 4$, то любой диффеоморфизм $f\in G_k(M^n)$ включается в топологический поток.*

Теорема 1 является следствием результатов, полученных в работах [4], [5].

В случае $n=3$, как следует из работ [6], [7], уже в классе $G_1(M^3)$ существуют диффеоморфизмы, не включающиеся в поток. Этот эффект связан с возможностью дикого вложения замыкания сепаратрис седловых неподвижных точек в несущее многообразие. Для пояснения этого эффекта приведем точные определения ручного и дикого вложения.

Напомним, что *устойчивой* (*неустойчивой*) *сепаратрисой седловой периодической точки σ диффеоморфизма f* называется компонента связности многообразия $W^s(\sigma)\setminus\sigma$ ($W^u(\sigma)\setminus\sigma$). Пусть α – источниковая неподвижная точка диффеоморфизма $f\in G_k(M^3)$ Морса–Смейла. Из гиперболичности α следует, что $W^u(\alpha)$ гомеоморфно пространству $\mathbb{R}^3$. Из определения класса $G_k(M^3)$ следует, что все сепаратрисы седловых точек диффеоморфизма f, принадлежащие $W^u(\alpha)$, двумерны. Будем обозначать их объединение через $\mathscr{L}_\alpha$. Положим $F_\alpha=\mathscr{L}_\alpha\cup\alpha$ и назовем F_α *двумерным пучком сепаратрис*. Аналогично определяется пучок одномерных сепаратрис F_ω, принадлежащий устойчивому многообразию стоковой точки ω.

Пусть $\mathbb{S}^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1\}$, $\{s_1,\dots,s_\mu\}$ ($\{p_1,\dots,p_\nu\}$) – попарно непересекающиеся простые замкнутые кривые (попарно несовпадающие точки), принадлежащие сфере $\mathbb{S}^2$, и C_j – конус в $\mathbb{R}^3$ с вершиной в начале координат и направляющей s_j, $j\in\{1,\dots,\mu\}$ (L_i – луч, выходящий из начала координат и проходящий через точку p_i, $i\in\{1,\dots,\nu\}$). Совокупность $\mathbb{F}^2=\bigcup_{j=1}^{\mu}C_j$ ($\mathbb{F}^1=\bigcup_{j=1}^{\nu}L_j$) будем называть *стандартным двумерным* (*одномерным*) *пучком*.

Подмножество $F^i\subset\mathbb{R}^3$, снабженное индуцированной топологией и гомеоморфное $\mathbb{F}^i$, $i\in\{1,2\}$, будем называть *одномерным или двумерным пучком*. При этом пучок F^i будем называть *ручным*, если существует гомеоморфизм $H\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ такой, что $H(F^i)=\mathbb{F}^i$; в противном случае пучок F^i будем называть *диким*. Если $\mu=1$ ($\nu=1$), то двумерный (одномерный) пучок вырождается в конус (дугу). Первые примеры диких конусов и диких дуг были приведены Дж. Александером в 1924 году, Е. Артином и Р. Фоксом в 1948 году. Отметим, что ручность каждого из элементов, входящих в пучок $F^i\subset\mathbb{R}^3$, еще не является гарантией того, что пучок в целом будет ручным. Например, в работе [8] построен пример так называемого *умеренно дикого одномерного пучка*, т.е. такого дикого пучка, что любой содержащийся в нем пучок из $\nu'<\nu$ дуг является ручным.

Определение 1. Двумерный пучок сепаратрис F_α назовем *ручным*, если существует гомеоморфизм $H_\alpha\colon W^u(\alpha)\to\mathbb{R}^3$, отображающий F_α на стандартный двумерный пучок. В противном случае будем говорить, что пучок сепаратрис F_α является *диким*. Если ручной (дикий) пучок F_α содержит только одну сепаратрису, то будем называть эту сепаратрису ручной (дикой).

Аналогично определяется одномерный ручной (дикий) пучок сепаратрис F_ω.

В работах [6], [7] построены примеры диффеоморфизмов из класса $G_1(M^3)$, имеющих дико вложенные одномерную и двумерную сепаратрису седла, в работе [9] построены диффеоморфизмы из класса $G_k(S^3)$, $k\geqslant 2$, одномерные сепаратрисы которых образуют умеренно дикие пучки. Как будет следовать из леммы 1, такие диффеоморфизмы не включаются ни в какие потоки. Сюрпризом оказался тот факт, что условие ручности всех пучков сепаратрис седловых неподвижных точек диффеоморфизма $f \in G_k(M^3)$ так же не является достаточным для вложения диффеморфизма f в поток, а именно, справедливо следующее предложение.

Предложение 1. *Существует не включающийся в поток диффеоморфизм $f \in G_4(S^3)$, все пучки сепаратрис которого являются ручными.*

Как оказалось, необходимое условие включения диффеоморфизма $f \in G_k(M^3)$ в поток заключается в более сильном, нежели ручность, требовании.

Пусть $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – линейное растяжение евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, определяемое формулой $A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$.

Определение 2. Пучок сепаратрис F_α называется *тривиально вложенным*, если существует гомеоморфизм $h_\alpha\colon W^u(\alpha) \to \mathbb{R}^3$, отображающий пучок F_α на стандартный двумерный пучок, и удовлетворяющий условию $f|_{W^u(\alpha)} = h_\alpha^{-1} A h_\alpha|_{W^u(\alpha)}$.

Аналогично определяется тривиально вложенный одномерный пучок сепаратрис F_ω.

Предложение 2. *Существует не включающийся в поток диффеоморфизм $f \in G_5(S^3)$ такой, что для любой стоковой точки $\omega \in \Omega(f)$ пучок F_ω является тривиальным.*

Лемма 1. *Пусть $f \in G_k(M^3)$. Если f включается в топологический поток, то все пучки сепаратрис диффеоморфизма f тривиальны.*

Основной результат работы заключается в следующей теореме.

Теорема 2. *Диффеоморфизм $f \in G_k(M^3)$ вкладывается в топологический поток тогда и только тогда, когда пучок F_α тривиально вложен.*

Необходимость условия теоремы 2 следует из леммы 1. Доказательство достаточности сводится к получению такого полного топологического инварианта в классе диффеоморфизмов из $G_k(M^3)$ с тривиальными двумерными пучками, который можно реализовать диффеоморфизмом, являющимся сдвигом на единицу времени вдоль траекторий потока. Таким инвариантом является граф $\Gamma(f)$ диффеоморфизма f, множество вершин которого изоморфно множеству неподвижных точек, а множество ребер – множеству сепаратрис седловых неподвижных точек.

Теорема 3. *Пусть $f, f' \in G_k(M^3)$ и пучки F_α, $F_{\alpha'}$ тривиальны. Диффеоморфизмы f, f' топологически сопряжены тогда и только тогда, когда графы $\Gamma(f)$, $\Gamma(f')$ изоморфны.*

Из работы [10] следует, что для потоков Морса–Смейла, удовлетворяющих условиям, аналогичным условиям, определяющим класс диффеоморфизмов $G_k(M^n)$, граф является полным топологическим инвариантом, и любой абстрактный допустимый граф (обладающий теми же свойствами, что и графы потоков из рассматриваемого класса) реализуется таким потоком. Отсюда следует, что для любого диффеоморфизма $f \in G_k(M^n)$, удовлетворяющего теореме 3, существует поток X^t, граф которого изоморфен графу $\Gamma(f)$. В силу леммы 1 все пучки сепаратрис диффеоморфизма X^1, полученного сдвигом на единицу времени вдоль потока X^t являются тривиальными. Тогда диффеоморфизм f топологически сопряжен с X^1, т.е. существует гомеоморфизм $h\colon M^n \to M^n$ такой, что $f = hX^1h^{-1}$. Следовательно, диффеоморфизм f вкладывается в топологический поток $Y^t = hX^th^{-1}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] J. Palis, *Topology*, **8**:4 (1969), 385–404. **[2]** Дж. Палис, С. Смайл, *Математика. Сб. пер.*, **13**:2 (1969), 145–155. **[3]** М. И. Брин, *Изв. вузов. Матем.*, 1972, № 8, 19–25. **[4]** В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **261**, МАИК, М., 2008, 61–86. **[5]** В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **270**, МАИК, М., 2010, 62–85. **[6]** D. Pixton, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172. **[7]** C. Bonatti, V. Grines, *J. Dynam. Control Systems*, **6**:4 (2000), 579–602. **[8]** H. Debrunner, R. Fox, *Duke Math. J.*, **27**:3 (1960), 425–429. **[9]** O. Pochinka, *Univ. Iagel. Acta Math.*, **47** (2009), 149–154. **[10]** С. Ю. Пилюгин, *Дифференц. уравнения*, **14**:2 (1978), 245–254.

В. З. Гринес
Нижегородская государственная
сельскохозяйственная академия
E-mail: vgrines@yandex.ru

Поступило
06.10.2011

Е. Я. Гуревич
Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: elena_gurevich@list.ru

В. С. Медведев
Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: medvedev@unn.ac.ru

О. В. Починка
Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru