Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.3, с. 1–27

УДК 518.9
ББК

ПРЕД N-ЯДРА В ИГРАХ С ОГРАНИЧЕННОЙ КООПЕРАЦИЕЙ*

Илья В.Кацев
Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН
191187 Санкт-Петербург, ул.Чайковского 1
e-mail: katsev@yandex.ru

Елена Б.Яновская
Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН
191187 Санкт-Петербург, ул.Чайковского 1
e-mail: eyanov@emi.nw.ru

Кооперативной игрой с ограниченной кооперацией называется тройка (N, v, Ω), где N – конечное множество игроков, $\Omega \subset 2^N, N \in \Omega$ – набор *допустимых* коалиций $v : \Omega \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция. Из этого определения следует, что если $\Omega = 2^N$, то игра $(N, v, \Omega) = (N, v)$ становится классической кооперативной игрой с трансферабельными полезностями (ТП). Рассматривается класс класс всех игр с ограниченной кооперацией $\mathcal{G}^r$ с произвольным *универсальным* множеством игроков. Пред n-ядро для игр из этого класса определяется так же, как и для классических ТП игр. Приводятся необходимые и достаточные условия на набор Ω, обеспечивающие существование и одноточечность пред n-ядра. Даются аксиоматические характеризации пред n-ядер для игр с коалиционными структурами и двумя типами допустимых коалиций в них.

©2010 И.В.Кацев, Е.Б.Яновская

* Работа поддержана грантом РФФИ 01-11-0411a

Ключевые слова: кооперативная игра, ограниченная кооперация, пред n-ядро, коалиционная структура .

1. Введение

Классические кооперативные игры с трансферабельными полезностями (ТП) (N, v) определяют характеристическую функцию v на множестве всех коалиций, т.е. подмножеств множества игроков N. Однако в реальности не все коалиции могут оброазоваться из-за различных политических, экономических, технических и даже психологических причин. Наиболее известные ситуации такого рода рассматривают в качестве возможных коалиций разбиения множества игроков, так что каждая коалиция разбиения считается допустимой. Далее возникает вопрос, какие еще коалиции могут считаться допустимыми: например, подмножества каждой коалиции разбиения и (или) объединения коалиций разбиения.

Таким образом, одним из основных разделов современной теории кооперативных игр следует назвать теорию игр с ограниченной кооперацией, в которой рассматриваются различные наборы допустимых коалиций, и разрабатывается теорий решений таких игр.

Разработка этой теории началась с игр с *коалиционной структурой*. В таких играх уже определены и охарактеризованы линейные решения [1],[8], зависящие от разбиения множества игроков. Однако характеристическая функция для таких игр определялась, как и в классическом случае, на множестве всех коалиций, хотя ее значения для недопустимых коалиций не участвовали в определении решения.

В данной статье предлагается другой подход. Рассматривается произвольный набор допустимых коалиций, и характеристическая функция определяется только на этом наборе. Формально,

Определение 1.1. *Игрой с* ограниченной кооперацией *называется набор* (N, v, Ω), *где* N *– конечное множество игроков,* $\Omega \subset 2^N, N \in \Omega$ *– набор* допустимых *коалиций,* $v : \Omega \to \mathbb{R}$ *– характеристическая функция.*

Из этого определения следует, что если $\Omega = 2^N$, то игра$(N, v, \Omega) = (N, v)$ становится классической ТП кооперативной игрой.

В параграфе 2 приводится краткий обзор известных результатов о решениях для игр с коалиционными структурами.

Так как известные результаты о решениях для игр с ограниченной кооперацией связаны с модификациями значения Шепли, в данной статье основное внимание уделяется пред n-ядру и пред k-ядру. В параграфе 3 рассматриваются игры с произвольным набором допустимых коалиций. Для них определяется пред n-ядро и приводятся необходимые и достаточные условия его существования и одноточечности. В параграфе 4 рассматриваются наборы допустимых коалиций, порожденные разбиениями множества игроков. Для таких игр определяются две двухшаговые модификации пред n-ядра с применением подходов Оуэна [8] и Камийо [3] для соответствующих модификаций значения Шепли. Для указанных решений приводятся их аксиоматические характеризации.

2. Краткий обзор результатов для игр с ограниченной кооперацией

Следует отметить, что существуют различные подходы к исследованию решений для игр с ограниченной кооперацией. Это различие обусловлено самими определениями классических ТП игр и игр с ограниченной кооперацией. Действительно, если классическая ТП игра (N, v) определяется характеристической функцией $v : 2^N \to \mathbb{R}$, определенной на множестве всех коалиций, то для игр с ограниченной кооперацией только игрокам из коалиций, принадлежащих $\Omega \subsetneq 2^N$, разрешено вступать в коалиции. Следовательно, возникает два основных вопроса при исследовании игр с ограниченной кооперацией:

1. Возможно ли рассматривать произвольные наборы допустимых коалиций?

2. Возможно ли использовать значения характеристической функции на недопустимых коалициях (если таковые заданы) для определения решения игры?

Рассмотрим различные ответы, имеющиеся в литературе, на эти вопросы. Что касается ответа на первый вопрос, то он, в основном, связан либо с практическими ситуациями, в которых допустимые наборы коалиций определяются из их содержания – например, разбиения игроков на коалиции предполагают участие каждого игрока только в одной коалиции – или с технической стороной вопроса, выбираются наборы коалиций, которые проще для анализа.

Одной из первых работ в этом направлении является известная статья Майерсона [6]. В ней он рассматривает набор допустимых коалиций, порожденный связными подмножествами *графа коммуникаций*, вершинами которого являются игроки. Для такого класса игр Майерсон определил и охарактеризовал значение (значение Майерсона), являющееся обобщением значения Шепли. При этом значения характеристической функции на недопустимых коалициях участвовали в определении решения игры с ограничениями.

Другим хорошо известным обобщением значения Шепли является значение Оуэна [8] для игр с коалиционными структурами. Допустимыми коалициями в такой структуре являются коалиции разбиениям, подмножества отдельных коалиций разбиения, и объединения коалиций разбиения с не более чем одним подмножеством коалиции разбиения.

Каждая из этих работ рассматривает только некоторые конкретные структуры допустимых коалиций. Кроме того, в них определялись и исследовались только одноточечные решения (значения).

Что касается многозначных решений, то таких работ очень немного. Ллерена [5] определил c-ядро для игр с ограниченной кооперацией. Райнирс и Поттерс [11] определили $\mathcal{B}$-n-ядро для игр с ограниченной кооперацией (N, v, Ω), где $\mathcal{B} = \Omega$ как подмножество множества дележей, на которых достигается лексикографический минимум упорядоченных по убыванию векторов эксцессов, где эти векторы определялись на пространстве $\mathbb{R}^{|\mathcal{B}|}$. Так как множество дележей ограничено, для игр с непустым множеством дележей n-ядро не пусто как для классических ТП игр, так и для игр с ограниченной кооперацией. В статье [11] были найдены условия на набор допустимых коалиций, при которых n-ядро ТП игры совпадает с n-ядром ограниченной игры $(N, v, \mathcal{B})$.

С пред n-ядром связано другое решение ТП игр: пред k-ядро. Если пред n-ядро является одноточечным, то пред л-ядро является многозначным, более того, оно является наибольшим по включению из всех решений, удовлетворяющих свойствам эффективности, симметрии, ковариантности и согласованности [9], т.е. всем тем аксиомам, которые, вместе с одноточечностью, характеризуют пред n-ядро на классе ТП игр с бесконечным универсальным множеством игроков.

Поэтому в статье определяются оба этих решения применительно к играм с ограниченной кооперацией. В параграфе 2 приводятся необходимые и достаточные условия существования и одноточечности пред n-ядра для игр с ограниченной кооперацией установление необходимых и достаточных условий их существования и одноточечности пред n-ядра В параграфе 3 дается модификация некоторых свойств решений для случая игр с ограниченной кооперацией и с их помощью приводится аксиоматическая характеризация пред n-ядра. В параграфе 4 эти же задачи (кроме одноточечности решения) решаются для пред k-ядра игр с ограниченной кооперацией.

3. Игры с ограниченной кооперацией и их пред n-ядра

Рассмотрим произвольное множество $\mathcal{N}$, которое назовем *универсальным множеством* игроков. Обозначим через, $\mathcal{G}^r$ класс всех ТП игр с ограниченной кооперацией, множества игроков которых содержатся в $\mathcal{N}$:

$$(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^r \implies N \subset \mathcal{N},$$

а через $\mathcal{G}^r_N \subset \mathcal{G}^r$ – подкласс игр с фиксированным множеством игроков N.

Для вектора $x \in \mathbb{R}^N$ и коалиции $S \subset N$ будем использовать традиционное обозначение $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$.

Множество *допустимых векторов выигрышей* игры (N, v, Ω) в случае $N \subset N$ определяется, как и для обычных ТП игр, формулой

$$X(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, x(N) \leq v(N)\},$$

а множество эффективных векторов выигрышей как

$$X^*(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, x(N) = v(N)\}.$$

Очевидно, эти множества совпадают с соответствующими множествами для ТП игр (N, w), для которых $v(N) = w(N)$.

Эксцессом коалиции $S \in \Omega$ относительно вектора выигрышей x называется разность $e(S, x, v) = v(S) - x(S)$, которую будем обозначать также короче через $e(S, x)$, если характеристическая функция v фиксирована. Вектор $e(x) = \{e(S, x, v)\}_{S \in \Omega}$ называется *вектором эксцессов.*

Определение 3.1. Решением *для класса игр* $\mathcal{C}_N^r \subset \mathcal{G}_N^r$ *называется отображение* $\sigma : \mathcal{C}_N^r \rightarrow 2^{\mathbb{R}^N}$, *сопоставляющее каждой игре* $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}_N^r$ *множество* $\sigma(N, v, \Omega) \subset X(N, v)$.

Через $\theta(x) \in \mathbb{R}^{2^N}$ обозначим вектор, компоненты которого совпадают с компонентами вектора $e(x)$, но расположенными в порядке убывания:

$$\theta^t(x) = \max_{\substack{\mathcal{T} \subset \Omega \\ |\mathcal{T}| = t}} \min_{S \in \mathcal{T}} e(S, x). \tag{3.1}$$

Будем использовать для этого вектора также обозначение $\theta_v(x)$, если необходимо указать соответствующую характеристическую функцию в определении вектора эксцессов.

Пусть $\geq_{lex}$ – отношение лексикографического упорядочения в произвольном векторном пространстве $\mathbb{R}^m$:

$$x \geq_{lex} y \iff x = y \text{ или } \exists 1 \leq k \leq m, \text{ такое что } x_k = y_k \text{ и } x_i > y_i \text{ для } i < k.$$

Определение 3.2. Пред n-ядром $PN(N, v, \Omega)$ *игры* (N, v, Ω) *называется множество минимальных векторов эксцессов относительно лексикографического упорядочения в множестве эффективных векторов выигрышей :*

$$x \in PN(N, v, \Omega) \iff \theta(y) \geq_{lex} \theta(x)) \text{ для всех } y \in X^*(N, v). \tag{3.2}$$

В этом определении пред n-ядро предполагается многозначным решением. Действительно, для "малых"наборов допустимых коалиций Ω оно оказывается многозначным и даже может не существовать. Например, для игры трех лиц с $N = \{1, 2, 3\}$ и набором допустимых коалиций $\Omega = \{1, 2\}, \{2, 3\}$ для любой характеристической функции v не существует вектора

x, удовлетворяющего отношению (3.2), так как минимум $\max\{e(\{1,2\},x), e(\{2,3\},x)\}$ не достигается на множестве $x \in X^*(N,v,\Omega)$ ввиду того, что максимум из приведенных двух величин стремится в минус бесконечности при $x_2 \to +\infty$, $x_1, x_3 \to -\infty$.

Если же пред n-ядро игры (N,v,Ω) не пусто, то из его определения 3.2 следует, что множество $PN(N,v,\Omega)$ выпукло, т.е. пред n-ядро является *выпуклозначным.*

Основной целью данного параграфа является характеризация наборов Ω допустимых коалиций, гарантирующих существование и одноточечность пред n-ядра.

Для этого мы будем пользоваться известной теорему Колберга, дающую комбинаторную характеризацию пред n-ядра для ТП игр.

Напомним, что пред n-ядро ТП игр одноточечно, и $x = PN(N,v)$, если вектор удовлетворяет отношению (3.2), где в определении (3.1) вектора $\theta(x)$ набор Ω заменялся набором всех подмножеств множества N.

Набор коалиций $\mathcal{S}$ множества N называется *сбалансированным*, если существуют такие положительные числа $\lambda_S > 0$ для $S \in \mathcal{S}$, что $\sum\limits_{\substack{S \in \mathcal{S}\\ S \ni i}} \lambda_S = 1$ для всех $i \in N$.

Теорема 3.1 (Kohlberg [3]). *] Для того чтобы вектор выигрышей $x \in X^*(N,v)$ ТП игры (N,v) являлся ее пред n-ядром, $x = PN(N,v)$, необходимо и достаточно, чтобы наборы коалиций*

$$\mathcal{B}_\alpha(x,v) = \{S \subset N \,|\, e(S,x) \geq \alpha\}, \tag{3.3}$$

были пусты или сбалансированы для каждого числа α.

Эта теорема допускает непосредственное обобщение на класс игр с ограниченной кооперацией.

Предложение 3.1. *Для того чтобы вектор $x \in X^*(N,v)$ игры $(N,v,\Omega) \in \mathcal{G}^r$ с ограниченной кооперацией принадлежал ее пред n-ядру, $x \in PN(N,v,\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы наборы коалиций*

$$\mathcal{B}_\alpha(x,v,\Omega) = \{S \in \Omega \,|\, e(S,x) \geq \alpha\}, \tag{3.4}$$

были пусты или сбалансированы для всех чисел α.

Доказательство этого утверждения полностью совпадает с доказательством теоремы Колберга 3.1.

Следующая лемма будет необходима для доказательства основной теоремы этого параграфа, которая дает необходимые и достаточные условия на набор Ω, обеспечивающие существование пред n-ядра для игр с ограниченной кооперацией.

Лемма 3.1. *Пусть* (N, v) *– произвольная ТП игра,* $x \in X^*(N, v)$*- ее эффективный вектор выигрышей,* $\alpha^* \in \mathbb{R}$. *Если для любого* $\alpha \geq \alpha^*$ *набор* $\mathcal{B}_\alpha(x, v)$ *сбалансирован, то для любого* $\alpha \geq \alpha^*$

$$\mathcal{B}_\alpha(x, v) = \mathcal{B}_\alpha(\nu, v),$$

где ν *– пред n-ядро игры* (N, v).

Доказательство. Пусть β – максимальное число, для которого $\mathcal{B}_\beta(x, v) \neq \mathcal{B}_\beta(\nu, v)$. Из определения пред n-ядра следует, что

$$\mathcal{B}_\beta(x, v) \setminus \mathcal{B}_\beta(\nu, v) \neq \emptyset.$$

Сравним эксцессы коалиций из наборов $\mathcal{B}_\beta(x, v)$ относительно векторов x и ν.

Если $S \in \mathcal{B}_\beta(x, v) \cap \mathcal{B}_\beta(\nu, v)$, то $e(S, x) = e(S, \nu)$.

Если $S \in \mathcal{B}_\beta(x, v) \setminus \mathcal{B}_\beta(\nu, v)$, то $e(S, x) = \beta$ и $e(S, \nu) < \beta$, так как $S \notin \mathcal{B}_\alpha(\nu, v)$ для $\alpha \geq \beta$.

Следовательно, для некоторых коалиций из $\mathcal{B}_\beta(x, v)$ эксцессы относительно x и ν совпадают, а для остальных коалиций из $\mathcal{B}_\beta(x, v)$ эксцессы относительно x строго больше эксцессов относительно ν, что противоречит сбалансированности набора $\mathcal{B}_\beta(x, v)$. Поэтому $\beta < \alpha^*$. □

Теперь можно сформулировать основную теорему:

Теорема 3.2. *Для того чтобы пред n-ядро* $PN(N, v, \Omega)$ *игры* $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_N^r$ *было не пусто, необходимо и достаточно, чтобы набор* Ω *был сбалансирован.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что набор Ω не является сбалансированным. Тогда для любого вектора $x \in X^*(N, v)$

существует такое решение системы

$$\begin{cases} y(S) & \le & x(S), \quad S \in \Omega, \\ y(N) & = & x(N) \end{cases}, \tag{3.5}$$

что для некоторой коалиции $S \in \Omega \quad y(S) < x(S)$. Это значит, что выполняется отношение

$$\theta(x) \ge_{lex} \theta(y),$$

откуда следует, что $x \neq PN(N, v, \Omega)$. Так как вектор $x \in X^*(N, v)$ был выбран произвольно, получаем, что $PN(N, v, \Omega) = \emptyset$.

Достаточность. Пусть набор Ω сбалансирован.

Для произвольного числа A определим ТП игру (N, w_A) со следующей характеристической функцией:

$$w_A(S) = \begin{cases} v(S) & S \in \Omega \\ A & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Обозначим пред n-ядро игры (N, w_A) через $x_A = PN(N, w_A)$.

Для любого числа A рассмотрим набор коалиций

$$\mathcal{B}_A = \{S \in \Omega \,|\, e(S, x_A, w_A) > \max_{T \notin \Omega} e(T, x_A, w_A)\},$$

Покажем, что найдется число A, для которого $|\mathcal{B}_A| = |\Omega|$.

Обозначим через A_0 число, удовлетворяющее равенству $|\mathcal{B}_{A_0}| = \max_A |\mathcal{B}_A|$.

Для ТП игры (N, w_A) и для каждого сбалансированного набора $\mathcal{S}$ коалиций из N пусть $\{\lambda_S\}_{S \in \mathcal{S}}$ – набор соответствующих этим наборам веса. Для эффективного вектора $x \in X^*(N, w)$ обозначим через $e_{w_A}(x, \mathcal{S})$ взвешенные средний эксцесс коалиций из $\mathcal{S}$:

$$e_{w_A}(x, \mathcal{S}) = \frac{\sum\limits_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S e(x, S)}{\sum\limits_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S},$$

где числа λ_S соответствуют сбалансированному набору $\mathcal{S}$.

Нетрудно видеть, что эксцессы $e_{w_A}(x, \mathcal{S})$ не зависят от x,

При $A \to -\infty$ значения $e_{w_A}(x, S)$ убывают для $S \in \mathcal{S} \not\subset \Omega$, и не изменяются для $S \in \mathcal{S} \subset \Omega$.

Так как число сбалансированных наборов конечно, существует такое число A_1, для которого

$$e_{w_{A_1}}(x,S) < \min_{S\in\Omega} e_{w_{A_1}}(x_{A_0},S)) \qquad (3.6)$$

для любого сбалансированного набора $\mathcal{S} \not\subset \Omega$.

Предположим, что $|\mathcal{B}_{A_0}| < |\Omega|$.

Покажем, что для любой коалиции $S \in \mathcal{B}_{A_0}$

$$e(S,x_{A_0},w_{A_1}) = e(S,x_{A_1},w_{A_1}) \qquad (3.7)$$

. Если набор $\mathcal{B}_{A_0}$ является пустым, то это равенство верно.

Для того чтобы рассмотреть случай $\mathcal{B}_{A_0} \neq \emptyset$, сначала введем обозначение

$$e_1 = \min_{S\in\mathcal{B}_{A_0}} e(S,x_{A_0},w_{A_0}).$$

По определению игры (N,w_{A_1}) для любой коалиции $S \in \mathcal{B}_{A_0}$ справедливо равенство $e(S,x_{A_0},w_{A_0}) = e(S,x_{A_0},w_{A_1})$. Для любой коалиции $T \not\in \mathcal{B}_{A_0}$ выполняется равенство $e(T,x_{A_0},w_{A_0}) \geq e(T,x_{A_0},w_{A_1})$. Поэтому для любого $a \geq e_1$ набор
$\{S\subset N \,|\, e(S,x_{A_0},w_{A_1}) \geq a\}$ сбалансирован.

По Лемме 3.1 для любого $a \geq e_1$ справедливо равенство

$$\{S\in N \,|\, e(S,x_{A_0},w_{A_1}) \geq a\} = \{S\subset N \,|\, e(S,x_{A_1},w_{A_1}) \geq a\},$$

из которого следует равенство

$$e(S,x_{A_0},w_{A_1}) = e(S,x_{A_1},w_{A_1}) \text{ for all } S\in\mathcal{B}_{A_0}, \qquad (3.8)$$

и равенство (3.7) доказано.

Рассмотрим теперь эксцессы коалиций из набора $\Omega \setminus \mathcal{B}_{A_0}$. Обозначим

$$e_2 = \min_{S\in\Omega\setminus\mathcal{B}_{A_0}} e(S,x_{A_0},w_{A_0}), \qquad (3.9)$$

и рассмотрим следующий набор:

$$\mathcal{C} = \{S\subset 2^N\setminus\mathcal{B}_{A_0} \,|\, e(S,x_{A_1},w_{A_1}) = \max_{T\subset 2^N\setminus\mathcal{B}_{A_0}} e(T,x_{A_1},w_{A_1})\}. \qquad (3.10)$$

Если $\mathcal{C}\subset\Omega$, то мы получаем невозможное неравенство $|\mathcal{B}_{A_1}| > |\mathcal{B}_{A_0}|$.

Если же $\mathcal{C} \not\subset \Omega$, то по (3.6) и (3.9) взвешенный средний эксцесс коалиций из набора $\mathcal{C} \cup \mathcal{B}_{A_0}$ оказывается меньше, чем e_2.

Следовательно, по (3.8)

$$e(S, x_{A_1}, w_{A_1}) < e_2 \text{ для любой коалиции } S \in 2^N \setminus \mathcal{B}_{A_0}. \tag{3.11}$$

Теперь сравним эксцессы $e(S, x_{A_1}, w_{A_1})$ и $e(S, x_{A_0}, w_{A_1})$ для $S \in \Omega \setminus \mathcal{B}_{A_0}$.

Для таких коалиций справедливы неравенства

$$\begin{aligned} e(S, x_{A_1}, w_{A_1}) &< e_2 \quad \text{по (3.11)}, \\ e(S, x_{A_0}, w_{A_1}) &\geq e_2 \quad \text{по (3.9)}, \end{aligned}$$

которые, вместе с равенствами (3.8), противоречат сбалансированности набора Ω. Это противоречие не имеет места только если набор $\Omega \setminus \mathcal{B}_{A_0} = \emptyset$, что означает справедливость неравенств

$$e(S, x_{A_0}, w_{A_0}) \geq e(T, x_{A_0}, w_{A_0}) \text{ для всех } S \in \Omega, T \notin \Omega,$$

откуда по Утверждению 1 мы получаем $x_{A_0} \in PN(N, v, \Omega)$. □

Следовательно, при исследования пред n-ядер мы можем рассматривать только класса $\mathcal{G}_b^r \subset \mathcal{G}^r$ игр с ограниченной кооперацией, для которых наборы допустимых коалиций Ω сбалансированы.

Приведем теперь условие на набор Ω, обеспечивающее одноточечность пред n-ядра. Этот случай представляет несомненный интерес, так как пред n-ядро для классических кооперативных игр зависит не более чем от $2n - 2$ значений характеристической функции. Остальные значения оказываются несущественными, так как соответствующие им эксцессы меньше эксцессов, определяющих одноточечное пред n-ядро. Следовательно, классическое пред n-ядро можно рассматривать как одноточечное пред n-ядро некоторой игры с ограничениями. Таким образом, пред n-ядро игр с ограниченной кооперацией оказывается более общим решением, чем оно же для классических кооперативных игр.

Приведем необходимые и достаточные условия одноточечности пред n-ядра для игр с ограниченной коопераицей.

Для этого сначала приведем некоторые обозначения. Для конечного множества N и его подмножества $S \subset N$, через χ_S обозначим характеристический вектор коалиции S: $\chi_i(S) = 1$, если $i \in S$ и $\chi_i(S) = 0$ в остальных случаях. Для произвольного набора коалиций $\mathcal{S}$ рассмотрим матрицу $||\mathcal{S}|| = ||\chi_S||, S \in \mathcal{S}$ размера $|\mathcal{S}| \times |N|$ Тогда будем говорить, что набор $\mathcal{S}$ имеет *ранг* m, если ранг матрицы $||\mathcal{S}||$ равен m.

Теорема 3.3. *Для того чтобы пред n-ядро $PN(N, v, \Omega)$ игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_b^r$ с ограниченной кооперацией было одноточечным, необходимо и достаточно, чтобы набор Ω был сбалансирован и имел ранг $n = |N|$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x = PN(N, v, \Omega)$. Предположим, что ранг набора Ω меньше n. Тогда система линейных уравнений с неизвестными y

$$\begin{cases} y(S) &=& x(S), \quad S \in \Omega, \\ y(N) &=& v(N) \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений, и все они должны принадлежать пред n-ядру $PN(N, v, \Omega)$, что противоречит его одноточечности.

Достаточность. Пусть набор Ω сбалансирован и имеет ранг n. Тогда пред n-ядро $PN(N, v, \Omega) \neq \emptyset$ по Теореме 3.2. Предположим, что найдутся 2 вектора $x \neq y$, принадлежащих пред n-ядру: $x, y \in PN(N, v, \Omega)$. Легко видеть, что из $e(x) \neq e(y)$ следует

$$\begin{cases} \theta(x) &\geq_{lex} \theta(\frac{x+y}{2}), \\ \theta(y) &\geq_{lex} \theta(\frac{x+y}{2}), \end{cases}$$

и x и y не принадлежат пред n-ядру. Следовательно, $x(S) = y(S)$ для любой коалиции $S \in \Omega$, и y является решением следующей системы с неизвестными $z \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{cases} z(S) &=& x(S) \quad \text{для всех } S \in \Omega, \\ z(N) &=& v(N). \end{cases}$$

Так как набор Ω имеет ранг n, эта система имеет единственное решение $z = x$. Следовательно, $y = x$, и пред n-ядро $PN(N, v, \Omega)$ одноточечно. $\square$

Следствие 3.1. *Если набор коалиций Ω множества $N, |N| = n$ сбалансирован и имеет ранг n, то для любого набора $\mathcal{T}$, $\mathcal{T} \cap \Omega = \emptyset$ их объединение $\Omega \cup \mathcal{T}$ также сбалансировано и имеет ранг n .*

Доказательство. Сбалансированность набора $\Omega \cup \mathcal{T}$ следует из леммы 6.1.2 монографии [10], а ранг набора не убывает с его увеличением. □

Приведем пример, иллюстрирующий теоремы 3.2 и 3.3.

Пример 3.1. Рассмотрим следующую игру (N, v, Ω): $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $\Omega = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, N\}$,

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } S \in \Omega \setminus \{N\}, \\ 2, & \text{если } S = N. \end{cases}$$

Набор Ω сбалансирован и имеет ранг 3. Пред n-ядро $PN(N, v, \Omega) = \{x \in X^*(N, v) \,|\, x_i + x_{i+1} = 1, i = 1, 2, 3, 4\}$ (здесь $x_5 = x_1$). Добавим к набору Ω коалицию $A_1 = \{1\}$, и пусть $v(\{1\}) = 1$. Тогда набор $\Omega \cup \{A_1\}$ не сбалансирован и пред n-ядро пусто, так как второй по величине эксцесс в игре $(N, v, \Omega \cup \{A_1\})$ не достигается при $x_1 \to \infty$.

Если же мы добавим еще одну коалицию $A_2 = \{2\}$ к набору Ω, то набор $\Omega \cup \{A_1\} \cup \{A_2\}$ станет сбалансированным с рангом 4. Положим $v(\{2\}) = 1$. Тогда пред n-ядро $PN(N, v, \Omega \cup \{A_1\} \cup \{A_2\})$ одноточечно:

$$PN(N, v, \Omega \cup \{A_1\} \cup \{A_2\}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

4. Свойства пред n-ядра для игр с ограниченной кооперацией

Приведем в этом параграфе основные свойства пред n-ядра для игр с ограниченной кооперацией и сравним их с аналогичными свойствами классического пред n-ядра.

Определение 4.1. Решение σ для произвольного класса $\mathcal{C}^r$ игр с ограниченной кооперацией *эффективно,*если для любой игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}^r$ и любого вектора $x \in \sigma(N, v, \Omega)$ $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.

Определение 4.2. Решение σ для произвольного класса $\mathcal{C}^r$ игр с ограниченной кооперацией *ковариантно относительно* *стратегических преобразований,*если для любой игры (N, b, Ω) и любых чиселα $\alpha > 0$ и векторов $\beta \in \mathbb{R}^N$ игра $(N, \alpha v + \beta, \Omega) \in \mathcal{C}^r$ и

$$\sigma(N, \alpha v + \beta) = \alpha\sigma(N, v) + \beta,$$

где для каждой коалиции $S \in \Omega \quad (\alpha v + \beta)(S) = \alpha v(S) + \sum_{i \in S} \beta_i$.

Определение 4.3. Решение σ для произвольного класса $\mathcal{C}^r$ игр с ограниченной кооперацией *анонимно,*если для любой игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}^r$ и отображения $\pi : N \to \mathcal{U}$, такого что $(\pi N, \pi v, \pi\Omega) \in \mathcal{C}^r$, справедливо равенство $\sigma(\pi N, \pi v, \pi\Omega) = \pi(\sigma(N, v, \Omega))$. Здесь функция πv определяется равенствами $\pi v(\pi S) = v(S)$ для всех $S \subset N$ и $\pi\Omega = \{S \subset \pi N \,|\, \pi^{-1} S \in \Omega\}$.

Для игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^r$, игроки $i, j \in N$ называются *взаимозаменяемыми*, если

$$S \cup \{i\} \in \Omega \iff S \cup \{j\} \in \Omega$$

для всех $S \subset N$, и $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ для $S \cup \{i\}, S \cup \{j\} \in \Omega$.

Определение 4.4. Решение σ для класса $\mathcal{C}^r$ удовлетворяет свойству *равной взаимозаменяемости* [1], если для любых игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}^r$ и вектора $x \in \sigma(N, v, \Omega)$ справедливо равенство $x_i = x_j$, для взаимозаменяемых игроков i, j.

Игрок $i \in N$ в игре (N, v, Ω) называется *болваном,* если для любой коалиции $S \subset \Omega$, такой что $S \cup \{i\} \in \Omega$ $x_i = v(\{i\})$ для любого вектора $x \in \sigma(N, v, \Omega)$.

Определение 4.5. *Решение σ для класса $\mathcal{C}^r$ удовлетворяет* свойству болвана, если для любой игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}^r$ и вектора $x \in \sigma(N, v, \Omega)$ $x_i = v(\{i\})$ для любого болвана $i \in N$ игры (N, v, Ω).

Определение 4.6. *Решение σ для класса $\mathcal{C}^r$* согласовано в определении Дэвиса–Машлера [2][2], если для любых игры $(N, v, \Omega) \in$

---

[1]иногда это свойство – equal treatment property (ETP) – называют симметрией, однако последнее свойство означает свойство означает ковариантность решения относительно всех симметричных преобразований игры [**?**]

[2]Для игр с ограниченной кооперацией это определение согласованности было предложено Ллерена [5] для характеризации с-ядра.

$\mathcal{C}^r$ и коалиции $S \subset N$ из $x \in \sigma(N, v, \Omega)$ следует, что редуцированная игра $(S, v_S^x, \Omega_S) \in \mathcal{C}^r$ и $x_S \in \sigma(S, v_S^x, \Omega_S)$, где $\Omega_S = \{T \subset S \,|\, \exists Q \subset N \setminus S, S \cup Q \in \Omega\}$,

$$v_S^x(T) = \begin{cases} v(N) - x(N \setminus S), & \text{если } T = S, \\ \max_{\substack{Q \in N \setminus S \\ N \cup Q \in \Omega}} v(T \cup Q) - x(Q), & \text{если } T \subsetneq S. \end{cases} \tag{4.1}$$

Из данного определения следует, что согласованность в смысле Дэвиса–Машлера корректно определена для решений игр с ограниченной кооперацией. Действительно, для игры с ограниченной кооперацией (N, v, Ω) набор $\Omega_{N\setminus\{i\}}$ допустимых коалиций для редуцированной игры на множество игроков $N \setminus \{i\}$ состоит из коалиций $S \subset N \setminus \{i\}$, для которых либо $S \in \Omega$, либо $S \cup \{i\} \in \Omega$, или же $S, S \cup \{i\} \in \Omega$. В любом случае Определение 4.6 дает соответствующее значение характеристической функции редуцированной игры.

Предложение 4.1. *Пред n-ядро для класса $\mathcal{G}_b^r$ эффективно, анонимно, ковариантно и согласовано в смысле Дэвиса–Машлера.*

Доказательство. Свойства эффективности, анонимности, ковариантности и болвана очевидны, они следуют из определения пред n -ядра для игр с ограниченной кооперации и наличия этих же свойств у классического пред n-ядра.

Проверим согласованность пред n-ядра.

Пусть $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_b^r$ – произвольная игра с ограниченной кооперацией, $x \in PN(N, v, \Omega)$. Тогда по Теореме 3.2 набор $\mathcal{B}_\alpha(x, v, \Omega)$ является пустым или согласованным для всех α. Для произвольной коалиции $S \subset N$ набор Ω_S также сбалансирован, и редуцированная игра (S, v_S^x, Ω_S) на множество игроков S относительно вектора x принадлежит классу $\mathcal{G}_b^r$. Кроме того, из сбалансированность наборов $\mathcal{B}_\alpha(x, v, \Omega)$ на множестве N следует сбалансированность набора $\mathcal{B}_\alpha(x_S, v_S^x, \Omega_S)$ на S. По Теореме 3.2 мы получаем $x_S \in PN(S, v_S^x, \Omega_S)$.

□

5. Пред n-ядро в играх с коалиционной структурой

Простейшей моделью ограниченной кооперацией является та, в которой каждый игрок может участвовать только в одной коалиции.

Тогда набор допустимых коалиций образует разбиение множества игроков. Соответствующие таким наборам игры называются *кооперативными играми с коалиционными структурами (играми с КС).*

Впервые такие игры были рассмотрены Ауманом и Дрезом [1], и далее Оуэном [8]. Каждая такая игра задается набором $(N, v, \mathcal{B})$, где N – множество игроков, $v : 2^N \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция, $\mathcal{B} = (B_1, ..., B_k)$ – разбиение множества игроков N.

Заметим, что в этом определении характеристические функции определялись так же, как и для классических кооперативных играх, на множестве всех коалиций. Поэтому решения для игр с с КС определялись так же, как и для классических кооперативных игр , но с учетом разбиения игроков как первого уровня кооперации. Наиболее известным значением для игр с КС является значение Оуэна , которое является обобщением значения Шепли для рассматриваемого класса игр.

Для каждой игры $(N, v, \mathcal{B})$ с КС значение Оуэна предписывает каждому игроку его средний маргинальный вклад по всем равновероятным перестановкам множества игроков, не дробящим коалиции разбиения. Из такого описания выигрышей игроков в значении Оуэна ясно, что они зависят только от значений характеристической функции $v(S)$ для коалиций S вида

$$S = \bigcup_{\substack{j\in J\\ J\subset\{1,\ldots,k\}}} B_j \cup T, \text{ где } T \subset B_i, i \notin J. \tag{5.1}$$

Поэтому значение Оуэна можно рассматривать как решение для класса игр с ограниченной кооперацией, в которых наборы допустимых коалиций $\Omega = \Omega(\mathcal{B})$ порождаются разбиениями : $S \in \Omega \;\leftrightarrow\; S$ удовлетворяет (5.1).

Другой модификацией значения Шепли для игр с КС является значение Камийо [3], определяемое для каждой игр с КС $(N, v, \mathcal{B})$ в два этапа. На первом шаге определяется значение Шепли *внешней* игры $(\mathcal{B}, v)$, игроками которой являются коалиции разбиения, а характеристическая функция порождается характеристической функцией исходной игры.

На втором шаге находятся значения Шепли *внутренних игр,* т.е.

под-игр $(B_j, v), j = 1, ..., k$, в которых значения больших коалиций $v(B_j)$ заменяются соответствующими значениями Шепли игроков B_j, найденными на первом шаге. Так как каждый игрок исходной игры принадлежит ровно одной коалиции разбиения, набор значений всех внутренних игр определяет вектор выигрышей всех игроков, который и называется значением Камийо.

Заметим, что значение Камийо зависит от еще меньшего, чем значение Оуэна, числа значений $v(S)$ характеристической функции v, а именно, от

$$S \subset B_i, i = 1, ..., k \text{ или } S = \bigcup_{j \in J \subset \{1,...,k\}} B_j. \tag{5.2}$$

Значение Шепли в решениях Оуэна и Камийо можно заменить любым другим значением для классических кооперативных игр. Для каждого из них приведенные выше определения дадут новые значения для игр с КС. Для этого, как было указано выше, не нужно задавать значения характеристической функции на всех коалициях, достаточно задать их на наборах $\Omega \subset 2^N$ допустимых коалиций, определяемых соответственно, в (5.1),(5.2).

В этом параграфе мы рассмотрим соответствующие значениям Оуэна и Камийо значения для игр с КС, в определениях которых вместо значения Шепли используется пред n-ядро. Эти значения сравниваются с пред n-ядром для игр с ограниченной кооперацией, определенным в предыдущем параграфе.

5.1. Пред n-ядро типа Оуэна для игр с коалиционными структурами

Пусть $(N, v, \mathcal{B})$ – произвольная игра с КС. Как уже указывалось в преамбуле данного параграфа, известные обобщения значения Шепли на игры с КС зависят не от всех значений характеристической функции v, но от значений некоторых коалиций, порожденных КС $\mathcal{B}$.

Коалиционная структура $\mathcal{B}$ может порождать различные наборы допустимых коалиций $\Omega(\mathcal{B})$, поэтому обозначение такой игры посредством тройки $(N, v, \mathcal{B})$ не определяет игру однозначно. Поэтому в данном параграфе под *игрой с коалиционной структурой* мы будем понимать тройку $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, где $\Omega(\mathcal{B})$ – некоторый набор коалиций, порожденный разбиением $\mathcal{B}$, т.е. такой, что все коалиции разбиения и их объединения принадлежат этому набору, $v : \Omega(\mathcal{B}) \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция. Будем также предполагать, что все подкоалиции коалиций разбиения $B_1, ..., B_k$ также принадлежат набору $\Omega(\mathcal{B})$.

Внешней игрой игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ называется игра $(\mathcal{B}, v^*)$, в которой игроками являются коалиции разбиения $\mathcal{B}$, а характеристическая функция определяется следующим образом:

$$v(\mathcal{B}') = v\left(\bigcup_{B\in\mathcal{B}'} B\right)$$

где $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$.

Внешние игры определяются одинаково для всех игр с КС, так как они зависят только от коалиций вида $\bigcup_{j\in J} B_j, J \subset \{1, ..., k\}$, которые по определению являются допустимыми для любой игры с КС.

Далее в этом пункте мы будем рассматривать наборы допустимых коалиций $\Omega(\mathcal{B})$, определяемых равенством

$$\Omega(\mathcal{B}) = \{S \subset B_j, j = 1, ..., k, \text{ и } \bigcup_{j\in J} B_j \cup S, J \subset \{1, ..., k\}, S \subset B_i, i \notin J\}. \tag{5.3}$$

Построим *внутренние игры* $(B_i, v_i^{PN}), i = 1...k$ для игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ следующим образом.

Для нахождения характеристической функции v_i^{PN} для каждой коалиции $S \subset B_i$ рассмотрим множество игроков $N_S = \bigcup_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} B_j \cup S$ и игру с КС $(N_S, v, \Omega(\mathcal{B}^S))$ для разбиения $\mathcal{B}^S = (B_1, ..., B_{i-1}, S, B_{i+1}, ..., B_k)$, отличающегося от $\mathcal{B}$ заменой B_i на S. Характеристическая функция этой игры порождается характеристической функцией исходной игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, поэтому для простоты мы обозначаем ее также буквой v.

Положим $v_i^{PN}(S) = PN_i(\mathcal{B}^S, v^*)$, где $(\mathcal{B}^S, v^*)$ внешняя игра игры $(N_S, v, \mathcal{B}^S)$. Так как $i = 1, ..., k$ и $S \subset B_i$ были выбраны произвольно, все внутренние игры определены.

Пусть $x_{B_i} = PN(B_i, v_i^{PN})$. Тогда вектор $(x_{B_1}, ..., x_{B_k}) \in X^*(N, v)$. Назовем его *пред n-ядром типа Оуэна* или *коалиционным пред n-ядром* игры с КС $(N, v, \mathcal{B})$:

$$PN^{Ow}(N, v, \mathcal{B}) = (PN(B_1, v_1^{PN}), ..., PN(B_k, v_k^{PN})).$$

Далее при исследовании свойств коалиционного пред n-ядра для простоты будем обозначать внутренние игры через (B_i, v^i).

Приведем определения некоторых свойств одноточечных решений (значений) для игр с КС. Через $\mathcal{C}^{cs}$ обозначим произвольный класс игр с КС.

Определение 5.1. *Значение φ для класса $\mathcal{C}^{cs}$ называется* внешне симметричным, если для любой игры $(N, v, \mathcal{B}) \in \mathcal{C}^{cs}$, такой что в ее внешней игре $(\mathcal{B}, v^*)$ игроки B_j и B_l $j, l = 1, ..., k$ взаимозаменяемы, то $\sum_{i \in B_j} \varphi_i(N, v, \mathcal{B}) = \sum_{i \in B_l} \varphi_i(N, v, \mathcal{B})$.

Определение 5.2. *Значение φ для класса $\mathcal{C}^{cs}$ называется* внутренне симметричным, если для любой игры $(N, v, \mathcal{B}) \in \mathcal{C}^{cs}$, в которой игроки $i, j \in B_l$ взаимозаменяемы во внутренней игре (B_l, v) выполняется равенство $\varphi_i(N, v, \mathcal{B}) = \varphi_j(N, v, \mathcal{B})$.

Свойства 5.1 и 5.2 были предложены Оуэном [8] для характеризации его значения. В следующей лемме приводятся свойства коалиционного пред n-ядра .

Лемма 5.1. *Коалиционное пред n-ядро обладает свойствами эффективности, ковариантности, внешней и внутренней симметрии.*

Доказательство повторяет доказательства установления этих же свойств для значения Оуэна с учетом эффективности, ковариантности и свойства равнозаменяемости игроков пред n-ядра кооперативных игр.

Коалиционное пред n-ядро не является согласованным в определении согласованности (4.1).

Оно обладает только модифицированным свойством согласованности, когда покидать игру разрешается только целиком коалициям разбиения, если разбиение состоит более чем из одной коалиции.

Приведем соответствующие определения . Рассмотрим игру с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, где $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i=1..k}$. *Коалиционно-редуцированной игрой* игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, на множество $N \setminus B_i$ относительно вектора $x \in X^*(N, v)$ называется игра с КС $(N \setminus B_i, v_i^x, \Omega(\mathcal{B} \setminus \{B_i\}))$, в которой разбиение $\mathcal{B} \setminus \{B_i\} = \{B_j\}_{\substack{j=1,\dots,k \\ j\neq i}}$, а характеристическая функция v_i^x определяется следующими равенствами:

$$v_i^x(S) = \begin{cases} v(N) - x(B_i) & \text{если } S = N \setminus B_i, \\ \max\{v(S), v(S \cup \{B_i\}) - x(B_i)\} & \text{для остальных } S \in \Omega. \end{cases} \tag{5.4}$$

Отличие редуцированных игр в определении (5.4) от соответствующего определения в (4.1) состоит только в определении значений $v^x(\bigcup_{j\in J} B_j)$, так как коалиции $\bigcup_{j\in J} B_j \cup Q$, $Q \subset B_i$ являются допустимыми.

Соответственно, определение свойства согласованности значений для игр с КС для редуцированных игр (5.4) формулируется следующим образом:

Определение 5.3. *Значение* φ коалиционно согласовано в классе $\mathcal{C}^{cs}$, если для каждой игры с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{C}^{cs}$ и коалиции $B \in \mathcal{B}$ выполняется равенство

$$\varphi(N \setminus B, v_x^{N\setminus B}, \Omega(\mathcal{B} \setminus \{B\})) = \varphi_{N\setminus B}(N, v, \Omega(\mathcal{B})), \quad \text{где } x = \varphi(N, v, \mathcal{B}).$$

Лемма 5.2. *Коалиционное пред n-ядро коалиционно согласовано.*

Доказательство. Пусть $(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{C}^{cs}$ – произвольная игра с КС, $x = PN^{Ow}(N, v, \Omega((\mathcal{B}))$. Достаточно показать, что при уходе коалиции разбиения $B_i \in \mathcal{B}$ все оставшиеся внутренние игры не изменяются. Рассмотрим редуцированную игру $(N \setminus B_i, v_x^{N\setminus B_i}, \Omega(\mathcal{B} \setminus \{B_i\})$. Пусть $(B_j, \tilde{v}_x^j)$ – внутренняя игра редуцированной игры с КС $(N \setminus B_i, v_x^{N\setminus B_i}, \Omega(\mathcal{B} \setminus B_i))$ после ухода коалиции B_i относительно вектора x.

Докажем, что эта внутренняя игра совпадает с внутренней игрой (B_j, v_j^x) исходной игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$.

Рассмотрим значение $\tilde{v}_j^x(S)$ для коалиции $S \subset B_j$. Это значение равно выигрышу "игрока"S в пред n-ядре игры с КС $(N \setminus (B_j \setminus$

$S), v, \Omega(\mathcal{B}^{\mathcal{S}}_{\rangle}))$, где $\mathcal{B}_i^S = \{\{B_l\}_{l \neq i,j}, S\}$. По определению коалиционной редуцированной игры для каждой коалиции $T \in \Omega|_{N \setminus B_i}$

$$v^x_{N\setminus\{B_i\}}(T) = \max\{v(T), v(T \cup B_i) - x(B_i)\}$$

Следовательно, внешняя игра $(N \setminus B_i, v^x_{N\setminus\{B_i\}})$ совпадает с обычной редуцированной игрой в определении Дэвиса–Машлера внешней игры $(\mathcal{B}_i^S, v)$ относительно пред n-ядра (так как по определению коалиционного пред n-ядра $x(B_i)$ равно значению "игрока"B_i в коалиционном пред n-ядре этой внешней игры.).

Итак, мы можем заключить, что коалиционные пред n-ядра в играх $(\mathcal{B}_i^S, v^x_{N\setminus B_i})$ и $(\mathcal{B}^S, v)$ совпадают, и значение характеристической функции $\tilde{v}^j_x(S)$ внутренней игры $(B_j, \tilde{v}^j_x)$ равно соответствующему значению $v^x_j(S)$ внутренней игры (B_j, v^x_j). $\square$

С помощью свойства коалиционной согласованности можно построить аксиоматическую характеризацию коалиционного пред n-ядра.

Теорема 5.1. *Коалиционное пред n-ядро является единственным значением на классе $\mathcal{G}^{cs}$ всех игр с КС с бесконечным универсальным множеством игроков и множествами допустимых коалиций, определяемыми равенствами (5.3), обладающим свойствами ковариантности, внешней симметрией, внутренней симметрией, коалиционной согласованностью и согласованностью в смысле Дэвиса–Машлера в случае, если КС состоит из одной коалиции.*

Доказательство. Уже было показано, что коалиционное пред n-ядро обладает первыми тремя свойствами. Кроме того, в случае, когда КС состоит из единственной коалиции, оно совпадает с пред n-ядром, и свойство равной взаимозаменяемости и согласованности последнего вместе эквивалентно внутренней симметрии коалиционного пред n-ядра. Так как суммарные коалиционные значения коалиционного пред n-ядра равны соответствующим значениям игроков-коалиций для пред n-ядра внешней игры, из согласованности пред n-ядра следует коалиционная согласованность коалиционного пред n-ядра.

Пусть φ – произвольное значение, удовлетворяющее всем свойствами, указанными в теореме. Сначала отметим, что для каждой игры с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ для внешней игры $(\mathcal{B}, v)$ $\varphi(\mathcal{B}, v) = \{\varphi(B_1, v), ..., \varphi_k(B, v)\}$, и $\varphi(\mathcal{B}, v) = PN(\mathcal{B}, v)$. Из коалицонной согласованности решения φ следует согласованность внешних игр как классических ТП игр, а из внешней симметрии – свойство равной взаимозаменяемости (ETP). Следовательно, теореме Оршана [7] φ совпадает с пред n-ядром на классе классических кооперативных игр с бесконечным универсальным множеством игроков, и из этого факта следует, что значения $\varphi(B_i)$ известны для всех $i = 1, ..., k$. Из коалиционной согласованности решения φ следует, что коалиционные редуцированные игры (B_i, v_i^{φ}) на любую коалицию разбиения относительно вектора $\varphi(N, v, \mathcal{B})$ полностью определяются значениями $\varphi(B_j), j \neq i$. Так как уже доказано, что $\varphi(B_i, v_i^{\varphi}) = PN(B_i, v_i^{\varphi})$, мы доказали единственность значения φ. □

5.2. Пред n-ядро типа Камийо для игр с коалиционной структурой

Рассмотрим класс $\mathcal{K}^{cs}$ всех игр с КС , в которых набор допустимых коалиций $\Omega(\mathcal{B})$ для игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{K}^{cs}$ состоит из всех коалиций разбиения $\mathcal{B} = (B_1, ..., B_k)$ и коалиций, содержащихся в одной из коалиций разбиения:

$$\Omega = \{B_1, ..., B_k; \bigcup_{j \in J \subset \{1,...,k\}} B_j \text{ для всех } J \subset \{1, ..., k\}; S \subset B_i, \forall i = 1, ..., k\}. \tag{5.5}$$

Определим значение для данного класса $\mathcal{K}^{cs}$ аналогично значению Камийо [3], являющегося двухшаговой модификацией значения Шепли для указанного класса игр с КС. Сначала для игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ определяется внешняя ТП игра $(\mathcal{B}, v^*)$ так же, как и в предыдущем пункте, т.е. с множеством игроков, равным множеству коалиций разбиения и с характеристической функцией, определяемой равенствами

$$v^*(S) = v(\bigcup_{j \in J} B_j) \text{ для } S = \bigcup_{j \in J} B_j.$$

Пусть $x = PN(\mathcal{B}, v^*)$ – пред n-ядро внешней игры. Тогда $x \in \mathbb{R}^k, x(\bigcup_{j=1}^k B_j) = v(N)$.

Для каждого $j \in \{1, , , ., k\}$ *внутренняя* ТП игра (B_j, v_j) определяется как под-игра исходной игры с КС, но с заменой значения $v(B_j)$ большой коалиции B_j на значение $x(B_j)$, найденное на предыдущем шаге:

$$v_j(S) = \begin{cases} x_j = x_{B_j}, & \text{если } S = B_j, \\ v(S) & \text{для остальных коалиций.} \end{cases}$$

Пусть $\xi^j = PN(B_j, v_j)$. Тогда по определению внутренней игры $\xi^j(B_j) = x_j$. Положим $PN^K(N, v, \Omega) = (\xi^1, ..., \xi^j)$ и назовем PN^K *пред n-ядром типа Камийо* для игр с КС.

Аналогично доказательствам приведенных в работе Камийо [3] свойств для модификации значения Шепли для игр с КС легко показать, что пред n-ядро типа Камийо для игр с КС эффективно, ковариантно, внешне и внутренне симметрично.

Заметим, что коалиционно редуцированные игры относительно вектора x для игр с КС, порождающих набор допустимых коалиций (5.5), когда игру покидает коалиция разбиения, определяются для коалиций $S \in \Omega|_{N \setminus B_i}$ следующими равенствами:

$$v^x(S) = \begin{cases} v(N) - x(B_i), & \text{если } S = N \setminus B_i, \\ \max\{v(S), v(S \cup B_i) - x(B_i)\}, & \text{если } S = \bigcup\limits_{\substack{j \in J \\ j \neq j(i)}} B_j, J \subset \{1, ..., k\}, i \notin J, \\ v(S), & \text{если } S \subsetneqq B_j, j \neq i. \end{cases} \tag{5.6}$$

Равенства (5.6) совпадают с определением редуцированных игр (4.1) для обычного определения согласованности по Дэвису–Машлеру для случая, когда набор допустимых коалиций Ω определяется равенством (5.5), и игру покидает коалиция разбиения.

Предложение 5.1. *Пред n-ядро типа Камийо коалиционно согласовано.*

Доказательство. Пусть $(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{K}^{cs}$ – произвольная игра с КС, $(B_1, ..., B_k)$ – разбиение, определяющее набор допустимых коалиций $\Omega(\mathcal{B})$ (5.5), $\xi = (\xi_l^j) = PN^K(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, $x_j = \sum_{l=1}^{|B_j|} \xi_l^j$.

Рассмотрим (коалиционно) редуцированную игру $(N \setminus B_i, v^{\xi}_{N \setminus B_i}, (\Omega(\mathcal{B}))|_{N \setminus B_i})$ на множество игроков $N \setminus B_i$ относительно ξ.

Набор $(\Omega(\mathcal{B}))|_{N\setminus B_i}$ допустимых коалиций в редуцированной игре порождается разбиением $\mathcal{B}^i = (B_1, ..., B_{j-1}, B_{j+1}, .., B_k)$, и внешняя игра редуцированной игры $(N \setminus B_i, v^{\xi}_{N\setminus B_i}, (\Omega(\mathcal{B}))|_{N\setminus B_i})$ совпадает с соответствующей редуцированной игрой внешней игры $(\mathcal{B}, v^*)$.

Следовательно, по согласованности пред n-ядра для ТП игр, мы получаем равенства

$$x_j = \sum_{i=1}^{|B_j|} PN^K(N \setminus \{i\}, v^{\xi}_{N\setminus\{i\}}, \Omega|_{N\setminus\{i\}}),\;\; j = 1, ..., k,\; j \neq j_i. \qquad (5.7)$$

Внутренние игры исходной игры и редуцированных игр для $j = 1, ...k$, $j \neq i$ ввиду (5.6) и (5.7)также совпадают , следовательно, $\xi^i = PN^K(N \setminus B_i, v^x, \Omega|_{N\setminus B_i})$.
□

Теорема 5.2. *Для бесконечного универсального множества игроков $\mathcal{N}$ единственным значение для класса игр $\mathcal{K}^{cs}$, удовлетворяющим внешней и внутренней симметрией, ковариантности, коалиционной согласованности и согласованности для коалиционных структур, состоящих из одной коалиции, является пред n-ядро типа Камийо.*

Доказательство. Ввиду Утверждения 5.1 достаточно только доказать единственность. Пусть σ произвольное значение для класса $\mathcal{G}^{cs}$, удовлетворяющее аксиомам, указанным в теореме. Рассмотрим произвольную игру $(N, v, \Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{G}^{cs}$, где $\mathcal{B} = (B_1, ..., B_k)$ – разбиение, определяющее набор допустимых коалиций $\Omega(\mathcal{B})$, и обозначим $\xi = \sigma(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$.. Рассмотрим внешнюю игру $(\mathcal{B}, v^*)$. Определим значение F для нее равенством $F(\mathcal{B}, v^*) = (x_1, ..., x_k)$, where $x_j = \xi(B_j)$. Так как k может быть произвольным числом, а внешней игрой может оказаться произвольная ТП игра, значение F определено для всех ТП игр. По свойству коалиционной согласованности значения σ, значение F согласовано. Очевидно, оно удовлетворяет аксиомам ковариантности и равной взаимозаменяемости. Следовательно, по теореме Оршана [6] F совпадает с пред n-ядром.

Рассмотрим коалиционно редуцированную игру (B_j, v^{ξ}) игры (N, v, Ω) на множество игроков B_j относительно вектора ξ. Эта игра является ТП игрой, и по коалиционной согласованности ξ, $\sigma(B_j, v^\xi) = \xi_{B_j}$. Последнее равенство определяет решение σ для всех ТП игр, которое по той же теореме Оршана совпадает с пред n-ядром. Следовательно, решение σ совпадает с пред n-ядром для игр, чья КС состоит из одной коалиции, и из совпадения значений F и σ для однокоалиционного разбиения с пред n-ядром мы получаем равенство

$$PN(\mathcal{B}, v^*) = (\xi(B_1), ..., \xi(B_k)), \quad \xi_{B_j} = PN(B_j, v^\xi),$$

откуда и следует $\xi = (P\text{-}P)(N, v, \Omega)$. □

Приведем пример, показывающий различие между пред n-ядром для игр с ограниченной кооперацией, определенным в п.2, и пред n-ядром типа Камийо для игр с КС.

Пример 5.1. $N = \{1,2,3,4\}, \mathcal{B} = \{B_1, B_2\}$, $B_1 = \{1,2\}, B_2 = \{3,4\}$; $v(N) = 4$, $v(B_1) = 2$, $v(B_2) = 0$, $v(\{1\} = 4, v(\{2\}) = 3, v(\{3\}) = 2, v(\{4\}) = 1$.
Для обычного пред n-ядра $PN(N, v, \mathcal{B})$ набор $\mathcal{S}_1(v)$ коалиций, на которых достигается минимальное значение максимальных эксцессов состоит из одноэлементных коалиций $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$. Из равенств

$$4 - x_1 = 3 - x_2 = 2 - x_3 = 1 - x_4, \;\; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$$

следует $PN(N, v, \mathcal{B}) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Для нахождения пред n-ядра типа Камийо найдем сначала пред n-ядро (стандартное решение) внешней игры: $PN(\{B_1, B_2\}, v) = (3, 1)$. Вычисляя далее пред n-ядра внутренних игр $(\{1,2\}, v), (\{3,4\}, v)$, получим $PN^K(N, v, \mathcal{B}) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$.

5.3. Пред k-ядро

Лемма 5.3. *Если набор Ω удовлетворяет $|\Omega| = n = rank(\Omega)$, то он содержит сбалансированный поднабор.*

Доказательство. Так как по условию состоит из n линейно независимых векторов, то существуют числа $\lambda_S, S \in \Omega$, такие что $\sum_{S\in\Omega} \lambda_S \chi_S = \chi_N$. Покажем, что $\lambda_S, S \in \Omega$ неотрицательны.

Рассмотрим задачу $\max y(N)$ при $y(S) = a_S$. Она имеет единственное решение при любых числах a_S. Двойственной к этой задаче является задача $\min \sum_{S\in\Omega} a_S\lambda_S$ при ограничениях $\lambda_S \geq 0$, $\sum_{\substack{S\in\Omega\\ S\ni i}} \lambda_S = 1, i \in N$. Эта задача имеет решение для любых a_S, значит и допустимое множество двойственной задачи не пусто, что и означает слабую сбалансированность набора Ω. □

Лемма 5.4. *Если Ω удовлетворяет условиям Леммы 5.3 и вполне сепарабельно, то любая игра (N, v, Ω) имеет непустое пред k-ядро.*

Доказательство. Пусть α – число, для которого единственное решение системы $x(S) = v(S) + \alpha, S \in \Omega$ удовлетворяет равенству $x(N) = v(N)$. Тогда $x = PK(N, v, \Omega)$. □

Предложение 5.2. *Если число коалиций вполне сепарабельного допустимого набора коалиций множества N равно $|\Omega| = |N| = n$, то необходимым и достаточным условием непустоты пред k-ядра в любой игре (N, v, Ω) является полнота ранга набора $\Omega:\ rank(\Omega) = n$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{rank}(\Omega) = k < n$ и $PK(N, v, \Omega) \neq \emptyset$ для любой хар. функции $v : \Omega \to \mathbb{R}^1$. Тогда из леммы 5.4 следует, что для любой игры (N, v, Ω) из $x \in PK(N, v, \Omega)$ следует, что величины $s_{ik}(x), i, k \in N$ принимают по крайней мере два различных значения. Достаточно доказать несуществование пред k-ядра только для этого случая, $s_{ij}(x) = a$ или $b, a > b$. Пусть $\Omega_1 = \{S \,|\, v(S) - x(S) = a\}$. Тогда строки χ_S, $S \in \Omega_1$ линейно независимы, так как в противном случае нашлась бы такая х.ф. w , для которой система $w(S) - y(S) = w(T) - y(T)$, $S, T \in \Omega$ $y \in PK(N, w, \Omega)$ была бы несовместной.

Следовательно, $rank(\Omega \setminus \Omega_1) < |\Omega \setminus \Omega_1|$, и мы опять получаем невозможность выполнения равенств $v(S) - x(S) = v(T) - x(T)$ для всех $S, T \in \Omega \setminus \Omega_1$ для всех игр $(N, v, \Omega), x \in PK(N, v, \Omega)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aumann R.J., Drèze J.N. *Cooperative Games with Coalition Structure* // International Journal of Game Theory. 1974. **3**. P.217–237

2. Davis M., Maschler M. *The kernel of a cooperative game*// Naval Res. Logist. Quart., 1965. **12**, P. 223–259.

3. Kamijo Y. *A two-step value for cooperative games with coalitional structures*// International Game Theory Review. 2009. **11**. P. 207-214

4. Kohlberg E. *On the nucleolus of a characteristic function game.* // SIAM Journal of Applied Mathematics. 1971, **20**, P.62-66

5. Llerena F. *An axiomatization of the core of games with restricted cooperation*// Economic Letters. 1979, **9**. P.80-84

6. Myerson, R. B.*Graphs and cooperation in games* // Mathematics of Operations Research. 1977, **2**. P.225–229.

7. Orshan G. *The prenucleolus and the reduced game property: equal treatment replaces anonymity* // International Journal of Game Theory. 1993, **22**. P. 241–248.

8. Owen G. *Values of games with a priori unions* // Essays in Mathematical Economics and Game Theory (eds. Henn R. and Moeschlin O.), 1977, Springer-Verlag. Berlin. P. 76–88.

9. Peleg B.*On the Reduced Game Property and its Converse*// Internat. J. Game Theory, 1986. **15**, P. 187–200. *A Correction* Internat J.Game Theory, 1987. **16**.

10. Peleg B., Sudhölter P. *Introduction to the Theory of Cooperative Games*// Theory and Decision Library. Series C. 1003, Vol.34, Kluwer Ecademic Publishers. 380p.

11. Reijnierse H., Potters J. *The $\mathcal{B}$-nucleolus of TU-games*// Games and Economics Behavior, 1998. **24**, P.77-96.

THE PRENUCLEOLI OF GAMES WITH RESTRICTED COOPERATION

Ilya V.Katsev, St.Peterbutg Institute for Economics and Mathematics RAS, PhD., junior res. (katsev@yandex.ru)
Elena B.Yanovskaya St.Peterbutg Institute for Economics and Mathematics RAS, Dr.Sc., prof. (eyanov@emi.nw.ru)

Abstract: A cooperative game with restricted cooperation is a triple (N, v, Ω), where N is a finite set of players, $\Omega \subset 2^N, N \in \Omega$ is a collection of *feasible* coalitions, $v : \Omega \to \mathbb{R}$ is a characteriostic function. The definition implies that if $\Omega = 2^N$, then the game $(N, v, \Omega) = (N, v)$ is a classical cooperative game with transferable utilities (TU). The class of all games with restricted cooperation $\mathcal{G}^r$ with an arbitrary *universal* set of players is considered. The prenucleolus for the class is defined in the same way as for classical TU games. Necessary and sufficient conditions on a collection Ω providing existence and singlevaluedness of the prenucleoli for the class $\mathcal{G}^r$ are found Axiomatic characterizations of the prenucleolus for games with two-type collections Ω generated by coalitional structures are given

Keywords: cooperative game, restricted cooperation, prenucleolus, coalitional structure.