

А. Р. Минабутдинов

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛИНОМОВ КРАВЧУКА

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть заданы числа p , $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, а также натуральное число N . Ненормированные полиномы Кравчука дискретной переменной x могут быть определены с помощью следующего равенства:

$$K_n(x, p, N) = {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -x, & -n \\ & -N \end{matrix} ; \frac{1}{p} \right], \quad (1)$$

где x и n – целые числа, принадлежащие множеству $\{0, 1, \dots, N\}$, а ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция Гаусса. Классические (нормированные) полиномы Кравчука могут быть определены следующим равенством:

$$k_n^{(p)}(x, N) = (-p)^n \binom{N}{n} K_n(x, p, N). \quad (2)$$

Ниже, где это возможно, мы используем сокращенное обозначение, опуская второй аргумент N , и пишем $k_n^{(p)}(x)$ вместо $k_n^{(p)}(x, N)$. Полиномы Кравчука находят широкое применение в теории вероятностей, стохастических процессах, теории массового обслуживания, теории кодирования и криптографии, см., например, работу [2]. Они образуют ортогональную систему функций, заданных на множестве $\{0, 1, 2, \dots, N\}$, с весовой функцией

$$\rho(x) = \frac{N! p^x q^{N-x}}{\Gamma(1+x)\Gamma(N+1-x)}$$

и соотношением ортогональности

$$\sum_{x=0}^N k_i^{(p)}(x) k_j^{(p)}(x) \rho(x) = \binom{N}{j} (pq)^j \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N.$$

Ключевые слова: полиномы Кравчука, асимптотические разложения.
Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-01-00373.

Данные полиномы удовлетворяют следующей формуле Родрига (см., например, [5, гл. 2, (22a)]):

$$k_n^{(p)}(x) = \frac{(-q)^n \Delta^n(\rho(x)x^n)}{n! \rho(x)}, \quad (3)$$

где $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ и $y^k = y(y-1)\dots(y-k+1)$. Данная формула может быть взята за определение полиномов Кравчука, см., например, статью [8]. Важно отметить, что выражение (3) позволяет рассматривать полиномы Кравчука как аналитические функции на интервале $[0, N]$.

Наконец, отметим, что в работе [4] было показано, что полиномы $(-2p)^n K_n(k, p, N)$ задают эргодические суммы вдоль башен $\tau_{N,k}$ автоморфизма Паскаля для функции¹ w_t^p , где n равно сумме цифр в двоичной записи натурального числа t .

Хорошо известно (см. работу [3]), что в пределе (при подходящей нормировке) полиномы Кравчука сходятся к полиномам Эрмита:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{Npq} \right)^{n/2} n! k_n^{(p)}(\hat{x}) = H_n(x), \quad (4)$$

где $\hat{x} = Np + (2Npq)^{1/2}x$ и $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$.

Данный результат был усилен Шарапудиновым в работе [8], в которой он получил следующую асимптотическую формулу:

$$\begin{aligned} & (2Npq\pi n!)^{1/2} (Npq)^{-n/2} \rho(\hat{x}) e^{x^2/2} k_n^{(p)}(\hat{x}) \\ & = e^{-x^2/2} (2^n n!)^{-1/2} H_n(x) + O(n^{7/4} N^{-1/2}), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\hat{x} = Np + (2Npq)^{1/2}x$, $n = O(N^{1/3})$, $x = O(n^{1/2})$.

Пусть $A > 0$. Задачей данной работы является поиск равномерного по $v \in [-A\sqrt{N}, A\sqrt{N}]$ асимптотического разложения полиномов Кравчука вида

$$k_n^{(p)}(\hat{x}) = \sum_{j=0}^M c_{j+1}(v) N^{[n/2]-j} + o(N^{[n/2]-M}), \quad (6)$$

¹Функции $\{w_t^q\}_{t \geq 0}$ являются результатом применения алгоритма ортогонализации Грама-Шмидта к классическим функциям Уолша-Пэли $\{w_t\}_{t \geq 0}$ для метрики, задаваемой (p, q) -мерой Бернулли.

где $\hat{x} = Np + v$, $n = O(1)$, $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а $[t]$ обозначает целую часть неотрицательного числа t . Главным результатом работы является теорема 2, в которой получено равномерное асимптотическое разложение функции $\rho(\hat{x})k_n^{(p)}(\hat{x})$ в терминах полиномов Эрмита. Наш подход основывается на результате Петрова ([6]), уточняющем локальную предельную теорему.

В особенности нас интересует явное выражение для наименьшей по номеру j непостоянной по аргументу v функции $c_j(v)$ из разложения (6), в связи с изучением эргодических сумм автоморфизма Паскаля в работе [4]. Оказывается, что значение j зависит от четности индекса n полинома Кравчука. В следствии 1 при дополнительном предположении $v = o(N^{1/3})$ получены явные формулы для функций $c_1(v)$ и $c_2(v)$ для, соответственно, четных и нечетных значений n .

Отметим, наконец, что исследованию асимптотик полиномов Кравчука посвящен ряд недавних работ, см., например, работу [1] и ссылки в ней. В работе [1] авторы рассматривали в том числе случай $x = O(1)$ при $N \rightarrow \infty$. Однако они исключали ситуацию, при которой $n \approx Np$. Отметим, что из свойства самодвойственности полиномов Кравчука $K_x(n, p, N) = K_n(x, p, N)$ вытекает, что главный член асимптотики в этом случае можно получить уже из соотношения (4).

Автор выражает глубокую благодарность А. М. Вершику и А. А. Лодкину за внимание к работе и полезные обсуждения.

§2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Используя тождество $\Delta^s x^n = n^s x^{n-s}$, формулу Родрига (3) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(x)k_n^{(p)}(x) &= \frac{(-q)^n}{n!} \Delta^n [\rho(x)x^n] \\ &= \frac{(-q)^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \rho(x) \Delta^k (x+n-k)^n \\ &= \frac{(-q)^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k (x+n-k)^{\binom{n-k}{p}} \Delta^{n-k} \rho(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Далее мы рассматриваем функции $\Delta^s \rho(x)$, $s \geq 0$, из тождества (7) по отдельности. Пусть $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$, $\Delta_h^n f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{n-1} f(x))$, $n \geq 2$. Следуя работе [8], мы полагаем h равным $\frac{1}{\sqrt{2Npq}}$, что позволяет

записать²

$$\Delta^s \rho(\hat{x}) = \Delta_h^s \rho(\hat{x}(x)), \quad (8)$$

где $\hat{x} = Nr + (2Npq)^{1/2}x$. Фактически, асимптотика (4), как и (5), может быть получена³ из тождества (7) с помощью локальной предельной теоремы, примененной к функции $\rho(\hat{x})$, и варианта теоремы о среднем $\Delta_h^n f(x) = h^n \frac{d^n}{dx^n} f(x + nh\theta)$, $\theta \in (0, 1)$, дополненной подходящей оценкой остатка (см. подробности в [8]). Чтобы получить аппроксимацию более высокого порядка, мы рассматриваем функцию $\rho(x)$ как вероятность x успехов в последовательности из N независимых испытаний Бернулли с вероятностями исходов p и q и используем теорему 13 из §3 работы [6] для распределения Бернулли.⁴

Теорема 1. Пусть M – целое неотрицательное число и $\sigma^2 = pq$. Тогда

$$\sqrt{N}\rho(\hat{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-x^2} \sum_{\nu=0}^M \frac{\tilde{q}_\nu(x)}{N^{\nu/2}} + o\left(\frac{1}{N^{M/2}}\right) \quad (9)$$

равномерно по x , таким, что $Nr + (2Npq)^{1/2}x \in \mathbb{Z}$. Здесь $\hat{t} = Nr + (2Npq)^{1/2}t$, а функции \tilde{q}_ν определены следующим образом:

$$\tilde{q}_\nu(x) = \sum \frac{1}{2^{(\nu/2+s)}} H_{\nu+2s}(x) \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{k_m!} \left(\frac{\gamma_{m+2}}{(m+2)!\sigma^{m+2}} \right)^{k_m}, \quad (10)$$

где γ_i , $i \geq 0$, – кумулянты (p, q) -распределения Бернулли, суммирование в правой части ведется по всем неотрицательным решениям (k_1, k_2, \dots, k_ν) уравнения $k_1 + 2k_2 + \dots + \nu k_\nu = \nu$, а $s = k_1 + k_2 + \dots + k_\nu$.

²Здесь Δ – оператор разности по переменной \hat{x} , а Δ_h – оператор разности с шагом h по переменной x .

³Другой подход основывается на сходимости разностного уравнения с полиномиальными решениями, определяющими полиномы Кравчука, к дифференциальному уравнению, задающему полиномы Эрмита; подробности см., например, в [5]. Также этот результат можно получить, пользуясь сходимостью производящих функций, см. [7].

⁴В книге [6] использовано несколько отличное определение полиномов Эрмита: $\text{He}_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$. Эти полиномы связаны с $H_n(x)$ следующим соотношением: $\text{He}_n(x) = 2^{-n/2} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

Чтобы получить аппроксимации оператора Δ_h^s , мы используем формальное представление $\Delta_h = e^{hD} - 1$, где $D = \frac{d}{dx}$ – оператор дифференцирования. Это позволяет записать

$$\Delta_h^s = (e^{hD} - 1)^s = \sum_{i=s}^{\infty} a_{s,i-s+1} (hD)^i. \quad (11)$$

Для произвольного неотрицательного K и всякой вещественнозначной аналитической функции f мы можем рассмотреть начальный отрезок ряда, равномерно оценив остаток:

$$\Delta_h^s f(x) = \sum_{i=0}^K a_{s,i} D^{s+i} f(x) h^{s+i} + o(h^{K+s}). \quad (12)$$

Коэффициенты $a_{s,j}$ могут быть определены с помощью мультиномиальной теоремы следующим образом:

$$a_{s,j} = \sum s! \prod_{r=1}^{j+1} \frac{1}{k_r!} \left(\frac{1}{r!}\right)^{k_r}, \quad (13)$$

где s и j – неотрицательные целые числа, суммирование в правой части формулы (13) производится по всем неотрицательным решениям (k_1, k_2, \dots, k_j) уравнения $k_1 + 2k_2 + \dots + jk_j = j$, а $s = k_1 + k_2 + \dots + k_j$. В частности, мы получаем, что

$$a_{s,0} = 1, \quad a_{s,1} = \frac{s}{2}, \quad a_{s,2} = \frac{s(3s+1)}{24} \quad \text{и т.д.} \quad (14)$$

Теорема 1 и формула (12) показывают, что, для того чтобы получить асимптотическое разложение разности $\Delta_h^s \rho(\hat{x})$, необходимо получить асимптотическое разложение для производных

$$\frac{d^r}{dx^r} (e^{-x^2} \tilde{q}_\nu(x)), \quad \nu \geq 0, \quad r > 0.$$

Обозначим через $b_{\nu,s}$ коэффициенты $\frac{1}{2^{(\nu/2+s)}} \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{k_m!} \left(\frac{\gamma_{m+2}}{(m+2)! \sigma^{m+2}}\right)^{k_m}$, возникающие в правой части формулы (10). Таким образом, мы можем записать $\tilde{q}_\nu(x) = \sum b_{\nu,s} H_{\nu+2s}(x)$. Обозначим через $\tilde{g}_{\nu,r}(x)$ следующее выражение: $e^{x^2} \frac{d^r}{dx^r} e^{-x^2} \tilde{q}_\nu(x)$. Для функции $e^{x^2} \frac{d^s}{dx^s} (e^{-x^2} H_n(x))$ выполнено тождество

$$e^{x^2} \frac{d^s}{dx^s} (e^{-x^2} H_n(x)) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^s}{dx^s} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) = (-1)^s H_{n+s}(x), \quad (15)$$

из которого следует, что

$$\tilde{g}_{\nu,r}(x) = e^{x^2} \frac{d^r}{dx^r} e^{-x^2} \tilde{q}_\nu(x) = \sum (-1)^r b_{\nu,s} H_{\nu+2s+r}(x),$$

где пределы суммирования в правой части – те же, что и в формуле (10). Пусть $A > 0$, а r – целое неотрицательное число. Возможность дифференцировать⁵ асимптотическое разложение (9) с сохранением равномерной на интервале $x \in [-A, A]$ оценки остатка является ключевым фактом для данной работы⁶:

$$\frac{d^r}{dx^r} \sqrt{N} \rho(\hat{x}(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-x^2} \sum_{\nu=0}^M \frac{\tilde{g}_{\nu,r}(x)}{N^{\nu/2}} + o\left(\frac{1}{N^{M/2}}\right); \quad (16)$$

доказательство этого соотношения приведено в §3.

Отметим, что интересно сравнить наш результат (16) с теоремой 7 главы 6 работы [6], где аналогичный результат получен для достаточно гладких функций распределения.

Замечание 1. Так как параметр M в теореме 1 и формуле (16) можно взять произвольным положительным, мы можем записать остаточный член как $O\left(\frac{1}{N^{(M+1)/2}}\right)$ вместо $o\left(\frac{1}{N^{M/2}}\right)$.

Используя разложения (16) и (12) и учитывая, что⁷ $h \sim N^{-1/2}$, получаем следующее асимптотическое разложение для $\Delta^s \rho(\hat{x})$:

$$\begin{aligned} \Delta_h^s \rho(\hat{x}(x)) &= \sum_{i=0}^K a_{s,i} \frac{d^{s+i}}{dx^{s+i}} \rho(\hat{x}) h^{s+i} + o(N^{-(K+s)/2}) \\ &= \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi N\sigma}} \left(\sum_{i=0}^K a_{s,i} \sum_{\nu=0}^M \frac{\tilde{g}_{\nu,r}(x)}{N^{\nu/2}} h^{s+i} + o(N^{-(K+s-1)/2}) \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где $K = M + 1$, $x = O(1)$ и $\hat{x}(x) = Np + (2Npq)^{1/2}x$. Слагаемые в правой части (с точностью до множителя $\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi N\sigma}}$) представляют собой линейную комбинацию полиномов Эрмита, но правую часть можно записать и через функции параболического цилиндра $D_n(x)$, используя их соотношение с полиномами Эрмита: $D_n(x) = 2^{-n/2} e^{-x^2/4} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

⁵Для $s = 0$ мы используем соглашение $\frac{d^s}{dx^s} f(x) \equiv f(x)$.

⁶Отметим, что теорема 1 утверждает это только при $r = 0$ и значениях x из дискретного множества.

⁷Через \sim мы обозначаем пропорциональность.

Обозначим через $\psi_s^K(x)$ сумму $\sum_{i=0}^K a_{s,i} \sum_{\nu=0}^{K-i-1} \frac{\tilde{g}_{\nu,s+i}(x)}{N^{\nu/2}} h^{s+i}$, где коэффициенты $a_{s,j}$ при $j, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ определены посредством формулы (13).

Используя разложение (7) вместе с (17), мы приходим к главному результату данной работы.

Теорема 2. Пусть A – положительное вещественное число, M и n – целые неотрицательные числа, и пусть $k_1 = \max(n - M, 0)$. Предположим, что $\hat{x} - N\rho = (2N\rho q)^{1/2}x$. Тогда равномерно по $x \in [-A, A]$ справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$\begin{aligned} & \rho(\hat{x})k_n^{(p)}(\hat{x}) \\ &= \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi N\sigma}} \frac{(-q)^n}{n!} \sum_{k=k_1}^n \binom{n}{k} n^k (\hat{x} + n - k)^{\binom{n-k}{2}} \psi_{n-k}^M(x) + o(N^{-\frac{n-M}{2}}). \end{aligned} \quad (18)$$

Доказательство. Так как $h = \frac{1}{\sqrt{2\rho q}}N^{-1/2}$, мы получаем, что

$$\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi N\sigma}} \psi_s^M(x) = O(N^{-(s+1)/2})$$

и $(\hat{x} + s)^{\frac{s}{2}} = O(N^s)$, откуда $(\hat{x} + s)^{\frac{s}{2}} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi N\sigma}} \psi_s^M(x) = O(N^{(s-1)/2})$.

Формула (18) получается напрямую из формулы Родрига (7) заменой $\Delta_h^s \rho(\hat{x}(x))$ на соответствующие приближения $\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi N\sigma}} \psi_s^M(x)$, полученные в формуле (17). \square

В частном случае $M = 0$ теорема 2 дает хорошо известную формулу

$$k_n^{(p)}(\hat{x}) = \left(\frac{N\rho q}{2}\right)^{n/2} \frac{H_n(x)}{n!} + o(N^{\frac{n}{2}}),$$

уже приведенную выше в формуле (4) (мы использовали здесь разложение $\rho(\hat{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma}}e^{-x^2} + o(1)$ из теоремы 1).

В общем случае выражение (18) позволяет получить выражение вида⁸ (6). Его правая часть с точностью до множителя $\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi N\sigma}}$ содержит лишь целые степени переменных N и $v = x\sqrt{2N\rho q}$, но не $\sqrt{N} \sim h^{-1}$. Чтобы показать это, заметим, что в зависимости от четности числа n полиномы Эрмита H_n содержат либо только четные, либо только

⁸Конечно, имеет смысл брать $M \leq n$.

нечетные степени переменной x , при этом выражение (10) не изменяет четности индексов полиномов Эрмита, в то время как выражение (15) означает, что (12) также сохраняет четность.

Для случая $M = 2$ и $v = \hat{x} - Np = o(N^{1/3})$ мы можем получить явное, не использующее полиномы Эрмита выражение вместо выражения (18) из теоремы 2. Для этого воспользуемся тем, что полиномы Эрмита могут быть представлены следующим образом (см., например, [5]):

$$H_{2l}(x) = (-1)^l 2^l (2l-1)!! \left(1 + \sum_{j=1}^l \frac{4^j (-l)^{\bar{j}}}{(2j)!} x^{2j}\right),$$

$$H_{2l+1}(x) = (-1)^l 2^{l+1} (2l+1)!! \left(x + \sum_{j=1}^l \frac{4^j (-l)^{\bar{j}}}{(2j+1)!} x^{2j+1}\right),$$

где l – неотрицательное целое число. Если предположить, что $x \rightarrow 0$, то мы приходим к следующим асимптотическим соотношениям:

$$\begin{aligned} H_{2l}(x) &= (-1)^l 2^l (2l-1)!! (1 - 2lx^2) + o(x^2), \quad l = 1, 2, \dots, \\ H_{2l+1}(x) &= (-1)^l 2^{l+1} (2l+1)!! x + o(x^2), \quad l = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Пусть l, m и C – целые неотрицательные числа. Для падающей степени $(m+C)^l$ справедливы следующие разложения при $m \rightarrow \infty$:

$$(m+C)^l = m^l + (lC - \frac{l(l-1)}{2})m^{l-1} + O(m^{l-2}). \quad (20)$$

Следствие 1. Пусть $x = Np + v$. Для всякой последовательности $\varepsilon(N)$, такой, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon(N) = 0$, равномерно по v , удовлетворяющим условию $|v| \leq \varepsilon(N)N^{1/3}$, справедливы следующие разложения:

$$k_{2l}^{(p)}(Np+v) = (-1)^l \frac{(2l-1)!! (pqN)^l}{(2l)!} \left(1 - \frac{9v^2 + t_1 v + t_2 l}{9pqN}\right) + o(N^{l-1}),$$

где $t_1 = 6(p - \frac{1}{2})(4l-1)$ и $t_2 = (l-1)(1+4l+(16l-5)pq)$, а $l \in \mathbb{N}$;

$$k_{2l+1}^{(p)}(Np+v) = (-1)^l \frac{(2l-1)!! (pqN)^l}{(2l)!} \frac{4l(p - \frac{1}{2}) + 3v}{3} + o(N^l),$$

где $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доказательство. Обозначим через $\psi(x)$ функцию $\frac{\sqrt{2\pi N}\sigma}{e^{-\frac{x^2}{2N}}}$. Пусть k – целое неотрицательное целое. Применяя теорему 1 для $K = 2$ и используя выражение (15), мы получаем

$$\begin{aligned} \psi(x) \frac{d^k}{dx^k} \rho(\hat{x}) &= (-1)^k \left(H_k(x) + \frac{\gamma_3}{2^{3/2}\sigma^3} \frac{H_{3+k}(x)}{3!\sqrt{N}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{\gamma_4}{\sigma^4} H_{4+k}(x) + \frac{1}{3!} \left(\frac{\gamma_3}{\sigma^3}\right)^2 H_{6+k}(x)}{4 \cdot 4!N} \right) + o\left(\frac{1}{N}\right), \end{aligned}$$

где $\gamma_3 = pq(1 - 2p)$ и $\gamma_4 = -pq(6pq - 1)$. При дополнительном предположении⁹ $v := \hat{x} - Np = o(N^{1/3})$ мы получаем упрощенное выражение:

$$\psi(x) \rho\left(\frac{v}{\sqrt{2N}\sigma}\right) = 1 - \frac{1 - pq - 6v(p - q)}{12pqN} + o\left(\frac{1}{N}\right). \quad (21)$$

Аналогично для производных, имеющих нечетный порядок, получим соотношение

$$\psi(x) \frac{d^{2l+1}}{dx^{2l+1}} \rho(\hat{x}) = (2l - 1)!! (-2)^l \left(1 + \frac{36lv^2 + \tau_1 v + \tau_2}{36pqN} \right) + o\left(\frac{1}{N}\right),$$

где $\tau_1 = 6(1 - 2p)(2l + 3)(2l + 1)$, $\tau_2 = (2l + 1)(2l + 3)(1 + l - (1 + 4l)pq)$, а для производных четного порядка –

$$\psi(x) \frac{d^{2l}}{dx^{2l}} \rho(\hat{x}) = (-1)^{l+1} (2l + 1)!! 2^l \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}pq} \left(v + \frac{(1 - 2p)(2l + 3)}{6} \right) + o\left(\frac{1}{N}\right),$$

где $l \in \mathbb{N}$. Используя выражения (19) и (20) и отбрасывая члены порядка меньше $[\frac{n-1}{2}]$, мы получаем из разложения (18) требуемое выражение. \square

При необходимости, если взять разложения более высокого порядка в формулах (19) и (20), а также $M \geq 3$, можно получить выражения для c_j , $j \geq 1$, из разложения (6).

В заключение мы приводим некоторую модификацию следствия 1 для функции $K_n(x, p, N_1)$, где $N_1 = N - i$, $v = x - Np = o(N^{1/3})$, $i = O(1)$.

Следствие 2. Пусть $x = Np + v$. Для всякой последовательности $\varepsilon(N)$, такой, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon(N) = 0$, равномерно по v , удовлетворяющим

⁹В чуть более слабом предположении $v = O(N^{1/3})$ необходимо добавить дополнительное слагаемое $\frac{1}{6} \frac{v^3(q-p)}{(pq)^2 N^2}$ в правой части формулы (21).

условию $|v| \leq \varepsilon(N)N^{1/3}$, справедливы следующие разложения:

$$K_{2l}(x, p, N - i) = \left(-\frac{q}{p}\right)^l \frac{(2l-1)!!}{N^l} \left(1 - \frac{9(v+ip)^2 + \tilde{t}_1(v+ip) + \tilde{t}_2 l}{9pqN}\right) + o(N^{-l-1}),$$

где $\tilde{t}_1 = 6(p - \frac{1}{2})(4l-1)$ и $\tilde{t}_2 = (l-1)(1+4l+(16l-5)pq) - 9pq(i+2l-1)$, $l \in \mathbb{N}$;

$$K_{2l+1}(x, p, N - i) = \left(-\frac{q}{p}\right)^l \frac{(2l+1)(2l-1)!!}{N^{l+1}} \cdot \frac{4l(p - \frac{1}{2}) + 3(v+ip)}{3p} + o(N^{-l-1}),$$

где $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доказательство. Представим функцию $K_n(x, p, N_1)$ в виде

$$\begin{aligned} K_n(x, p, N_1) &= K_n(Np + v, p, N_1) = K_n(N_1p + v_1, p, N_1) \\ &= (-p)^n \binom{N_1}{n} k_n^{(p)}(N_1p + v_1, N_1), \end{aligned}$$

где $v_1 = v + ip$. Используя (20) и выражение $(N - i)^{-l} = (N)^{-l} + il(N)^{-l-1} + O(N^{-l-2})$, мы легко получаем требуемое асимптотическое разложение напрямую из следствия 1. \square

Равномерные разложения из следствий 1 и 2 получены в предположении $|v| \leq \varepsilon(N)N^{1/3}$. Но мы можем использовать эти же разложения при $|v| \leq \varepsilon(N)N^{1/2}$, $\varepsilon(N) \rightarrow 0$. В этом случае, если $N^{1/3} = O(v)$, оценки остатков в этих формулах необходимо умножить на \sqrt{N} .

§3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

В данном параграфе будет доказана формула (16). Пусть функция $S_N^M(\xi)$ такова, что

$$\sqrt{N}\rho(\hat{\xi}) = e^{S_N^M(\xi)}\phi^M(\xi),$$

где $\phi^M(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\xi^2} \sum_{\nu=0}^M \frac{\tilde{q}_\nu(\xi)}{N^{\nu/2}}$ и полиномы \tilde{q}_ν определены в теореме 1, а также, как и выше, $\hat{s} = Np + \sqrt{2Npqs}$. Обозначим через $\phi_s^M(\xi)$

производную $\frac{d^s}{d\xi^s} \phi^M(\xi) = (-1)^s \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\xi^2} \sum_{\nu=0}^M \frac{\tilde{q}_{\nu+s}(\xi)}{N^{\nu/2}}$. Используя интегральную формулу Коши, мы получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{N} \frac{d^s}{dx^s} \rho(\hat{x}(x)) &= \frac{\sqrt{N}s!}{2\pi i} \int_{C_x} \frac{\rho(\hat{\xi}) d\xi}{(x-\xi)^{s+1}} \\ &= \frac{s!}{2\pi i} \left[\int_{C_x} \frac{\phi^M(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{s+1}} + \int_{C_x} \frac{(\sqrt{N}\rho(\hat{\xi}) - \phi^M(\xi)) d\xi}{(x-\xi)^{s+1}} \right] \\ &= \phi_s^M(x) + \frac{s!}{2\pi i} \int_{C_x} \frac{\phi^M(\xi) (e^{S_N^M(\xi)} - 1) d\xi}{(x-\xi)^{s+1}}, \end{aligned}$$

где C_x – замкнутый контур, охватывающий точку x . В дальнейшем мы полагаем, что контур C_x является единичной окружностью с центром в точке x :

$$C_x = \{\xi \mid \xi = x + e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Лемма 1. Пусть M – целое неотрицательное, а A – положительное вещественное число. Тогда для $x \in [-A, A]$ и $\xi \in C_x$ справедлива равномерная оценка

$$|e^{S_N^M(\xi)} - 1| = o(N^{-M/2}).$$

Доказательство. Формула Стирлинга для гамма-функции Эйлера (см., например, [9, с. 34, пример 1.2] или [10, с. 83]) может быть записана следующим образом:

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln(z) - z + \frac{\ln(2\pi)}{2} + F_m(z) + O(|z|^{-2m-1}), \quad (22)$$

где $|z| \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon < \pi$, $F_m(z) = \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}}$, а B_k , $k \geq 1$, – числа Бернулли. С помощью данного выражения в работе [8] (см. формулу (17)) было показано, что

$$\ln \rho(z) = -\frac{N}{2pq} \left(\frac{z}{N} - p\right)^2 - \frac{1}{2} \ln(2\pi Npq) + S_N^0\left(\frac{z - Np}{\sqrt{2Npq}}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

причем для всякого целого $m \geq 0$ выполнено¹⁰ соотношение $S_N^0(\xi) = \Phi_m(\xi) + O(N^{-2m-1})$, а функции $\Phi_m(\xi)$ определены равенством

$$\Phi_m(\xi) = F_m(N) - F_m(\hat{\xi}) - F_m(N - \hat{\xi}) - Nr\left(\frac{\hat{\xi}}{N}\right) - \frac{1}{2}D\left(\frac{\hat{\xi}}{N}\right),$$

где $r(\tau) = \tau \ln \frac{\tau}{p} + (1 - \tau) \ln \frac{1-\tau}{q} - \frac{1}{2pq}(\tau - p)^2$, $D(\tau) = \ln(1 + \frac{(p-\tau)(\tau-q)}{pq})$. Функции $\Phi_m(\xi)$ аналитичны в объединении $\bigcup_x B_x$ единичных шаров B_x , ограниченных окружностями C_x , $x \in [-A, A]$. Для функции $S_N^0(\xi)$ в работе [8] (см. формулу (27)) показано, что $|S_N^0(\xi)| \leq \frac{C}{\sqrt{N}}$ для $\xi \in C_x$ и $x \in [-A, A]$. Поскольку из теоремы 1 известно, что для всякой точки x , такой, что $\hat{x} = Np + (\sqrt{2Npqx}) \in \mathbb{Z}$, выполнено соотношение

$$\left| e^{S_N^0(x)} - \sum_{\nu=0}^M \frac{\tilde{q}_\nu(x)}{N^{\nu/2}} \right| = o(N^{-M/2}),$$

достаточно показать, что

$$\left| e^{\Phi_m(\xi)} - \sum_{\nu=0}^M \frac{\tilde{p}_\nu(\xi)}{N^{\nu/2}} \right| = o(N^{-M/2})$$

для некоторых $m = m(M)$, $\xi \in C_x$, $x \in [-A, A]$ и *некоторых* полиномов $\{\tilde{p}_\nu(\xi)\}_{\nu=0}^M$. Если это проверено, то, выбирая N достаточно большим, мы видим, что $\tilde{p}_\nu(\xi) = \tilde{q}_\nu(\xi)$, $0 \leq \nu \leq M$, для всех ξ в силу совпадения значений полиномов по крайней мере в $[\sqrt{N}]$ точках. Анализируя функции $F_m(\hat{\xi})$, $r(\frac{\hat{\xi}}{N})$, $D(\frac{\hat{\xi}}{N})$ как функции от $\frac{1}{\sqrt{N}}$ при заданном параметре x , мы видим, что для каждой из этих функций можно записать ряд Тейлора¹¹ при $\frac{1}{\sqrt{N}} \rightarrow 0$ вида $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{(\sqrt{N})^j} \xi^{j+h}$ для некоторого целого h . Так как $x \in [-A, A]$, мы можем оборвать каждый из рядов, записав $\sum_{j=0}^m \frac{c_j}{(\sqrt{N})^j} x^{j+h} + f(N)$, где $|f(N)| \leq \frac{C}{N^m}$ равномерно по $\xi \in \bigcup_x B_x$. Достаточно положить m равным $2M$. Аналогичным образом, обрывая ряды Тейлора для функций $e^{\Phi_m(\xi)}$, мы получаем, что $|e^{\Phi_m(\xi)} - \sum_{\nu=0}^m \frac{\tilde{p}_\nu(\xi)}{N^{\nu/2}}| = o(\frac{1}{N^{-M/2}})$ для $p_0(\xi) \equiv 1$ и некоторых полиномов $p_\nu(\xi)$, где $\xi \in C_x$ и $x \in [-A, A]$.

¹⁰Это, конечно же, следует из свойств остатка в формуле Стирлинга (22); подробнее см., например, в [10].

¹¹Начальные члены ряда представлены в замечании 2 ниже.

В силу того, что $S_N^M(\xi)$ равно $S_N^0(\xi) - \Phi_m(\xi) + o(N^{-m})$, мы получаем, что $|S_N^M(\xi)| \leq o(N^{-M/2})$, и, используя теорему Лагранжа, заключаем, что $|e^{S_N^M(\xi)} - 1| = o(N^{-M/2})$ для $\xi \in C_x$ и $x \in [-A, A]$. \square

Замечание 2. Оценку $|e^{\Phi^M(\xi)} - \sum_{\nu=0}^M \frac{\tilde{q}_\nu(\xi)}{N^{\nu/2}}| = o(N^{-M/2})$ для малых значений M можно получить, не используя теорему 1, а напрямую анализируя функцию S_N^0 . Например, мы можем получить следующие асимптотические разложения при $N \rightarrow \infty$:

$$r\left(\frac{\hat{x}}{N}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{3} \frac{(2p-1)}{\sqrt{(1-p)p}} \frac{x^3}{N^{3/2}} + O(N^{-2}),$$

$$D\left(\frac{\hat{x}}{N}\right) = \frac{\sqrt{2}(2p-1)}{\sqrt{(1-p)p}} \frac{x}{N^{1/2}} + O(N^{-1}).$$

Для функции F_m при $m = 2$ мы имеем $F_2(z) = 1/(12z)$. Аналогично получаем выражения

$$F_2(\hat{x}) = \frac{1}{12Np} + O(N^{-3/2}),$$

$$F_2(N - \hat{x}) = \frac{1}{12(1-p)N} + O(N^{-3/2}),$$

$$F_2(N) = 1/12N^{-1} + O(N^{-3/2}).$$

Мы можем записать первый член асимптотического разложения функции $e^{\Phi_M(x)}$, используя только первые члены представленных выше разложений:

$$e^{\Phi_M(x)} = \frac{(1-2p)}{2^{3/2}(pq)^{1/2}} \frac{8x^3 - 12x}{3!\sqrt{N}} + O\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{\tilde{q}_1(x)}{N^{1/2}} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Это дает прямое доказательство леммы 1 при $M = 1$. Было бы интересно найти прямое и короткое доказательство леммы 1, не использующее теорему 1, при произвольных значениях параметра M .

Лемма 2. Пусть M – целое неотрицательное, а A – положительное вещественное число. Тогда для $x \in [-A, A]$ и достаточно больших N справедлива равномерная оценка

$$\frac{s!}{2\pi i} \int_{C_x} \left| \frac{\phi^M(\xi)}{(x-\xi)^{s+1}} \right| |d\xi| = O(1).$$

Доказательство. Для заданного M , равномерно по $x \in [-A, A]$, для всех достаточно больших $N = N(A, M)$ выполнено неравенство

$$\left| \sum_{\nu=0}^M \frac{\tilde{q}_\nu(x + e^{i\varphi})}{N^{\nu/2}} \right| \leq 2.$$

Поэтому мы можем написать следующую оценку:

$$\int_{C_x} \left| \frac{\phi^M(\xi)}{(x - \xi)^{s+1}} \right| |d\xi| \leq 2 \int_0^{2\pi} e^{-(x+2\cos(\varphi))^2/2} d\varphi < C e^{-x^2/4},$$

и константа C не зависит от x . □

Используя лемму 1 и лемму 2, мы можем оценить интеграл как

$$\left| \frac{s!}{2\pi i} \int_{C_x} \frac{\phi^M(\xi) (e^{S_N^M(\xi)} - 1) d\xi}{(x - \xi)^{s+1}} \right| = o(N^{-M/2})$$

для $\xi \in C_x$, $x \in [-A, A]$, что завершает доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Dai, R. Wong, *Global asymptotics of Krawtchouk polynomials – a Riemann–Hilbert approach*. — Chin. Ann. Math. Ser. B **28**, No. 1 (2007), 1–34.
2. Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев, В. А. Миронова, *Многочлены Кравчука и их применения в задачах криптографии и теории кодирования*. — Мат. вопр. криптогр. **6**, вып. 1 (2015), 33–56.
3. М. Кравчук, *Sur une généralisation des polynomes d’Hermite*. — C. R. Math. **189** (1929), 620–622.
4. А. А. Лодкин, А. Р. Минабутдинов, *Предельные функции адического автоморфизма Паскаля*, готовится к печати.
5. А. Ф. Никифоров, С. К. Суслов, В. Б. Уваров, *Классические ортогональные полиномы дискретной переменной*. М.: Наука, 1985.
6. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин*. М.: Физматлит, 1972.
7. Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*. М.: Физматлит, 1962.
8. И. И. Шарапудинов, *Асимптотические свойства полиномов Кравчука*. — Мат. заметки **44**, вып. 5 (1988), 526–529.
9. М. В. Федорюк, *Метод перевала*. М.: Наука, 1977.
10. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*. М.: Наука, 1979.

Minabutdinov A. R. A higher-order asymptotic expansion of the Krawtchouk polynomials.

The paper extends the classical result on the convergence of Krawtchouk polynomials to Hermite polynomials. We provide a uniform asymptotic expansion of Krawtchouk polynomials in terms of Hermite polynomials and obtain explicit expressions for a few first terms of this expansion. The research is motivated by the study of ergodic sums of the Pascal adic transformation.

Национальный исследовательский
университет “Высшая школа экономики”,
Департамент прикладной математики
и бизнес-информатики,
Кантемировская ул., д. 3А,
194100 С.-Петербург, Россия
E-mail: aminabutdinov@gmail.com

Поступило 21 сентября 2015 г.