ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2013. Том 20, № 3. С. 26–44

УДК 519.178

КЛАССЫ СУБКУБИЧЕСКИХ ПЛАНАРНЫХ ГРАФОВ, ДЛЯ КОТОРЫХ ЗАДАЧА О НЕЗАВИСИМОМ МНОЖЕСТВЕ ПОЛИНОМИАЛЬНО РАЗРЕШИМА *)

Д. С. Малышев

Аннотация. Доказывается полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве для некоторого семейства классов планарных субкубических графов.

Ключевые слова: задача о независимом множестве, граничный класс, вычислительная сложность, эффективный алгоритм.

Введение

Данная работа является продолжением цикла работ [1, 2, 4], в которых исследовалась граница эффективной разрешимости задачи о независимом множестве в семействе наследственных подклассов класса планарных графов. Напомним, что любое подмножество попарно не смежных вершин графа называется *независимым множеством* (н. м.). Независимое множество графа называется *наибольшим*, если оно содержит максимальное количество вершин, мощность наибольшего независимого множества (н. н. м.) называется *числом независимости* и для графа G обозначается через $\alpha(G)$. *Задача о независимом множестве* (задача НМ) для заданного графа состоит в том, чтобы найти его наибольшее независимое множество. Хорошо известно, что эта задача полиномиально эквивалентна задаче вычисления числа независимости.

Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Каждый наследственный (и только наследственный) класс $\mathcal{X}$ определяется некоторым множеством запрещённых

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11–01–00107–а и 12–01–00749–а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2012 гг.» (гос. контракты 16.740.11.0310 и 14.B37.21.0393), лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ, а также гранта Правительства РФ (договор 11.G34.31.0057).

порождённых подграфов $\mathcal{Y}$, в этом случае пишем $\mathcal{X} = \mathcal{F}ree(\mathcal{Y})$. Если при этом $\mathcal{Y}$ конечно, то $\mathcal{X}$ называется *конечно определённым.*

Наследственный класс графов $\mathcal{X}$ называется НМ-*простым*, если существует алгоритм, решающий задачу НМ для графов из этого класса за полиномиальное время. В противном случае класс $\mathcal{X}$ называется НМ-*сложным.* Далее всюду предполагается, что P$\neq$NP, и это условие не включается явно в формулировки соответствующих утверждений, например, такого: если задача НМ NP-полна в классе $\mathcal{X}$, то $\mathcal{X}$ является НМ-сложным. Хорошо известно, что класс $\mathcal{P}$ всех планарных графов и класс $\mathcal{D}(k)$ графов со степенями вершин не более чем k $(k > 2)$ НМ-сложные. Цель настоящей работы — доказать НМ-простоту некоторых подмножеств $\mathcal{P}$.

В [3] введено понятие НМ-*граничного класса* графов — минимального по включению класса, являющегося пересечением убывающей последовательности НМ-сложных классов, а также доказано, что конечно определённый класс НМ-сложный тогда и только тогда, когда в нём содержится какой-либо НМ-граничный класс. Таким образом, знание всех НМ-граничных классов позволило бы полностью охарактеризовать все конечно определённые НМ-сложные классы. В [3] также доказано, что класс $\mathcal{T}$ всех графов, у которых каждая компонента связности является деревом с не более чем тремя листьями, граничный. Иными словами, каждая компонента связности — триод, где под *триодом* $T_{i,j,k}$ понимается дерево, получаемое соединением одной вершины с тремя другими простыми путями длины $i \geqslant 0,\ j \geqslant 0,\ k \geqslant 0$.

До сих пор неизвестно, существуют ли другие НМ-граничные классы. Существование их эквивалентно существованию графа $G \in \mathcal{T}$, для которого класс $\mathcal{F}ree(\{G\})$ НМ-сложный [3]. О трудности проблемы говорит тот факт, что в настоящее время неизвестен сложностной статус задачи НМ для класса $\mathcal{F}ree(\{P_5\})$. В то же время, если рассматривать не всё семейство наследственных классов, а какую-либо его часть, то можно надеяться на исчерпывающее решение вопроса. Так, в [3] доказано, что класс $\mathcal{T}$ единственный НМ-граничный среди (в семействе) сильно наследственных классов, т. е. классов графов, замкнутых относительно удаления вершин и рёбер.

При рассмотрении сужений множества всех графов естественным образом возникает понятие относительного граничного класса, обобщающее понятие просто граничного класса. Пусть $\mathcal{Y}$ — НМ-сложный класс. Наследственный класс графов $\mathcal{X}$ назовём НМ-*граничным относительно класса* $\mathcal{Y}$, если существует последовательность $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \ldots$ НМ-сложных подмножеств класса $\mathcal{Y}$ такая, что $\mathcal{X} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i$, и $\mathcal{X}$ — минимальный с этим свойством. Для относительных НМ-граничных классов справедливо следующее утверждение: если $\mathcal{S}$ — конечное подмножество $\mathcal{Y}$, то класс $\mathcal{Y} \cap \mathcal{F}ree(\mathcal{S})$ НМ-сложный тогда и только тогда, когда он содержит какой-нибудь НМ-граничный относительно $\mathcal{Y}$ класс. Оно может быть доказано почти так же, как соответствующее утверждение из [3].

Класс $\mathcal{T}$ НМ-граничный относительно $\mathcal{Y} = \mathcal{P}$ и $\mathcal{Y} = \mathcal{D}(k)$ при $k > 2$. Доказательства этих фактов почти дословно повторяют соответствующие доказательства из [3]. Хотя пока не удалось выяснить, есть ли другие НМ-граничные классы относительно $\mathcal{Y} = \mathcal{P}$ или относительно $\mathcal{Y} = \mathcal{D}(3)$ (для этого нужно найти граф $G \in \mathcal{T}$, для которого класс $\mathcal{Y} \cap \mathcal{F}ree(\{G\})$ НМ-сложен), имеется более заметный прогресс в продвижении к этой цели, чем в случае просто граничных классов. Именно, удаётся показать, что для любых i, j и таких $\mathcal{Y}$ класс $\mathcal{Y} \cap \mathcal{F}ree(\{T_{1,i,j}\})$ является НМ-простым [4, 5]. Для случая $G = T_{2,2,2}$ вопрос о трудоёмкости задачи НМ в классе $\mathcal{Y} \cap \mathcal{F}ree(\{G\})$ остаётся открытым.

Возникает естественная идея — рассмотреть пересечение $\mathcal{P}(3)$ классов $\mathcal{D}(3)$ и $\mathcal{P}$. Класс $\mathcal{T}$ НМ-граничный относительно $\mathcal{P}(3)$. Возможно, $\mathcal{T}$ — единственный такой класс. Граничные классы относительно $\mathcal{P}(3)$, отличные от $\mathcal{T}$, существуют в том и только том случае, когда среди классов $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{G\})$ имеются НМ-сложные. Для случая $\mathcal{Y} = \mathcal{P}(3)$ действительно удаётся получить более глубокое продвижение на пути к доказательству единственности $\mathcal{T}$, чем для случаев $\mathcal{Y} = \mathcal{D}(3)$ и $\mathcal{P}$. Именно, будет показано, что класс $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,i}\})$ НМ-прост для любого фиксированного i.

В статье приняты следующие обозначения: графы C_k и P_k задаются перечислением своих вершин, например, $C_k = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$; *яблоком* A_k называется граф, получаемый из цикла $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ добавлением одной вершины a_0, смежной с вершиной a_1; *планером* называется граф, получаемый добавлением к графу $K_{2,3}$ с долями x_1, x_2, x_3 и x_4, x_5 вершин x_6, x_7 и рёбер $(x_1, x_6), (x_3, x_7)$; *покрышкой* называется граф, получаемый из двух простых циклов $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ добавлением рёбер $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)$; *проколотой покрышкой* называется граф, получаемый удалением ребра (x_{k-1}, x_k) из покрышки; через $G \setminus V$ обозначается граф, получаемый из G удалением всех вершин, принадлежащих $V \subseteq V(G)$.

1. Определения и вспомогательные результаты

Разделяющая клика графа — множество его вершин, порождающее полный подграф, удаление которого приводит к увеличению числа компонент связности. *C-блоком* называется максимальный по включению связный порождённый подграф данного графа, не имеющий разделяющей клики. Известен полиномиальный алгоритм выделения всех C-блоков входного графа [3]. Известно также, что для любого наследственного класса задача НМ полиномиально сводится к его C-блокам [3].

При доказательстве основного результата понадобятся два следующих вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Пусть граф $G \in \mathcal{P}(3)$ содержит планер и является C-блоком. Тогда $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_2, x_4\}) + 1$.*

Доказательство. Покажем, что вершина x_2 обязательно имеет степень два. Предположим противное, тогда $\deg(x_2) = 3$. Поскольку G — планарный C-блок (следовательно, двусвязный граф) со степенями всех вершин не более чем три, существует путь, соединяющий x_2 с x_1 (или с x_3), не содержащий ни x_4, ни x_5 и содержащий вершину x_6 (или x_7). В этом легко убедиться, рассмотрев оба возможных способа расположения вершины x_2 в плоской укладке графа G (внутри цикла (x_1, x_4, x_3, x_5) и вне его) и заметив, что в противном случае $\{x_2\}$ — разделяющая клика графа G. Тогда из-за планарности G и ограничений на значения степеней вершин этого графа множество $\{x_3\}$ ($\{x_1\}$) является разделяющей кликой. Получаем противоречие с предположением. Значит, $\deg(x_2) = 2$.

Покажем теперь, что существует н. н. м. графа G, которое либо содержит вершины x_4 и x_5, либо — x_1, x_2, x_3. Ясно, что каждое н. н. м. графа G либо одновременно содержит x_4 и x_5, либо не содержит ни x_4, ни x_5. Вместе с тем, если x_4 и x_5 не принадлежат некоторому н. н. м. графа G, то вершина x_2 и ровно по одной вершине в каждой из пар (x_1, x_6) и (x_3, x_7) принадлежат этому н. н. м. Но тогда из данного н. н. м. можно удалить вершины каждой из пар и добавить x_1 и x_3; в результате снова получится н. н. м. графа G. Таким образом, доказано существование н. н. м. графа G с требуемыми свойствами. Нетрудно убедиться и в том, что существует н. н. м. графа $G \setminus \{x_2, x_4\}$, содержащее либо x_1 и x_3, либо x_5.

Таким образом, из некоторого н. н. м. графа G можно так удалить вершину (x_2 или x_4), что в результате получится н. м. графа $G \setminus \{x_2, x_4\}$. Поэтому $\alpha(G) \leqslant \alpha(G \setminus \{x_2, x_4\}) + 1$. С другой стороны, к любому н. н. м. графа $G \setminus \{x_2, x_4\}$ можно так добавить вершину (x_2 или x_4), что в результате получится н. м. графа G. Поэтому $\alpha(G) \geqslant \alpha(G \setminus \{x_2, x_4\}) + 1$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть H — произвольный граф, содержащий цикл $(x_1, x_2,$*

$x_3, x_4, x_5)$ *(не обязательно порождённый), причём* (x_2, x_4) *и* (x_3, x_5) *не принадлежат* $E(H)$. *Если степени* $\deg(x_2) = \deg(x_5)$ *равны* 2 *или* 3 *и* (x_2, x_5) *принадлежит* $E(H)$, *то* $\alpha(H) = \alpha(H \setminus \{x_1\})$.

Доказательство. Пусть IS — н. н. м. графа H. Если $x_1 \notin IS$, то $\alpha(H) = \alpha(H \setminus \{x_1\})$. Пусть теперь $x_1 \in IS$, тогда x_2 и x_5 не принадлежат IS. Среди x_3 и x_4 не более одной вершины принадлежит IS. Следовательно, существует вершина $x \in \{x_2, x_5\}$, смежная с вершиной из $\{x_3, x_4\}$, не принадлежащей множеству IS. Тогда $IS \cup \{x\} \setminus \{x_1\}$ — н. н. м. графа H. Поэтому $\alpha(H) = \alpha(H \setminus \{x_1\})$. Лемма 2 доказана.

2. Присоединённые циклы и их разрушение

Пусть G — C-блок из класса $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$, содержащий яблоко A_k $(k \geqslant 10)$. Порождённый цикл $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ графа G назовём *присоединённым* (*к яблоку* A_k), если $a_0 = x_5$, $a_1 = x_1$, $a_2 = x_2$, $a_3 = x_3$. Ясно, что x_4 не может быть смежна ни с одной из вершин $a_6, a_7, \ldots, a_{k-1}$, так как в противном случае граф G содержал бы порождённый подграф $T_{2,2,2}$. Поэтому среди вершин из $V(A_k)$ вершина x_4 может быть смежна только с a_k, a_4 и a_5. При скрупулёзном анализе окрестностей некоторых вершин обнаруживаются определённые свойства н. н. м. графа G. Именно, всегда можно указать вершину присоединённого цикла (исходя из состава этих окрестностей), не входящую в некоторое н. н. м. графа G. Удаление данной вершины не изменяет числа независимости, а сам механизм разрушения присоединённых циклов является важной составляющей алгоритма решения задачи НМ в классе $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$. Упомянутый анализ окрестностей составляют доказательства лемм 3–5.

Лемма 3. *Пусть* $\deg(x_2) = 2$. *Если* $\deg(x_4) = 2$ *или* $\deg(x_5) = 2$ *или вершина* x_4 *смежна только с вершинами яблока* A_k, *то* $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_1\})$. *Во всех остальных случаях* $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_4\})$.

Доказательство. Можно считать, что существует такая вершина b, для которой $(b, x_5) \in E(G)$, $b \neq x_1$, $b \neq x_4$ (иначе $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_1\})$ по лемме 2). Вершина b должна быть смежна либо с a_k, либо с a_{k-1} (так как противное приводит к порождённому вершинами $a_1, a_0, b, a_k, a_{k-1}, a_2, a_3$ подграфу $T_{2,2,2}$ графа G).

Будем вначале предполагать, что x_4 смежна только с вершинами яблока A_k или что $\deg(x_4) = 2$. Покажем, что вершины x_4 и a_5 обязательно несмежны (поэтому либо $\deg(x_4) = 2$, либо $(x_4, a_4) \in E(G)$, либо $(x_4, a_k) \in E(G)$). Предположим противное. Вершины b и a_6 должны быть смежными, так как иначе G содержит порождённый вершинами $x_4, x_5, b, x_3, x_2, a_5, a_6$ подграф $T_{2,2,2}$. Значит, вершина b не смежна ни с вершиной a_7, ни с вершиной a_8 (так как $k \geqslant 10$). Но тогда граф G содержит порождённый вершинами $a_6, a_5, a_4, b, a_0, a_7, a_8$ подграф $T_{2,2,2}$; противоречие.

Покажем теперь, что существует н. н. м. графа G, не содержащее вершины x_1. Отсюда будет следовать первая часть утверждения леммы. Рассмотрим IS — произвольное н. н. м. графа G. Можно считать, что $x_1 \in IS$ (иначе $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_1\})$). Если $x_3 \notin IS$, то $IS \cup \{x_2\} \setminus \{x_1\}$ — н. н. м. графа G. Если $x_3 \in IS$, то множество вершин $IS \cup \{x_2, x_4\} \setminus \{x_1, x_3\}$ тоже является н. н. м. графа G (ввиду того, что либо $\deg(x_4) = 2$, либо $(x_4, a_k) \in E(G)$, либо $(x_4, a_4) \in E(G)$).

Далее будем предполагать, что вершина x_4 смежна с $x \notin V(A_k)$. Вершины b и x_4 несмежны (поэтому $b \neq x$), так как иначе $b = x$ и либо вершины $x_1, a_k, a_{k-1}, x_5, x, x_2, x_3$, либо вершины $x_3, x_2, x_1, x_4, x, a_4, a_5$ порождают в G подграф $T_{2,2,2}$. Покажем, что существует н. н. м. графа G, не содержащее вершины x_4. Отсюда следует вторая часть утверждения леммы. Пусть IS' — некоторое н. н. м., содержащее x_4 (если такого множества не найдётся, то утверждение очевидно). Если ни одна из вершин b и x_1 не принадлежит IS', то $IS' \cup \{x_5\} \setminus \{x_4\}$ — н. н. м. графа G. Если ровно одна вершина $y \in \{x_1, b\}$ принадлежит IS', то множество $IS' \cup \{x_5, x_2\} \setminus \{x_4, y\}$ тоже является н. н. м. графа G. Поэтому можно считать, что и b и x_1 принадлежат IS'. Наконец, можно предполагать, что $a_4 \in IS'$ (поэтому $(b, a_4) \notin E(G)$), иначе $IS' \cup \{x_3\} \setminus \{x_4\}$ является н. н. м. графа G.

Напомним, что вершина b должна быть смежна хотя бы с одной из вершин a_{k-1}, a_k. Через a_i обозначим вершину из $\{a_{k-1}, a_k\}$, смежную с b и имеющую минимальный индекс (среди этих вершин сразу обе могут быть смежны с b). Вершина x обязательно смежна с хотя бы одной из вершин a_4 и a_5 (в противном случае G содержит порождённый множеством вершин $\{x_3, x_2, x_1, x_4, x, a_4, a_5\}$ подграф $T_{2,2,2}$). Покажем, что вершины b и x не смежны. Предположим противное, тогда вершина b смежна ровно с одной вершиной из $\{a_{k-1}, a_k\}$. Ясно, что вершина x должна быть смежна либо с a_{i-1}, либо с a_{i-2} (иначе G содержит порождённый вершинами $a_i, a_{i-1}, a_{i-2}, b, x, a_{i+1}, a_{i+2}$ подграф $T_{2,2,2}$, где индексы вершин понимаются по модулю k). Получаем противоречие, так как x должна быть смежна с x_4, b, a_4 или a_5, a_{i-1} или a_{i-2}. На самом деле, вершина x не смежна с вершиной a_5 (следовательно, она обязательно смежна с a_4), поскольку в противном случае граф G содержит порождённый вершинами $x_4, x_5, b, x_3, x_2, x, a_5$ подграф $T_{2,2,2}$.

Заметим, что если x смежна с вершиной $y \notin \{a_4, x_4\}$, то вершины b и y также смежны, иначе вершины $x_4, x_5, b, x, y, x_3, x_2$ порождают подграф $T_{2,2,2}$. Поэтому множество $IS' \cup \{x_3, x\} \setminus \{a_4, x_4\}$ является н. н. м. графа G. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\deg(x_5) = 2$ *и существует вершина* $c \notin V(A_k)$, *смежная с* x_2. *Если множество* $\{x_1, x_4, a_4, c\}$ *не является независимым, то* $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_4\})$. *Если оно независимо, то* $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_3\})$.

Доказательство. Пусть множество $\{x_1, x_4, a_4, c\}$ не является независимым. Докажем, что $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_4\})$. Пусть IS — некоторое н. н. м. графа G, содержащее вершину x_4 (если такого н. н. м. не найдётся, то, очевидно, $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_4\})$). Если $\{x_1, x_4, a_4, c\}$ не является независимым, то хотя бы одна из вершин x_1, c, a_4 не принадлежит IS. Отсюда следует, что хотя бы одно из множеств $IS \cup \{x_5\} \setminus \{x_4\}$, $IS \cup \{x_2, x_5\} \setminus \{x_1, x_4\}$, $IS \cup \{x_3, x_5\} \setminus \{x_1, x_4\}$ является н. н. м. графа G. Поэтому можно считать, что множество $\{x_1, x_4, a_4, c\}$ независимое.

Предположим, что есть вершина $a' \notin V(A_k)$, смежная с a_4. Покажем, что вершина a' должна быть смежна с c. Предположим противное, тогда вершина a' обязательно должна быть смежна с x_4, поскольку иначе вершины $a_3, a_2, c, x_4, x_5, a_4, a'$ порождают подграф $T_{2,2,2}$. Ясно, что c должна быть смежна или с a_k, или с a_{k-1}, так как в противном случае вершины $x_1, x_5, x_4, x_2, c, a_k, a_{k-1}$ порождают подграф $T_{2,2,2}$. При этом вершина c не может быть смежна с вершиной a_{k-1} (поэтому она смежна с a_k), так как иначе вершины $a_2, c, a_{k-1}, a_1, a_0, a_3, a_4$ порождают $T_{2,2,2}$. Вершина c должна быть смежна с вершиной a_5, поскольку в противном случае вершины $x_3, x_4, x_5, x_2, c, a_4, a_5$ порождают подграф, изоморфный $T_{2,2,2}$. Но тогда вершины $a_k, c, a_5, a_{k-1}, a_{k-2}, a_1, a_0$ порождают подграф, изоморфный $T_{2,2,2}$; противоречие.

Возможны два взаимно исключающих случая — либо вершины x_4 и a_5 несмежны, либо смежны.

Случай 1. Вершины x_4 и a_5 несмежны. Вершина c должна быть смежна с a_5, так как в противном случае граф G содержит порождённый множеством вершин $\{x_3, x_2, c, x_4, x_5, a_4, a_5\}$ подграф $T_{2,2,2}$. Вершина c не может быть смежна с a_k, поскольку иначе G содержит порождённый вершинами $a_k, a_1, a_0, c, a_5, a_{k-1}, a_{k-2}$ подграф $T_{2,2,2}$. Вершина x_4 должна быть смежна с вершиной a_k, так как иначе вершины $x_2, c, a_5, x_3, x_4, a_1, a_k$ порождают подграф $T_{2,2,2}$.

Докажем, что $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_3\})$. Пусть IS' — некоторое н. н. м., содержащее вершину x_3 (если такого множества не найдётся, то равенство $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_3\})$ очевидно). Если ни одна из вершин x_1, c не принадлежит IS', то $IS' \cup \{x_2\} \setminus \{x_3\}$ является н. н. м. графа G. Если $x_1 \in IS'$, а $c \notin IS'$, то $IS' \cup \{x_2, x_5\} \setminus \{x_1, x_3\}$ является н. н. м. графа G. Если $x_1 \notin IS'$, а $c \in IS'$, то $IS' \cup \{x_2, a_4\} \setminus \{c, x_3\}$ является н. н. м. графа G. Наконец, если $c \in IS'$ и $x_1 \in IS'$, то множество $IS' \cup \{x_2, x_5, a_4\} \setminus \{x_1, x_3, c\}$ является н. н. м. графа G. Равенство $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_3\})$ доказано.

Случай 2. Вершины x_4 и a_5 смежны. Докажем, что $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_3\})$. Ясно, что c должна быть смежна хотя бы с одной из вершин a_{k-1} и a_k, иначе вершины $a_1, a_k, a_{k-1}, x_5, x_4, a_2, c$ порождают в G подграф, изоморфный $T_{2,2,2}$. Вместе с тем, она не может быть смежна с a_{k-1} (значит, смежна с a_k), так как в противном случае есть порождённый вершинами $a_2, c, a_{k-1}, a_1, a_0, a_3, a_4$ подграф $T_{2,2,2}$.

Пусть IS'' — н. н. м., содержащее вершину x_3. Если $c \notin IS''$, то либо $IS'' \cup \{x_2\} \setminus \{x_3\}$, либо $IS'' \cup \{x_2, x_5\} \setminus \{x_1, x_3\}$ является н. н. м. графа G. Поэтому можно считать, что $c \in IS''$, а следовательно, и $a_k \notin IS''$. Если $a_5 \notin IS''$, то $IS'' \cup \{a_4\} \setminus \{x_3\}$ — н. н. м. графа G. Значит, можно считать, что $c \in IS'', x_3 \in IS'', a_5 \in IS''$. Если $x_5 \notin IS''$, то $IS'' \cup \{a_4, x_4\} \setminus \{x_3, a_5\}$ — н. н. м. графа G, а если $x_5 \in IS''$, то $IS'' \cup \{a_4, x_1, x_4\} \setminus \{x_3, x_5, a_5\}$ — н. н. м. графа G. Таким образом, всегда существует н. н. м. графа G, не содержащее x_3 (значит, $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_3\})$). Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть вершина x_5 смежна с вершиной $b \notin V(A_k) \cup \{x_4\}$, а вершина x_2 смежна с вершиной $c \notin V(A_k)$. Если $b = c$ и x_4 смежна с a_4 или x_4 смежна с $x \notin V(A_k)$, а x смежна с a_5 и не смежна с a_4, то $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_3\})$. Если $b \neq c$ и b смежна с a_k, то $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_4\})$. Во всех остальных случаях $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_5\})$.*

Доказательство. Рассмотрим два случая: $b \neq c$ и $b = c$.

Случай 1. Пусть $b \neq c$. При доказательстве леммы 3 показано, что в случае $\deg(x_5) > 2$ вершины x_4 и a_5 несмежны (и степень вершины x_2 на справедливость этого факта не влияет). Вершина b должна быть смежна хотя бы с одной из вершин a_{k-1}, a_k. Понятно, что x_4 не может быть смежна с вершиной a_k, иначе планарность графа G препятствовала бы смежности b с вершиной a_{k-1}. Ввиду планарности графа G, либо x_4 и c несмежны, либо $(x_4, c) \in E(G)$ и $(a_{k-1}, c) \notin E(G)$, $(a_k, c) \notin E(G)$. Докажем, что в действительности вершины x_4 и c смежны. Предположим противное. Вершина c должна быть смежна хотя бы с одной вершиной из $\{a_{k-1}, a_k\}$ (иначе есть порождённый вершинами $x_1, x_2, c, x_5, x_4, a_k, a_{k-1}$ подграф $T_{2,2,2}$ графа G). Покажем, что $(a_{k-1}, c) \notin E(G)$ (следовательно, $(a_k, c) \in E(G)$ и $(a_{k-1}, b) \in E(G)$). Пусть $(a_{k-1}, c) \in E(G)$, значит, $(a_k, b) \in E(G)$. Если $(c, a_4) \notin E(G)$, то вершины $x_2, x_1, x_5, c, a_{k-1}, a_3, a_4$ порождают в G подграф $T_{2,2,2}$, а если $(c, a_4) \in E(G)$, то вершины c, x_2, x_1,

$a_{k-1}, a_{k-2}, a_4, a_5$ порождают в G подграф $T_{2,2,2}$. Ни одна из вершин b, c не может быть смежна ни с a_{k-2}, ни с a_{k-3}. Если вершина b смежна с вершиной $a \in \{a_{k-3}, a_{k-2}\}$, то в G есть порождённый вершинами $x_5, b, a, a_1, a_k, x_4, x_3$ подграф $T_{2,2,2}$. Если же вершина c смежна с вершиной $a \in \{a_{k-3}, a_{k-2}\}$, то в G есть порождённый вершинами $x_2, c, a, x_1, x_5, a_3, a_4$ подграф $T_{2,2,2}$. Но тогда вершины $a_{k-1}, a_{k-2}, a_{k-3}, b, x_5, a_k, c$ порождают в G подграф $T_{2,2,2}$. Итак, вершины x_4 и c смежны. Тогда $\deg(c) = 2$, иначе (ввиду планарности G) множество $\{c\}$ — разделяющая клика.

Покажем, что если вершина b смежна с a_k, то существует н. н. м. графа G, не содержащее x_4. Пусть IS — н. н. м. графа G. Можно считать, что $x_4 \in IS$. Если хотя бы одна из вершин x_2 и b не принадлежит IS, то либо $IS \cup \{c\} \setminus \{x_4\}$, либо $IS \cup \{x_5\} \setminus \{x_4\}$ является н. н. м. графа G. Если вершины x_2, x_4, b принадлежат IS, то $IS \cup \{x_1, c\} \setminus \{x_2, x_4\}$ является н. н. м. графа G и это множество не содержит x_4.

Докажем, что если вершина b смежна с a_{k-1}, то существует н. н. м. без вершины x_5. Если существует вершина x, смежная с a_k (с b) и не принадлежащая $V(A_k)$, то она должна быть соседней с вершиной b (с a_k). Действительно, если $(x, a_k) \in E(G)$ и $(x, b) \notin E(G)$, то в G есть порождённый вершинами $a_1, a_0, b, a_k, x, a_2, a_3$ подграф $T_{2,2,2}$. Если ребро (x, b) принадлежит $E(G)$ и $(x, a_k) \notin E(G)$, то в G есть порождённый вершинами $a_0, b, x, a_1, a_k, x_4, x_3$ подграф $T_{2,2,2}$. Пусть IS' — н. н. м., содержащее вершину x_5. Если $a_k \in IS'$, то $IS' \cup \{b\} \setminus \{x_5\}$ — н. н. м. графа G. Если $x_2 \in IS'$ и $a_k \notin IS'$, то $IS' \cup \{x_4\} \setminus \{x_5\}$ — н. н. м. графа G. Если же ни a_k, ни x_2 не принадлежат множеству IS', то $IS' \cup \{x_1\} \setminus \{x_5\}$ – н. н. м. графа G.

Случай 2. Пусть теперь $b = c$. Вершина x_4 не может быть смежна с вершиной a_k, так как противное приводит к подграфу $T_{2,2,2}$, порождённому вершинами $x_4, a_k, a_{k-1}, x_5, b, a_3, a_4$. Покажем, что если вершина x_4 смежна с вершиной a_4, то существует н. н. м. графа G, не содержащее x_3. Ясно, что $\deg(b) = 2$, поскольку в противном случае множество $\{b\}$ является разделяющей кликой. Пусть IS'' — н. н. м. графа G, содержащее x_3. Если $x_5 \notin IS''$, то $IS'' \cup \{x_4\} \setminus \{x_3\}$ — н. н. м. графа G. Если же $x_5 \in IS''$, то $IS'' \cup \{x_2\} \setminus \{x_3\}$ — н. н. м. графа G. Итак, в обоих случаях существует н. н. м., не содержащее вершины x_3. Докажем также, что если x_4 смежна с вершиной $x \notin V(A_k)$, а x смежна с a_5 и не смежна с a_4, то существует н. н. м., не содержащее x_3. Пусть IS'' — некоторое н. н. м. графа G, содержащее вершину x_3. Если существует вершина y, смежная с a_4 и не принадлежащая $V(A_k)$, то она должна быть смежна и с x, иначе вершины $x_3, x_4, x, a_4, y, a_2, a_1$ порождают подграф $T_{2,2,2}$.

Отсюда следует, что если $x \in IS''$, то $IS'' \cup \{a_4\} \setminus \{x_3\}$ — н. н. м. графа G. Поэтому можно считать, что $x \notin IS''$. Можно также считать, что $x_5 \in IS''$, так как в противном случае $IS'' \cup \{x_4\} \setminus \{x_3\}$ — н. н. м. графа G. Но тогда $IS'' \cup \{x_2\} \setminus \{x_3\}$ — н. н. м. графа G. Значит, и в рассматриваемом случае есть н. н. м., не содержащее x_3.

Покажем, что во всех остальных случаях существует н. н. м. графа G, не содержащее вершины x_5. Пусть IS''' — н. н. м., содержащее x_5. Если $(x_4, x) \in E(G)$, $x \notin V(A_k) \cup \{b\}$, то x смежна либо с a_4, либо с a_5, поскольку иначе G содержит порождённый вершинами $a_3, a_2, a_1, x_4, x, a_4, a_5$ граф $T_{2,2,2}$. Возможны только следующие ситуации.

(а) Вершина b смежна с x_4. Если $x_3 \in IS'''$, то $IS''' \cup \{b\} \setminus \{x_5\}$ — н. н. м. графа G. Если $x_3 \notin IS'''$, то $IS''' \cup \{x_4\} \setminus \{x_5\}$ — н. н. м. графа G.

(б) Степень вершины x_4 равна двум или вершина x_4 смежна с a_5. Если ни одна из вершин окрестности x_4 (кроме x_5) не принадлежит IS''', то $IS''' \cup \{x_4\} \setminus \{x_5\}$ — н. н. м. графа G. Если $x_3 \in IS'''$, то $IS''' \cup \{b\} \setminus \{x_5\}$ — н. н. м. графа G. Если $(x_4, a_5) \in E(G)$ и $x_3 \notin IS''', a_5 \in IS'''$, то $x_2 \in IS'''$ (ввиду максимальности IS''') и поэтому $IS''' \cup \{x_3, b\} \setminus \{x_2, x_5\}$ — н. н. м. графа G.

(в) Вершина x_4 смежна с вершиной $x \notin V(A_k)$, которая смежна с a_4. Можно считать, что $x_3 \notin IS'''$ и что $x \in IS''', x_2 \in IS'''$ (иначе одно из множеств $IS''' \cup \{b\} \setminus \{x_5\}, IS''' \cup \{x_4\} \setminus \{x_5\}$ будет н. н. м. графа G или IS''' не будет максимальным). Тогда множество $IS''' \cup \{x_3, b\} \setminus \{x_2, x_5\}$ является н. н. м. графа G. Лемма 5 доказана.

Будем говорить, что наследственный класс графов $\mathcal{X}$ является *классом без присоединённых циклов*, если для произвольного его графа и каждого яблока A_k ($k \geqslant 10$) этого графа нет ни одного присоединённого к нему цикла. Основным результатом данного раздела работы является

Теорема 1. *Задача* НМ *для графов из класса* $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$ *полиномиально сводится к той же задаче для наследственной его части без присоединённых циклов.*

Доказательство. Задача НМ для графов из $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$ полиномиально сводится к его C-блокам. Пусть G — связный граф без разделяющих клик из класса $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$ и x — некоторая его вершина. За полиномиальное от числа вершин графа G время можно проверить, содержит ли граф G яблоко A_k в качестве порождённого подграфа, для которого $k \geqslant 10$, вершина x имеет степень 3 в этом яблоке и имеется присоединённый к A_k цикл C. Для этого прямым перебором можно найти все циклы длины 5 в графе G (их количество линейно относительно числа вершин) и выбрать среди них те, которые содержат x. Пусть $C' = (x, y_1, y_2, y_3, y_4)$ — один из таких циклов. Удалим из G вершины y_1, y_3, y_4 и их окрестности (y_1, y_2, y_4 и их окрестности) и получим граф G_1 (G_2). Ясно, что в графе G цикл C' будет являться присоединённым к некоторому яблоку тогда и только тогда, когда в графе G_1 имеется порождённый путь длины не менее чем 8, соединяющий x и y_2, или в графе G_2 имеется порождённый путь такой длины, соединяющий x и y_3. Проверка существования данного пути может быть выполнена следующим образом. Для определённости рассмотрим граф G_1. Пусть $v \in V(G_1)$, обозначим через $N_k(v)$ множество вершин G_1, отстоящих от v на расстояние $k \geqslant 0$. Ясно, что $|N_0(v)| = 1$, $|N_k(v)| \leqslant 3 \cdot 2^{k-1}$ и $\left|\bigcup\limits_{i=0}^{k} N_i(v)\right| \leqslant 1 + 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + 3 \cdot 2^{k-1} = 3 \cdot 2^k - 2$ для любого $k \geqslant 1$. Рассмотрим подграф G_1, порождённый множеством вершин $\bigcup\limits_{k=0}^{4} (N_k(x) \cup N_k(y_2))$. Данный граф содержит не более $2 \cdot (3 \cdot 2^4 - 2) = 92$ вершин. Поэтому за время $O(1)$ можно в этом графе проверить существование порождённого пути из x в y_2 длины не менее чем 8. Пусть данный граф не содержит такого пути. Тогда в G_1 порождённый путь между x и y_2 длины 8 и более существует тогда и только тогда, когда существуют порождённые пути P_1 из x в $z_1 \in N_3(x)$, P_2 из y_2 в $z_2 \in N_3(y_2)$ такие, что после удаления вершин путей $P_1 \setminus \{z_1\}$ и $P_2 \setminus \{z_2\}$ и их окрестностей z_1 и z_2 оказываются в одной компоненте связности. Декартово произведение $N_3(x)$ и $N_3(y_2)$ содержит не более 22^2 элементов, поэтому поиск таких P_1 и P_2 выполняется за полиномиальное время. Отсюда и из более ранних рассуждений вытекает, что проверка существования присоединённого цикла C (и определение в случае его наличия) выполняется за полиномиальное время.

Из лемм 3–5 следует, что существует такая вершина $y \in V(C)$, что y не принадлежит некоторому н. н. м. графа G и $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{y\})$. Вместе с тем поиск вершины y (исходя из формулировок лемм 3–5) выполняется за полиномиальное время.

Выполнив (за полиномиальное время) разрушение присоединённых циклов и сведе́ние к связным графам без разделяющих клик надлежащее количество раз, получим систему порождённых подграфов $\{G_1, G_2, \ldots, G_s\}$ (без разделяющих клик) графа G, для любого яблока A_k ($k \geqslant 10$) каждого из которых нет ни одного присоединённого к этому яблоку цикла. Каждый такой граф содержит не менее двух вершин. Каждая вершина G принадлежит не более чем трём графам из $\{G_1, G_2, \ldots, G_s\}$. Поэтому $2s \leqslant 3|V(G)|$. Отсюда следует, что имеет место обозначенное ранее сведéние. Теорема 1 доказана.

3. Гармони и их разрушение

Напомним, что задача НМ для графов из $\mathcal{P}(3)\cap\mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$ по леммам 1 и 2 полиномиально сводится к графам из этого класса, не содержащим порождённых планера и подграфа, дополнительного к простому пути с пятью вершинами. Вместе с тем по теореме 1 эта задача для таких графов полиномиально сводится к C-блокам, для которых каждое достаточно большое порождённое яблоко не имеет присоединённых циклов. Заметим, что число независимости покрышки с $2n$ вершинами равно n (если n чётное) или $n-1$ (если n нечётное) и проверка того, является ли граф покрышкой, выполняется за полиномиальное время. Отметим также, что число независимости проколотой покрышки с $2n$ вершинами равно n и что проверка того, является ли заданный граф проколотой покрышкой, выполняется за полиномиальное время. Таким образом, задача НМ для графов из $\mathcal{P}(3)\cap\mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$ полиномиально сводится к *простейшим графам*, т. е. графам из этого класса, отличным от покрышки и от проколотой покрышки, которые сами являются C-блоками, не содержат порождённых подграфов указанного в начале этого абзаца вида и для которых каждое порождённое яблоко A_k $(k\geqslant 10)$ не имеет присоединённых циклов.

Лемма 6. *Пусть G — простейший граф, содержащий яблоко A_k $(k\geqslant 10)$. Тогда окрестность вершины a_0 без a_1 непуста, и каждая вершина данной усечённой окрестности среди вершин яблока A_k смежна либо с a_2, либо с a_k, но не сразу с обеими вершинами.*

Доказательство. Поскольку G — простейший граф, он является C-блоком и не содержит присоединённых к A_k циклов. Значит, найдётся хотя бы одна смежная с a_0 вершина $x\neq a_1$. Вершина x не может быть смежна с a_3 и a_{k-1}, иначе либо к яблоку A_k имеется присоединённый цикл, либо вершины $x,a_1,a_0,a_{k-1},a_{k-2},a_3,a_4$ порождают в G подграф $T_{2,2,2}$. Если x не смежна ни с a_2, ни с a_k, то G содержит порождённый вершинами $a_1,a_0,x,a_2,a_3,a_k,a_{k-1}$ подграф $T_{2,2,2}$. Поэтому вершина x должна быть смежна с a_2 или с a_k, но не с обеими сразу, иначе граф G содержит порождённый вершинами $a_{k-1},a_k,a_1,a_0,x,a_2,a_3$ планер. Лемма 6 доказана.

Рассмотрим в простейшем графе G цикл C_k яблока A_k, $k\geqslant 10$. Будем рассматривать множества $\{x_1,\ldots,x_p\}$ $(p\geqslant 2)$ из последовательных вершин этого цикла, содержащие a_1 и обладающие следующими свойствами:

(i) каждая вершина x_i смежна с $y_i \notin V(C_k)$, где все вершины y_i различны;

(ii) для любого $i \in \overline{2, p-1}$ множество вершин $V(C_k) \cup \{y_i\}$ в графе G порождает яблоко;

(iii) граф G содержит рёбра $(y_1, y_2), (y_2, y_3), \ldots, (y_{p-1}, y_p)$.

Совокупность множеств с этими свойствами непуста, так как содержит либо $\{a_k, a_1\}$, либо $\{a_1, a_2\}$. Это следует из леммы 6. В качестве $\{x_1, \ldots, x_p\}$ будем рассматривать множество из рассматриваемой совокупности с наибольшим количеством элементов. Множества $\{x_1, \ldots, x_p\}$ и $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$ не совпадают, поскольку граф G отличен от покрышки и проколотой покрышки. Из максимальности множества $\{x_1, \ldots, x_p\}$, леммы 6 и запрещения в G графа $T_{2,2,2}$, планера и дополнения к пути с 5 вершинами в качестве порождённых подграфов следует, что для любого $i \in \{1, p\}$ либо $\deg(y_i) = 2$, либо y_i смежна с вершиной из $V(A_k)$, отстоящей от x_i на расстояние 2. Порождённый множеством вершин $\{x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ подграф графа G будем называть *гармонью.*

Вершина x_p смежна с вершиной $x_{p+1} \in V(C_k)$, $x_{p+1} \neq x_{p-1}$, x_{p+1} смежна с вершиной $x_{p+2} \in V(C_k)$, $x_{p+2} \neq x_p$, ..., вершина x_{k-1} смежна с вершиной $x_k \in V(C_k)$, $x_k \neq x_{k-2}$, а x_k смежна с вершиной x_1.

Гармонь назовём *гармонью первого типа*, если $\deg(y_1) = \deg(y_p) = 2$, иначе — *гармонью второго типа.* В гармони второго типа вершина y_1 смежна с x_{k-1} или вершина y_p смежна с x_{p+2}.

Покажем, что задача НМ для простейших графов сводится к той же задаче для простейших графов, содержащих гармони только первого типа. Для этого предположим, что множество вершин $\{x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ порождает в графе G гармонь второго типа. Будем для определённости считать, что вершина y_1 смежна с x_{k-1} (возможно, и y_p смежна с x_{p+2}). Ясно, что если вершина x_k смежна с $y \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, то либо $(y, x_{k-2}) \in E(G)$, либо $(y, x_{k-3}) \in E(G)$ (иначе G содержит порождённый вершинами $x_{k-1}, y_1, y_2, x_k, y, x_{k-2}, x_{k-3}$ подграф $T_{2,2,2}$). По графу G построим граф G' в соответствии с правилами:

(П1) если $\deg(x_k) = 2$ или x_k смежна с вершиной $y \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ и $(y, x_{k-3}) \in E(G)$, то G' получается из G удалением ребра (x_{k-1}, y_1);

(П2) если x_k смежна с вершиной y, не принадлежащей $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, и $(y, x_{k-2}) \in E(G)$, $(y, x_{k-3}) \notin E(G)$, то G' получается из G удалением вершин x_{k-1}, x_k, x_1, y_1 и добавлением рёбер (x_{k-2}, y_2) и (y, x_2).

Лемма 7. *Если G' получен из G по правилу* (П1), *то эти графы имеют одинаковые числа независимости, причём $G' \in \mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$.*

Доказательство. Заметим, что G' — остовной подграф графа G. Поэтому $\alpha(G) \leqslant \alpha(G')$. Покажем выполнение обратного неравенства. Пусть IS — н. н. м. графа G'. Если вершины y_1 и x_{k-1} одновременно не принадлежат IS, то IS — н. н. м. графа G. Если $y_1 \in IS$ и $x_{k-1} \in IS$, то рассмотрим степень вершины x_k. Если $\deg(x_k) = 2$, то $IS \cup \{x_k\} \setminus \{x_{k-1}\}$ — н. н. м. графа G. Если $\deg(x_k) = 3$ (т. е. $(y, x_k) \in E(G)$) и существует вершина z, смежная с x_{k-2} и отличная от x_{k-1} и x_{k-3}, то либо $z = y$, либо z смежна с y. В противном случае вершины $x_{k-1}, x_{k-2}, z, x_k, y, y_1, y_2$ порождают в графе G подграф $T_{2,2,2}$. Тогда $IS \cup \{x_k\} \setminus \{x_{k-1}\}$ (если $y \notin IS$) или $IS \cup \{x_k, x_{k-2}\} \setminus \{x_{k-1}, y\}$ (если $y \in IS$) является н. н. м. графа G. Итак, в обоих случаях есть независимое множество графа G с числом вершин $\alpha(G')$. Поэтому $\alpha(G) \geqslant \alpha(G')$. Значит, числа независимости графов G' и G равны.

Покажем, что $G' \in \mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$. Для этого достаточно проверить, что G' не имеет порождённого подграфа $T_{2,2,2}$, содержащего вершины x_{k-1} и y_1. Предположим, что такой подграф существует. Обозначим через z^* его вершину степени 3. Очевидно, что z^* принадлежит пересечению множеств $N_1(y_1) \cup N_2(y_1)$ и $N_1(x_{k-1}) \cup N_2(x_{k-1})$. При этом

$$N_1(y_1) \cup N_2(y_1) \subseteq \{x_1, x_2, x_k, y_2, y_3\},$$

$$N_1(x_{k-1}) \cup N_2(x_{k-1}) \subseteq \{x_{k-3}, x_{k-2}, x_k, x_1, x, y\},$$

где $x \notin V(C_k)$ — вершина, смежная с x_{k-2}. Отсюда, так как

$$\{x_1, x_2, x_k, y_2, y_3\} \cap \{x_{k-3}, x_{k-2}, x_k, x_1, x, y\} = \{x_1, x_k\},$$

следует, что $z^* \in \{x_1, x_k\}$. В случае $z^* = x_1$ образование порождённого подграфа $T_{2,2,2}$ невозможно, так как этому мешает ребро (x_2, y_2). В случае $z^* = x_k$ подграф $T_{2,2,2}$ может быть порождён только вершинами $x_k, x_1, y_1, x_{k-1}, x_{k-2}, y, z'$, где $(z', y) \in E(G')$ и $z' \notin \{x_{k-3}, x_k\}$, что невозможно, так как при $z' \neq x_3$ вершины $x_k, x_1, x_2, x_{k-1}, x_{k-2}, y, z'$ порождают в G подграф $T_{2,2,2}$, а при $z' = x_3$ вершины $x_3, x_2, x_1, y, x_{k-3}, x_4$, x_5 порождают в G такой подграф. Поэтому и во втором случае образования порождённого подграфа $T_{2,2,2}$ не происходит. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Если G' получен из G по правилу* (П2), *то* $\alpha(G) = \alpha(G') + 2$, *причём* $G' \in \mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$.

Доказательство. Покажем, что существует н. н. м. графа G, содержащее хотя бы одну из вершин x_1, y_1. Очевидно, что если какое-нибудь н. н. м. IS этого графа не содержит ни одной из этих вершин, то ввиду максимальности IS хотя бы одна из вершин из $\{x_{k-1}, y_2\}$ и хотя бы одна из вершин $\{x_k, x_2\}$ принадлежат этому множеству. Вместе с тем в каждом из данных множеств ровно одна вершина обладает этим свойством. Поэтому если $x_{k-1} \in IS$, то $IS \cup \{y_1\} \setminus \{x_{k-1}\}$ — н. н. м. графа G, а если $y_2 \in IS$, то $IS \cup \{y_1\} \setminus \{y_2\}$ тоже является н. н. м. графа G. Значит, всегда есть н. н. м. графа G, содержащее либо x_1, либо y_1.

Докажем теперь, что существует н. н. м. графа G, содержащее вершины x_1, x_{k-1}, y, y_2 или вершины x_{k-2}, x_k, y_1, x_2. Пусть для определённости некоторому н. н. м. IS' графа G принадлежит вершина y_1. Можно считать, что $x_k \in IS'$ (ясно, что ввиду максимальности данного независимого множества либо x_k, либо y принадлежит ему; если $y \in IS'$, то её можно заменить на x_k). Похожие рассуждения приводят к заключению о том, что вершины x_{k-2} и x_2 принадлежат IS'. Аналогично доказывается, что если $x_1 \in IS'$, то $\{x_1, x_{k-1}, y, y_2\} \subseteq IS'$.

Заметим, что $IS' \setminus \{x_k, y_1\}$ является н. м. графа G'. Если IS' содержит вершины x_1, x_{k-1}, y, y_2, то $IS' \setminus \{x_{k-1}, x_1\}$ — н. м. графа G'. Поэтому $\alpha(G') \geqslant \alpha(G) - 2$. Докажем, что выполняется обратное неравенство. По аналогии с предыдущими рассуждениями можно доказать, что существует н. н. м. IS'' графа G', содержащее либо вершины x_{k-2}, x_2, либо вершины y, y_2. В первом случае $IS'' \cup \{x_k, y_1\}$ является н. м. графа G, а во втором — $IS'' \cup \{x_{k-1}, x_1\}$. Поэтому $\alpha(G) \geqslant \alpha(G') + 2$. Из этих неравенств следует, что $\alpha(G) = \alpha(G') + 2$.

Проверим, что граф G' принадлежит классу $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$. Ясно, что $G \in \mathcal{P}(3)$. Предположим, что G содержит порождённый подграф H, изоморфный $T_{2,2,2}$, с вершиной z степени 3. Понятно, что H содержит в точности одно из рёбер (y, x_2), (x_{k-2}, y_2). Ясно также, что $z \notin \{x_2, y_2\}$. Поэтому возможны только следующие случаи.

Случай 1: $z = y$ и H содержит простой путь $P = (y, x_2, x_3)$.

Случай 2: $z = x_{k-2}$ и H содержит простой путь $P = (x_{k-2}, y_2, y_3)$.

Случай 3: $z = x_{k-3}$ и H содержит простой путь $P = (x_{k-3}, x_{k-2}, y_2)$.

Случай 4:$z = x_3$ и H содержит простой путь $P = (x_3, x_2, y)$.

Случай 5: $z = y_3$ и H содержит простой путь $P = (y_3, y_2, x_{k-2})$.

Случай 6: H содержит простой путь $P = (z, y, x_2)$.

В каждом случае есть порождённый подграф $T_{2,2,2}$ графа G, получаемый из H следующим образом: в случаях 1–2 заменой пути P путём (y, x_k, x_1) или путём (x_{k-2}, x_{k-1}, y_1), а в случаях 3–6 заменой рёбер $(x_{k-2}, y_2), (x_2, y), (y_2, x_{k-2}), (y, x_2)$ рёбрами $(x_{k-2}, x_{k-1}), (x_2, x_1), (y_2, y_1)$, (y, x_k); противоречие. Значит, $G' \in \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Пусть G — простейший граф, содержащий гармонь первого типа, порождённую вершинами $x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_p$. Тогда*

$$\alpha(G) = \begin{cases} \alpha(G \setminus \{x_1\}), & \text{если } p \text{ нечётно,} \\ \alpha(G \setminus \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}) + p/2, & \text{если } p \text{ чётно.} \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда p нечётно. Если есть н. н. м. графа G, не содержащее вершины x_1, то $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_1\})$. Если есть н. н. м. IS графа G, содержащее x_1, то либо $IS \cup \{y_1\} \setminus \{x_1\}$, либо $IS \cup \{y_1, x_2\} \setminus \{x_1, y_2\}$, либо $IS \cup \{y_1, x_2, y_3\} \setminus \{x_1, y_2, x_3\}$,..., либо $IS \cup \{y_1, x_2, y_3, x_4, \ldots, y_p\} \setminus \{x_1, y_2, x_3, y_4, \ldots, x_p\}$ является н. н. м. графа G. Поэтому во всех возможных случаях $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{x_1\})$.

Пусть p чётно. Обозначим граф $G \setminus \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ через G'. Очевидно, что существует н. н. м. IS графа G', содержащее ровно половину вершин $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Отсюда следует, что есть н. н. м. графа G, содержащее ровно $\alpha(G') + p/2$ вершин (оно получается добавлением $p/2$ вершин из $\{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$, не смежных с вершинами из $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\} \cap IS$). Поэтому $\alpha(G) \geqslant \alpha(G') + p/2$. Нетрудно показать справедливость и обратного неравенства, которое следует из того, что любое н. н. м. графа G содержит не более половины из вершин $y_1, y_2, \ldots, y_p$. Сравнивая оба неравенства, получаем, что $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}) + p/2$. Лемма 9 доказана.

Теорема 2. *Задача* НМ *для графов из класса $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$ полиномиально сводится к задаче* НМ *для графов из класса $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{A_{10}, A_{11}, \ldots\})$.*

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 показано, как за полиномиальное время проверить, является ли вершина x степени 3 произвольного C-блока из $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$ вершиной степени 3 некоторого его порождённого яблока A_k, $k \geqslant 10$ (и найти это яблоко, когда оно существует). Если нет присоединённого к этому яблоку цикла и сам граф простейший, то существует гармонь (первого или второго типа), содержащая x. Понятно, что эта гармонь может быть определена за полиномиальное время.

Из правил сведéния, сформулированных в этом и предыдущем разделах, следует, что задача НМ для графов из $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$ сводится к той же задаче для простейших графов из $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{A_{10}, A_{11}, \ldots\})$. На каждой итерации сведéния с некоторым из имеющихся графов происходит одно из следующих действий: (1) выделение C-блоков, (2) удаление вершины, (3) проверка изоморфности покрышке или проколотой покрышке, (4) разрушение гармони. Любое действие выполняется за полиномиальное время. На каждой итерации будем рассматривать величину

$7n_3 + 3n_2 + n_1 + n_0$, где n_i — общее количество вершин степени i в текущих графах. Покажем, что применение операций типа (1)–(4) уменьшает эту величину. Для (2), (3) и при разрушении гармони первого типа в (4) это очевидно. Нетрудно видеть, что разрушение гармони второго типа по правилу (П1) уменьшает данную величину на 8, а по (П2) — на 28. Заметим, что если $G \in \mathcal{P}(3)$ и вершина v принадлежит более чем одному C-блоку G, то

(a) либо степень v равна 3 и v принадлежит двум C-блокам G, в каждом из которых она имеет степень не более чем 2;

(b) либо степень v равна 3 и v принадлежит трём C-блокам G, в каждом из которых она имеет степень 1;

(c) либо степень v равна 2 и v принадлежит двум C-блокам G, в каждом из которых она имеет степень 1.

Имея в виду эти случаи, нетрудно убедиться в том, что при выделении C-блоков рассматриваемая сумма уменьшается. Таким образом, в любой момент процесса взвешенная сумма степеней вершин не превосходит $7|V(G)|$, что даёт верхнюю оценку $7|V(G)|$ на число итераций. Поэтому и сведéние полиномиально. Теорема 2 доказана

4. Основные результаты

Теорема 3. *Задача НМ для графов из класса $\mathcal{D}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,i}\})$ при любом $i > 2$ полиномиально сводится к той же задаче для графов из $\mathcal{D}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$.*

Доказательство. Покажем сначала, что для любого связного графа $G \in \mathcal{D}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,i}\})$ либо $G \in \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$, либо G имеет не более $3 \cdot 2^{i+2} - 2$ вершин.

Пусть G содержит порождённый подграф $T_{2,2,2}$ такой, что $\deg(x) = 3$ и для любого $k \in \overline{1,3}$ вершина x смежна с y_k, а вершина y_k смежна с z_k. Докажем, что граф G не содержит вершины y, отстоящей от x на расстояние $i+3$. Предположим противное и рассмотрим кратчайший путь из x в y: $P = (x_1 = x, x_2, x_3, \ldots, x_{i+4} = y)$. Понятно, что $x_2 \in \{y_1, y_2, y_3\}$. Не умаляя общности, можно считать, что $x_2 = y_1$. Ввиду выбора пути P каждая из вершин y_2 и y_3 не может быть смежна ни с одной вершиной x_j при $j > 3$. По тем же причинам ни одна из вершин z_1, z_2, z_3 не может быть смежна с x_j, для которой $j > 4$. Возможны два случая: $x_3 \neq z_1$ или $x_3 = z_1$.

Случай 1: $x_3 \neq z_1$. Если z_1 и x_4 смежны, то вершины $x, y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3, x_4, x_5, \ldots, x_{i+1}$ порождают в G подграф $T_{2,2,i}$. Поэтому можно считать, что $(z_1, x_4) \notin E(G)$. Если ни одна из вершин y_2, y_3, z_2, z_3 не смежна ни с x_3, ни с x_4, то G содержит порождённый вершинами $x_1, y_2, y_3, z_2, z_3, x_2, x_3, \ldots, x_{i+1}$ подграф $T_{2,2,i}$. Если среди вершин y_2, y_3, z_2, z_3 есть смежная с x_3 вершина y_k или z_k ($k \in \{2, 3\}$, такая вершина единственна) и ни одна из них не смежна с x_4, то G содержит порождённый вершинами $y_k, z_k, x_2, x_3, z_1, x_4, \ldots, x_{i+3}$ подграф $T_{2,2,i}$. Если среди вершин y_2, y_3, z_2, z_3 есть смежная с x_4 вершина z_k (ввиду выбора пути P такая вершина может принадлежать только множеству $\{z_2, z_3\}$), то вершины $x, y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3, x_4, x_5, \ldots, x_{i+1}$ порождают подграф $T_{2,2,i}$.

Случай 2: $x_3 = z_1$. Если ни одна из вершин z_2, z_3 не смежна с x_4, то в G имеется порождённый вершинами $x_1, y_2, z_2, y_3, z_3, x_2, x_3, \ldots, x_{i+1}$ подграф $T_{2,2,i}$. Если есть смежная с x_4 вершина z_k ($k \in \{2, 3\}$) (такая вершина единственна), то $y_k, z_k, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{i+4}$ порождают в G подграф $T_{2,2,i}$.

Итак, вершины y не существует. Это означает, что если G содержит порождённый подграф $T_{2,2,2}$, то каждая его вершина отстоит от x на расстояние не более чем $i + 2$. Значит,

$$|V(G)| \leqslant 1 + 3 + 3 \cdot 2 + \ldots + 3 \cdot 2^{i+1} = 3 \cdot 2^{i+2} - 2.$$

Поэтому связных графов из $\mathcal{D}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,i}\}) \setminus \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,2}\})$ при любом фиксированном i конечное число. Отсюда следует указанное в формулировке теоремы сведе́ние. Теорема 3 доказана.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 4. *При любом фиксированном i задача* НМ *для графов из класса $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,i}\})$ полиномиально разрешима.*

Доказательство. Из теорем 2 и 3 следует, что задача НМ для графов из $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,i}\})$ полиномиально сводится к той же задаче для графов из $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{A_{10}, A_{11}, \ldots\})$. В [4] показано, что при любом фиксированном k класс $\mathcal{P} \cap \mathcal{F}ree(\{A_k, A_{k+1}, \ldots\})$ НМ-прост. Поэтому при любом фиксированном i класс $\mathcal{P}(3) \cap \mathcal{F}ree(\{T_{2,2,i}\})$ тоже НМ-прост. Теорема 4 доказана.

Автор сердечно благодарит рецензента за внимание к работе, поддержку и некоторые полезные улучшения текста данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е., Малышев Д. С.** Классы планарных графов с полиномиально разрешимой задачей о независимом множестве // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 1. — С. 3–10.
2. **Малышев Д. С.** Граничные классы для задачи о независимом множестве в классе планарных графов // Вест. Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. — 2007. — № 6. — С. 165–168.
3. **Alekseev V. E.** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Appl. Math. — 2004. — Vol. 132. — P. 17–26.
4. **Alekseev V. E., Lozin V. V., Malyshev D. S., Millanic M.** The maximum independent set problem in planar graphs // Proc. Mathematical Foundations of Computer Science (Torun, August 25–29, 2008). — P. 96–107. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 5162).
5. **Lozin V. V., Millanic M.** Maximum independent sets in graphs of low degree // Proc. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms (New Orleans, January 7–9, 2007). — New Orlean: ACM–SIAM, 2007. — P. 874–880.

Малышев Дмитрий Сергеевич,
e-mail: dsmalyshev@rambler.ru

Статья поступила
10 ноября 2011 г.

Переработанный вариант —
19 ноября 2012 г.