федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

Кафедра «Прикладная математика-1»

М.М.Деркач, А.М.Филимонов, Д.А.Филимонов

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Рекомендовано редакционно-издательским советом
университета в качестве методических указаний для
студентов, обучающихся по специальности
«Прикладная математика и информатика»

Москва – 2013

УДК 517.95
Д36
Деркач М.М., Филимонов А.М., Филимонов Д.А. Гиперболические системы уравнений с частными производными: Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Уравнения математической физики». — М.: МИИТ, 2013. — 44 с.

В настоящем выпуске помещены методические указания к решению задач по разделу «Гиперболические системы уравнений с частными производными» дисциплины «Уравнения математической физики».

Гиперболические системы уравнений с частными производными охватывают многие важнейшие математические модели, встречающиеся в различных вопросах естествознания, а так же в некоторых моделях экономики. Теоретический материал по этому разделу можно найти в учебниках [1] – [4], монографии [5] и работе [6]. Дополнительные задачи по этому разделу имеются в задачнике [7]. При подготовке этого выпуска частично использовались методические указания «Уравнения математической физики.» Выпуск 1, изд. МИИТ, 1984. 32 с., (Мышкис А.Д., Филимонов А.М.). Задачи, приведенные в настоящих методических указаниях охватывают разделы, в основном не рассматривавшиеся в известных задачниках.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по специальности «Прикладная математика и информатика».

©МИИТ,2013

Содержание

Введение

В настоящем выпуске помещены методические указания к решению задач по разделу "Гиперболические системы уравнений с частными производными" дисциплины "Уравнения математической физики".

Теоретический материал по этому разделу можно найти в учебниках [1] – [4], монографии [5] и работе [6]. Дополнительные задачи по этому разделу имеются в задачнике [7]. Многие задачи, приведенные в этом выпуске методических указаний, являются оригинальными. Они охватывают разделы, в основном не рассматривавшиеся в известных задачниках.

1 Классификация систем уравнений

1.1 Теоретический материал

Основные понятия и обозначения. Пусть $\ell > 0$, $T_0>0$, $P_0>0$ — некоторые константы, $\|u\| = \max\limits_i |u_i|$ $(u = (u_1, ..., u_m)^T \in \mathbb{R}^m)$,

$$
\begin{aligned}
&D_0 = \{(x,t) \mid 0 \leqslant x \leqslant \ell,\ 0 \leqslant t \leqslant T_0\}\\
&D_1 = \{(x,t,u) \mid (x,t) \in D_0,\ u \in \mathbb{R}^m,\ \|u\| \leqslant P_0\}\\
&D_2 = \{(t,u) \mid 0 \leqslant t \leqslant T_0,\ u \in \mathbb{R}^m,\ \|u\| \leqslant P_0\}\\
&D_3 = \{(x,t,u,v) \mid (x,t,u) \in D_1,\ v \in \mathbb{R}^m,\ \|v\| \leqslant P_0\}.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим систему нелинейных уравнений относительно неизвестных функций $u_i(x,t)$ $(i = 1,..,m)$, которую будем предполагать разрешенной относительно производных по t:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \Phi_i\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right); \quad i = 1, ..., m. \tag{1}$$

Положим $\frac{\partial u_i}{\partial x} = v_i$ $(i = 1, .., m)$ и рассмотрим квадратную матрицу $A(x, t, u, v)$ порядка m:

$$A(x,t,u,v) = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial v_j}\right), \tag{2}$$

при этом мы считаем, что все $\Phi_i \in C^1(D_3)$.

Определение. Нелинейная система (1) называется *гиперболической* в области D_3, если в каждой точке (x, t, u, v) этой области: 1) все собственные значения λ_i матрицы A вещественны; 2) из левых собственных векторов ℓ^i (мы будем считать их строчными матрицами) этой матрицы может быть построен базис, т.е. матрица A диагонализируема в каждой точке области D_3. Отметим, что в случае различных вещественных собственных значений это определение согласуется с общим определением гиперболичности (см., например, [8]).

Если все функции Φ_i имеют вид

$$\Phi_i(x,t,u,v) = -\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x,t,u)v_j + f_i(x,t,u), \tag{3}$$

где $a_{ij}, f_i : D_1 \to \mathbb{R}$, то уравнения системы (1) (и сама эта система) называются *квазилинейными*.

Если в формуле (3) все функции a_{ij} не зависят от u, то уравнения системы (1) называются *полулинейными*.

Если в формуле (3) все функции a_{ij} не зависят от u , а все функции f_i имеют вид

$$f_i(x,t,u) = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(x,t)u_j + c_i(x,t), \tag{4}$$

где $b_{ij}, c_i : D_0 \to \mathbb{R}$, то уравнения такой системы называются *линейными*.

Если функции $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ непрерывны, то, дифференцируя каждое уравнение системы (1) по x и обозначая $v_i = \frac{\partial u_i}{\partial x}$, получим:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial v_j} \frac{\partial v_j}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j} v_j \right] - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

Мы приходим к системе квазилинейных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_i}{\partial t} - \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial v_j} \dfrac{\partial v_j}{\partial x} = \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j} v_j, \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t} = \Phi_i(x, t, u, v). \end{cases} \tag{6}$$

Обратно, при определенных естественных предположениях от системы (6) можно перейти к (1). Таким образом, нелинейная система (1), вообще говоря, может быть сведена (при достаточной гладкости всех функций) к квазилинейной системе из удвоенного числа уравнений.

Далее будем рассматривать гиперболические системы квазилинейных уравнений, которые будем записывать в векторной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t, u). \tag{7}$$

Здесь

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

Так как, по предположению, система (7) гиперболична, то в каждой точке области D_1 существует базис из левых собственных векторов $l^1, ..., l^m$ матрицы А. Умножая (7) слева на l^i $(i = 1, ..., m)$, получим m скалярных уравнений вида

$$l^i \frac{\partial u}{\partial t} + l^i A \frac{\partial u}{\partial x} = l^i f; \tag{8}$$

Но $l^iA = \lambda_i l^i$, где $\lambda_i = \lambda_i(x,t,u)$ — собственное значение, соответствующее левому собственному вектору $l^i(x,t,u)$.

Поэтому уравнения (8) принимают вид

$$l^i \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial u}{\partial x} \right] = l^i f; \quad i = 1, ..., m. \tag{9}$$

Система уравнений (9) называется *характеристической формой записи системы* (встречается также название *характеристическая форма Шаудера*).

Предположим пока, что мы изучаем достаточно гладкие решения системы (7) и что все собственные значения и компоненты собственных векторов матрицы $A(x,t,u)$ также достаточно гладкие (как показано в [5], в общем случае гладкость собственных векторов может получиться ниже, чем гладкость компонент матрицы $A(x,t,u)$).

Через $\varphi_i(t; x^*, t^*, u)$ обозначим решение задачи

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(x,t,u(x,t)), \quad x(t^*) = x^*, \quad t \leqslant t^*, \tag{10}$$

где $u\colon D_0 \to \mathbb{R}^m$ — произвольная функция класса $C^1(D_0)$ (не обязательно решение системы (7)). Это решение $\varphi_i(t; x^*, t^*, u)$ будем называть характеристикой i-го семейства, проходящей через точку (x^*, t^*) и соответствующей функции u.

Для упрощения записи в дальнейшем ограничимся случаем $m = 2$.

Рассмотрим вспомогательную дифференциальную форму первого порядка относительно du_1, du_2 с коэффициентами, зависящими от x, t как от параметров:

$$\omega_i = g_1^i(x,t,u)du_1 + g_2^i(x,t,u)du_2, \quad i = 1, 2. \tag{11}$$

Здесь g_j^i — компоненты соответствующих левых собственных векторов:

$$\ell^1 = (g_1^1, g_2^1), \quad \ell^2 = (g_1^2, g_2^2). \tag{12}$$

Пусть $\mu^i(x,t,u) \neq 0$ $(i = 1,2)$ — соответствующие интегрирующие множители форм ω_1, ω_2 (при $m > 2$ таких множителей может не быть). Это означает, что существуют функции $z_i = p_i(x,t,u)$ (мы их также будем считать достаточно гладкими) такие, что

$$\mu_i \omega_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial u_i} du_j. \tag{13}$$

Функция z_i $(i = 1,2)$ называется i-м *римановым инвариантом*, соответствующим i-му семейству характеристик. В силу (13) для каждых $i, j = 1,2$ имеем

$$\mu_i g_j^i = \frac{\partial z_i}{\partial u_j}. \tag{14}$$

Поэтому i-е уравнение системы (9) после умножения на $\mu_i(x,t,u)$ можно записать в виде

$$\frac{\partial z_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x}\lambda_i + \frac{\partial z_i}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x}\lambda_i = \mu_i l^i f. \tag{15}$$

Обозначим через $(p_i)'_t, (p_i)'_x$ частные производные от p_i по t, x, соответственно, при фиксированных u_1, u_2, а также принимая во внимание, что вдоль характеристики i-го семейства

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(x,t,u) \quad (i = 1,2), \tag{16}$$

заметим, что после прибавления к обеим частям (15) величины

$$(p_i)'_t + (p_i)'_x \frac{dx}{dt}$$

левая часть полученного уравнения будет полной производной от функции $z_i = p_i(x,t,u(x,t))$ вдоль характеристик (16), т.е. уравнение (15) приобретает вид

$$\frac{d}{dt} z_i = \mu_i \ell^i f + (p_i)'_t + \lambda_i(x,t,u)(p_i)'_x; \quad i = 1,2. \tag{17}$$

Допустим, что систему

$$\begin{cases} z_1 = p_1(x, t, u_1, u_2), \\ z_2 = p_2(x, t, u_1, u_2) \end{cases} \tag{18}$$

можно разрешить в D_0 относительно u_1, u_2:

$$\begin{cases} u_1 = p_1^{-1}(x, t, z_1, z_2) \\ u_2 = p_2^{-1}(x, t, z_1, z_2) \end{cases} \tag{19}$$

Тогда систему (17) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial z_i}{\partial t} + \lambda_i(x, t, u)\frac{\partial z_i}{\partial x} = \\ = (p_i)'_t + (p_i)'_x\lambda_i + (p_i)'_{u_1} f_1 + (p_i)'_{u_2} f_2; \quad i = 1, 2. \end{gathered} \tag{20}$$

При этом предполагается, что в (20) вместо функций u подставлены их выражения через z по формулам (19).

Запись системы (7) в виде (20) называется *каноническим видом системы* (7) или *записью системы* (7) *в инвариантах.* Для этой записи характерно, что в левую часть каждого из уравнений системы входят производные только одной из искомых функций z_i.

Замечание 1. Если исходная система полулинейна, то интегрирующие множители μ_i, о которых говорилось при определении римановых инвариантов, можно положить равными единице. Гиперболическая система полулинейных уравнений всегда приводима к каноническому виду. При этом в качестве римановых инвариантов можно брать функции

$$z = Lu, \tag{21}$$

где L — матрица, в строках которой стоят компоненты соответствующих *левых* собственных векторов матрицы A, т.е. ($\ell^i A = \lambda_i \ell^i$). В этом случае, после вычисления собственных значений и левых собственных векторов матрицы A следует найти матрицу L^{-1}, а затем подставить в систему (7) $u = L^{-1}z$. Далее нужно умножить обе части полученного равенства слева на матрицу L и воспользоваться тем, что $LAL^{-1} = diag(\lambda_1, ..., \lambda_m)$. После упрощений получится система относительно функций z в каноническом виде. Использование *левых* собственных векторов вместо *правых* $(Ar^i = \lambda_i r^i)$объясняется видом записи системы (7), в которой u — это вектор-*столбец*.

Замечание 2. Из описанного способа приведения гиперболической системы квазилинейных уравнений к каноническому виду видно, что возможность такого приведения зависит от существования интегрирующих множителей μ_i. Мы уже упомянули о том, что при $m > 2$ таких множителей может не быть. Однако, с помощью введения так называемой "продолженной системы" (подробнее см. в [5]) оказывается возможным приведение к каноническому виду и при $m > 2$, правда, лишь при добавочном предположении достаточной гладкости решений системы.

1.2 Примеры

1. Привести к каноническому виду систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - v^2 \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Решение. Матричная запись этой системы такова:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -v^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Собственные значения и левые собственные векторы при $v \neq$

0 имеют вид

$$\lambda_1 = |v|, \quad l^1 = (1, -|v|),$$
$$\lambda_2 = -|v|, \quad l^2 = (1, |v|).$$

Здесь можно было бы писать $\lambda_{1,2} = \pm v$, $\ell^{1,2} = (1, \mp v)$. Однако, вскоре будет видна целесообразность обозначений с применением знака модуля.

Характеристическая форма записи исходной системы

$$\begin{cases} \big(1, -|v|\big) \left[\dfrac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + |v| \dfrac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right] = 0, \\ \\ \big(1, |v|\big) \left[\dfrac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - |v| \dfrac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right] = 0. \end{cases}$$

Вспомогательные дифференциальные формы имеют вид

$$\omega_1 = du - |v| dv, \quad \omega_2 = du + |v| dv.$$

Очевидно, что формы ω_1, ω_2 являются полными дифференциалами:

$$\omega_1 = d\left(u - \tfrac{1}{2} v^2 \mathrm{sgn}\ v\right)$$
$$\omega_2 = d\left(u + \tfrac{1}{2} v^2 \mathrm{sgn}\ v\right).$$

Поэтому можно считать, что $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

Значит, римановы инварианты

$$z = u - \tfrac{1}{2} v^2 \mathrm{sgn}\ v;$$

$$s = u + \tfrac{1}{2} v^2 \mathrm{sgn}\ v.$$

Поэтому u, v по заданным z, s восстанавливаются однозначно (этого не было бы при $\lambda_1 = \pm v$, $\ell^{1,2} = (1, \mp v)$):

$$u = \tfrac{1}{2}(z + s)$$

$$v = \sqrt{|s-z|}\,\mathrm{sgn}(s-z).$$

Наконец, система в каноническом виде выглядит так:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} + \sqrt{|s-z|}\,\mathrm{sgn}(s-z)\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial s}{\partial t} - \sqrt{|s-z|}\,\mathrm{sgn}(s-z)\dfrac{\partial s}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

2. Привести систему к каноническому виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} - 4\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Решение. Перепишем систему в матричной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения и соответствующие собственные векторы:

$$\lambda_1 = -1, \quad l^1 = (2,1), \qquad \lambda_2 = 3, \quad l^2 = (-2,1)$$

Поскольку исходная система линейна, то воспользуемся замечанием 1 и сделаем замену по формулам (21). Для этого найдем матрицы L и L^{-1} :

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Замена

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ s \end{pmatrix}$$

преобразует нашу систему к виду:

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ s\end{pmatrix}\right]+
$$

$$
+\begin{pmatrix}1 & -1\\ -4 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ s\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.
$$

После умножения на матрицу L , получим:

$$
\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}z\\ s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}z\\ s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}
$$

В развернутом виде эта система имеет вид

$$
\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial t}-\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial s}{\partial t}+3\dfrac{\partial s}{\partial x}=0.\end{cases}
$$

что и служит ответом задачи. В данном случае приведение системы к каноническому виду позволяет найти общее решение исходной системы. Для этого найдем характеристики

$$
\frac{dx}{dt}=-1\Rightarrow x+t=c_1;\qquad \frac{dx}{dt}=3=>x-3t=c_2.
$$

и запишем уравнения полученной системы в инвариантах с помощью полных производных вдоль соответствующих характеристик:

$$
\frac{dz}{dt}=0\qquad \text{вдоль}\quad x+t=c_1,
$$

$$
\frac{ds}{dt}=0\qquad \text{вдоль}\quad x-3t=c_2.
$$

Поэтому $z=p(x+t),\quad s=q(x-3t)$, где p,q- произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Значит, общее решение исходной системы имеет вид:

$$\begin{cases} u(x,t) = \frac{1}{4}\left[p(x+t) - q(x-3t)\right], \\ \\ v(x,t) = \frac{1}{2}\left[p(x+t) + q(x-3t)\right]. \end{cases}$$

2 Дивергентная форма записи систем

2.1 Теоретический материал

Определение. Если существуют такие функции $\{P_i, H_i\}$, что из системы (7) вытекает соотношение вида

$$\frac{\partial P_i(x,t,u)}{\partial t} + \frac{\partial H_i(x,t,u)}{\partial x} = F_i(x,t,u), \tag{22}$$

то оно называется *законом сохранения* для этой системы.

Таким образом, закон сохранения определяется заданием пары функций $\{P_i, H_i\}$.

Определение. Пусть система (7) имеет m законов сохранения. Эти законы называются независимыми в области D_1, если функции 1, $H_1(x,t,u)$, $H_2(x,t,u), \ldots,$ $H_m(x,t,u)$ линейно независимы в каждой фиксированной точке $(x,t) \in D_0$.

Таким образом, если функция H_i не зависит от u, то пара $\{P_i(x,t,u), H_i(x,t,u)\}$ не может входить в совокупность независимых законов сохранения.

Определение. Если из системы (7) имеет m независимых законов сохранения, то она называется *консервативной*, или приводимой к *дивергентной форме*. Оказывается, что не всякая гиперболическая система квазилинейных уравнений приводима к дивергентной форме. Так, в [5] показано, что система

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + u_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + u_3 \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \dfrac{\partial u_3}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

не приводима к дивергентной форме.

Если система приводима к дивергентной форме, то законы сохранения системы (7) можно получать следующим образом.

В равенствах (22) выполним дифференцирование. Тогда мы получим

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial P_i}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial H_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H_i}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x} = F_i. \qquad (23)$$

С другой стороны, умножим (7) слева на некоторую строку $\alpha(x, t, u) = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, которую подберем так, чтобы результат имел вид (23)

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k a_{kj} \frac{\partial u_j}{\partial x} = \sum_{k=1}^{m} f_k \alpha_k, \qquad (24)$$

где a_{ij} — элементы матрицы $A(x, t, u)$.

Сравнивая (23) и (24), приходим к равенствам:

$$\alpha_k = \frac{\partial P_i}{\partial u_k}, \quad k = 1, .., m; \qquad (25)$$

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k a_{kj} = \frac{\partial H_i}{\partial u_j}, \quad j = 1, .., m; \qquad (26)$$

$$\sum_{k=1}^{m} f_k \alpha_k = F_i - \frac{\partial P_i}{\partial t} - \frac{\partial H_i}{\partial x}. \tag{27}$$

Исключая α_k из (25) и (26), получаем систему из m уравнений, которая связывает функции P_i, H_i:

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} \frac{\partial P_i}{\partial u_k}, \quad j = 1, .., m. \tag{28}$$

Переменные x, t входят в коэффициенты этой системы как параметры, так что (28) — это система из m линейных однородных уравнений относительно двух неизвестных функций P_i, H_i.

Заметим, что если исходная система полулинейна, т.е. $A = A(x,t)$, и $\det A \neq 0$ в D_0, то в качестве m независимых решений системы (28), очевидно, можно взять функции

$$P_i(x,t,u) = u_i, \tag{29}$$

$$H_i(x,t,u) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} u_i, \tag{30}$$

В общем случае, при $m > 2$, система (28), вообще говоря, переопределена и не имеет ни одного решения $\{P_i, H_i\}$, существенно зависящего от u. Тем не менее, в конкретных случаях такие функции $\{P_i, H_i\}$ могут существовать. Примером является система трех уравнений газовой динамики.

Пример. Привести к дивергентной форме систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} + xtv^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Решение. Система (28) в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_i}{\partial u} = \dfrac{\partial P_i}{\partial v}, \\[2ex] \dfrac{\partial H_i}{\partial u} = xtv^2 \dfrac{\partial P_i}{\partial u}. \end{cases}$$

Легко видеть, что в качестве решения этой системы подходят функции:

$$P_1 = v, \qquad H_1 = u, \qquad P_2 = u, \qquad H_2 = \frac{1}{3}v^3 xt,$$

которые при $xt \neq 0$ определяют независимые законы сохранения. Поэтому дивергентная форма исходной системы имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{3}xtv^3\right) = \dfrac{1}{3}tv^3; \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

2.2 Задачи для самостоятельного решения

1. Найти римановы инварианты системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - xtv^2\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0; \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad (xt > 0). \end{cases}$$

и записать ее в каноническом виде.

Ответ.

$$z = u - \frac{1}{2}xtv^2\mathrm{sgn}v, \qquad s = u + \frac{1}{2}xtv^2\mathrm{sgn}v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \sqrt{|s-z|}\mathrm{sgn}(s-z)\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{|s-z|}{2xt}\left[x + t\sqrt{|s-z|}\mathrm{sgn}(s-z)\right],$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} - \sqrt{|s-z|}\mathrm{sgn}(s-z)\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{|s-z|}{2xt}\left[x - t\sqrt{|s-z|}\mathrm{sgn}(s-z)\right].$$

2. Записать систему

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t-1 & -t-1 \\ -t-1 & t-1 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

в каноническом виде и найти ее общее решение.

Ответ.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} - 2\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0; \\ u(x,t) = -\frac{1}{4t}\left[(t-1)p(x+2t) + (t+1)q(x-t^2)\right], \\ \\ \dfrac{\partial s}{\partial t} + 2t\dfrac{\partial s}{\partial x} = 0; \\ v(x,t) = -\frac{1}{4t}\left[(t+1)p(x+2t) + (t-1)q(x-t^2)\right]. \end{cases}$$

3. Записать систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + 7\dfrac{\partial u_1}{\partial x} - 12\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + 6\dfrac{\partial u_3}{\partial x} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + 10\dfrac{\partial u_2}{\partial x} - 19\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + 10\dfrac{\partial u_3}{\partial x} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} + 12\dfrac{\partial u_1}{\partial x} - 24\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + 13\dfrac{\partial u_3}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

в каноническом виде и найти общее решение полученной системы в инвариантах.

Ответ.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_1}{\partial t} - \dfrac{\partial z_1}{\partial x} = 0, \qquad z_1 = p(x+t), \\ \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial t} + \dfrac{\partial z_2}{\partial x} = 0, \qquad z_2 = q(x-t), \\ \\ \dfrac{\partial z_3}{\partial t} + \dfrac{\partial z_3}{\partial x} = 0, \qquad z_3 = h(x-t). \end{cases}$$

4. Найти дивергентную форму системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + xt\dfrac{\partial v}{\partial x} = -tv, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + e^{x+t}\dfrac{\partial u}{\partial x} = -ue^{x+t}. \end{cases}$$

Ответ.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (xtv)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (e^{x+t}u)}{\partial x} = 0.$$

5. Найти дивергентную форму системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + 3\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + 3\dfrac{\partial u_3}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(2u_1 + 3u_2 + u_3) = 0, \\ \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_3) = 0, \\ \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(u_2 + 3u_3) = 0. \end{cases}$$

6. Найти дивергентную форму системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Ответ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-1}{v}\right) = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\ln|u|) = 0.$$

7. Найти общий вид законов сохранения для системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{u_2-1}{u_2+1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{4u_2}{u_2+1}\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + \dfrac{1}{u_2+1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x} - \dfrac{u_2-1}{u_2+1}\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Указание. Систему (28) при $m = 2$ можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & 1 \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} \begin{pmatrix} P \\ H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{21} & 0 \\ -a_{22} & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_2} \begin{pmatrix} P \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где a_{ij} — коэффициенты матрицы исходной системы. Приводя эту систему относительно функций P, H к виду (7) (где роль переменных x, t играют $u_1 u_2$) путём умножения на

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & 1 \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

получим систему

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \begin{pmatrix} P \\ H \end{pmatrix} + \frac{1}{4u_2} \begin{pmatrix} -(u_2-1) & -(u_2+1) \\ -(u_2+1) & -(u_2-1) \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_2} \begin{pmatrix} P \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

общее решение которое получается с помощью приведения её к инвариантам.

Ответ:

$P = q(u_1 + 2u_2) + g(u_1 - u_2^2), \qquad H = q(u_1 + 2u_2) - g(u_1 - u_2^2),$
где q, g — произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

3 Задача Коши

3.1 Теоретический материал

В области D_0 рассмотрим гиперболическую систему квазилинейных уравнений, записанную в каноническом виде:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u); \quad i = 1, ..., m; \tag{31}$$

и поставим для неё начальные условия

$$u_i(x,0) = \alpha_i(x); \quad i = 1, ..., m; \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell. \tag{32}$$

Задача (31),(32) называется *задачей Коши.*

Предположим, что функции λ_i, f_i $(i = 1, ..., m)$ определены и непрерывно дифференцируемы в области D_1. Тогда существует число

$$\Lambda > \max_{i,(x,t,u)} |\lambda_i(x,t,u)|.$$

Рассмотрим область плоскости x, t , ограниченную снизу и сверху линиями $t = 0$, $t = \min\{T, 0.5\ell\Lambda^{-1}\}$ (где $0 \leqslant T \leqslant T_0$), а с боков — линиями $x = \Lambda t, x = \ell - \Lambda t$. Эту область будем обозначать через $\Delta(T)$.

Пусть $u(x,t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, причём

$$\max_{D_0} \|u(x,t)\| \leqslant P_0.$$

Рассмотрим характеристику $x = \varphi_i(t; x^*, t^*, u)$ (см. (10)), где $(x^*, t^*) \in \Delta(T)$. Будем продолжать эту характеристику в сторону уменьшения t.

По теореме о продолжении решения обыкновенного дифференциального уравнения, эта характеристика должна достигнуть границы области $\Delta(T)$. Однако, поскольку $|\lambda_i(x,t,u)| <$

Λ, эта характеристика не может достигнуть боковых границ области и поэтому достигнет нижней границы $t = 0$. Таким образом, любая характеристика, проведенная через произвольную точку (x^*, t^*) области $\Delta(T)$, при своём продолжении в сторону $t \leqslant t^*$ достигает отрезка $0 \leqslant x \leqslant \ell$ оси x.

Выберем теперь произвольную точку $(x^*, t^*) \in \Delta(T)$ и проинтегрируем уравнения системы (31) вдоль соответствующих характеристик от $t = 0$ до $t = t^*$:

$$u_i(x^*, t^*) - u_i(\varphi_i(0; x^*, t^*, u), 0) =$$
$$= \int\limits_0^{t^*} f_i(\varphi_i(\tau; x^*, t^*, u), \tau, u(\varphi_i(\tau; x^*, t^*, u), \tau))d\tau.$$

Учитывая, что в силу начальных условий $u_i(x, 0) = \alpha_i(x)$ $(i = 1, ..., m)$, получим

$$u_i(x^*, t^*) = \alpha_i(\varphi_i(0; x^*, t^*, u)) +$$
$$\int\limits_0^{t^*} f_i(\varphi_i(\tau; x^*, t^*, u), \tau, u(\varphi_i(\tau; x^*, t^*, u)\tau))d\tau; \qquad (33)$$
$$i = 1, ..., m.$$

Оказывается, что и обратно, при достаточной гладкости функций α_i, f_i, λ_i $(i = 1, ..., m)$ непрерывно дифференцируемое решение системы (33) будет решением исходной задачи (31),(32). Поэтому вопрос о разрешимости задачи Коши (31),(32) сводится к исследованию разрешимости системы (33). Такое исследование можно провести с использованием принципа сжимающих отображений, откуда получается, что при достаточно малых $T \in (0, T_0]$ в области $\Delta(T)$ система (33) однозначно разрешима. Доказательство этого факта в общем случае довольно сложно, однако оно существенно упрощается, если функция λ_i не зависят от u, т.е. система (31) полулинейна. (См.[1] и [4]).

Из доказательства разрешимости системы (33) вытекает, что её решение может быть найдено методом последовательных приближений. Это открывает возможности для приближённого решения задачи Коши (31), (32) в случае, когда точное решение получить не удаётся. Соответствующие формулы для метода последовательных приближений имеют вид

$$u_i^{(n+1)}(x^*, t^*) = \alpha_i(\varphi_i(0; x^*, t^*, u^{(n)}))+$$

$$+\int_0^{t^*} f_i(\varphi_i(\tau; x^*, t^*, u^{(n)}), \tau, u^{(n)}(\varphi_i(\tau; x^*, t^*, u^{(n)}), \tau))d\tau; \qquad (34)$$

$$i = 1, ..., m.$$

Здесь $u^{(n)}$ — предыдущее, а $u^{(n+1)}$ — последующее приближения. В качестве нулевого приближения можно взять произвольную гладкую функцию, удовлетворяющую начальным условиям.

Все приведённые утверждения естественно видоизменяются, если $[0, \ell]$ заменить на произвольный промежуток.

3.2 Примеры

1. Решить задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + xt\frac{\partial u}{\partial x} = xt, \quad u(x, 0) = \sin x.$$

Решение. Находим характеристики

$$\frac{dx}{dt} = xt, \quad \frac{dx}{x} = tdt, \quad x = ce^{\frac{t^2}{2}},$$

$$x(t^*) = x^* \Longrightarrow x = x^* e^{\frac{t}{2} - \frac{(t^*)^2}{2}}.$$

По формуле (33) получаем

$$u(x^*,t^*) = \sin\left(x^* e^{-\frac{(t^*)^2}{2}}\right) + \int\limits_0^{t^*} x^* e^{\frac{\tau^2}{2} - \frac{(t^*)^2}{2}} \tau d\tau =$$

$$= \sin\left(x^* e^{-\frac{(t^*)^2}{2}}\right) + x^* - x^* e^{-\frac{(t^*)^2}{2}}.$$

Ответ: $u(x,t) = \sin(xe^{-\frac{t^2}{2}}) + x(1 - e^{-\frac{t^2}{2}})$.

2. Решить задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = u, \quad u(x,0) = \sin x.$$

Решение. Находим характеристики

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad x = t + c,$$

$$x(t^*) = x^* \Longrightarrow x = t + x^* - t^*.$$

По формуле (33) получаем

$$u(x^*,t^*) = \sin(x^* - t^*) + \int\limits_0^{t^*} u(\tau + x^* - t^*, \tau) d\tau.$$

Это интегральное уравнение легко решить, взяв производные от обеих частей по t^* вдоль характеристик, т.е. при $x^* - t^* = const$. Однако для иллюстрации общей методики мы воспользуемся методом последовательных приближений, взяв в качестве начального приближения функцию $u^{(0)}(x,t) = \sin(x - t)$.

$$
\begin{aligned}
u^{(0)}(x^*,t^*) &= \sin(x^*-t^*),\\
u^{(1)}(x^*,t^*) &= \sin(x^*-t^*) + \int\limits_0^{t^*} \sin\big((\tau+x^*-t^*)-\tau\big)d\tau =\\
&= \sin(x^*-t^*)(1+t^*),\\
u^{(2)}(x^*,t^*) &= \sin(x^*-t^*) + \int\limits_0^{t^*} (1+\tau)\sin(\tau+x^*-t^*-\tau)d\tau =\\
&= \sin(x^*-t^*) + \left(t^* + \frac{(t^*)^2}{2}\right)\sin(x^*-t^*) =\\
&= \left(1+t^*+\frac{(t^*)^2}{2}\right)\sin(x^*-t^*),\\
&\vdots\\
u^{(n)}(x^*,t^*) &= \left(1+t^*+\frac{(t^*)^2}{2}+\ldots+\frac{(t^*)^n}{n!}\right)\sin(x^*-t^*).
\end{aligned}
$$

Очевидно, что $u(x^*,t^*) = e^{t^*}\sin(x^*-t^*)$.

Ответ: $u(x,t) = e^t\sin(x-t)$.

Замечание. В дальнейшем, при решении примеров, мы будем опускать звездочки у (x^*,t^*), а чтобы не было путаницы, уравнения характеристик будем писать в виде

$$\xi = \varphi_i(\tau; x, t, u). \tag{35}$$

3. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 5\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial x} = e^{x+t},\\ \frac{\partial v}{\partial t} + 4\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

$$u(x,0) = \sin x, \quad v(x,0) = x^3$$

Решение. Приведём данную систему к каноническому виду (31). Для этого запишем её в матричной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Находим соответствующие собственные значения и левые собственные векторы:

$$\lambda_1 = 1, \quad \ell^1 = (1, -1),$$

$$\lambda_2 = 7, \quad \ell^2 = (2, 1).$$

Поскольку наша система линейна, для приведения её к римановым инвариантам можно воспользоваться заменой (21). Так как матрица L из собственных векторов имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$L^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя $\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}^T = L^{-1}\begin{pmatrix} z & s \end{pmatrix}^T$ в исходную систему, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ s \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ s \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} e^{x+t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Умножая обе части полученного равенства на матрицу L, получим запись исходной системы в инвариантах:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} z \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} z \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+t} \\ 2e^{x+t} \end{pmatrix},$$

или, что то же,

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+t}, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + 7\frac{\partial s}{\partial x} = 2e^{x+t}. \end{cases}$$

С учётом замечания относительно обозначений (35) находим характеристики

$$\xi = \tau + x - t \quad (\lambda = 1); \quad \xi = 7\tau + x - 7t \quad (\lambda = 7).$$

Находим начальные условия для инвариантов:

$$\begin{pmatrix} z(x,0) \\ s(x,0) \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} u(x,0) \\ v(x,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x - x^3 \\ 2\sin x + x^3 \end{pmatrix}$$

По формуле (33) находим

$$z(x,t) = \sin(x-t) - (x-t)^3 + \int\limits_0^t e^{(\tau+x-t)+\tau} d\tau =$$

$$= \sin(x-t) - (x-t)^3 + \frac{1}{2}e^{x+t} - \frac{1}{2}e^{x-t},$$

$$s(x,t) = 2\sin(x-7t) + (x-7t)^3 + 2\int\limits_0^t e^{(7\tau+x-7t)+\tau} d\tau =$$

$$= 2\sin(x-7t) + (x-7t)^3 + \frac{1}{4}e^{x+t} - \frac{1}{4}e^{x-7t}.$$

Возвращаясь к функция u и v, получаем **ответ**:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =& \frac{1}{3}\Big[\sin(x-t) - (x-t)^3 + e^x \mathrm{sh} t + \\
&+ 2\sin(x-7t) + (x-7t)^3 + \frac{1}{2}e^{x-3t}\mathrm{sh}\,4t\Big], \\
v(x,t) =& \frac{1}{3}\Big[-2\sin(x-t) + 2(x-t)^3 - 2e^x \mathrm{sh}\,t + \\
&+ 2\sin(x-7t) + (x-7t)^3 + \frac{1}{2}e^{x}\mathrm{sh}\,4t\Big].
\end{aligned}
$$

4. Найти первое приближение решения задачи Коши

$$
\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = u + v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = u - v, \end{cases}
$$

$$
u(x,0) = \sin x, \quad v(x,0) = x,
$$

взяв в качестве нулевого приближения функции, постоянные вдоль соответствующих характеристик.

Решение. Система дана в канонической форме. Поэтому сразу найдём характеристики

$$
\xi = \tau + x - t \quad (\lambda = 1); \quad \xi = -\tau + x + t \quad (\lambda = -1).
$$

Приняв в качестве начального приближения

$$
u^{(0)}(x,t) = \sin(x-t), \quad v^{(0)}(x,t) = x + t,
$$

по формулам (34) найдём

$$u^{(1)}(x,t) = \sin(x-t) + \int\limits_0^t \sin((\tau + x - t) - \tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t [(\tau + x - t) + \tau]d\tau = \sin(x-t) + t\sin(x-t) + t^2 + (x-t)t,$$

$$v^{(1)}(x,t) = (x+t) + \int\limits_0^t \sin((-\tau + x + t) - \tau)d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t [(-\tau + x + t) + \tau]d\tau = (x+t) +$$

$$+ \frac{1}{2}\cos(x-t) - \frac{1}{2}\cos(x+t) - t(x+t).$$

Ответ:

$$u^{(1)}(x,t) = (1+t)\sin(x-t) + xt,$$
$$v^{(1)}(x,t) = (1-t)(x+t) + \sin x \sin t.$$

5. Найти первое приближение решения задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = xu^2, \quad u(x,0) = x,$$

приняв в качестве нулевого приближения $u^{(0)}(x,t) = x$.

Решение. В этом примере *одно* уравнение, поэтому его можно было бы решить соответствующим методом. Однако, для иллюстрации, мы применим общий подход, распространяющийся и на *системы* уравнений. Найдём характеристики, соответствующие $u^{(0)}$:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = u^{(0)}(\xi,\tau) = \xi; \quad \xi = xe^{\tau - t}.$$

Далее воспользуемся формулами (34):

$$u^{(1)}(x,t) = xe^{-t} + \int\limits_0^t xe^{\tau-t}(xe^{\tau-t})^2 d\tau = xe^{-t} + \frac{1}{3}(1-e^{-3t})x^3.$$

Ответ:

$$u^{(1)}(x,t) = x\left[e^{-t} + \frac{1}{3}(1-e^{-3t})x^2\right].$$

Заметим, что, в отличие от предыдущих примеров, исходное уравнение квазилинейно. Поэтому при построении последующих приближений нужно находить характеристики каждый раз заново.

4 Смешанная задача

4.1 Теоретический материал

В области D_0 рассмотрим гиперболическую систему квазилинейных уравнений, записанную в каноническом виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u); \quad i = 1,...,m, \tag{36}$$

с начальными

$$u_i(x,0) = \alpha_i(x), \quad i = 1,...,m; \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell, \tag{37}$$

и краевыми условиями

$$u_i(0,t) = \gamma_0^i(t,u(0,t)); i \in I_0^+ = \{i|\mathrm{sgn}\lambda_i(0,0,0) = 1\},\ 0 \leqslant t \leqslant T_0,$$
$$u_i(\ell,t) = \gamma_\ell^i(t,u(\ell,t)); i \in I_\ell^- = \{i|\mathrm{sgn}\lambda_i(\ell,0,0) = -1\},\ 0 \leqslant t \leqslant T_0. \tag{38}$$

Задача (36) – (38) называется *смешанной задачей*.

Предположим, что все функции $\lambda_i, f_i, \alpha_i, \gamma_0^i, \gamma_\ell^i$ достаточно гладкие; $\mathrm{sgn}\lambda_i(0,t,u) = \mathrm{const}$, $\mathrm{sgn}\lambda_i(\ell,t,u) = \mathrm{const}$ $(i = 1, ..., m)$; функции γ_0^i не зависят от u_j при $j \in I_0^+$, а функции γ_ℓ^i не зависят от u_j при $j \in I_\ell^-$ (т.е. краевые условия *правильно поставлены*).

Пусть

$$\alpha_i(0) = \gamma_0^i(0, \alpha(0)) \ (i \in I_0^+), \ \alpha_i(\ell) = \gamma_\ell^i(\ell, \alpha(\ell))(i \in I_\ell^-)$$

(т.е. начальные и краевые условия удовлетворяют *условию согласования нулевого порядка*).

Пусть также выполнено так называемое *условие согласования первого порядка*:

$$(\gamma_0^i)'_t(0,\alpha(0)) + \sum_{j \notin J_0} (\gamma_0^i)'_{u_j}(0,\alpha(0))[f_j(0,0,\alpha(0)) - \lambda_j(0,0,\alpha(0))\alpha'_j(0)] =$$

$$= f_i(0,0,\alpha(0)) - \lambda_i(0,0,\alpha(0))\alpha'_i(0), \quad i \in J_0$$

(оно получается, если положить в уравнениях (36) $x = 0, \ t = 0$ и воспользоваться после этого условиями (37) и (38)). Пусть выполнено аналогичное условие при $x = \ell$. Подробнее об условиях согласования и понятии о правильно поставленных краевых условиях можно прочитать в [2].

Тогда можно доказать, что при достаточно малом $T \in (0, T_0]$ в области $\{(x,t) | 0 \leqslant x \leqslant \ell, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ смешанная задача (36) – (38) однозначно разрешима.

Подобно задаче Коши, смешанную задачу также возможно свести к системе интегро-операторных уравнений

$$u_i(x,t) = (\mathfrak{R}u)_i(x,t) + (\mathfrak{I}u)_i(x,t); \quad i = 1, ..., m, \tag{39}$$

где введены следующие обозначения (надчеркиванием обозначено замыкание областей):

$$(\mathfrak{R}u)_i(x,t) = \begin{cases} \alpha_i(\varphi_i(0;x,t,u)), & (x,t) \in \bar{\Pi}^u_{\alpha i} \\ \gamma_0^i(\chi_i(x,t,u), u(0,\chi_i(x,t,u))), & (x,t) \in \bar{\Pi}^u_{0i} \\ \gamma_\ell^i(\chi_i(x,t,u), u(\ell,\chi_i(x,t,u))), & (x,t) \in \bar{\Pi}^u_{\ell i} \end{cases}$$

$$(\Im u)_i(x,t) = \int\limits_{\chi_i(x,t,u)}^{t} f_i(\varphi_i(\tau;x,t,u),\tau,u(\varphi_i(\tau;x,t,u),\tau))d\tau;$$

Здесь $\chi_i(x,t,u)$ — наименьшее значение переменной t, при котором для фиксированной функции $u : D_0 \to \mathbb{R}^m$ решение $\xi = \varphi_i(r;x,t,u)$ задачи

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi,\tau,u(\xi,\tau)), \quad \xi(t) = x, \quad \tau \leqslant t$$

выходит на границу области D_0, а через $\Pi^u_{\alpha i}$, Π^u_{0i}, $\Pi^u_{\ell i}$ обозначены множества

$$\Pi^u_{\alpha i} = \{(x,t) \in D_0 | \chi_i(x,t,u) = 0\},$$

$$\Pi^u_{0i} = \{(x,t) \in D_0 | \chi_i(x,t,u) > 0, \varphi_i(\chi_i(x,t,u),x,t,u) = 0\},$$

$$\Pi^u_{\ell i} = \{(x,t) \in D_0 | \chi_i(x,t,u) > 0, \varphi_i(\chi_i(x,t,u),x,t,u) = \ell\}.$$

Оказывается, что и обратно, достаточно гладкое решение системы (39) является решением смешанной задачи (36) – (38), причём решение системы (39) при достаточно малом $T \in (0,T_0]$ есть равномерный предел последовательных приближений, построенных по формулам:

$$u_i^{(n+1)}(x,t) = (\Re u^{(n)})_i(x,t) + (\Im u^{(n)})_i(x,t); \quad i = 1,...,m, \quad (40)$$

Этот результат можно использовать для приближённого построения решения. В качестве нулевого приближения можно взять произвольную гладкую функцию, удовлетворяющую начальным и краевым условиям.

4.2 Примеры

Напомним, что краевые условия называются *правильно поставленными*, если они могут быть однозначно разрешены относительно инвариантов, соответствующих *уходящим характеристикам*, т.е. при $x = 0$ соответствующих $\lambda_i > 0$, а при $x = \ell$ — соответствующих $\lambda_i < 0$. Характеристики, соответствующие знакам, противоположным указанным, называются *приходящими.*

1. Для системы

$$\begin{cases} v_t - v_x + w_x = 0, \\ v_t + 8v_x + w_x = 0. \end{cases}$$

с заданными начальными условиями:

$$v(x, 0) = \alpha(x),\ w(x, 0) = \beta(x),\ 0 \leqslant x \leqslant \ell,$$

проверить, какие из следующих пар краевых условий правильно поставлены:

а). $v(0, t) = \sin t,\ w(\ell, t) = t^2;$

б). $-4v(0, t) + w(0, t) = \cos t,\ 12v(\ell, t) + 3w(\ell, t) = t.^2$

Решение.

Находим собственные значения и соответствующие левые собственные векторы:

$$\lambda_1 = 3,\ \ell^1 = (2, 1);$$

$$\lambda_2 = -3,\ \ell^2 = (-4, 1);$$

Находим соответствующие инварианты:

$$\lambda_1 = 3 \Rightarrow z = 2v + w; \qquad \lambda_2 = -3 \Rightarrow s = -4v + w.$$

Следовательно, для левой границы $x = 0$ инвариант z соответствует *уходящим* характеристикам, а инвариант s — *приходящим.* На правой границе $x = \ell$ инвариант s соответствует *уходящим* характеристикам, а инвариант z — *приходящим.*

а). Переписываем краевые условия для инвариантов:

$$v(0,t) = \frac{1}{6}(z(0,t) - s(0,t)) = \sin t,$$
$$w(\ell,t) = \frac{1}{3}(2z(\ell,t) + s(\ell,t)) = t^2;$$

С учетом сказанного выше относительно связи инвариантов и *уходящих* характеристик, нам необходимы условия для $z(0,t)$ и $s(\ell,t)$:

$$\begin{cases} z(0,t) = 6\sin t + s(0,t); \\ s(\ell,t) = -z(\ell,t) + 3t^2. \end{cases}$$

Значения $s(0,t)$ и $z(\ell,t)$ вычисляются с помощью начальных условий по соответствующим *приходящим* характеристикам. Таким образом, краевые условия в пункте а) поставлены правильно.

б). Переписываем краевые условия для инвариантов:

$$-4v(0,t) + w(0,t) = s(0,t) = \cos t,$$
$$12v(\ell,t) + 3w(\ell,t) = 4z(\ell,t) - s(\ell,t) = t^2;$$

С учетом сказанного выше относительно связи инвариантов и *уходящих* характеристик, нам необходимы условия для $z(0,t)$ и $s(\ell,t)$:

$$\begin{cases} z(0,t) =?; \\ s(\ell,t) = 4z(\ell,t) - t^2. \end{cases}$$

Таким образом, мы видим, что первое из краевых условий в пункте б) поставлено неправильно.

2. Для системы

$$\begin{cases} v_t + 2v_x + w_x = 0, \\ v_t + 3v_x + 4w_x = 0. \end{cases}$$

с заданными начальными условиями:

$$v(x,0) = \alpha(x),\ w(x,0) = \beta(x),\ 0 \leqslant x \leqslant \ell,$$

проверить, какие из следующих пар краевых условий правильно поставлены:

а). $v(0,t) = \sin t,\ w(\ell,t) = t^2$;

б). $v(0,t) = \cos t,\ w(0,t) = t.^2$

Ответ: а). Оба условия поставлены неправильно;

б). Оба условия поставлены правильно.

3. Решить смешанную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = xt,$$
$$u(x,0) = \sin x, \quad x \geqslant 0,$$
$$u(0,t) = t, \quad t \geqslant 0.$$

Решение. Найдём характеристики

$$\frac{d\xi}{d\tau} = 1, \quad \xi = \tau + x - t.$$

Найдём $\chi(x,t,u)$:

$$\chi = \begin{cases} t - x, & x < t, \\ 0, & x \geqslant t. \end{cases}$$

Найдём множества $\Pi^u_\alpha, \Pi^u_0, \Pi^u_\ell,$:

$$\bar{\Pi}^u_\alpha = \{(x,t)|x \geqslant t\},$$
$$\Pi^u_0 = \{(x,t)|x < t\},$$
$$\Pi^u_\ell = \varnothing.$$

Значит,

$$(\mathfrak{R}u)(x,t) \begin{cases} \sin(x-t), & x \geqslant t, \\ t - x, & x < t. \end{cases}$$

Далее,

$$(\Im u)(x,t) = \int\limits_0^t (\tau + x - t)\tau d\tau = -\frac{t^3}{6} + x\frac{t^2}{2}, \quad x \geqslant t,$$

$$(\Im u)(x,t) = \int\limits_{t-x}^t (\tau + x - t)\tau d\tau = -\frac{x^3}{6} + t\frac{x^2}{2}, \quad x < t.$$

Ответ:

$$u(x,t) = \begin{cases} \sin(x-t) - \frac{t^3}{6} + x\frac{t^2}{2}, & x \geqslant t, \\ (t-x) - \frac{x^3}{6} + t\frac{x^2}{2}, & x < t. \end{cases}$$

Замечание. В разобранном примере выполняется нулевое условие согласования, но не первое (проверьте!). Поэтому построенное решение является обобщённым — оно имеет слабый разрыв (скачок производных первого порядка) вдоль характеристики $x = t$, проходящей через точку $(0,0)$.

4. Решить смешанную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = u,$$

$$u(x,0) = x^2, \quad x \geqslant 0,$$

$$u(0,t) = t^2, \quad t \geqslant 0.$$

Решение. Характеристики и множества $\Pi^u_\alpha, \Pi^u_0, \Pi^u_\ell$ такие же, как в предыдущей задаче. Однако, в данном случае неизвестная функция войдёт под знак интеграла в формулах (39). Поэтому воспользуемся методом последовательных приближений (хотя и здесь можно было бы получить решение по методу, упомянутому в примере 2 к п. 4). В качестве начального приближения возьмём функцию

$$u^{(0)}(x,t) = (x-t)^2.$$

Далее, по формулам (40), получаем

$$u^{(1)}(x,t)=\begin{cases}(x-t)^2+\int\limits_0^t(\tau+x-t-\tau)^2d\tau=\\ \qquad=(x-t)^2(1+t),\quad x\geqslant t,\\ (t-x)^2+\int\limits_{t-x}^t(\tau+x-t-\tau)^2d\tau=\\ \qquad=(x-t)^2(1+x),\quad x<t.\end{cases}$$

$$u^{(2)}(x,t)=\begin{cases}(x-t)^2+\int\limits_0^t(\tau+x-t-\tau)^2\left(1+\tau\right)d\tau=\\ \qquad=(x-t)^2\left(1+t+\dfrac{t^2}{2}\right),\quad x\geqslant t,\\ (t-x)^2+\int\limits_{t-x}^t(\tau+x-t-\tau)^2\left(1+\tau+x-t\right)d\tau=\\ \qquad=(x-t)^2\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right),\quad x<t.\end{cases}$$

....

$$u^{(n)}(x,t)=\begin{cases}(x-t)^2\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\ldots+\frac{t^n}{n!}\right),\quad x\geqslant t,\\ (x-t)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right),\quad x<t.\end{cases}$$

Ответ:

$$u(x,t)=\begin{cases}(x-t)^2e^t,\quad x\geqslant t,\\ (x-t)^2e^x,\quad x<t.\end{cases}$$

5. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases}\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial u_1}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_2}{\partial x}=0,\end{cases}$$

$$u_1(x,0) = \sin x, \quad u_2(x,0) = \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$
$$u_1(0,t) = e^t - u_2(0,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$
$$u_2(\pi,t) = t - u_1(\pi,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

Решение. Сначала построим решение для $0 \leqslant t \leqslant \pi$ (при $t = \pi$ характеристики, выходящие из точек (0,0) и $(\pi, 0)$, достигают противоположной боковой стороны области D_0). Найдём характеристики:

$$\xi = \tau + x - t \quad (\lambda_1 = 1), \quad \xi = -\tau + x + t \quad (\lambda_2 = -1).$$

Далее,

$$\chi_1 = \begin{cases} t - x, & x < t, \\ 0, & x \geqslant t, \end{cases} \chi_2 = \begin{cases} x + t - \pi, & x > \pi - t, \\ 0, & x \leqslant \pi - t. \end{cases}$$

Множества $\Pi^u_{\alpha i}, \Pi^u_{0i}, \Pi^u_{\ell i}$, имеют вид

$$\bar{\Pi}^u_{\alpha 1} = \{(x,t)|x \geqslant t\}, \quad \Pi^u_{\alpha 2} = \{(x,t)|x \leqslant \pi - t\},$$
$$\Pi^u_{01} = \{(x,t)|x < t\}, \quad \Pi^u_{\ell 1} = \varnothing,$$
$$\Pi^u_{\ell 1} = \varnothing, \quad \Pi^u_{\ell 2} = \{(x,t)|x > \pi - t\}.$$

Чтобы построить u_i в $\Pi^u_{\alpha i}$ достаточно решить задачу Коши, т.е. $u_1(x,t) = \sin(x - t), (x,t) \in \Pi^u_{\alpha 1}; u_2(x,t) = \cos(x+t), (x,t) \in \Pi^u_{\alpha 2}$.

Для отыскания $(\mathfrak{R}u)_1(x,t)$ при $(x,t) \in \Pi^u_{01}$ нужно знать $u_2(0,t)$. Но $(0,t) \in \Pi^u_{\alpha 2}$, откуда

$$u_2(0,t) = \cos t.$$

Поэтому

$$(\mathfrak{R}u)_1(x,t) = \begin{cases} \sin(x - t), & x \geqslant t, \\ e^{t-x} - \cos(t - x), & x < t. \end{cases}$$

Аналогично

$$(\mathfrak{R}u)_2(x,t) = \begin{cases} \cos(x+t), & x \leqslant \pi - t, \\ x + t - \pi - \sin(x+t-\pi), & x > \pi - t. \end{cases}$$

Но так как правые части исходной системы нулевые, то в $[0,\pi] \times [0,\pi]$

$$u_1(x,t) = (\mathfrak{R}u)_1(x,t) = \begin{cases} \sin(x-t), & x \geqslant t, \\ e^{t-x} - \cos(t-x), & x < t. \end{cases}$$

$$u_2(x,t) = (\mathfrak{R}u)_2(x,t) = \begin{cases} \cos(x+t), & x \leqslant \pi - t, \\ x + t - \pi + \sin(x+t), & x > \pi - t. \end{cases}$$

Найдём теперь $u_1(x,\pi), u_2(x,\pi)$. Поскольку $(x,\pi) \in \Pi^u_{01}$, то

$$u_1(x,\pi) = e^{\pi - x} - \cos(\pi - x) = e^{\pi - x} + \cos x.$$

Далее, точка $(x,\pi) \in \Pi^u_{\ell 2}$. Поэтому

$$u_2(x,\pi) = x + \pi - \pi + \sin(x+\pi) = x - \sin x.$$

Для решения нашей задачи при $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$ примем в качестве начальных значения $u_1(x,\pi), u_2(x,\pi)$. Поступая аналогично предыдущему, найдём

$$u_2(0,t) = [(x+t-\pi)-\sin(x+t-\pi)]|_{x=0} = t-\pi+\sin t, \quad \pi \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

$$u_1(\pi,t) = [e^{\pi-(x-t+\pi)}+\cos(x-t+\pi)]|_{x=\pi} = e^{t-\pi}+\cos t, \quad \pi \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Поэтому при $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$

$$(\mathfrak{R}u)_1(x,t) = \begin{cases} e^{\pi-(x-t+\pi)} + \cos(x-t+\pi), & x \geqslant t - \pi, \\ e^{t-x} - [(t-x-\pi) + \sin(t-x)], & x < t - \pi, \end{cases}$$

$$(\Re u)_2(x,t) = \begin{cases} (x+t-\pi) - \sin(x+t-\pi), & x \leqslant 2\pi - t, \\ (x+t-\pi) - e^{(x+t-\pi)-\pi} + \cos(x+t-\pi), & \\ & x > 2\pi - t. \end{cases}$$

Ответ:

$$u_1(x,t) = \begin{cases} \sin(x-t), \quad x \geqslant t, 0 \leqslant t \leqslant \pi, \\ e^{t-x} - \cos(t-x), \quad x < t, 0 \leqslant t \leqslant \pi \quad \text{или} \\ \qquad\qquad x \geqslant t-\pi, \pi \leqslant t \leqslant 2\pi, \\ e^{t-x} + \pi - (t-x) - \sin(t-x), \quad x < t - \pi, \\ \qquad\qquad \pi \leqslant t \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

$$u_2(x,t) = \begin{cases} \cos(x+t), \quad x \leqslant \pi - t, 0 \leqslant t \leqslant \pi, \\ x+t-\pi+\sin(x+t), \quad x > \pi - t, 0 \leqslant t \leqslant \pi \quad \text{или} \\ \qquad\qquad x \leqslant 2\pi - t, \pi \leqslant t \leqslant 2\pi, \\ x+t-\pi-e^{x+t-2\pi} - \cos(x+t), \quad x > 2\pi - t, \\ \qquad\qquad \pi \leqslant t \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Замечание. В точке $(\pi, 0)$ не выполнено нулевое условие согласования, а в точке $(0,0)$ — первое. Поэтому построенное решение является обобщённым, оно имеет сильный разрыв (скачок функций u_1, u_2) вдоль характеристики $t = \pi - x$ и слабый разрыв вдоль характеристики $t = x$. Эти разрывы отражаются от концов отрезка $[0, \ell]$, в результате чего решение имеет также сильный разрыв вдоль характеристики $t = x + \pi$ и слабый — вдоль характеристики $t = 2\pi - x$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

6. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + 8\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

$$u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = x, \quad x \geqslant 0,$$

$$u(0,t), \quad t \geqslant 0.$$

Ответ:

$$u(x,t) = \begin{cases} t - 3x, & x \leqslant 3t, \\ -8t, & x > 3t, \end{cases}$$

$$v(x,t) = \begin{cases} \frac{7}{2}t - \frac{1}{2}x, & x \leqslant 3t, \\ x - t, & x > 3t. \end{cases}$$

Вдоль характеристики $x = 3t$ решение имеет слабый разрыв.
Указание. Привести систему к инвариантам.

Список литературы

[1] Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Наука, 1961, – 400с.

[2] Годунов С.К. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979, – 391 с.

[3] Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. — М.: Наука, 1980, – 352 с.

[4] Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1982, – 336 с.

[5] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. — М.: Наука, 1978, – 688 с.

[6] Мышкис А.Д., Филимонов А.М. Непрерывные решения квазилинейных гиперболических систем с двумя независимыми переменными. — Дифференциальные уравнения, — Минск, 1981, т. XVII, №3, с. 488–500.

[7] Годунов С.К., Золотарева Е.В. Сборник задач по уравнениям математической физики. — Новосибирск: Наука, 1974, – 75 с.

[8] Курант Р., Уравнения с частными производными. —М.: Мир, 1964.

Учебно-методическое издание

Деркач Мария Михайловна
Филимонов Андрей Матвеевич
Филимонов Дмитрий Андреевич

Гиперболические системы уравнений с частными производными

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Уравнения математической физики» для студентов специальности «Прикладная математика и информатика»

Подписано в печать	Формат 60x84/16	Тираж 100 экз.
Усл.-печ. л. -	Заказ №	Изд. № 139—13

УПЦ ГИ МИИТ, 127994, Москва, ул.Образцова, д.9, стр.9