НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ» (НИУ ВШЭ) (Г. МОСКВА)

А. В. Королев

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ
ДЛЯ БАКАЛАВРИАТА И МАГИСТРАТУРЫ

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим направлениям и специальностям

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ■ Юрайт ■ 2016

УДК
ББК
К68

***Автор*:**

Королев Алексей Васильевич — кандидат физико-математических наук, доцент департамента прикладной математики и бизнес-информатики Санкт-Петербургской школы экономики и менеджмента НИУ ВШЭ в Санкт-Петербурге.

***Рецензенты*:**

Матвеенко В. Д. — доктор физико-математических наук, ординарный профессор, научный руководитель образовательной программы «Прикладная экономика и математические методы» Санкт-Петербургской школы экономики и менеджмента НИУ ВШЭ в Санкт-Петербурге;

Прасолов А. В. — доктор физико-математических наук, профессор кафедры моделирования экономических систем Санкт-Петербургского государственного университета.

Королев, А. В.

К68 Экономико-математические методы и моделирование : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / А. В. Королев. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 280 с. — Серия : Бакалавр и магистр. Академический курс.

ISBN 978-5-9916-8209-1

В учебнике рассматриваются теория линейного программирования, применение теории двойственности к послеоптимизационному анализу и транспортным задачам, теория игр, линейные и неоклассические экономические модели, эконометрические модели, модели финансового менеджмента, метод реальных опционов, традиционные модели макроэкономики и современные, интенсивно развивающиеся методы макроэкономического моделирования.

Учебник содержит теоретические вопросы, примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного решения по всем разделам курса

Для бакалавров, магистров и аспирантов экономических специальностей высших учебных заведений, а также для студентов направления «Менеджмент».

УДК
ББК

ISBN 978-5-9916-8209-1

Оглавление

Предисловие

Во всех сферах управления большое место занимает принятие решений. Оптимизационные задачи возникают в связи с многочисленностью возможностей функционирования экономического объекта, когда необходимо выбрать вариант, наилучший с точки зрения некоторого критерия, характеризуемого соответствующей целевой функцией (например, минимумом затрат при максимуме продукции). Поэтому современный аппарат математических методов для решения экономических и управленческих задач превратился в самостоятельную научную и прикладную область.

Учебник состоит из девяти разделов: задачи, которые можно решать и, главное, анализировать методами линейного программирования (симплекс-метод и применение теории двойственности и послеоптимизационного анализа к задачам менеджмента и транспортным задачам), задачи теории игр с разбором характерных ошибок, задачи анализа экономики с помощью модели «затраты-выпуск» В. В. Леонтьева и модели Дж. фон Неймана, неоклассические модели типа Эрроу — Дебре, эконометрические модели экономики и менеджмента, задачи финансового менеджмента (модель оценки доходности финансовых активов У. Шарпа, ее развитие и приложение для целей финансового менеджмента, финансовая математика и теория Модильяни — Миллера), задачи по теории стохастических дифференциальных уравнений и методу реальных опционов, макроэкономические модели (традиционные — неоклассическая, кейнсианская, *IS-LM*, а также принцип максимума Понтрягина, модель экзогенного роста Лукаса — Узавы), задачи по использованию динамического программирования и теории массового обслуживания в микроэкономике и менеджменте.

Задачи, представленные для самостоятельной работы относительно просты, но требуют индивидуального подхода к решению. Их описание довольно очевидно, они принципиально мало отличаются от задач, разбираемых на аудиторных занятиях.

В результате изучения материалов данного учебника студент должен:

знать

• основные понятия из областей математики, на основе которых строятся экономические модели;

• основные модели анализа экономики и менеджмента;

• задачи, связанные с анализом экономических ситуаций, и методы их решения;

уметь

• проводить анализ экономики с помощью изученных экономических моделей;

• решать задачи различной степени сложности в области экономики;

• выбирать модель, необходимую для анализа сложившейся ситуации;

владеть

• основными навыками линейного программирования и анализа чувствительности;

• навыками решения задач по теории игр;

• навыками применения модели Леонтьева;

• навыками анализа моделей неоклассики;

• навыками применения регрессионного анализа;

• навыками применения моделей финансового менеджмента;

• леммой Ито и аппаратом стохастических дифференциальных уравнений;

• вариационными методами;

• принципом максимума Понтрягина;

• методами динамического программирования и теории массового обслуживания.

В данном учебнике, как это часто бывает в литературе по экономико-математическим методам, знаки неравенства будут использоваться для векторов, хотя это и противоречит обычным математическим обозначениям. Любая запись неравенства для векторов будет пониматься покомпонентно. Векторы будут обозначены жирными буквами. Символ $\mathbf{0}$ в данном случае будет обозначать не число 0, а нулевой вектор. При этом запись $\mathbf{X} \gg \mathbf{0}$ будет означать, что все компоненты вектора $\mathbf{X}$ положительны. Символ E везде обозначает единичную матрицу подходящей размерности. Через $\mathbb{R}^n$ обозначено евклидово пространство размерности n. Через $Int(A)$ обозначается внутренность (множество внутренних точек) множества A. Через $\mathbb{R}_+$ обозначается множество всех неотрицательных вещественных чисел.

Учебник предназначен для бакалавров, магистров и аспирантов экономических специальностей высших учебных заведений, а также для студентов направления «Менеджмент».

Глава 1
ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В результате изучения главы 1 студент должен:

знать

• методы решения задач линейного программирования;

• теорию двойственности;

• методы решения транспортных задач;

уметь

• выполнять послеоптимизационный анализ (анализ чувствительности найденного оптимального решения);

владеть

• основными навыками решения линейных оптимизационных задач;

• навыками анализа найденных решений.

1.1. Выпуклые многогранные множества

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ размерности n.

Определение 1.1. Множество точек, обладающее тем свойством, что вместе с любыми двумя точками оно содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки, называются *выпуклым множеством.*

Лемма 1.1. Пересечение любого конечного числа выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Доказательство совершенно очевидно и предлагается в качестве упражнения.

Определение 1.2. Множество точек $\mathbf{x}$, удовлетворяющих условию $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = b$, где $\mathbf{a}$ — вектор из $\mathbb{R}^n$, а b — число, называется $(n - 1)$-*мерной плоскостью* (гиперплоскостью). При этом $\mathbf{a}$ называется направляющим вектором гиперплоскости.

Замечание 1.1. Таким образом, гиперплоскость – это аффинное пространство размерности на единицу меньшей, чем размерность всего пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. в данном случае размерности $n - 1$. Через $(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ обозначено скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{x}$.

Определение 1.3. Множество точек $\mathbf{x}$, удовлетворяющих условию $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \leqslant b$, называется *замкнутым полупространством.*

Очевидно, что полупространство является выпуклым множеством.

Определение 1.4. Пересечение конечного числа полупространств, т.е. множество точек, удовлетворяющих конечному числу неравенств

$$\begin{cases} (\mathbf{a}^1, \mathbf{x}) \leqslant b_1, \\ (\mathbf{a}^2, \mathbf{x}) \leqslant b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ (\mathbf{a}^m, \mathbf{x}) \leqslant b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

называется *выпуклым многогранником*, или выпуклым многогранным множеством.

Определение 1.5. Точка, которая удовлетворяет условию (1.1) и, кроме того, обращает в равенство по крайней мере n его линейно независимых неравенств, т.е. принадлежащая выпуклому многогранному множеству (1.1) и являющаяся пересечением n штук n-мерных плоскостей, называется *вершиной*, или угловой точкой, выпуклого многогранника (1.1).

Примеры выпуклых многогранных множеств:

1) все пространство (пустое множество полупространств);

2) полупространство;

3) плоскость (пересечение двух полупространств: $\begin{cases}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \leqslant b, \\ (\mathbf{a}, \mathbf{x}) \geqslant b\end{cases}$);

4) трехмерный куб (рис. 1.1):

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0, \\ x_1 \leqslant 1, \\ x_2 \geqslant 0, \\ x_2 \leqslant 1, \\ x_3 \geqslant 0, \\ x_3 \leqslant 1, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \mathbf{a}^1 = (1,0,0),\ (\mathbf{a}^1, \mathbf{x}) \geqslant 0, \\ x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 \geqslant 0; \end{array}$$

5) луч в первом октанте (рис. 1.2):

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0, \\ x_1 = x_2, \\ x_2 = x_3, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ x_1 - x_2 \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 - x_3 \geqslant 0, \\ x_2 - x_3 \leqslant 0; \end{cases} \end{array}$$

6) симплекс (рис. 1.3):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

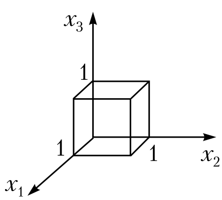


Рис. 1.1

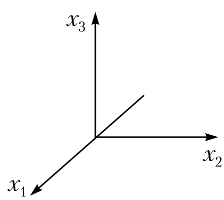


Рис. 1.2

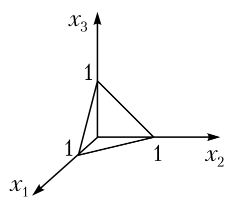


Рис. 1.3

1.2. Простой симплекс-метод

1.2.1. Основные теоремы

Определение 1.6. Следующая задача: требуется максимизировать (минимизировать) линейную функцию

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \to \max\ (\min),\ \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

заданную на выпуклом многогранном множестве Ω:

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: (\mathbf{a}^i, \mathbf{x}) \leqslant b_i, i = 1, ..., m\},$$

называется *задачей линейного программирования*. Функцию f, значение которой оптимизируется, будем называть *целевой функцией*.

Для понимания общей идеи симплекс-метода потребуются следующие основные результаты.

Теорема 1.1 (Вейерштрасса). *Всякая непрерывная функция, заданная на компактном (замкнутом и ограниченном) множестве, имеет минимум (максимум).*

Доказательство теоремы Вейерштрасса приводится в любом стандартном курсе математического анализа[1]. Доказательство следующих четырех теорем оставляем в качестве упражнения.

Теорема 1.2. *Если линейная функция, функция* $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{c}, \mathbf{x})$, *заданная на выпуклом многогранном множестве* Ω, *имеет в точке* $x_0 \in \Omega$ *локальный максимум, то она имеет в этой точке и глобальный максимум.*

Теорема 1.3. *Если* Ω *не содержит прямых, то* Ω *имеет вершины.*

Теорема 1.4. *Если вдоль каждого ребра, исходящего из некоторой вершины* x_0, *целевая функция не возрастает (не убывает), то она не возрастает (не убывает) вдоль каждого луча, исходящего из* x_0, *начало которого лежит в* Ω.

О задаче, которая имеет решение, будем говорить, что она разрешима.

Теорема 1.5. *Если* Ω *не содержит прямых и задача разрешима, то среди точек, в которых достигается максимум, есть вершины.*

1.2.2. Геометрический смысл процедуры симплекс-метода

Симплекс-метод — это итерационный процесс, который начинается в одной из вершин и заключается в последовательном переходе в соседнюю вершину вдоль одного из ребер выпуклого многогранного множества в поисках оптимального значения целевой функции. При этом в каждой вершине ненулевые переменные будем называть базисными, а нулевые переменные — небазисными. Начальную вершину будем называть *опорным планом*, а вершину, в которой достигается оптимум целевой функции, — *оптимальным планом*.

Любой набор значений переменных, удовлетворяющий ограничениям задачи линейного программирования (но, быть может, не доставляющий оптимума, а лишь лежащий в области допустимых значений, или допустимых планов), называется *допустимым решением*, или *допустимым планом*, задачи линейного программирования.

Геометрический смысл процедуры симплекс-метода рассмотрим на примере решения задачи линейного программирования. Другими словами, мы просто будем решать поставленную задачу, параллельно выполняя три вещи.

1. Просто решаем оптимизационную задачу с помощью алгебраических преобразований системы уравнений.

---

[1] См., например: *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. М. : Физматлит, 2001; См. также: *Шипачев В. С.* Высшая математика. Полный курс в 2 т. : учебник для академического бакалавриата / под ред. А. Н. Тихонова. 4-е изд., испр. и доп. М. : Издательство Юрайт, 2016.

2. Смотрим, чему наши действия соответствуют геометрически, т.е. от какой вершины в нашем выпуклом многограннике по какому ребру мы переходим к другой вершине.

3. Наблюдаем, каким формальным преобразованиям симплекс-таблицы с помощью исключений Гаусса — Жордана соответствуют наши преобразования системы уравнений вручную.

Один раз нужно все это подробно проделать, чтобы в течение всей оставшейся жизни, уже не задумываясь, механически решать линейные задачи с помощью преобразований симплекс-таблиц.

Итак, рассмотрим следующую задачу. Требуется максимизировать значение функции

$$F(\mathbf{x}) = 6x_1 + 2x_2 \to \max,$$

заданной на выпуклом многогранном множестве Ω:

$$\Omega = \begin{cases} x_1 \leqslant 9, \\ 0,5x_1 + 0,5x_2 \leqslant 11, \\ 0,2x_1 + 0,8x_2 \leqslant 13, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Преобразуем неравенства в равенства, вводя новую фиктивную переменную для каждого неравенства, за исключением тех неравенств, которые являются просто ограничениями на знак переменной. Введем также новую переменную z для значения целевой функции:

$$z = F(\mathbf{x}) = 6x_1 + 2x_2.$$

Получилась следующая система уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} z - 6x_1 - 2x_2 = 0, \\ x_1 + x_3 = 9, \\ 0,5x_1 + 0,5x_2 + x_4 = 11, \\ 0,2x_1 + 0,8x_2 + x_5 = 13, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Тем самым сделан переход из двумерного пространства исходной задачи в пространство пяти измерений, проекция которого на плоскость (x_1, x_2) показана на рис. 1.4.

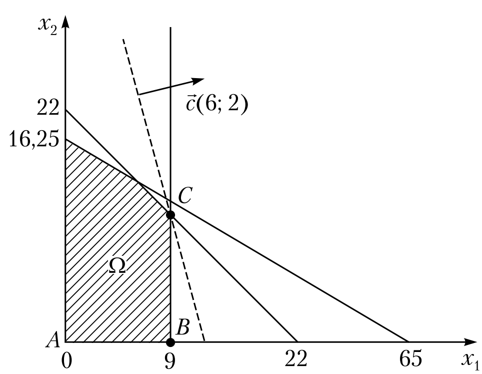


Рис. 1.4

В качестве опорного плана возьмем точку $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 9$, $x_4 = 11$, $x_5 = 13$, $z = 0$. Таким образом, базисными переменными опорного плана являются x_3, x_4, x_5, а его небазисными переменными — x_1 и x_2, и мы находимся в вершине A (см. рис. 1.4). Переменную z также всегда будем считать базисной. Рассматриваемую ситуацию удобно изображать в виде следующей таблицы симплекс-метода, которая называется симплекс-таблицей (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Базисная переменная	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	Значение базисной переменной	δ
x_3	1	0	1	0	0	0	9	9
x_4	0,5	0,5	0	1	0	0	11	22
x_5	0,2	0,8	0	0	1	0	13	65
z	–6	–2	0	0	0	1	0	—

Уравнение, которому соответствует последняя строка симплекс-таблицы (т.е. уравнение для целевой функции, значение которой мы обозначи через z) будем для краткости называть просто z-уравнением.

Будем двигаться вдоль того ребра множества Ω, вдоль которого целевая функция быстрее всего возрастает. Это направление соответствует увеличению переменной x_1 при сохранении равенства нулю всех остальных небазисных переменных, потому что при переменной x_1 в z-строке табл. 1.1 стоит наибольшее по модулю отрицательное число (–6). Такой столбец в дальнейшем будем называть разрешающим.

Как долго можно двигаться в направлении увеличения x_1? С одной стороны, чем дольше, тем лучше. Но с другой стороны, нельзя (в простом симплекс-методе) выходить за пределы области Ω. Значит, можно двигаться вдоль выбранного ребра до первого пересечения с одной из гиперплоскостей, ограничивающих Ω. Очевидно, что это предельное значение x_1 равно наименьшему из положительных отношений (которые будем обозначать δ_i, где i — номер строки) чисел, стоящих в столбце значений базисных переменных симплекс-таблицы, к числам, стоящим в соответствующих строках разрешающего столбца. В данном случае этот минимум (равный 9) достигается в строке табл. 1.1, соответствующей переменной x_3. Такую строку в дальнейшем будем называть разрешающей строкой.

Таким образом, на первой итерации симплекс-метода происходило движение по ребру AB множества Ω и перешли из вершины A в вершину B. При этом ограничение $x_1 \geqslant 0$ перестало быть активным (перестало выполняться как равенство), а ограничение $x_1 \leqslant 9$ стало активным (стало выполняться как равенство). Значение переменной x_1 увеличилось от 0 до 9, значения всех базисных переменных изменились.

Посмотрим, чему это соответствует алгебраически. В точке A все базисные переменные x_3, x_4, x_5, z выражались через небазисные x_1, x_2 (см. табл. 1.1). Движение по ребру AB соответствует увеличению значения x_1 от 0 до 9, значения остальных небазисных переменных (в данном случае x_2) остаются равными 0, значения всех базисных переменных изменяются в соответствии с табл. 1.1. Переход из вершины A в вершину B означает выведение переменной x_3 из базиса и введение x_1 в базис. Для того чтобы построить симплекс-таблицу в вершине B и иметь возможность двигаться дальше, нужно выразить новые базисные переменные x_1, x_4, x_5, z через новые небазисные x_2, x_3 в вершине B. Для этого переменная x_1 выражается через x_3 с использованием строки x_3 табл. 1.1:

$$x_1 = 9 - x_3,$$

и данное выражение подставляется в уравнения для строк x_4, x_5, z табл. 1.1.

В результате получаются следующие уравнения:

$$0,5(9 - x_3) + 0,5x_2 + x_4 = 11,$$
$$0,5x_2 - 0,5x_3 + x_4 = 6,5,$$
$$0,2(9 - x_3) + 0,8x_2 + x_5 = 13,$$
$$0,8x_2 - 0,2x_3 + x_5 = 11,2,$$
$$z - 6(9 - x_3) - 2x_2 = 0,$$
$$z - 2x_2 + 6x_3 = 54.$$

Получены выражения x_1, x_2, x_5, z через x_2, x_3, на основании которых можно построить симплекс-табл. 1.2, соответствующую вершине B.

Таблица 1.2

Базисная переменная	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	Значение базисной переменной	δ
x_1	1	0	1	0	0	0	9	—
x_4	0	0,5	–0,5	1	0	0	6,5	13
x_5	0	0,8	–0,2	0	1	0	11,2	14
z	0	–2	6	0	0	1	54	—

Точно так же, как и на первой итерации, определяются разрешающий столбец x_2 и разрешающая строка x_4, т.е. движение происходит по ребру BC из вершины B в вершину C. При этом значение переменной x_2 меняется от 0 до 13 и x_2 вводится в базис, а переменная x_4 выводится из базиса. Для того чтобы выразить новые базисные переменные x_1, x_2, x_5, z через небазисные x_3, x_4, нужно выразить сначала x_2 через x_3, x_4, используя строку x_4 табл. 1.2:

$$0,5x_2 - 0,5x_3 + x_4 = 6,5,$$
$$x_2 = 13 + x_3 - 2x_4$$

и подставить это выражение в уравнение для строк x_5, z:

$$0,8x_2 - 0,2x_3 + x_5 = 11,2,$$
$$0,8(13 + x_3 - 2x_4) - 0,2x_3 + x_5 = 11,2,$$
$$0,6x_3 - 1,6x_4 + x_5 = 0,8,$$
$$-2x_2 + 6x_3 + z = 54,$$
$$-2(13 + x_3 - 2x_4) + 6x_3 + z = 54,$$
$$z + 4x_3 + 4x_4 = 80.$$

Так как в полученном z-уравнении все коэффициенты при базисных переменных неотрицательны, очевидно, невозможно увеличить значение переменной z, двигаясь из точки C по какому бы то ни было ребру. Тогда по теореме 1.4 в точке C достигается локальный максимум, следовательно, по теореме 1.2 этот максимум является и глобальным максимумом функции f на Ω.

Оптимальное решение рассматриваемой задачи: $x_1 = 9$; $x_2 = 13$; $z = 80$.

Если внимательно посмотреть на преобразования уравнений, которые производились при переходе от одной вершины к другой, то легко заметить, что мы просто исключали из системы уравнений одну из переменных, выражая ее через другие переменные с помощью одного из уравнений системы и подставляя это выражение во все остальные уравнения системы. Этот процесс называется *исключениями Гаусса — Жордана*, или преобразованиями Гаусса — Жордана, и используется также при решении систем алгебраических уравнений. Таким образом, процедура симплекс-метода состоит в последовательном выполнении исключений Гаусса — Жордана. Эту процедуру мы теперь опишем формально в следующем подпараграфе.

1.2.3. Алгоритм простого симплекс-метода

Пусть математическая модель задачи выглядит следующим образом: определить вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, который удовлетворяет ограничениям вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i,\ i = 1, 2, ..., m;\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, ..., n,$$

и обеспечивает максимум целевой функции

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

где a_{ij}, b_i, c_j — коэффициенты, $b_i > 0$.

1. Составление первого опорного плана. Перейдем от системы неравенств к системе уравнений введением дополнительных переменных:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,$$

где $x_{n+i} \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3, ..., m$.

На первом шаге дополнительные переменные будут играть роль базисных переменных (БП), а переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ — роль небазисных.

Принимая $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, определим значения базисных переменных: $x_{n+i} = b_i$, $i = 1, 2, 3, ..., m$.

Таким образом получено первое допустимое решение:

$$\tilde{\mathbf{x}} = (0, 0, 0, ..., 0, b_1, b_2, ..., b_m),\ \ F(\tilde{\mathbf{x}}) = 0.$$

Строится симплекс-таблица. Последняя строка называется z-строкой и содержит коэффициенты целевой функции, взятые с обратным знаком.

2. Проверка плана на оптимальность. Если все коэффициенты z-строки симплекс-таблицы неотрицательны, то опорный план является и оптимальным планом. Если же хотя бы один коэффициент z-строки отрицателен, то план можно улучшить.

3. Определение ведущих, или разрешающих, столбца и сроки. Среди отрицательных коэффициентов z-строки выбирается наибольший по модулю.

Его столбец и будет разрешающим. Пусть это будет столбец x_{j_1}. Тем самым выбрано ребро, при движении по которому целевая функция быстрее всего возрастает. Пересечение m ограничений типа равенства и еще n ограничений вида $x_j = 0$ определяет точку в $(n + m)$-мерном пространстве.

Когда меняется значение одной из n небазисных переменных, то получится уже $n + m - 1$ ограничение. При движении по выбранному ребру меняется компонента x_{j_1}, соответствующая разрешающему столбцу. Остальные компоненты, кроме x_{j_1}, не принадлежащие базису, не меняются, а компоненты, которые принадлежат базису, меняются. Как узнать, какая из базисных переменных первой обратится в нуль?

Элементы столбца свободных членов симплекс-таблицы делим на элементы с тем же знаком ведущего столбца (+/+, –/–). Строка, соответствующая наименьшему значению положительных отношений, является ведущей, или разрешающей, строкой. Пусть это будет строка x_{j_2}. Таким образом, переменная x_{j_1} вводится в базис, а переменная x_{j_2} выводится из него. Элемент симплекс-таблицы, стоящий на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, называется разрешающим, или ведущим, элементом.

4. Построение нового опорного плана. Делается исключение Гаусса — Жордана. Нетрудно убедиться, что оно выполняется следующим образом: все элементы ведущей строки старой симплекс-таблицы делятся на разрешающий элемент, результаты заносятся в новую симплекс-таблицу. На месте разрешающего элемента новой симплекс-таблицы будет стоять 1, а все остальные элементы разрешающего столбца новой симплекс-таблицы заполняются нулями, в том числе и клетка разрешающего столбца в z-строке. Остальные клетки новой симплекс-таблицы заполняются по правилу прямоугольника:

$$\text{НЭ} = \text{СтЭ} - (A \cdot B)/\text{РЭ},$$

где НЭ — новый элемент; СтЭ — старый элемент; РЭ — разрешающий элемент; A и B — элементы старой симплекс-таблицы, образующие прямоугольник с элементами СтЭ и РЭ. Равносильная, но не поэлементная, а построчная запись того же самого правила имеет вид

$$\text{НС} = \text{СтС} - \text{К} \cdot \text{НРС},$$

где НС — новая строка; СтС — старая строка; К — коэффициент разрешающего столбца в СтС; НРС — новая разрешающая строка.

Затем нужно перейти к п. 2 алгоритма.

Замечание 1.2. Если решается задача минимизации целевой функции, то признаком оптимального плана является неположительность значений всех элементов z-строки.

Замечание 1.3. Если на некотором шаге алгоритма оказалось, что в ведущем столбце все элементы не положительны, то целевая функция не ограничена на множестве допустимых планов и задача не имеет решения.

Рассмотрим примеры решения задач простым симплекс-методом.

Пример 1.1. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования. Требуется максимизировать функцию $f(x) = x_1 + 2x_2 + 2x_3$ при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 10, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Перейдем к ограничениям равенствами, введя дополнительные переменные:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_1 = 8,$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + s_2 = 10,$$

и запишем данные в исходную симплекс-таблицу (табл. 1.3).

Таблица 1.3

БП	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Z	Значение БП
s_1	1	**2**	2	1	0	0	8
s_2	2	4	1	0	1	0	10
Z	–1	–2	–2	0	0	10	0

Выберем разрешающий элемент (в табл. 1.3 он выделен) и сделаем очередной шаг преобразований Гаусса — Жордана. Получим табл. 1.4.

Таблица 1.4

БП	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Z	Значение БП
x_3	1/2	1	1	1/2	0	0	4
s_2	3/2	3	0	–1/2	1	0	6
Z	0	0	0	1	0	1	8

Таблица 1.4 удовлетворяет условию оптимальности. Таким образом, получим оптимальное решение (0; 0; 4), а значение целевой функции равно 8.

Пример 1.2. Требуется максимизировать функцию $F(x) = 2x_1 + 3x_2$ при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 8, \\ x_2 - x_1 \leqslant 1, \\ x_2 \leqslant 2, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Перейдем к ограничениям равенствами, вводя дополнительные переменные x_3, x_4, x_5, x_6, Z. В частности, имеем $2x_1 + 3x_2 = Z$, или $Z - 2x_1 - 3x_2 = 0$.

Занесем данные в исходную симплекс-таблицу (табл. 1.5).

Таблица 1.5

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	Значение БП
x_3	1	2	1	0	0	0	0	6
x_4	2	1	0	1	0	0	0	8
x_5	–1	**1**	0	0	1	0	0	1
x_6	0	1	0	0	0	1	0	2
Z	–2	–3	0	0	0	0	1	0

Выберем разрешающий элемент (он выделен в табл. 1.5 жирным шрифтом) и выполним очередной шаг исключений Гаусса — Жордана. Получим следующую симплекс-таблицу (табл. 1.6).

Таблица 1.6

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	Значение БП
x_3	3	0	1	0	–2	0	0	4
x_4	3	0	0	1	–1	0	0	7
x_2	–1	1	0	0	1	0	0	1
x_6	**1**	0	0	0	–1	1	0	1
Z	–5	0	0	0	3	0	1	3

И т.д. Результаты очередных шагов симплекс-метода приведены в табл. 1.7—1.9.

Таблица 1.7

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	Значение БП
x_3	0	0	1	0	**1**	–3	0	1
x_4	0	0	0	1	2	–3	0	4
x_2	0	1	0	0	0	1	0	2
x_1	1	0	0	0	–1	1	0	1
Z	0	0	0	0	–2	5	1	8

Таблица 1.8

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	Значение БП
x_5	0	0	1	0	1	–3	0	1
x_4	0	0	–2	1	0	**3**	0	2
x_2	0	1	0	0	0	1	0	2
x_1	1	0	1	0	0	2	0	2
Z	0	0	2	0	0	–1	1	10

Таблица 1.9

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	Значение БП
x_5	0	0	–1	1	1	0	0	3
x_6	0	0	–2/3	1/3	0	1	0	2/3
x_2	0	1	2/3	–1/3	0	0	0	4/3
x_1	1	0	–1/3	2/3	0	0	0	10/3
Z	0	0	4/3	1/3	0	0	1	32/3

Целевая строка табл. 1.9 удовлетворяет условию оптимальности, таким образом, найдено оптимальное решение:

$$x_1 = 10/3, x_2 = 4/3;$$

$$F(x) = 2x_1 + 3x_2 = 20/3 + 4 = 32/30.$$

1.3. Двойственность в линейном программировании

1.3.1. Двойственные задачи линейного программирования

Определение 1.7. Задача линейного программирования называется задачей *в стандартной форме*, или *стандартной задачей* линейного программирования, если все ограничения имеют вид неравенства и все переменные ограничены по знаку. Задача линейного программирования называется задачей *в канонической форме*, если все ее ограничения имеют вид равенства и все ее переменные ограничены по знаку.

Замечание 1.4. В линейном программировании любые записи неравенств для векторов понимаются покомпонентно. Например, запись $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ означает, что все компоненты вектора $\mathbf{x}$ положительны.

Рассмотрим *стандартную* задачу линейного программирования

$$\begin{cases} (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \to \max(\min), \\ \mathbf{x}A \leqslant (\geqslant)\, \mathbf{d}, \\ \mathbf{x} \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

где $\quad = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — матрица; $\mathbf{d} = (d_1, ..., d_n)$ — вектор-строка ограничений; $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m)$ — вектор-строка переменных; $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}$.

Матричная запись $\mathbf{x}A \leqslant \mathbf{d}$ в координатной форме выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \dots + x_m a_{m1} \leqslant d_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \dots + x_m a_{mn} \leqslant d_n. \end{cases}$$

Следующая задача в стандартной форме называется *двойственной* к задаче (1.2):

$$\begin{cases} (\mathbf{d}, \mathbf{y}) \to \min(\max), \\ A\mathbf{y} \geqslant (\leqslant)\, \mathbf{c}, \\ \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}, \end{cases} \tag{1.3}$$

где $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Соответственно, задачу (1.2) будем называть *прямой*.

Рассмотрим *каноническую* задачу линейного программирования

$$\begin{cases} (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \to \max(\min), \\ \mathbf{x}A = \mathbf{d}, \\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Двойственной к ней называется задача

$$\begin{cases} (\mathbf{d}, \mathbf{y}) \to \min(\max); \\ A\mathbf{y} \geqslant (\leqslant)\, \mathbf{c}, \end{cases} \tag{1.5}$$

Общее правило построения двойственной задачи линейного программирования

В общем случае двойственная задача линейного программирования формулируется следующим образом. Пусть A — прямая задача. Построим двойственную задачу B.

Каждому ограничению неравенством прямой задачи соответствует ограниченная по знаку переменная двойственной задачи. Каждому ограничению равенством прямой задачи соответствует неограниченная по знаку переменная двойственной задачи. Каждой ограниченной по знаку переменной прямой задачи соответствует ограничение неравенством двойственной задачи. Каждой неограниченной по знаку переменной прямой задачи соответствует ограничение равенством двойственной задачи.

Столбец правых частей ограничений прямой задачи совпадает со строкой коэффициентов целевой функции двойственной задачи. Строка коэффициентов целевой функции прямой задачи совпадает со столбцом правых частей ограничений двойственной задачи. Если прямая задача была на максимум, то двойственная задача должна быть на минимум, и наоборот. Матрица коэффициентов левых частей ограничений прямой задачи совпадает с транспонированной матрицей коэффициентов левых частей ограничений двойственной задачи. При этом предполагается, что в задаче на максимум используются ограничения неравенствами вида $\leqslant$ (т.е. все ограничения неравенствами преобразованы к ограничениям вида $\leqslant$), а в задаче на минимум — ограничения неравенствами вида $\geqslant$ (т.е. все ограничения неравенствами преобразованы к ограничениям вида $\geqslant$). Ясно, что задача, двойственная к двойственной, совпадает с прямой задачей.

Замечание 1.5. Из общего правила построения двойственных задач следует, что задачи (1.2) и (1.3) являются двойственными друг другу.

Пример 1.3. Рассмотрим прямую задачу A: максимизировать линейную функцию

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_4 \leqslant 4, \\ x_2 - 4x_3 + 5x_4 \leqslant 3, \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0, \\ x_2,\ x_3 \ \text{не ограничены по знаку.} \end{cases}$$

Запишем к ней двойственную.

Решение. Задача B, двойственная к A, сводится к минимизации линейной функции

$$4y_1 + 3y_2 + 5y_3$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 3y_1 + 6y_3 \geqslant 1, \\ -y_1 + y_2 + 7y_3 = -1, \\ -4y_2 + 8y_3 = 2, \\ y_1 + 5y_2 - y_3 \geqslant 3, \\ y_1 \geqslant 0, \ y_2 \geqslant 0, \\ y_3 \text{ не ограничена по знаку.} \end{cases}$$

Ясно, что двойственной к B будет снова задача A.

Лемма 1.2. Пусть вектор $\mathbf{x}$ — допустимое решение задачи (1.2), а вектор $\mathbf{y}$ — допустимое решение задачи (1.3). Тогда выполняется условие

$$(\mathbf{c}, \mathbf{x}) \leqslant \mathbf{x}A\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j \leqslant (\mathbf{d}, \mathbf{y}).$$

► ***Доказательство.*** Так как $\mathbf{x}$ — допустимое решение задачи (1.2), то $\mathbf{x}A \leqslant \mathbf{d}$. Все компоненты вектора $\mathbf{y}$ неотрицательны и, следовательно, из того, что $\mathbf{x}A \leqslant \mathbf{d}$, следует, что

$$\mathbf{x}A\mathbf{y} \leqslant (\mathbf{d}, \mathbf{y}).$$

Так как $\mathbf{y}$ — допустимое решение задачи (1.3), то $A\mathbf{y} \geqslant \mathbf{c}$. Все компоненты вектора $\mathbf{x}$ неотрицательны и, следовательно, из того, что $A\mathbf{y} \geqslant \mathbf{c}$, следует, что

$$\mathbf{x}\mathrm{A}\mathbf{y} \geqslant (\mathbf{c}, \mathbf{x}).$$

Таким образом, имеем $\mathbf{x}A\mathbf{y} \leqslant (\mathbf{d}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x}\mathrm{A}\mathbf{y} \geqslant (\mathbf{c}, \mathbf{x})$, что и требовалось доказать. ◄

Лемма 1.3. Пусть вектор $\mathbf{x}$ — допустимое решение задачи (1.4), а вектор $\mathbf{y}$ — допустимое решение задачи (1.5), тогда $(\mathbf{c}, \mathbf{x}) \leqslant \mathbf{x}\mathrm{A}\mathbf{y} = (\mathbf{d}, \mathbf{y})$.

► ***Доказательство***. Так как $\mathbf{y}$ — допусимое решение двойственной задачи (1.5), то $A\mathbf{y} \geqslant \mathbf{c}$. Так как $\mathbf{x} \geqslant 0$, то из того, что $A\mathbf{y} \geqslant \mathbf{c}$, следует, что

$$\mathbf{x}\mathrm{A}\mathbf{y} \geqslant (\mathbf{c}, \mathbf{x}).$$

Так как $\mathbf{x}$ — допустимое решение прямой задачи (1.4), следовательно, $\mathbf{x}A = \mathbf{d}$. Таким образом, имеем $\mathbf{x}\mathrm{A}\mathbf{y} \geqslant (\mathbf{c}, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}A\mathbf{y} = (\mathbf{d}, \mathbf{y})$, что и требовалось доказать. ◄

Общий случай этого утверждения формулируется так.

Пусть $\mathbf{x}$ — любое допустимое решение прямой задачи линейного программирования (на максимум), $\mathbf{y}$ — любое допустимое решение двойственной задачи линейного программирования (на минимум), тогда $(\mathbf{c}, \mathbf{x}) \leqslant (\mathbf{d}, \mathbf{y})$.

Теорема 1.6. *Пусть $\overline{\mathbf{x}}$ — допустимое решение задачи линейного программирования, $\overline{\mathbf{y}}$ — допустимое решение двойственной задачи. Если $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{y}}$ удовлетворяют условию* $(\mathbf{c}, \overline{\mathbf{x}}) = (\mathbf{d}, \overline{\mathbf{y}})$, *то $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{y}}$ — оптимальные решения соответствующих задач.*

► ***Доказательство.*** Пусть $\mathbf{x}$ — любое допустимое решение прямой задачи. Тогда согласно лемме 1.2 или 1.3

$$(\mathbf{c}, \mathbf{x}) \leqslant (\mathbf{d}, \overline{\mathbf{y}}) = (\mathbf{c}, \overline{\mathbf{x}}),$$

т.е. $\overline{\mathbf{x}}$ — оптимальное решение прямой задачи.

Пусть $\mathbf{y}$ — любое допустимое решение двойственной задачи, тогда согласно лемме 1.2 или 1.3

$$(\mathbf{d}, \mathbf{y}) \geqslant (\mathbf{c}, \overline{\mathbf{x}}) = (\mathbf{d}, \overline{\mathbf{y}}),$$

т.е. $\overline{\mathbf{y}}$ — оптимальное решение двойственной задачи. ◀

Следующая теорема (Фаркаша), которую иногда также называют леммой Фаркаша, является краеугольным камнем всей теории двойственности. Мы приводим ее здесь для полноты изложения[1].

Теорема 1.7 (лемма Фаркаша). *Система линейных неравенств* $(\mathbf{c}_1, \mathbf{x}) \geqslant 0, \ldots, (\mathbf{c}_m, \mathbf{x}) \geqslant 0$ *влечет линейное неравенство* $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \geqslant 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{a}$ *— коническая комбинация векторов* $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \ldots, \mathbf{c}_m$, *т.е.*

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{c}_i; \;\; \lambda_i \geqslant 0.$$

Теорема 1.8 (основная теорема двойственности). *Если прямая и двойственная задачи имеют допустимые решения, то обе они имеют оптимальные решения* $\overline{\mathbf{x}}$ *и* $\overline{\mathbf{y}}$, *причем* $(\mathbf{c}, \overline{\mathbf{x}}) = (\mathbf{d}, \overline{\mathbf{y}})$.

1.3.2. Теорема равновесия

Утверждения следующей теоремы не только помогают в поиске оптимальных решений, но и позволяют дать интерпретацию двойственных переменных и построить процедуру послеоптимизационного анализа, или анализа чувствительности.

Теорема 1.9 (теорема равновесия). *Для того чтобы допустимые решения* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *прямой и двойственной задач в стандартной форме были оптимальными решениями этих задач, необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений*:

$$y_j = 0, \text{ если } \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} < d_j; \tag{1.6}$$

$$x_i = 0, \text{ если } \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j > c_i. \tag{1.7}$$

Если прямая задача задана в канонической форме, то для того чтобы допустимые решения $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *были оптимальными решениями соответствующих задач, необходимо и достаточно выполнения условия* (1.7).

Ограничения (1.6) и (1.7) называются *условиями дополняющей нежесткости*, или *условиями дополнительной нежестокости*, и представляют собой частный случай условий Куна — Таккера.

► ***Доказательство.*** 1. Случай задач в стандартной форме.

Достаточность. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — допустимое решение задачи (1.2) (прямой), тогда

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} < d_j, \; j = 1, \ldots, n.$$

---

[1] Доказательство леммы Фаркаша можно найти в любом учебнике по исследованию операций, см., например: *Шевченко В. Н., Золотых Н. Ю.* Линейное и целочисленное линейное программирование. Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, 2004. Там же можно найти и доказательство основной теоремы двойственности, опирающееся на лемму Фаркаша.

Умножим каждое из этих неравенств на y_j и, учитывая, что $y_j \geqslant 0$, получим

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} y_j \leqslant d_j y_j,\ j = 1, ..., n.$$

Суммируя эти равенства по j, получим

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} y_j = (\mathbf{d}, \mathbf{y}). \tag{1.8}$$

Пусть $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ — допустимое решение задачи (1.3), тогда

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \geqslant c_i,\ i = 1, ..., m.$$

Умножим каждое из этих неравенств на x_i и, учитывая, что $x_i \geqslant 0$, получим

$$x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \geqslant c_i x_i.$$

Суммируя эти равенства по i, получим

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = (\mathbf{c}, \mathbf{x}). \tag{1.9}$$

Согласно формулам (1.8) и (1.9) $(\mathbf{c}, \mathbf{x}) = (\mathbf{d}, \mathbf{y})$. Тогда по теореме 1.6 $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — оптимальные решения соответствующих задач.

Необходимость. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — оптимальные решения соответствующих задач (1.2) и (1.3), тогда в силу основной теоремы двойственности (теорема 1.8) $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ должны удовлетворять критерию оптимальности

$$\sum_{i=1}^{m} x_i c = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{n} d_j y_j. \tag{1.10}$$

Перепишем левое равенство в формуле (1.10) следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \left(c_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right) = 0.$$

Отсюда очевидным образом следует выполнение условия (1.7).

Перепишем правое равенство в (1.10) следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} - d_j \right) = 0.$$

Отсюда очевидным образом следует выполнение условия (1.6).

2. Случай, когда прямая задача задана в канонической форме[1].

Достаточность. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$ — допустимое решение задачи (1.4), тогда

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} = d_j,\ j = 1, ..., n.$$

---

[1] Доказательство в данном случае по форме совпадает с доказательством для случая стандартной формы, но для лучшего усвоения и понимания материала мы приводим его полностью.

Умножим каждое из равенств на y_j:

$$y_j \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} = d_j y_j,\ j = 1, ..., n.$$

Сложим полученные равенства:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = (\mathbf{d}, \mathbf{y}). \qquad (1.11)$$

Пусть $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ — допустимое решение двойственной задачи (1.5), тогда

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \geqslant c_j,\ i = 1, ..., m.$$

Умножим неравенства на x_i и в силу условия $x_i \geqslant 0$ получим

$$x_j \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i = c_i x_i,\ i = 1, ..., m.$$

Сложим найденные равенства:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = (\mathbf{c}, \mathbf{x}). \qquad (1.12)$$

Сравнивая формулы (1.11) и (1.12), получаем $(\mathbf{c}, \mathbf{x}) = (\mathbf{d}, \mathbf{y})$. В силу теоремы 1.6 $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — оптимальные решения соответствующих задач.

Необходимость. Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — оптимальные решения задач (1.4) и (1.5). Тогда по теореме 1.8

$$\sum_{i=1}^{m} x_i c_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{n} d_j y_j. \qquad (1.13)$$

Перепишем левое равенство в формуле (1.10) следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \left(c_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right) = 0.$$

Отсюда следует выполнение условия (1.7). ◄

1.3.3. Экономическая интерпретация двойственных переменных

Рассмотрим задачу составления оптимального плана, максимизирующего прибыль системы в линейной модели производства. Требуется найти m-мерный вектор интенсивности производства $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, максимизирующий функцию:

$$(\mathbf{c}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \to \max \qquad (1.14)$$

при ограничениях $\mathbf{x}A \leqslant \mathbf{d}$, $\mathbf{x} \geqslant 0$, или в координатной форме

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \leqslant d_j,\ j = 1, ..., n, \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, ..., m, \end{cases}$$

где c_i — прибыль, которую получает система от работы i-го объекта с единичной интенсивностью. Элементы a_{ij} матрицы A равны по модулю количеству j-го продукта, производимого или потребляемого i-м объектом при работе объекта с единичной интенсивностью, причем $a_{ij} > 0$, если i-й объект потребляет j-й продукт, и $a_{ij} < 0$, если i-й объект производит j-й продукт. Соответственно, компонента $_j$ вектора $\mathbf{d}$ отрицательна, если это плановое задание на производство j-го продукта, и положительна, если это ограничение на потребление продукта извне.

Двойственной к задаче (1.14) будет задача

$$\begin{cases} (\mathbf{d}, \mathbf{y}) \to \min, \\ A\mathbf{y} \geqslant \mathbf{c}, \\ \mathbf{y} \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.15}$$

Предположим, что вектор $\mathbf{d}$ можно менять, тогда каждому его значению соответствует свое решение задачи (1.14). Обозначим значение целевой функции для этого решения $L(\mathbf{d})$. По основной теореме двойственности $L(\mathbf{d}) = (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = (\mathbf{d}, \mathbf{y})$, где $\mathbf{x}$ — решение прямой задачи, а $\mathbf{y}$ — решение двойственной задачи, $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$. Придадим вектору $\mathbf{d}$ приращение $\Delta\mathbf{d}$ и получим новое решение:

$$L(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d}) = (\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})(\mathbf{y} + \Delta\mathbf{y}) = (\mathbf{d}, \mathbf{y}) + (\Delta\mathbf{d}, \mathbf{y}) + (\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d}, \text{Д}\mathbf{y}).$$

При достаточно малом изменении коэффициента целевой функции решение не меняется, поэтому можно считать, что $\Delta\mathbf{y} = 0$.

Пусть все компоненты вектора $\Delta\mathbf{d}$, за исключением j-й компоненты, равны нулю, а j-я равна Δd_j:

$$\Delta\mathbf{d} = (0, ..., 0, \Delta d_j, 0, 0, ..., 0),$$

тогда

$$\Delta L = L(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d}) - L(\mathbf{d}) = (\Delta\mathbf{d}, \mathbf{y}) = y_j \Delta d_j.$$

Таким образом, $y_j = \dfrac{L(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d}) - L(\mathbf{d})}{\Delta d_j}$, т.е. y_j — приращение целевой функции, деленное на приращение j-го ресурса, которое это приращение целевой функции вызвало. Переходя к пределу, получаем

$$y_j = \frac{\partial L}{\partial d_j},$$

т.е. значение двойственной переменной равно частной производной от оптимального значения целевой функции по правой части ограничения, соответствующего данной двойственной переменной. Другими словами, y_j — не что иное, как предельная эффективность j-го продукта или ресурса, и размерность этой величины равна [руб/размерность j-го ресурса], т.е. j-я компонента решения двойственной задачи имеет размерность цены j-го продукта или ресурса.

Данная компонента решения двойственной задачи показывает, на сколько возрастет целевая функция, если изменить на одну единицу ограничение на j-й ресурс.

В литературе советского периода компоненты решения двойственной задачи называли объективно обусловленными оценками. Обычно их называют теневыми ценами, потому что рыночная цена может оказаться «неправильной», а теневые цены показывают истинное значение предельной эффективности данного продукта. Знание теневых цен позволяет определять приращение целевой функции при малых изменениях правых частей ограничений (не решая задачу заново):

$$\Delta L = \sum_{j=1}^{n} y_j \Delta d_j,$$

где y_j — компоненты решения двойственной задачи.

Предельные значения (нижняя и верхняя границы) изменения каждого из ресурсов, для которых двойственные оценки остаются неизменными, определяются, как нетрудно понять, следующим образом:

$$\Delta b_i^- = \max_{j:\, d_{ji} > 0} \left\{ -\frac{x_j}{d_{ji}} \right\} \leqslant \Delta b_i \leqslant \min_{j:\, d_{ji} < 0} \left\{ -\frac{x_j}{d_{ji}} \right\} = \Delta b_i^+,$$

где Δb_i — предельно допустимое уменьшение i-го ресурса; x_j — компоненты оптимального плана прямой задачи; Δb_i — величина изменения i-го ресурса; Δb_i^+ — предельно допустимое увеличение i-го ресурса; d_{ji} — коэффициенты столбца дополнительной переменной (ассоциированной с i-м ограничением) в заключительной симплекс-таблице оптимального плана прямой задачи.

Замечание 1.6. Соотношение (1.7) устанавливает тот факт, что все объекты, которые убыточны, при ценах y_j в оптимальном плане не участвуют, поэтому если цены на продукты установлены равными соответствующим компонентам вектора **y**, то убыточные объекты можно сразу исключить из рассмотрения.

Замечание 1.7. Соотношение (1.6) утверждает, что если какой-либо ресурс используется в оптимальном плане неполностью, то цена такого ресурса должна быть равна нулю, и если какой-либо продукт производится системой в количестве большем, чем потребность в нем, то цена такого продукта также должна быть равна нулю.

1.3.4. Алгоритм двойственного симплекс-метода

В двойственном симплекс-методе оптимальный план получается в результате движения по псевдопланам. *Псевдопланом* называется план, в котором условия оптимальности выполнены, а среди значений базисных переменных встречаются отрицательные числа. Пусть задана оптимизационная задача на максимум общего вида.

1. *Составление опорного плана.* Систему ограничений исходной задачи следует привести к системе неравенств вида $\leqslant$. Для этого обе части неравенств вида $\geqslant$ умножаются на -1. Затем от неравенств вида $\leqslant$ переходят к системе уравнений, вводя дополнительные неотрицательные переменные, которые являются базисными переменными начального решения. Построенный опорный план заносят в симплекс-таблицу.

2. *Проверка плана на оптимальность.* Если в полученном опорном плане не выполнены условия оптимальности, то задача решается симплекс-мето-

дом (значение столбца δ_i вычисляется только для тех строк, в которых значение базисной переменной и коэффициент ведущего столбца совпадают по знаку). Если в полученном плане условия оптимальности удовлетворены и все значения базисных переменных неотрицательны, то получен оптимальный план. Наличие отрицательных значений базисных переменных говорит о получении псевдоплана.

3. *Выбор разрешающего элемента.* Среди отрицательных значений базисных переменных выберем наибольшее по абсолютной величине. Строка, соответствующая этому значению, является разрешающей. Симплекс-таблица дополняется строкой θ_j, в которую записываются взятые по абсолютной величине результаты деления коэффициентов индексной строки на отрицательные значения коэффициентов разрешающей строки. Для тех столбцов, в которых разрешающая строка имеет неотрицательные коэффициенты, значение θ_j не вычисляется, в них делается прочерк (—). Минимальное значение коэффициента θ_j определяет разрешающий столбец и переменную, вводимую в базис. На пересечении разрешающих столбца и строки находится разрешающий элемент.

4. *Расчет нового опорного плана.* Новый план получается в результате пересчета симплекс-таблицы с помощью исключения Гаусса — Жордана. Затем переходим к п. 2.

Рассмотрим примеры решения задач двойственным симплекс-методом.

Пример 1.4. Требуется двойственным симплекс-методом найти максимум функции при ограничениях на значения переменных

$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 1, \; (b_1), \\ x_1 + x_2 \leqslant 2, \; (b_2), \\ x_1 \geqslant 1/2, \;\; (b_3), \\ x_2 \geqslant 0, \end{cases}$$

а затем ответить на следующий вопрос.

Представьте, что вы топ-менеджер рассматриваемой фирмы и руководство холдинга предлагает вам увеличить плановое задание на выпуск первого продукта, увеличив при этом запас вашего второго ресурса.

Хотите ли вы, чтобы вам увеличили b_1 и b_2 на единицу? Другими словами, вы должны, не решая задачу повторно, определить, в каком направлении и на какую величину изменится при этом прибыль фирмы, т.е. оптимальное значение целевой функции, а также каков будет новый оптимальный план.

Решение. Перейдем к ограничениям равенствами, введя дополнительные переменные:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + s_1 = -1, \\ x_1 + x_2 + s_2 = 2, \\ -x_1 + s_3 = -0{,}5, \end{cases}$$

и запишем данные задачи в виде исходной симплекс-таблицы (табл. 1.10).

Выполнив соответствующие шаги алгоритма двойственного симплекс-метода, получим оптимальное решение (табл. 1.11—1.13).

Из заключительной симплекс-таблицы (см. табл. 1.13) кроме оптимального решения получим значения двойственных оценок: $p_1 = 0$, $p_2 = 2$, $p_3 = -1$ и допу-

Таблица 1.10

БП	x_1	x_1	s_1	s_2	s_3	Z	Значение БП	δ
s_1	–1	**–1**	1	0	0	0	–1	1
s_2	1	1	0	1	0	0	2	2
s_3	–1	0	0	0	1	0	–1/2	—
Z	–1	–2	0	0	0	1	0	—

Таблица 1.11

БП	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Z	Значение БП	Δ
x_2	1	1	–1	0	0	0	1	—
s_2	0	0	**1**	1	0	0	1	1
s_3	–1	0	0	0	1	0	–1/2	—
Z	1	0	–2	0	0	1	2	—

Таблица 1.12

БП	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Z	Значение БП
x_2	1	1	0	1	0	0	2
s_1	0	0	1	1	0	0	1
s_3	–1	0	0	0	1	0	–1/2
Z	1	0	0	2	0	1	4
θ	1	—	—	—	—	—	—

Таблица 1.13

БП	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Z	Значение БП
x_2	0	1	0	1	1	0	3/2
s_1	0	0	1	1	0	0	1
x_1	1	0	0	0	–1	0	1/2
Z	0	0	0	2	1	1	7/2

стимые пределы изменения каждого из ресурсов, в которых двойственные оценки (теневые цены) остаются неизменными:

$$-\infty \leqslant \Delta b_1 \leqslant 1; \quad -1 \leqslant \Delta b_2 < +\infty;$$
$$-0{,}5 \leqslant \Delta b_3 \leqslant 1{,}5.$$

Поскольку предложенные холдингом изменения правых частей ограничений лежат в допустимых пределах, то ответ на поставленный вопрос совершенно очевиден: да, мы хотим увеличения b_1 и b_2 на единицу, потому что в этом случае оптимальное значение целевой функции возрастет на величину

$$\Delta Z = p_1 \Delta b_1 + p_2 \Delta b_2 + p_3 \Delta b_3 = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 2.$$

Пример 1.5. Требуется максимизировать функцию прибыли фирмы при соответствующих ограничениях:

$$3x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8, & (b_1) \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 8, & (b_2)\ (*) \\ x_1 + x_2 \geqslant 3, & (b_3) \\ x_1 \geqslant 1, & (b_4) \\ x_2 \geqslant 1 & (b_5)\ (**) \end{cases}$$

и ответить на следующие вопросы.

Представьте, что вы менеджер данной фирмы.

1. Желаете ли вы, чтобы вам дали дополнительную единицу ресурса b_2 и одновременно увеличили бы план выпуска товара b_5 на одну единицу? Насколько при этом увеличится ваша прибыль?

2. Желаете ли вы, чтобы вам снизили план по выпуску товара b_5 на одну единицу, одновременно сократив вам поставку ресурса b_2 также на единицу? Насколько при этом понизится ваша прибыль?

Решение. Приведем ограничения к виду равенств, введя дополнительные переменные:

$$z - 3x_1 - x_2 = 0;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8; \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8; \\ -x_1 - x_2 + x_5 = -3; \\ x_1 + x_6 = -1; \\ -x_2 + x_7 = -1 \end{cases}$$

и занесем данные в симплекс-таблицу (табл. 1.14).

Таблица 1.14

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Z	Значение БП
x_3	1	2	1	0	0	0	0	0	8
x_4	2	1	0	1	0	0	0	0	8
x_5	–1	–1	0	0	1	0	0	0	–3
x_6	**–1**	0	0	0	0	1	0	0	–1
x_7	0	–1	0	0	0	0	1	0	–1
Z	–3	–1	0	0	0	0	0	1	0

Применив алгоритм двойственного симплекс-метода (табл. 1.15—1.16), найдем сначала оптимальный псевдоплан (табл. 1.17), а затем и оптимальное решение (табл. 1.18). Элемент симплекс-таблицы, выбранный в качестве разрешающего, каждый раз выделяется жирным шрифтом.

Таблица 1.15

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Z	Значение БП
x_3	0	2	1	0	0	1	0	0	7
x_4	0	1	0	1	0	2	0	0	6
x_5	0	–1	0	0	1	**–1**	0	0	–2
x_1	1	0	0	0	0	–1	0	0	1
x_7	0	–1	0	0	0	0	1	0	–1
Z	0	–1	0	0	0	–3	0	1	3

Таблица 1.16

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Z	Значение БП
x_3	0	1	1	0	1	0	0	0	5
x_4	0	–1	0	1	**2**	0	0	0	2
x_6	0	1	0	0	–1	1	0	0	2
x_1	1	1	0	0	–1	0	0	0	3
x_7	0	–1	0	0	0	0	1	0	–1
Z	0	2	0	0	–3	0	0	1	9

Таблица 1.17

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Z	Значение БП
x_3	0	3/2	1	–1/2	0	0	0	0	4
x_5	0	–1/2	0	1/2	1	0	0	0	1
x_6	0	1/2	0	1/2	0	1	0	0	3
x_1	1	1/2	0	1/2	0	0	0	0	4
x_7	0	**–1**	0	0	0	0	1	0	–1
Z	0	1/2	0	3/2	0	0	0	1	12

Найден оптимальный псевдоплан. Условие оптимальности выполнено, а условие допустимости нарушено. Получено решение, которое лучше оптимального, но невозможно.

Таблица 1.18

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Z	Значение БП
x_3	0	0	1	–1/2	0	0	3/2	0	5/2
x_5	0	0	0	1/2	1	0	–1/2	0	3/2
x_6	0	0	0	1/2	0	1	1/2	0	5/2
x_1	1	0	0	1/2	0	0	1/2	0	7/2
x_2	0	1	0	0	0	0	–1	0	1
Z	0	0	0	3/2	0	0	1/2	1	23/2

В табл. 1.18 выполнены как условие оптимальности, так и условие допустимости, т.е. найдено оптимальное решение: $x_1 = 7/2$, $x_2 = 1$; $F(x) = 23/2$.

Таким образом, предельные эффективности ресурсов, как ясно из заключительной симплекс-таблицы (см. табл. 1.18), равны $P_2 = 3/2$; $P_5 = -1/2$; $P_1 = P_3 = P_4 = 0$.

Вычислим предельные значения (нижнюю и верхнюю границы) изменения каждого из ресурсов, для которых двойственные оценки остаются неизменными, и определим также субоптимальные варианты плана, которые приведены в табл. 1.19—1.22. Предельные значения определяются в соответствии со следующим правилом:

$$\Delta b_i^- = \max_{j:\, d_{ji}>0}\{-x_j^*/d_{ji}\} \leqslant \Delta b_i \leqslant \min_{j:\, d_{ji}<0}\{-x_j^*/d_{ji}\} = \Delta b_i^+,$$

где Δb_i^- — величина уменьшения i-го ресурса; x_j^* — компоненты оптимального плана; d_{ji} — коэффициенты столбца дополнительной переменной (ассоциированной с i-м ограничением) в заключительной симплекс-таблице оптимального плана (коэффициенты структурных сдвигов, элементы обратной матрицы оптимального плана); Δb_i — величина изменения i-го ресурса; Δb_i^+ — величина предельно допустимого увеличения i-го ресурса.

Получим следующие результаты:

$$\max_{k:\, d_{k_4}>0}\{-x_k^* / d_{k_4}\} \leqslant \Delta b_2 \leqslant \min_{k:\, d_{k_4}<0}\{-x_k^* / d_{k_4}\}$$

(с уравнением (*) ассоциирована переменная x_4);

$$\Delta b_2^+ = \min\left\{-\frac{5/2}{-1/2}\right\} = 5,\ \Delta b_2^- = \min\left\{-\frac{3/2}{1/2}; -\frac{5/2}{1/2}; -\frac{7/2}{1/2}\right\} = -3,$$

$$-3 \leqslant \Delta b_2 \leqslant 5;\ P_2 = 3/2;$$

Условие (**) ассоциировано с переменной x_7:

$$\max_{k: d_{k_7} > 0} \{-x_k^* / d_{k_7}\} \leqslant \Delta b_2 \leqslant \min_{k: d_{k_7} < 0} \{-x_k^* / d_{k_7}\};$$

$$(-\Delta b_5)^- = \min\left\{-\frac{3/2}{-1/2};\ -\frac{1}{-1}\right\} = 1;$$

$$(-\Delta b_5)^- = \max\left\{-\frac{5/2}{3/2}; -\frac{5/2}{1/2}; -\frac{7/2}{1/2}\right\} = -\frac{5}{3};$$

$$-5/3 \leqslant -\Delta b_2 \leqslant 1;$$

$$-1 \leqslant \Delta b_5 \leqslant 5/3;\ P_5 = -1/2.$$

Субоптимальные варианты плана, соответствующие предельным изменениям второго ресурса $\Delta b_2 = -3$ и $\Delta b_2 = 5$, приведены, соответственно, в правых столбцах табл. 1.19 и 1.20. В столбце, озаглавленном «БП», перечислены базисные переменные оптимального плана. В столбце, озаглавленном «Значение БП», приводятся значения базисных переменных в оптимальном плане. В столбце, озаглавленном k_c, приведены структурные сдвиги соответствующих базисных переменных, т.е. изменения оптимальных значений базисных переменных при увеличении соответствующего ресурса на единицу. В столбце, озаглавленном $k_c\Delta b$, приведены изменения в оптимальном значении базисных переменных при изменении соответствующего ресурса на величину Δb_i.

Таблица 1.19

БП	Значение БП	k_c	$k_c\Delta b$	Вариант плана
x_3	5/2	−1/2	3/2	4
x_5	3/2	1/2	−3/2	0
x_6	5/2	1/2	−3/2	1
x_1	7/2	1/2	−3/2	2
x_2	1	0	0	1
$F(x)$	23/2	3/2	−9/2	7

Таблица 1.20

БП	Значение БП	k_c	$k_c\Delta b$	Вариант плана
x_3	5/2	−1/2	−5/2	0
x_5	3/2	1/2	5/2	4
x_6	5/2	1/2	5/2	5
x_1	7/2	1/2	5/2	6
x_2	1	0	0	1
$F(x)$	23/2	3/2	15/2	19

Точно так же организованы табл. 1.21 и 1.22. Субоптимальные варианты плана, соответствующие предельным изменениям пятого ресурса $\Delta b_5 = -1$ (так как $-(\Delta b_5)^+ = 1$) и $\Delta b_5 = 5/3$ (так как $-(\Delta b_5)^- = -5/3$), приведены, соответственно, в правых столбцах этих таблиц.

Теперь можно легко ответить на поставленные руководством холдинга вопросы, не решая оптимизационную задачу заново.

1. $\Delta F(x) = P_2\Delta b_2 + P_5\Delta b_5 = (3/2)\cdot 1 + (-1/2)\cdot 1 = 1$.

Очевидно, что ответ «да».

2. $\Delta F(x) = P_2\Delta b_2 + P_5\Delta b_5 = (3/2)\cdot(-1) + (-1/2)\cdot(-1) = -1$.

Очевидно, что ответ «нет».

Таблица 1.21

БП	Значение БП	k_c	$k_c \Delta b$	Вариант плана
x_3	5/2	3/2	3/2	4
x_5	3/2	–1/2	–1/2	1
x_6	5/2	1/2	1/2	3
x_1	7/2	1/2	1/2	4
x_2	1	–1	–1	0
$F(x)$	23/2	1/2	1/2	12

Таблица 1.22

БП	Значение БП	k_c	$k_c \Delta b$	Вариант плана
x_3	5/2	3/2	–5/2	0
x_5	3/2	–1/2	5/6	7/3
x_6	5/2	1/2	–5/6	5/3
x_1	7/2	1/2	–5/6	8/3
x_2	1	–1	5/3	8/3
$F(x)$	23/2	1/2	–5/6	32/3

1.3.5. Соотношения двойственности

Рассмотрим процесс решения одновременно прямой и двойственной задач:

- прямая задача (рис. 1.5, табл. 1.23):

$$3x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 10, \\ x_1 \leqslant 5, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

- двойственная задача (рис. 1.6, табл. 1.24):

$$10y_1 + 5y_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geqslant 3, \\ y_1 \geqslant 2, \\ y_1,\ y_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

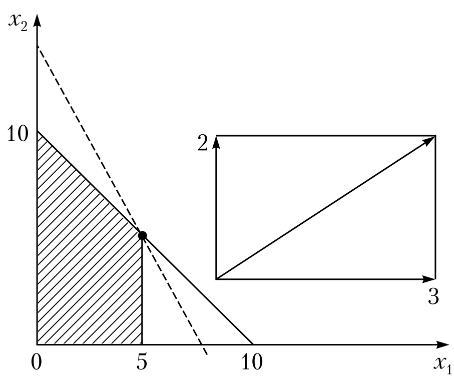


Рис. 1.5

Таблица 1.23

Базисная переменная	x_1	x_2	x_3	x_4	z	Значение базисной переменной
x_3	1	1	1	0	0	10
x_4	1	0	0	1	0	5
z	–3	–2	0	0	1	0
x_3	0	1	1	–1	0	5
x_1	1	0	0	1	0	5
z	0	–2	0	3	1	15
x_2	0	1	1	–1	0	5
x_1	1	0	0	1	0	5
z	0	0	2	1	1	25

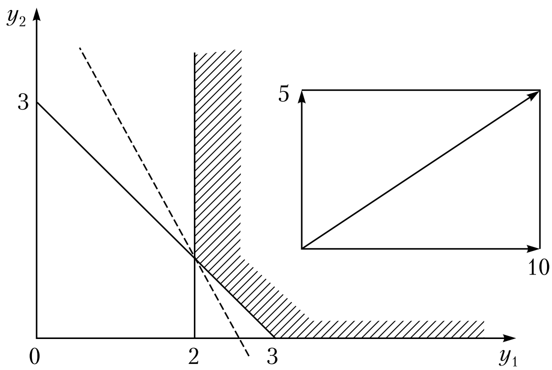


Рис. 1.6

Таблица 1.24

Базисная переменная	y_1	y_2	y_3	y_4	w	Значение базисной переменной
y_3	–1	–1	1	0	0	–3
y_4	–1	0	0	1	0	–2
w	–10	–5	0	0	1	0
y_2	1	1	–1	0	0	3
y_4	–1	0	0	1	0	–2
w	–5	0	–5	0	1	15
y_2	0	1	–1	1	0	1
y_1	1	0	0	–1	0	2
w	0	0	–5	–5	1	25

Определение 1.8. В процессе решения задач симплекс-методом матрицу, расположенную под начальными базисными переменными, часто называется *обратной* матрицей.

Так, например, в рассмотренном примере в прямой задаче обратной матрицей является подматрица нашей симплекс-таблицы, расположенная в столбцах, озаглавленных x_3, x_4, z. Сначала эта матрица была единичной, а в конце решения она стала

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание 1.8. Мы выполнили две итерации решения прямой задачи и, соответственно, две итерации решения двойственной задачи, получив оптимальные планы обеих задач. Нетрудно заметить, что на любой итерации процесса решения

$$\begin{pmatrix} \text{Коэффициент} \\ z\text{-уравнения} \\ \text{при переменной } x_j \\ \text{прямой задачи} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Левая часть} \\ \text{соответствующего} \\ \text{ограничения} \\ \text{двойственной задачи} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Правая часть} \\ \text{соответствующего} \\ \text{ограничения} \\ \text{двойственной задачи} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \text{Значения} \\ \text{двойственных} \\ \text{переменных} \\ \text{на итерации } i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Исходные коэффициенты} \\ \text{целевой функции при базисных} \\ \text{переменных данной} \\ (i\text{-й}) \text{ итерации прямой задачи} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Обратная} \\ \text{матрица} \\ \text{на итерации } i \end{pmatrix}.$$

Для столбцов как левой, так и правой частей ограничений как прямой, так и двойственной задачи справедливы следующие соотношения:

$$\begin{pmatrix} \text{Столбец} \\ \text{на итерации } i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Обратная матрица} \\ \text{на итерации } i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Столбец} \\ \text{исходной модели} \end{pmatrix}.$$

Отсюда, в частности, следует, что компоненты оптимального решения двойственной задачи совпадают с соответствующими элементами индексной строки заключительной симплекс-таблицы прямой задачи в стандартной форме.

1.4. Транспортные задачи

1.4.1. Транспортная модель

Рассмотрим m пунктов производства или хранения и n пунктов потребления некоторого однородного продукта (такими продуктами являются, например, нефть, уголь, цемент, песок и т.д.). Обозначим: a_i — объем производства (запас) продукта в i-м пункте производства; b_j — потребность (спрос) в продукте в j-м пункте потребления. Задана матрица $C = (c_{ij})$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$, c_{ij} — стоимость перевозки единицы продукта из пункта производства i в пункт потребления j.

Предположим, что выполнены следующие условия.

1. Из каждого пункта производства должен быть вывезен весь имеющийся в этом пункте продукт.

2. Потребность в продуктах в пунктах потребления должна быть удовлетворена.

3. Затраты на объем перевозок во всей системе равны сумме затрат на отдельных ее участках, а на каждом участке затраты на перевозку пропорциональны объему перевозок (равны произведению объема перевозок на стоимость перевозки одной единицы продукта).

4. Суммарный объем производства продукта равен общему объему его потребления, т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (рассматривается сбалансированная модель).

Обозначим x_{ij} — объем перевозимого груза из пункта производства i в пункт потребления j. Тогда $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ — количество продукта, который из всех пунктов производства попадает в пункт потребления j; $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ — объем груза, вывезенного из одного пункта i. Следовательно, каждый вариант транспортировки задается $(m \times n)$-матрицей $X = (x_{ij})$, такой что:

а) $x_{ij} \geqslant 0$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$;

б) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, $j = 1, 2, ..., n$;

в) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, $i = 1, 2, ..., m$.

Если $(x_{ij})_{j=1,2,...,n}^{i=1,2,...,m}$ — допустимый вариант транспортировки, т.е. вариант, удовлетворяющий условиям а — в, то стоимость всех перевозок составит

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}. \qquad (1.16)$$

Условия 1—4 задают транспортную модель. На ее основе формулируются различные экстремальные задачи.

Чаще всего рассматривается транспортная задача, приведенная на рис. 1.7:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, ..., n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, ..., m,$$

$$x_{ij} \geqslant 0, i = 1, ..., m, j = 1, ..., n,$$

причем $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

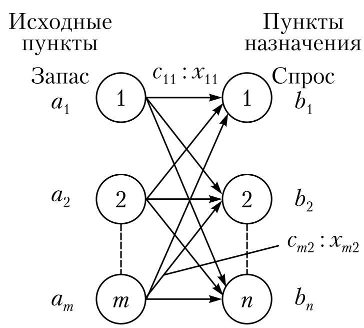


Рис. 1.7

Очевидно, что транспортная задача является задачей линейного программирования (в канонической форме).

Исходные данные транспортной задачи представляются в виде транспортной таблицы (рис. 1.8). Слева от таблицы указаны номера исходных пунктов, сверху — номера пунктов назначения, справа — размер запаса в каждом исходном пункте, снизу — величина спроса в каждом пункте назначения. В каждой клетке транспортной матрицы в правом верхнем углу указывается стоимость перевозки единицы груза из пункта i в пункт j. На рис. 1.9 данная задача изображена в виде сети.

	1	2	3	4	
1	$\boxed{10}$ x_{11}	$\boxed{0}$ x_{12}	$\boxed{20}$ x_{13}	$\boxed{11}$ x_{14}	1
2	$\boxed{12}$ x_{21}	$\boxed{7}$ x_{22}	$\boxed{9}$ x_{23}	$\boxed{20}$ x_{24}	2
3	$\boxed{0}$ x_{31}	$\boxed{14}$ x_{32}	$\boxed{16}$ x_{33}	$\boxed{18}$ x_{35}	5
	5	15	15	10	

Рис. 1.8

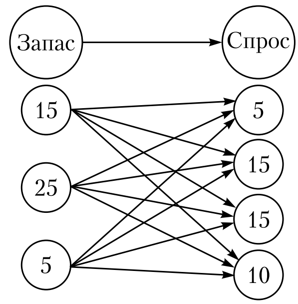


Рис. 1.9

Двойственная задача выглядит следующим образом. Требуется максимизировать функцию

$$w = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \to \max$$

при ограничениях $u_i + v_j \leqslant c_{ij}$, $i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n$, причем переменные u_i, v_j, $i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n$, не ограничены по знаку.

1.4.2. Получение начального (базисного, допустимого) решения. Метод северо-западного угла

Следуя правилу северо-западного угла, начинают с того, что приписывают переменной x_{11} (расположенной в северо-западном углу транспортной таблицы) максимальное значение, которое допускают ограничения на спрос и предложение. После этого вычеркивают, соответственно, столбец или строку (если спрос меньше предложения, то вычеркивают столбец, а если предложение меньше спроса, то вычеркивают строку), фиксируя этим, что остальные элементы вычеркнутого столбца (строки) полагаются равными нулю. Если ограничения, представленные столбцом и строкой, выполняются одновременно, то можно вычеркнуть либо строку, либо столбец. После того как спрос и объем производства во всех невычеркнутых строках и столбцах приведены в соответствие с установленным значением переменной, максимально допустимое значение приписывается первому невычеркнутому элементу новых столбца или строки. Процесс завершается, когда остаются невычеркнутыми в точности одна строка или один столбец.

Для задачи, приведенной на рис. 1.8 поступаем следующим образом:

1) x_{11}: = 5 — столбец 1 вычеркивается, тем самым в первом столбце нельзя больше производить никаких операций. На строку 1 теперь приходится 10 ед.

2) $x_{12} := 10$ — строка 1 вычеркивается, а на долю столбца 2 остается 5 ед.

3) $x_{22} := 5$ — столбец 2 вычеркивается, а в строке 2 остается 20 ед.

4) $x_{23} := 15$ — столбец 3 вычеркивается, а в строке 2 остается 5 ед.

5) $x_{24} := 5$ — строка 2 вычеркивается, а в столбце 4 остается 5 ед.

6) $x_{34} := 5$ — вычеркивается строка 3 или столбец 4.

Таким образом, получено начальное решение: базисные переменные $x_{11} = 5$; $x_{12} = 10$; $x_{22} = 5$; $x_{23} = 15$; $x_{24} = 5$; $x_{34} = 5$. Остальные переменные — небазисные со значениями 0.

Результат применения метода северо-западного угла к рассматриваемой задаче приведен на рис. 1.10.

5	10			15	10	
	5	15	5	25	20	5
			5	5		
5	15	15	10			
	5		5			

Рис. 1.10

Замечание 1.9. Поскольку $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, одно из $(m + n)$ уравнений окажется зависимым, т.е. транспортная задача содержит $(m + n - 1)$ независимых уравнений. Таким образом, начальное базисное допустимое решение должно иметь $m + n - 1$ (в данном случае 6) базисных переменных.

1.4.3. Метод потенциалов

Метод потенциалов решения транспортной задачи, который, как легко заметить, представляет собой вариант двойственного симплекс-метода (см. замечание 1.5), состоит из следующих этапов.

1. Нахождение вводимой в базис переменной. Строке i и столбцу j транспортной таблицы ставятся в соответствие числа u_i и v_j (потенциалы исходных пунктов и пунктов назначения), которые должны удовлетворять уравнению $u_i + v_j = c_{ij}$ для каждой базисной переменной x_{ij}. Эти уравнения образуют систему, состоящую из $m + n - 1$ (по числу базисных переменных) уравнений, в которых фигурирует $m + n$ неизвестных. Значения потенциалов можно определить из данной системы, придавая одному из них произвольное значение, обычно $u_1 := 0$, и затем решая систему из $m + n - 1$ уравнений относительно $m + n - 1$ остальных потенциалов. Оценки $\bar{c}_{pq}$ для небазисных переменных x_{pq} определяются следующим образом:

$$\bar{c}_{pq} = u_p + v_g - c_{pg}.$$

Эти величины не зависят от выбора значения u_1. Если все оценки $\bar{c}_{pq}$ для небазисных переменных окажутся неположительными, то найдено оптимальное решение. Если среди оценок есть положительные, то для включения в базис выбирается небазисная переменная, имеющая самую большую положительную оценку $\bar{c}_{pq}$.

Для рассматриваемой задачи (см. рис. 1.8) уравнения, связанные с базисными переменными, которые определены методом северо-западного угла, будут иметь следующий вид:

$$x_{11}\colon u_1 + v_1 = 10;\ u_1 = 0,\ v_1 = 10;$$
$$x_{12}\colon u_1 + v_2 = 0;\ v_2 = 0;$$
$$x_{22} = u_2 + v_2 = 7;\ u_2 = 7;$$
$$x_{23}\colon u_2 + v_3 = 9;\ v_3 = 2;$$
$$x_{24}\colon u_2 + v_4 = 20;\ v_4 = -13;$$
$$x_{34}\colon u_3 + v_4 = 18;\ u_3 = 5.$$

Проще определить потенциалы непосредственно из транспортной таблицы, не выписывая этих уравнений.

Оценки для небазисных переменных:

$$\begin{aligned}
\overline{c}_{13} &= u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 2 - 20 = -18;\\
\overline{c}_{21} &= u_2 + v_1 - c_{21} = 7 + 10 - 12 = 5;\\
\overline{c}_{14} &= u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 13 - 11 = 2;\\
\overline{c}_{31} &= u_3 + v_1 - c_{31} = 5 + 10 - 0 = 15;\\
\overline{c}_{32} &= u_3 + v_2 - c_{32} = 5 + 0 - 14 = -9;\\
\overline{c}_{33} &= v_3 + u_3 - c_{33} = 2 + 5 - 16 = -9.
\end{aligned}$$

Величины $\overline{c}_{pq}$ указываются в юго-западном углу соответствующей клетки для каждой небазисной переменной. В базис вводится та небазисная переменная, которая имеет наибольшую оценку. В данном случае это x_{31}.

2. Нахождение переменной, выводимой из базиса (построение цикла). Строится замкнутый цикл, соответствующий вводимой переменной (x_{31}). Цикл начинается и заканчивается выбранной небазисной переменной и состоит из последовательности горизонтальных и вертикальных (связанных) отрезков, концами которых должны быть базисные переменные (за исключением тех концов, которые относятся к вводимой в базис переменной): $x_{31} \to x_{11} \to x_{12} \to x_{22} \to x_{24} \to x_{34} \to x_{31}$ (безразлично, обходить по часовой стрелке или против). Ясно, что если значение x_{31} увеличить на единицу, то для сохранения допустимости решения значения базисных переменных, стоящих на изломах цикла, необходимо скорректировать следующим образом:

1) уменьшить x_{11} на единицу;
2) увеличить x_{12} на единицу;
3) уменьшить x_{22} на единицу;
4) увеличить x_{24} на единицу;
5) уменьшить x_{34} на единицу.

Это процесс обозначается знаками «+» и «–» в соответствующих местах транспортной таблицы. Таким образом, введенные изменения не нарушают ограничений задачи. Переменная, выводимая из базиса, выбирается из находящихся на изломах цикла переменных, значения которых уменьшаются при увеличении x_{31}. В таблице их клетки помечены знаком «–». Выводимой из базиса переменной становится та, которая имеет наименьшее значение, поскольку именно она раньше всех достигает 0 и дальнейшее уменьшение сделает ее отрицательной. Выбираем x_{34} (вместо x_{34} можно было выбрать x_{11} или x_{22}). Тогда значение x_{31} станет равным 5, а переменные, находящиеся на изломах цепи (базисные), соответствующим образом корректируются (т.е. увеличиваются или уменьшаются на 5 в зависимости от знака «+» или «–»).

Проверяется оптимальность полученного решения, т.е. повторяются пп. 1, 2. На некоторой итерации при вычислении новых оценок для небазисных переменных окажется, что все они неположительны (условие оптимальности при решении задачи на минимум симплекс-методом), т.е. получено оптимальное решение.

Пример 1.6. Решим методов потенциалов задачу, представленную на рис. 1.8.

Решение. Опорное решение, найденное методом северо-западного угла, давало суммарную стоимость перевозок

$$F(X) = 5 \cdot 10 + 10 \cdot 0 + 5 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 5 \cdot 20 + 5 \cdot 18 = 410.$$

Имеем следующие итерации:

• 1-я: переменная x_{31} вводится в базис, а переменная x_{34} выводится из базиса (рис. 1.11);

• 2-я: переменная x_{21} вводится в базис, а переменная x_{11} выводится из базиса (рис. 1.12);

• 3-я: переменная x_{14} вводится в базис, а переменная x_{24} выводится из базиса (рис. 1.13);

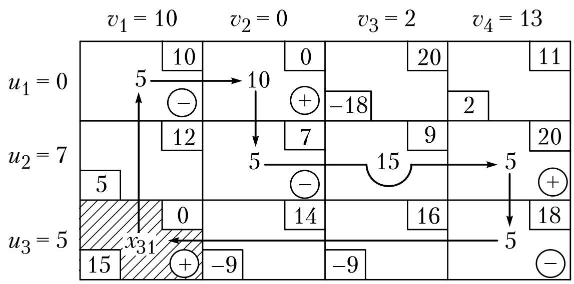


Рис. 1.11

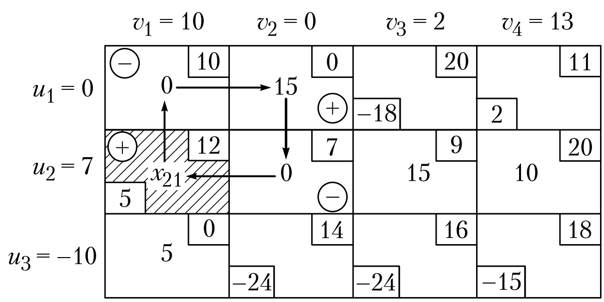


Рис. 1.12

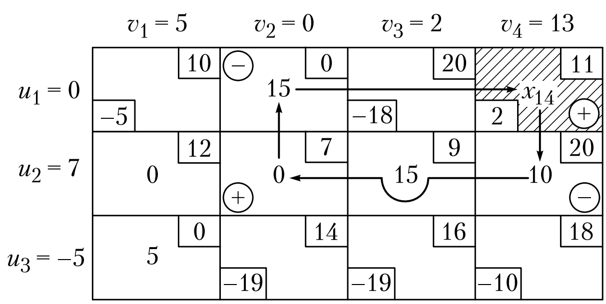


Рис. 1.13

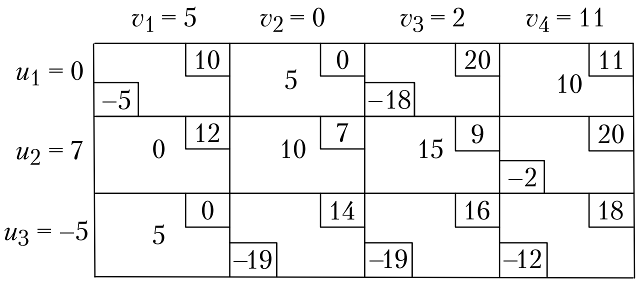


Рис. 1.14

• 4-я: оценки всех небазисных переменных оказались неположительными (рис. 1.14), т.е. найдено оптимальное решение: $x_{12} = 5$; $x_{14} = 10$; $x_{22} = 10$; $x_{23} = 15$; $x_{31} = 5$, значения остальных переменных 0, и, таким образом,

$$F(X) = 5 \cdot 0 + 10 \cdot 11 + 10 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 5 \cdot 0 = 315.$$

Суммарную стоимость перевозок удалось уменьшить на 410 – 315 = 95 ден. ед.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Найдите максимум функции (простым симплекс-методом) $F(x) = 2x_1 + x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 10, \\ x_2 - x_1 \leqslant 1, \\ x_2 \leqslant 2, \end{cases}$$

причем все переменные ограничены по знаку: $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$.

1.2. Найдите максимум функции (простым симплекс-методом) $F(x) = 2x_1 + 3x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 12, \\ x_2 - x_1 \leqslant 4, \\ x_1 \leqslant 3, \end{cases}$$

причем все переменные ограничены по знаку: $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant$.

1.3. Фабрика имеет в своем распоряжении определенное количество ресурсов: рабочую силу, деньги, сырье, оборудование, производственные площади и т.п. Пусть ресурсы трех видов — рабочая сила, сырье и оборудование — имеются в количестве соответственно 80 (человеко-дней), 480 (кг) и 130 (станков). Фабрика может выпускать электрические приборы четырех видов. Информация о количестве единиц каждого ресурса, необходимых для производства одного прибора каждого вида, и о доходах, получаемых предприятием от единицы каждого вида товаров, приведена в таблице.

Ресурс	Норма расхода ресурсов на единицу изделия				Наличие ресурсов
	Электропечь	Электро-камин	Электро-колонка	Электроутюг	
Труд	7	2	2	6	80
Сырье	5	8	4	3	480
Оборудование	2	4	1	8	130
Цена, тыс. руб.	3	4	3	1	—

Требуется найти такой план выпуска, который максимизирует выручку от продаж.

1.4. Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице.

Тип сырья	Норма расхода сырья на одно изделие				Запас сырья
	А	Б	В	Г	
I	1	2	1	0	18
II	1	1	2	1	30
III	1	3	3	2	40
	Цена изделия				
	12	7	18	10	

Требуется решить задачу нахождения плана выпуска продукции исходя из условия максимизации ее общей стоимости. Кроме того, требуется определить следующее.

1. Ценность каждого ресурса и его приоритет при решении задачи увеличения запаса ресурсов.

2. Максимальный интервал изменения запасов каждого из ресурсов, в пределах которого структура оптимального решения, т.е. номенклатура выпускаемой продукции, остается без изменений.

3. Суммарную стоимостную оценку ресурсов, используемых при производстве единицы каждого изделия. Выпуск какой продукции нерентабелен?

4. Насколько уменьшится стоимость выпускаемой продукции при принудительном выпуске единицы нерентабельной продукции?

5. Насколько можно снизить запас каждого ресурса, чтобы это не привело к уменьшению прибыли?

6. Каковы интервалы изменения цен на каждый вид продукции, при которых сохраняется структура оптимального плана.

7. Насколько нужно снизить затраты каждого вида сырья на единицу продукции, чтобы сделать производство нерентабельного изделия рентабельным?

8. Как изменятся общая стоимость продукции и план ее выпуска при увеличении запасов сырья I вида и II вида на 4 и 3 ед. соответственно и уменьшении на 3 ед. запасов сырья III вида?

9. Целесообразно ли включать в план изделие Д ценой 10 ед., на изготовление которого расходуется по 2 ед. каждого вида сырья?

1.5. Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цена каждого продукта приведены в таблице.

Тип сырья	Норма расхода сырья на одно изделие				Запас сырья
	А	Б	В	Г	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
	Цена изделия				
	9	6	4	7	

Требуется решить задачу нахождения плана выпуска продукции исходя из условия максимизации ее общей стоимости. Кроме того, требуется определить следующее.

1. Ценность каждого ресурса и его приоритет при решении задачи увеличения запаса ресурсов.

2. Максимальный интервал изменения запасов каждого из ресурсов, в пределах которого структура оптимального решения, т.е. номенклатура выпускаемой продукции, остается без изменений.

3. Суммарную стоимостную оценку ресурсов, используемых при производстве единицы каждого изделия. Выпуск какой продукции нерентабелен?

4. Насколько уменьшится стоимость выпускаемой продукции при принудительном выпуске единицы нерентабельной продукции?

5. Насколько можно снизить запас каждого ресурса, чтобы это не привело к уменьшению прибыли?

6. Каковы интервалы изменения цен на каждый вид продукции, при которых сохраняется структура оптимального плана.

7. Насколько нужно снизить затраты каждого вида сырья на единицу продукции, чтобы сделать производство нерентабельного изделия рентабельным?

8. Как изменятся общая стоимость продукции и план ее выпуска при увеличении запасов сырья I вида и II вида на 120 и 160 ед. соответственно и одновременном уменьшении на 60 ед. запасов сырья III вида?

9. Целесообразно ли включать в план изделие Д ценой 12 ед., на изготовление которого расходуется по 2 ед. каждого вида сырья?

1.6. Для изготовления трех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цена каждого продукта приведены в таблице.

Тип сырья	Норма расхода сырья на одно изделие			Запас сырья
	А	Б	В	
I	4	2	1	180
II	3	1	3	210
III	1	2	5	244
	Цена изделия			
	10	14	12	

Требуется решить задачу нахождения плана выпуска продукции, исходя из условия максимизации ее общей стоимости. Кроме того, требуется определить следующее.

1. Ценность каждого ресурса и его приоритет при решении задачи увеличения запаса ресурсов.

2. Максимальный интервал изменения запасов каждого из ресурсов, в пределах которого структура оптимального решения, т.е. номенклатура выпускаемой продукции, остается без изменений.

3. Суммарную стоимостную оценку ресурсов, используемых при производстве единицы каждого изделия. Выпуск какой продукции нерентабелен?

4. Насколько уменьшится стоимость выпускаемой продукции при принудительном выпуске единицы нерентабельной продукции?

5. Насколько можно снизить запас каждого ресурса, чтобы это не привело к уменьшению прибыли?

6. Каковы интервалы изменения цен на каждый вид продукции, при которых сохраняется структура оптимального плана.

7. Насколько нужно снизить затраты каждого вида сырья на единицу продукции, чтобы сделать производство нерентабельного изделия рентабельным?

8. Как изменятся общая стоимость продукции и план ее выпуска при увеличении запасов сырья I вида и II вида на 4 ед. каждого?

9. Целесообразно ли включать в план изделие Г ценой 13 ед., на изготовление которого расходуется, соответственно, 1, 3 и 2 ед. каждого вида сырья, и изделие Д ценой 12 ед., на изготовление которого расходуется по 2 ед. каждого вида сырья?

1.7. Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цена каждого продукта приведены в таблице.

Тип сырья	Норма расхода сырья на одно изделие				Запас сырья
	А	Б	В	Г	
I	2	1	3	2	200
II	1	2	4	8	160
III	2	4	1	1	170
	Цена изделия				
	5	7	3	8	

Требуется решить задачу нахождения плана выпуска продукции, исходя из условия максимизации ее общей стоимости. Кроме того, требуется определить следующее.

1. Ценность каждого ресурса и его приоритет при решении задачи увеличения запаса ресурсов.

2. Максимальный интервал изменения запасов каждого из ресурсов, в пределах которого структура оптимального решения, т.е. номенклатура выпускаемой продукции, остается без изменений.

3. Суммарную стоимостную оценку ресурсов, используемых при производстве единицы каждого изделия. Выпуск какой продукции нерентабелен?

4. Насколько уменьшится стоимость выпускаемой продукции при принудительном выпуске единицы нерентабельной продукции?

5. Насколько можно снизить запас каждого ресурса, чтобы это не привело к уменьшению прибыли?

6. Каковы интервалы изменения цен на каждый вид продукции, при которых сохраняется структура оптимального плана.

7. Насколько нужно снизить затраты каждого вида сырья на единицу продукции, чтобы сделать производство нерентабельного изделия рентабельным?

8. Как изменятся общая стоимость продукции и план выпуска при увеличении запасов сырья I вида и II вида на 8 и 10 ед. соответственно и одновременном уменьшении на 5 ед. запасов сырья III вида?

9. Целесообразно ли включать в план изделие Д ценой 10 ед., на изготовление которого расходуется по 2 ед. каждого вида сырья?

1.8. Для изготовления трех видов продукции используют три вида ресурсов. Запасы ресурсов, нормы их расхода и цена каждого продукта приведены в таблице.

Ресурс	Норма затрат ресурсов на единицу продукции			Запас ресурсов
	I вид	II вид	III вид	
Труд	1	4	3	200
Сырье	1	1	2	80
Оборудование	1	1	2	140
	Цена изделия			
	40	60	80	

Требуется решить задачу нахождения плана выпуска продукции исходя из условия максимизации ее общей стоимости. Кроме того, требуется определить следующее.

1. Ценность каждого ресурса и его приоритет при решении задачи увеличения запаса ресурсов.

2. Максимальный интервал изменения запасов каждого из ресурсов, в пределах которого структура оптимального решения, т.е. номенклатура выпускаемой продукции, остается без изменений.

3. Суммарную стоимостную оценку ресурсов, используемых при производстве единицы каждого изделия. Выпуск какой продукции нерентабелен?

4. Насколько уменьшится стоимость выпускаемой продукции при принудительном выпуске единицы нерентабельной продукции?

5. Насколько можно снизить запас каждого ресурса, чтобы это не привело к уменьшению прибыли?

6. Каковы интервалы изменения цен на каждый вид продукции, при которых сохраняется структура оптимального плана.

7. Насколько нужно снизить затраты каждого вида сырья на единицу продукции, чтобы сделать производство нерентабельного изделия рентабельным?

8. Как изменятся общая стоимость продукции и план ее выпуска при увеличении запасов сырья на 18 ед.?

9. Целесообразно ли включать в план изделия IV вида ценой 70 ед., на изготовление которых расходуется по 2 ед. каждого вида ресурсов?

1.9. На предприятии выпускается три вида изделий и используется при этом три вида сырья, нормы расхода которого и его запасы приведены в таблице.

Тип сырья	Норма расхода сырья на одно изделие			Запас сырья
	А	Б	В	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	103	180
	Цена изделия			
	9	10	16	

Требуется решить задачу нахождения плана выпуска продукции исходя из условия максимизации ее общей стоимости. Кроме того, требуется определить следующее.

1. Ценность каждого ресурса и его приоритет при решении задачи увеличения запаса ресурсов.

2. Максимальный интервал изменения запасов каждого из ресурсов, в пределах которого структура оптимального решения, т.е. номенклатура выпускаемой продукции, остается без изменений.

3. Суммарную стоимостную оценку ресурсов, используемых при производстве единицы каждого изделия. Выпуск какой продукции нерентабелен?

4. Насколько уменьшится стоимость выпускаемой продукции при принудительном выпуске единицы нерентабельной продукции?

5. Насколько можно снизить запас каждого ресурса, чтобы это не привело к уменьшению прибыли?

6. Каковы интервалы изменения цен на каждый вид продукции, при которых сохраняется структура оптимального плана.

7. Насколько нужно снизить затраты каждого вида сырья на единицу продукции, чтобы сделать производство нерентабельного изделия рентабельным?

8. Как изменятся общая стоимость выпускаемой продукции и план ее выпуска, если запас сырья I вида увеличить на 45 ед., а сырья II вида уменьшить на 9 ед.?

9. Целесообразно ли выпускать изделие Г ценой 11 ед., если нормы затрат сырья составляют 9,4 и 6 ед.?

1.10. Для изготовления трех видов продукции используют четыре вида ресурсов. Запасы ресурсов, нормы и цена каждого продукта приведены в таблице.

Требуется решить задачу нахождения плана выпуска продукции исходя из условия максимизации ее общей стоимости. Кроме того, требуется определить следующее.

Ресурс	Норма затрат ресурсов на единицу продукции			Запас ресурсов
	I вид	II вид	III вид	
Труд	3	6	4	2000
Сырье I	20	15	20	15 000
Сырье II	10	15	20	7400
Оборудование	0	3	5	1500
	Цена изделия			
	6	10	9	

1. Ценность каждого ресурса и его приоритет при решении задачи увеличения запаса ресурсов.

2. Максимальный интервал изменения запасов каждого из ресурсов, в пределах которого структура оптимального решения, т.е. номенклатура выпускаемой продукции, остается без изменений.

3. Суммарную стоимостную оценку ресурсов, используемых при производстве единицы каждого изделия. Выпуск какой продукции нерентабелен?

4. Насколько уменьшится стоимость выпускаемой продукции при принудительном выпуске единицы нерентабельной продукции?

5. Насколько можно снизить запас каждого ресурса, чтобы это не привело к уменьшению прибыли?

6. Каковы интервалы изменения цен на каждый вид продукции, при которых сохраняется структура оптимального плана.

7. Насколько нужно снизить затраты каждого вида сырья на единицу продукции, чтобы сделать производство нерентабельного изделия рентабельным?

8. Как изменятся общая стоимость выпускаемой продукции и план ее выпуска, если запас сырья I вида увеличить на 24 ед.?

9. Целесообразно ли выпускать изделие IV вида ценой 11 ед., если нормы затрат ресурсов составляют 8, 4, 20 и 6 ед.?

1.11. Предприятие выпускает четыре вида продукции и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное, шлифовальное. Затраты на изготовление единицы продукции приведены в таблице, там же указаны общий фонд рабочего времени, а также цена изделия каждого вида.

Тип оборудования	Норма затрат ресурсов на единицу продукции				Общий фонд рабочего времени
	А	Б	В	Г	
Токарное	2	1	1	3	300
Фрезерное	1	0	2	1	70
Шлифовальное	1	2	1	0	340
	Цена изделия				
	8	3	2	1	

Требуется решить задачу нахождения плана выпуска продукции исходя из условия максимизации ее общей стоимости. Кроме того, требуется определить следующее.

1. Ценность каждого ресурса и его приоритет при решении задачи увеличения запаса ресурсов.

2. Максимальный интервал изменения запасов каждого из ресурсов, в пределах которого структура оптимального решения, т.е. номенклатура выпускаемой продукции, остается без изменений.

3. Суммарную стоимостную оценку ресурсов, используемых при производстве единицы каждого изделия. Выпуск какой продукции нерентабелен?

4. Насколько уменьшится стоимость выпускаемой продукции при принудительном выпуске единицы нерентабельной продукции?

5. Насколько можно снизить запас каждого ресурса, чтобы это не привело к уменьшению прибыли?

6. Каковы интервалы изменения цен на каждый вид продукции, при которых сохраняется структура оптимального плана.

7. Насколько нужно снизить затраты каждого вида сырья на единицу продукции, чтобы сделать производство нерентабельного изделия рентабельным?

8. Как изменятся общая стоимость выпускаемой продукции и план ее выпуска, если фонд времени шлифовального оборудования увеличить на 24 ед.?

9. Целесообразно ли выпускать изделие Д ценой 11 ед., если нормы затрат оборудования составляют 8, 2 и 2 ед.?

1.12. На предприятии выпускается три вида изделий, используется при этом три вида сырья, нормы расхода которого и его запасы приведены в таблице.

<table>
<tr><th rowspan="2">Тип сырья</th><th colspan="3">Норма расхода сырья на одно изделие</th><th rowspan="2">Запас сырья</th></tr>
<tr><th>А</th><th>Б</th><th>В</th></tr>
<tr><td>I</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>430</td></tr>
<tr><td>II</td><td>3</td><td>0</td><td>2</td><td>460</td></tr>
<tr><td rowspan="3">III</td><td>1</td><td>4</td><td>0</td><td rowspan="3">420</td></tr>
<tr><td colspan="3">Цена изделия</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr>
</table>

Требуется решить задачу нахождения плана выпуска продукции исходя из условия максимизации ее общей стоимости. Кроме того, требуется определить следующее.

1. Ценность каждого ресурса и его приоритет при решении задачи увеличения запаса ресурсов.

2. Максимальный интервал изменения запасов каждого из ресурсов, в пределах которого структура оптимального решения, т.е. номенклатура выпускаемой продукции, остается без изменений.

3. Суммарную стоимостную оценку ресурсов, используемых при производстве единицы каждого изделия. Выпуск какой продукции нерентабелен?

4. Насколько уменьшится стоимость выпускаемой продукции при принудительном выпуске единицы нерентабельной продукции?

5. Насколько можно снизить запас каждого ресурса, чтобы это не привело к уменьшению прибыли?

6. Каковы интервалы изменения цен на каждый вид продукции, при которых сохраняется структура оптимального плана.

7. Насколько нужно снизить затраты каждого вида сырья на единицу продукции, чтобы сделать производство нерентабельного изделия рентабельным?

8. Как изменятся общая стоимость выпускаемой продукции и план ее выпуска, если запас сырья I вида увеличить на 80 ед., а сырья II вида уменьшить на 10 ед.?

9. Целесообразно ли выпускать изделие Г ценой 7 ед., если нормы затрат сырья составляют 2, 4 и 3 ед.?

1.13. Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цена каждого продукта приведены в таблице.

Требуется решить задачу нахождения плана выпуска продукции исходя из условия максимизации ее общей стоимости. Кроме того, требуется определить следующее.

1. Ценность каждого ресурса и его приоритет при решении задачи увеличения запаса ресурсов.

Тип сырья	Норма расхода сырья на одно изделие				Запас сырья
	А	Б	В	Г	
I	2,0	1,0	0,5	4,0	2400
II	1,0	5,0	3,0	0,0	1200
III	3,0	0,0	6,0	1,0	3000
	Цена изделия				
	7,5	3,0	6,0	12,0	

2. Максимальный интервал изменения запасов каждого из ресурсов, в пределах которого структура оптимального решения, т.е. номенклатура выпускаемой продукции, остается без изменений.

3. Суммарную стоимостную оценку ресурсов, используемых при производстве единицы каждого изделия. Выпуск какой продукции нерентабелен?

4. Насколько уменьшится стоимость выпускаемой продукции при принудительном выпуске единицы нерентабельной продукции?

5. Насколько можно снизить запас каждого ресурса, чтобы это не привело к уменьшению прибыли?

6. Каковы интервалы изменения цен на каждый вид продукции, при которых сохраняется структура оптимального плана.

7. Насколько нужно снизить затраты каждого вида сырья на единицу продукции, чтобы сделать производство нерентабельного изделия рентабельным?

8. Как изменятся общая стоимость выпускаемой продукции и план ее выпуска, если запас сырья I вида увеличить на 100 ед., а сырья II вида уменьшить на 150 ед.?

9. Целесообразно ли выпускать изделие Д ценой 10 ед., если нормы затрат сырья 2, 4 и 3 ед.?

1.14. Пусть собственные средства банка вместе с депозитами в сумме составляют 100 млн дол. Часть этих средств, но не менее 35 млн дол., должна быть размещена в кредитах. Кредиты являются неликвидными активами банка, так как в случае непредвиденной потребности в наличности обратить кредиты в деньги без существенных потерь невозможно. Ценные бумаги можно в любой момент продать, получив некоторую прибыль или, во всяком случае, без большого убытка. Поэтому существует правило, согласно которому коммерческие банки должны покупать в определенной пропорции ликвидные активы — ценные бумаги, чтобы компенсировать неликвидность кредитов. В данном примере ликвидное ограничение следующее: ценные бумаги должны составлять не менее 30% средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах. Цель банка состоит в том, чтобы получить максимальную прибыль от кредитов и ценных бумаг. Доходность от предоставления кредитов — 9% годовых, ожидаемая доходность вложений в ценные бумаги — 6% годовых. С помощью двойственного симплекс-метода требуется определить оптимальную инвестиционную программу для данного банка.

1.15. Необходимо в планируемом периоде обеспечить производство не менее 300 тыс. однородных новых изделий, которые могут выпускаться на четырех филиалах предприятия. Для освоения этого нового вида изделий нужны определенные капитальные вложения. Разработанные для каждого филиала предприятия проекты освоения нового вида изделия характеризуются величинами удельных капитальных вложений и себестоимостью единицы продукции в соответствии со следующей таблицей.

Показатель	Филиал предприятия			
	1	2	3	4
Себестоимость производства изделия, руб.	83	89	95	98
Удельные капиталовложения, руб.	120	80	50	40

Себестоимость производства и удельные капиталовложения для каждого из филиалов условно приняты постоянными, т.е. потребность в капитальных вложениях и общие издержки будут изменяться пропорционально изменению объемов производства изделий.

Предположим, что на все филиалы предприятие для освоения 300 тыс. новых изделий может выделить 18 млн руб. Необходимо найти такой вариант распределения объемов производства продукции и капитальных вложений по филиалам, при котором суммарная стоимость изделий будет минимальной.

1.16. С помощью двойственного симплекс-метода требуется найти максимум функции $3x_1 + x_2$ при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 & (b_1 = 8), \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 8 & (b_2 = 8), \\ x_1 + x_2 \geqslant 3 & (b_3 = 3), \\ x_1 \geqslant 1 & (b_4 = 1), \\ x_2 \geqslant 1 & (b_5 = 1). \end{cases}$$

Также требуется определить двойственные оценки (теневые цены) ресурсов (товаров) b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, указать предельные значения (нижнюю и верхнюю границы) изменения каждого ресурса (с отличными от нуля двойственными оценками), для которых двойственные оценки остаются неизменными, построить субоптимальные варианты плана.

Представьте себе, что вы менеджер фирмы, принадлежащей некоему холдингу. Используя теневые цены, ответьте на следующие вопросы, которые ставит перед вами ревизионный отдел вашего холдинга.

1. Желаете ли вы, чтобы вам дали дополнительную единицу ресурса b_2, одновременно увеличив план выпуска товара b_5 также на единицу? Как изменится при этом прибыль вашей фирмы?

2. Желаете ли вы, чтобы вам снизили план по выпуску товара b_5 на одну единицу, одновременно сократив поставку ресурса b_2 также на единицу? Как изменится при этом прибыль вашей фирмы?

3. Желаете ли вы, чтобы вам дали дополнительную единицу ресурса b_2, одновременно сократив план выпуска товара b_5 также на единицу? Насколько возросла бы в результате этого прибыль вашей фирмы?

4. Желаете ли вы, чтобы вам увеличили план по выпуску товара b_5 на одну единицу, одновременно сократив поставку ресурса b_2 также на единицу? Насколько уменьшилась бы в результате этого прибыль вашей фирмы?

1.17. С помощью двойственного симплекс-метода найти максимум функции $2x_1 + x_2$ при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 10 & (b_1 = 10), \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 10 & (b_2 = 10), \\ x_1 + x_2 \geqslant 2 & (b_3 = 2), \\ x_1 \geqslant 1 & (b_4 = 1), \\ x_2 \geqslant 1 & (b_5 = 1). \end{cases}$$

Также требуется определить двойственные оценки (теневые цены) ресурсов (товаров) b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, указать предельные значения (нижнюю и верхнюю границы) изменения каждого из ресурсов (с отличными от нуля двойственными оценками), для которых двойственные оценки остаются неизменными, построить субоптимальные варианты плана.

Представьте себе, что вы менеджер фирмы, принадлежащей некоему холдингу. Используя теневые цены, ответьте на следующие вопросы, которые ставит перед вами ревизионный отдел вашего холдинга.

1. Желаете ли вы, чтобы вам дали дополнительную единицу ресурса b_2, одновременно увеличив план выпуска товара b_5 также на единицу? Как изменится при этом прибыль вашей фирмы?

2. Желаете ли вы, чтобы вам снизили план по выпуску товара b_5 на одну единицу, одновременно сократив поставку ресурса b_2 также на единицу? Как изменится при этом прибыль вашей фирмы?

3. Желаете ли вы, чтобы вам дали дополнительную единицу ресурса b_2, одновременно сократив план выпуска товара b_5 также на единицу? Насколько возросла бы в результате этого прибыль вашей фирмы?

4. Желаете ли вы, чтобы вам на одну единицу увеличили план по выпуску товара b_5, одновременно сократив поставку ресурса b_2 также на единицу? Насколько уменьшилась бы в результате этого прибыль вашей фирмы?

1.18. Найдите максимум функции (двойственным симплекс-методом) $2x_1 + x_2$ при ограничениях:

$$\text{а)}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 3 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0; \end{cases} \quad \text{б)}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 4 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0; \end{cases} \quad \text{в)}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 5 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\text{г)}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0; \end{cases} \quad \text{д)}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 7 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Требуется определить теневые цены ресурсов b_1 и b_2 и ответить на следующий вопрос: как изменятся оптимальный план и оптимальное значение целевой функции, если b_1 увеличится на 2, а b_2 уменьшится на 1?

1.19. Найдите максимум функции (двойственным симплекс-методом) $3x_1 + x_2$ при ограничениях:

$$\text{а)}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 3 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0; \end{cases} \quad \text{б)}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 4 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0; \end{cases} \quad \text{в)}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 5 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\text{г)}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0; \end{cases} \quad \text{д)}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 7 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Требуется определить теневые цены ресурсов b_1 и b_2 и ответить на следующий вопрос: как изменятся оптимальный план и оптимальное значение целевой функции, если b_1 увеличится на 2, а b_2 уменьшится на 1?

1.20. Найдите максимум функции (двойственным симплекс-методом) $4x_1 + x_2$ при ограничениях:

$$\text{а)}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 3 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0; \end{cases} \quad \text{б)}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 4 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0; \end{cases} \quad \text{в)}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 5 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\text{г)}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0; \end{cases} \quad \text{д)}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 7 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Требуется определить теневые цены ресурсов b_1 и b_2 и ответить на следующий вопрос: как изменятся оптимальный план и оптимальное значение целевой функции, если b_1 увеличится на 2, а b_2 уменьшится на 1?

1.21. Найдите максимум функции (двойственным симплекс-методом) $5x_1 + x_2$ при ограничениях:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 3 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 4 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 5 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 7 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0. \end{cases}$

Требуется определить теневые цены ресурсов b_1 и b_2 и ответить на следующий вопрос: как изменятся оптимальный план и оптимальное значение целевой функции, если b_1 увеличится на 2, а b_2 уменьшится на 1?

1.22. Найдите максимум функции (двойственным симплекс-методом) $6x_1 + x_2$ при ограничениях:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 3 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 4 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 5 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 7 & (b_1), \\ x_2 \geqslant 2 & (b_2), \\ x_1 \geqslant 0. \end{cases}$

Требуется определить теневые цены ресурсов b_1 и b_2 и ответить на следующий вопрос: как изменятся оптимальный план и оптимальное значение целевой функции, если b_1 увеличится на 2, а $b2$ уменьшится на 1?

В задачах 1.23—1.59 требуется решить транспортную задачу. Исходные данные транспортных задач приводятся схематически: внутри прямоугольника заданы удельные транспортные затраты на перевозку единицы груза, слева указаны мощности поставщиков, а сверху — мощности потребителей. Требуется сформулировать экономико-математическую модель исходной транспортной задачи и минимизировать стоимость перевозок методом потенциалов.

1.23.

Запас	Спрос			
	5	10	5	10
10	2	3	4	5
5	3	4	5	2
10	4	5	2	3
5	5	2	3	4

1.24.

Запас	Спрос			
	5	10	5	10
10	2	3	4	5
5	3	4	5	5
10	4	5	5	2
5	5	5	3	3

1.25.

Запас	Спрос			
	150	40	110	50
70	9	5	10	7
80	11	8	9	6
90	7	6	5	4
110	6	4	3	2

1.26.

Запас	Спрос				
	25	10	20	30	15
40	5	3	4	6	4
20	3	4	10	5	7
40	4	6	9	3	4

1.27.

Запас	Спрос			
	100	140	100	60
100	5	4	3	2
60	2	3	5	6
80	3	2	4	3
160	4	1	2	4

1.28.

Запас	Спрос				
	150	350	200	100	100
500	3	3	5	3	1
300	4	3	2	4	5
100	3	7	5	4	1

1.29.

Запас	Спрос			
	60	40	120	100
70	4	8	1	6
80	3	5	3	4
90	2	6	4	3
80	1	4	5	3

1.30.

Запас	Спрос				
	40	30	90	80	50
60	4	2	3	4	1
90	2	4	3	5	6
140	6	5	4	6	2

1.31.

Запас	Спрос				
	8	9	13	8	12
9	5	15	3	6	10
11	23	8	13	27	12
14	30	1	5	24	25

1.32.

Запас	Спрос			
	40	30	20	50
60	2	4	5	1
70	2	3	9	4
50	8	4	2	5

1.33.

Запас	Спрос				
	11	11	11	16	11
15	3	4	5	15	24
15	19	2	22	4	13
15	20	27	1	17	19

1.34.

Запас	Спрос				
	7	7	7	7	2
4	16	30	17	10	16
6	20	27	26	9	23
10	13	4	22	3	1
10	3	1	5	4	24

1.35.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	3	3	1
7	3	2	1

1.36.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	3	1	2
7	3	2	1

1.37.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	2	3	1
7	3	2	1

1.38.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	2	1	3
7	3	2	1

1.39.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	1	3	2
7	3	2	1

1.40.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	3	2	1
7	3	1	2

1.41.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	3	1	2
7	3	1	2

1.42.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	2	3	1
7	3	1	2

1.43.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	2	1	3
7	3	1	2

1.44.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	1	3	2
7	3	1	2

1.45.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	3	2	1
7	2	3	1

1.46.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	3	1	2
7	2	3	1

1.47.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	2	3	1
7	2	3	1

1.48.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	2	1	3
7	2	3	1

1.49.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	1	3	2
7	2	3	1

1.50.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	3	2	1
7	2	1	3

1.51.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	3	1	2
7	2	1	3

1.52.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	2	3	1
7	2	1	3

1.53.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	2	1	3
7	2	1	3

1.54.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	1	3	2
7	2	1	3

1.55.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	3	2	1
7	1	3	2

1.56.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	3	1	2
7	1	3	2

1.57.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	2	3	1
7	1	3	2

1.58.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	2	1	3
7	1	3	2

1.59.

Запас	Спрос		
	5	5	5
3	1	3	2
7	1	3	2

Глава 2
ТЕОРИЯ ИГР

В результате изучения главы 2 студент должен:

знать

• основные понятия теории игр;

• типы и примеры игр;

уметь

• определять чистые и смешанные стратегии в играх;

• применять теорию игр к анализу различных ситуаций в экономике, социологии, политологии;

владеть

• приемами решения матричных игр;

• навыками нахождения равновесий в играх.

2.1. Способы задания игры. Игры в нормальной форме

Существует множество определений того, что такое теория игр. Приведем определение, данное Р. Ауманом[1]: «Теория игр — это теория рационального поведения людей с несовпадающими интересами». В данном учебнике мы коснемся только теории бескоалиционных игр. Теория бескоалиционных игр — это способ моделирования и анализа ситуаций, в которых оптимальные решения каждого участника (игрока) зависят от его представлений (или ожиданий) об игре оппонентов.

Есть два способа задания игры. Первый — это позиционная форма игры. *Позиционная,* или *расширенная, форма* задает: (1) порядок ходов; (2) альтернативы (выбор), доступные игроку тогда, когда наступает очередь его хода; (3) информацию, которую игрок имеет на каждом из своих ходов; (4) выигрыши всех игроков как функции выбранных ходов; (5) вероятностные распределения на множестве ходов Природы[2]. Позиционная форма игры задается *деревом игры*, которое можно рассматривать как обобщение дерева принятия решений, используемое в теории принятия решений, на случай нескольких игроков. «Древесная структура» описывает, какая вершина следует за какой, какой игрок ходит в соответствующей вершине. Если две вершины лежат в одном информационном множестве (множестве позиций, которые неразличимы между собой для игрока, совершающего в них ход), то это означает, что игрок, которому принадлежит данное информационное

[1] *Aumann R.J.* Lectures on game theory. San Francisco : Westview Press, 1989.

[2] Для того чтобы моделировать случайные события, влияющие на выигрыш игроков в той или иной игре, дополнительно к множеству игроков вводится еще один специальный игрок — Природа. Природа делает ход один раз в начале игры. В байесовой игре (см. ниже) она выбирает вектор типов игроков.

множество, не может сказать, какое из двух действий его оппонента в действительности произошло. В этом смысле игрок не различает вершины дерева, лежащие в одном информационном множестве.

В игре *с совершенной информацией* каждое информационное множество одноточечно. В противном случае игра является игрой с несовершенной информацией.

В игре с совершенной информацией каждый игрок всегда знает точно, в каком месте дерева игры он находится, нет одновременных ходов, и все игроки наблюдают ходы Природы (если таковые есть).

В игре *с неполной информацией* Природа делает ход первой, и он ненаблюдаем по крайней мере одним из игроков. В противном случае игра является игрой с полной информацией.

Игра с неполной информацией всегда является игрой с несовершенной информацией, так как информационные множества некоторых игроков содержат более одной вершины.

Как заметил Дж. Харшаньи[1], любая игра с неполной информацией может быть переформулирована как игра с полной, но несовершенной информацией, за счет добавления начального хода Природы, когда Природа выбирает между различными правилами[2].

В *статической* игре игроки ходят только один раз, причем одновременно и независимо друг от друга. В противном случае игра называется *динамической*.

Второй способ задания игры — нормальная форма игры — это такое представление игры, при котором указывается, кто участвует в игре, возможные стратегии игроков и результаты игры в зависимости от выбранной игроками стратегии.

Игра в нормальной, или *стратегической, форме* — это тройка $\langle I, S, u\rangle$, в которой $I = \{1, 2, ..., n\}$ — множество игроков, $S = \prod_i S_i$, где S_i — множество стратегий (*чистых стратегий*), доступных игроку $i = 1, 2, ..., n$, $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, u_i: $S \to \mathbb{R}$ — функция выигрышей игрока i, ставящая в соответствие каждому набору стратегий $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$, называемому также *ситуацией*, выигрыш i-го игрока.

Определение 2.1. *Смешанная стратегия* i-го игрока σ_i — это случайная величина, значениями которой являются чистые стратегии данного игрока. Таким образом, каждая смешанная стратегия i-го игрока σ_i задает вероятностное распределение на множестве его чистых стратегий S_i. Будем обозначать пространство смешанных стратегий i-го игрока через Σ_i, вероятность того, что он выбирает стратегию s_i, — $\sigma_i(s_i)$, пространство наборов смешанных стратегий по одной для каждого игрока — Σ, а сами наборы смешанных стратегий — σ. Наше основное предположение состоит в том, что стратегии выбираются игроками независимо друг от друга, поэтому случайные величины $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ независимы в совокупности.

Определение 2.2. *Смешанным расширением игры* $\Gamma = \langle I, S, u\rangle$ называется игра $\overline{\Gamma} = \langle I, У, u\rangle$, в которой $\Sigma = \prod_{i\in I}\Sigma_i$ и для любого набора (или, как мы

[1] Джон Харшаньи (J. Harsanyi) — лауреат Нобелевской премии по экономике 1994 г.

[2] См. об этом: *Rasmussen E.* Games and information: an introduction to game theory. Oxford: Basil Blackwell, 1989.

будем его называть, профиля) стратегий $\sigma \in \Sigma$ набор выигрышей игроков $u(\sigma)$ определяется как вектор математических ожиданий выигрышей всех игроков, соответствующих данному набору стратегий, т.е. $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, где

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S}\left(\prod_{i=1}^{n}\sigma_i(s_i)\right)u_i(s).$$

Примем следующие обозначения. Зафиксировав некоторого игрока $i \in I$, через $s_{-i} \in S_{-i}$ будем обозначать наборы чистых стратегий всех остальных игроков из множества $I\{i\}$. При этом выражением (s_i', s_{-i}) будем обозначать набор чистых стратегий $(s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, ..., s_n)$. Точно так же выражение (σ_i', σ_{-i}) будет означать набор смешанных стратегий $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{i-1}, \sigma_i', \sigma_{i+1}, ..., \sigma_n)$. В частности, в наших обозначениях $s = (s_i, s_{-i})$ и, соответственно, $\sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i})$.

Определение 2.3. Будем говорить, что чистая стратегия s_i игрока i в игре Γ *строго доминируема* (*строго доминируется*), если существует другая чистая стратегия s_i', такая что для всех наборов $s_{-i} \in S_{-i}$ верно, что $u(s_i', s_{-i}) > u(s_i, s_{-i})$. В этом случае говорят также, что стратегия s_i' *доминирует* стратегию s_i. Если же существует такая чистая стратегия s_i', что для всех наборов $s_{-i} \in S_{-i}$ имеет место нестрогое неравенство $u(s_i', s_{-i}) \geqslant u(s_i, s_{-i})$, но хотя бы для одного набора $s_{-i} \in S_{-i}$ неравенство строгое, будем говорить, что чистая стратегия s_i *слабо доминируется* (чистой стратегией s_i').

Определение 2.4. Будем говорить, что смешанная стратегия σ_i игрока i в игре $\overline{\Gamma}$ *строго доминируема* (*строго доминируется*), если существует другая стратегия σ_i', такая что $u(\sigma_i', \sigma_{-i}) > u(\sigma_i, \sigma_{-i})$ для всех $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$. Смешанная стратегия σ_i называется *строго доминирующей* стратегией для игрока i в игре $\overline{\Gamma}$, если она строго доминирует любую другую стратегию из Σ_i.

Другими словами, доминирующая стратегия — это стратегия, результат которой является наилучшим вне зависимости от действий других игроков.

Нетрудно проверить, что для проверки того, что стратегия σ_i' строго доминирует стратегию σ_i, достаточно посмотреть на поведение этих двух стратегий против чистых стратегий оппонентов игрока i.

Легко также проверить, что если чистая стратегия s_i является строго доминирующей, то таковой же является и любая стратегия, использующая s_i с положительной вероятностью.

Определение 2.5. *Носителем* смешанной стратегии σ_i называется множество всех тех чистых стратегий, которые входят в σ_i с положительной вероятностью.

2.2. Равновесие Нэша

Определение 2.6. Набор стратегий, или ситуация, или исход, $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ образует *равновесие по Нэшу*, или является равновесием Нэша, или равновесием по Нэшу, в игре $\Gamma = \langle I, S, u\rangle$ если для любого $i = 1, 2, ..., n$, для любого $s_i' \in S_i$ выполняется неравенство

$$u(s_i, s_{-i}) \geqslant u(s_i', s_{-i}).$$

Иными словами, если игрок в одиночку решает отклониться от выбранной стратегии, то он лишь ухудшит свое положение, т.е. для каждого игрока выбранная им стратегия s_i — это наилучший ответ на *действительно* играемые стратегии остальных игроков. Равновесие Нэша — это такая ситуация, в которой ни один из участников не может увеличить свой выигрыш, изменяя в одностороннем порядке свою стратегию.

Подыгрой игры Г в позиционой форме называется такое поддерево исходной игры, что:

1) его начальная вершина — одноточечное информационное множество, и данное поддерево содержит все последующие за начальной вершины и только их;

2) если некоторая вершина x лежит в подыгре, то все вершины из ее информационного множества также лежат в этой подыгре.

Ситуация, или исход, (набор стратегий) $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ в игре в позиционной форме Г называется *совершенным подыгровым равновесием Нэша* (СПРН), если она индуцирует равновесие Нэша в каждой подыгре.

Рассмотрим многозначное отображение «лучших ответов» b_i: $S_{-i} \to S_i$, определяемое следующим образом:

$$b_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i\text{: для любого } s_i' \in S_i \text{ верно, что } u(s_i, s_{-i}) \geqslant u(s_i', s_{-i})\}\text{ю}$$

Очевидно, что ситуация $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ является равновесием Нэша в игре Г тогда и только тогда, когда $s_i \in b_i(s_{-i})$ для каждого игрока $i = 1, 2, ..., n$.

Пример 2.1 (игра «Семейный спор»). Она и Он независимо решают, куда пойти — на балет (Б) или на футбол (Ф). Если они вместе пойдут на балет, то Она получит большее удовольствие, чем Он, если на футбол, то наоборот. Если они окажутся в разных местах, то оба будут страдать:

		Она	
		Ф	Б
Он	Ф	(2; 1)	(−1; −1)
	Б	(−1; −1)	(1; 2)

Нетрудно заметить, что данная игра допускает два равновесия в чистых стратегиях — (Б, Б) и (Ф, Ф).

Пример 2.2. Рассмотрим игру

	l	m	r
U	(5; 3)	(1; 4)	(3; 5)
M	(4; 2)	(5; 5)	(4; 1)
D	(3; 5)	(2; 7)	(5; 3)

Ясно, что ситуация (M, m) образует равновесие по Нэшу. Если первый игрок выбирает стратегию M, то наилучшим ответом второго игрока является стратегия m, и наоборот.

Пример 2.3 (игра «Орел и решка»). Два игрока одновременно и независимо выбирают «орла» или «решку». Если их выбор различен, то первый игрок платит второму одну условную денежную единицу, а если их выбор одинаков, то второй игрок платит первому одну денежную единицу:

	Орел	Решка
Орел	(1; −1)	(−1; 1)
Решка	(−1; 1)	(1; −1)

Очевидно, что в этой игре нет равновесия Нэша в чистых стратегиях, так как в любой ситуации одному из игроков выгодно отклониться от выбранной стратегии.

Определение 2.7. Ситуация (набор смешанных стратегий) $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ называется *равновесием Нэша* в игре $\overline{\Gamma} = \langle I, \{\Sigma_i\}, \{u_i\}\rangle$, если для любого $i = 1, 2, ..., n$ для любого $\sigma_i' \in \Sigma_i$ выполняется неравенство $u(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geqslant u(\sigma_i', \sigma_{-i})$.

Теорема 2.1. *Пусть* $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ *— некоторая ситуация и пусть для каждого игрока* $i = 1, 2, ..., n$ *символ* S_i^+ *обозначает носителя стратегии* σ_i *данного игрока, т.е множество чистых стратегий, входящих в смешанную стратегии* σ_i *с ненулевой вероятностью. Ситуация* у *является равновесием Нэша в смешанном расширении* $\overline{\Gamma}$ *игры* Γ *тогда и только тогда, когда для всех* $i = 1, 2, ..., n$ *верно, что:*

1) $u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s_i', \sigma_{-i})$ *для любых* $s_i, s_i' \in S_i^+$;

2) $u_i(s_i, \sigma_{-i}) \geqslant u_i(s_i', \sigma_{-i})$ *для любых* $s_i \in S_i^+, s_i' \notin S_i^+$.

► ***Доказательство.*** *Необходимость.* Если бы одно из из условий (1)—(2) не выполнялось для некоторого i, то нашлись бы две стратегии $s_i \in S_i^+$ и $s_i' \in S_i^+$, такие что

$$u_i(s_i', \sigma_{-i}) > u_i(s_i, \sigma_{-i}),$$

следовательно, это не равновесие Нэша.

Достаточность. Предположим, что (1) и (2) выполняются, но s — не равновесие Нэша. Тогда найдутся игрок i и стратегия σ_i', такие что

$$u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

Но если это так, то существует чистая стратегия s_i', которая играется с положительной вероятностью при σ_i' и для которой

$$u_i(s_i', \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

Так как $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) > u_i(s_i, \sigma_{-i})$, это противоречит (1) и (2). ◄

Данное свойство можно использовать для нахождения равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

Пример 2.4. Рассмотрим следующую игру:

	A	*B*
A	(1000; 1000)	(0; 0)
B	(0; 0)	(100; 100)

Ситуации (A, A) и (B, B) являются, очевидно, равновесными по Нэшу в чистых стратегиях. Найдем равновесия Нэша в смешанных стратегиях. Предположим, что первый игрок играет смешанную стратегию $(p, 1 - p)$, а второй — смешанную стратегию $(q, 1 - q)$. Ожидаемый выигрыш первого игрока от игры A равен $1000p + (1 - p)\cdot 0$, а его ожидаемый выигрыш от игры B равен $100(1 - p) + 0\cdot p$. Тогда по теореме 2.3 имеем

$$1000p + (1 - p)\cdot 0 = 100(1 - p) + 0\cdot p,$$

откуда $p = 1/11$. Аналогичным образом получаем $q = 1/11$.

Пример 2.5 (игра «Семейный спор»). Найдем равновесие Нэша в смешанных стратегиях данной игры. Играя «Б», Она получает $0\cdot p + 2(1 - p)$, а играя «Ф», Она получает $1\cdot p + 0\cdot(1 - p)$. Применяя теорему 2.3, получаем $2(1 - p) = p$, откуда

$p = 2/3$. Аналогичным образом для Него находим $2q + (1 - q)\cdot 0 = 0\cdot q + (1 - q)\cdot 1$, откуда $3q = 1$ и $q = 1/3$. Таким образом, в смешанном равновесии по Нэшу Она играет «Б» с вероятностью 2/3 и «Ф» с вероятностью 1/3, а Он играет «Ф» с вероятностью 2/3 и «Б» с вероятностью 1/3.

Следующий важный результат о существовании равновесий Нэша непосредственно следует из более общих фактов, полученных Г. Дебре[1].

Теорема 2.2. *В смешанном расширении* $\overline{\Gamma}$ *любой игры* Γ *с конечными множествами стратегий* $S_1, S_2, ..., S_n$ *существует равновесие Нэша в смешанных стратегиях.*

Стандартные примеры игры в нормальной форме — дуополии по Бертрану и по Курно (см. ниже примеры 2.7 и 2.8), в которых стратегии — это, соответственно, цены или объемы выпуска, а выигрыши — это прибыли.

Стратегия σ_i является *лучшим откликом* игрока i на набор стратегий оппонентов σ_{-i}, если при любых $\sigma_i' \in \Sigma_i$ верно, что $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geqslant u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$.

Стратегия σ_i является *никогда не лучшим откликом* (ННЛО) игрока i, если не существует набора стратегий остальных игроков σ_{-i}, при котором σ_i была бы лучшим откликом.

Другими словами, стратегия σ_i является ННЛО, если не существует набора стратегий остальных игроков σ_{-i}, чтобы для любых $\sigma_i' \in \Sigma_i$ выполнялось $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geqslant u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$.

Или еще другими словами, стратегия σ_i является ННЛО, если для любого набора стратегий остальных игроков σ_{-i}, найдется такая стратегия $\sigma_i' \in \Sigma$, что $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) < u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$.

Ясно, что при поиске равновесия как строго доминируемые стратегии, так и никогда не лучшие отклики можно удалять. Однако при удалении слабо доминируемых стратегий мы можем, вообще говоря, потерять решения.

Приведем полезный практический прием нахождения равновесий в чистых стратегиях в биматричной игре двух лиц. Для каждой стратегии каждого игрока укажем его лучшие отклики на все стратегии его оппонента. При этом для первого игрока будем отмечать эти отклики в соответствующих клеточках вертикальной чертой, а для второго игрока — горизонтальной чертой. Те клеточки, в которых из этих двух черточек образуется знак «плюс», очевидно, соответствуют равновесиям в чистых стратегиях.

Пример 2.6. Найдем равновесие Нэша в чистых стратегиях в биматричной игре 2×2:

Стратегия	L	R
U	5; 3	4; 3
D	4; 4	5; 3

Решение. Обозначим лучшие отклики каждого игрока на каждую стратегию оппонента.

Стратегия	L	R
U	5; 3 +	4; 3 –
D	4; 4 –	5; 3 |

[1] *Debreu G.* A social equilibrium existence theorem // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1952. Vol. 38. №. 10. P. 886–893.

Таким образом, единственное равновесие в чистых стратегиях в данной игре: $\{U, L\}$.

Пример 2.7 (модель дуополии по Курно). Предположим, что две фирмы, $i = 1, 2$, производят однородный продукт и q_1, q_2 — объемы производства этого продукта. Функция спроса имеет вид

$$P(q_1 + q_2) = \begin{cases} a - q_1 - q_2, \text{ если } q_1 + q_2 < a, \\ 0, \text{ если } q_1 + q_2 \geqslant a, \end{cases}$$

(P — максимальная цена, по которой удастся продать $q_1 + q_2$ единиц произведенного продукта). Функции затрат фирм имеют вид $C_i(q_i) = c_i q_i$, $c_i < a$, $i = 1, 2$, т.е. фиксированные затраты отсутствуют, а предельные затраты постоянны.

Фирмы выбирают q_i одновременно и независимо. Они максимизируют свои прибыли:

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i(P(q_i + q_j) - c_i) = q_i[a - (q_i + q_j) - c_i].$$

Если (q_1^*, q_2^*) — равновесие Нэша, то q_1^* доставляет максимум функции $\pi_1(q_1, q_2^*)$, а q_2^* — функции $\pi_2(q_1^*, q_2)$. Решениями этих двух оптимизационных задач, как легко убедиться, будут соответственно

$$q_1^* = \begin{cases} \frac{1}{2}(a - q_2^* - c_1), \text{если } q_2^* < a - c_1, \\ 0, \text{если } q_2^* \geqslant a - c_1; \end{cases}$$

$$q_2^* = \begin{cases} \frac{1}{2}(a - q_1^* - c_2), \text{если } q_1^* < a - c_2, \\ 0, \text{если } q_1^* \geqslant a - c_2. \end{cases}$$

Решая совместно данную систему двух уравнений, находим равновесие Нэша:

$$q_1^* = \frac{1}{3}(a - 2c_1 + c_2),\ \ q_2^* = \frac{1}{3}(a - 2c_2 + c_1), \text{ если } c_1 \in \left(2c_2 - a;\ \frac{1}{2}(a + c_2)\right),$$

$$q_1^* = \frac{1}{2}(a - c_1),\ \ q_2^* = 0, \text{ если } c_1 \leqslant 2c_2 - a,$$

$$q_1^* = 0,\ \ q_2^* = \frac{1}{2}(a - c_2), \text{ если } c_1 \geqslant \frac{1}{2}(a + c_2).$$

Заметим, что в случае равных предельных затрат $c_1 = c_2 = c$ равновесные выпуски равны

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a - c}{3}.$$

Пример 2.8 (модель дуополии по Бертрану). Рассмотрим ситуацию, когда две фирмы, $i = 1, 2$, как и в дуополии по Курно, производят однородный продукт, но теперь мы предположим, что фирмы одновременно и независимо объявляют цену, по которой они готовы продавать свою продукцию. При этом они берут на себя обязательства удовлетворять весь спрос по этим ценам. Пусть рыночный спрос задан как функция

$$Q = \begin{cases} a - P, \text{ если } P < a, \\ 0, \text{ если } P \geqslant a, \end{cases}$$

(P — наименьшая из предложенных цен; Q — количество продукта, приобретенного покупателями). Тогда спрос, с которым сталкивается каждая фирма, определяется следующим образом:

$$q_i = \begin{cases} a - p_i, \text{если } p_i < p_j, \\ \frac{1}{2}(a - p_i), \text{если } p_i = p_j, \\ 0, \text{если } p_i > p_j. \end{cases}$$

Предположим, что функции затрат фирм имеют вид $C_i(q_i) = cq_i$, $c < a$, $i = 1, 2$, и предположим, что цены (p_1^*, p_2^*) образуют равновесие по Нэшу. Во-первых, очевидно, что $p_i^* \geqslant c$, назначение цены ниже предельных затрат приведет к отрицательной прибыли, чего не может быть в равновесии. Далее, ни одна из цен не может быть выше c. Действительно, предположим для определенности, что $p_1^* > c$, тогда если $p_2^* \geqslant p_1^*$, то фирма 2, сталкивающаяся в этом варианте в лучшем случае с половинным спросом, может перехватить весь спрос, назначив цену $p_2' = p_1^* - \varepsilon$ для малого $\varepsilon > 0$ и тем самым улучшив свое положение. Если же $p_1^* > p_2^* > c$, то фирма 1 аналогично может назначить цену $p_1' = p_2^* - \varepsilon$, перехватывая весь спрос. Таким образом, в равновесии по Бертрану (вернее, в равновесии по Нэшу в дуополии по Бертрану) $p_1^* = p_2^* = c$ и фирмы получают нулевую прибыль. Эта ситуация называется *парадокс Бертрана*.

Как можно избежать этой парадоксальной ситуации? Во-первых, можно ввести условие ограничения мощности фирм, т.е. считать, что есть цены, при которых фирмы не могут обеспечить весь спрос. Во-вторых, можно снять условие однократности этой игры (см. задачу 2.16). В-третьих, можно избавиться от предположения об однородности продукции. В-четвертых, можно отказаться от предположения о равенстве предельных затрат у разных фирм.

Определение 2.8. Пусть G — статическая игра с полной информацией. Будем называть *G базовой игрой. Конечной повторяющейся игрой $G(T)$* базовой игры G называется игра, в которой G разыгрывается T раз и перед началом каждого очередного розыгрыша игрокам известны исходы всех предыдущих розыгрышей, т.е. известны стратегии, избранные игроками, и полученные выигрыши. Выигрыши в игре $G(T)$ определяются как сумма (или дисконтированная сумма) выигрышей на каждом шаге. При этом если δ — коэффициент дисконтирования будущих выигрышей, то приведенная стоимость бесконечной последовательности выигрышей $\pi_1, \pi_2, \ldots$ есть

$$\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \pi_t.$$

Часто, особенно если выигрыши выражаются в денежной форме, коэффициент дисконтирования будущих выигрышей $0 < \delta < 1$ задают в форме

$$\delta = \frac{1}{1+r},$$

где $r > 0$, имея в виду финансовую интерпретацию нашей игры как некой коммерческой деятельности, когда r — коэффициент дисконтирования, или временна́я стоимость денег.

Определение 2.9. Пусть $G = \langle I, S, u \rangle$ — игра, ситуации $s, s' \in S$, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s' = (s_1', s_2', \ldots, s_n')$. Будем говорить, что ситуация (исход) s *Парето-доминирует* ситуацию (исход) s', если для всех $i \in I$ верно, что $u_i(s_i) \geqslant u_i(s_i')$, причем как минимум для одного i это неравенство выполняется строго.

Определение 2.10. Ситуация s называется *Парето-оптимальной*, или *оптимальной по Парето*, если не существует ситуации $s' \in S$, которая Парето-доминирует s.

Пример 2.9. Дана бесконечно повторяемая игра. Базовая игра имеет вид

Стратегия	L	R
U	4; 2	12; 1
D	1; 8	8; 4

В нашей базовой игре единственным Парето-оптимальным исходом является (D, R), хотя единственным равновесным исходом является (U, L), т.е. «плохое» для обоих игроков равновесие. Но достичь этого «хорошего» исхода можно только в результате договоренности, кооперации, в предположении, что ни один из игроков не предаст другого игрока. *Жесткая триггерная стратегия* (т.е. стратегия переключения) состоит в следующем. Оба игрока играют Парето-оптимальный исход, т.е. (D, R), как они договорились (фаза кооперации), до тех пор пока один из них не предаст другого. После первого предательства ни один из игроков больше никому не верит и они оба до конца времен играют равновесие по Нэшу (U, L), т.е. фазу наказания. Ясно, что если δ достаточно близко к единице, то эта жесткая триггерная стратегия у каждого из игроков составляет совершенное подыгровое равновесие Нэша в нашей бесконечно повторяющейся игре. Наша задача — определить, при каких значениях коэффициента дисконтировании δ эти стратегии игроков составляют СПРН. Итак, пусть наши игроки придерживаются следующих стратегий.

Стратегия первого игрока: в первом раунде играть D; в n-м ($n \geqslant 2$) раунде играть: D, если исход всех предыдущих раундов (D, R); U — в противном случае.

Стратегия второго игрока: в первом раунде играть R; в n-м ($n \geqslant 2$) раунде играть: R, если исход всех предыдущих раундов (D, R); L — в противном случае.

Не умаляя общности, мы можем считать, что если предательство происходит, то в первом раунде. Пусть первый игрок рассматривает вопрос, стоит ли ему предать второго. Если он играет честно, то его дисконтированный выигрыш равен

$$8 + 8\delta + 8\delta^2 + ... = \frac{8}{1-\delta}.$$

В случае предательства его дисконтированный выигрыш равен

$$12 + 4\delta + 4\delta^2 + ... = 12 + \frac{4\delta}{1-\delta}.$$

Итак, первому игроку имеет смысл придерживаться жесткой триггерной стратегии, если

$$\frac{8}{1-\delta} \geqslant 12 + \frac{4\delta}{1-\delta},$$

т.е. если $\delta \geqslant 0{,}5$. Пусть теперь второй игрок рассматривает вопрос о возможности предать первого игрока. Если он играет честно, то его дисконтированный выигрыш равен

$$4 + 4\delta + 4\delta^2 + ... = \frac{4}{1-\delta}.$$

Если же второй игрок предает первого, то его дисконтированный выигрыш равен

$$8 + 2\delta + 2\delta^2 + ... = 8 + \frac{2\delta}{1-\delta}.$$

Итак, второму игроку имеет смысл придерживаться жесткой триггерной стратегии, если

$$\frac{4}{1-\delta} \geqslant 8 + \frac{2\delta}{1-\delta},$$

т.е. если $\delta \geqslant \frac{2}{3}$. Итак, при $\delta \geqslant \frac{2}{3}$ обоим игрокам имеет смысл придерживаться жесткой триггерной стратегии, т.е. играть честно до тех пор, пока их не предадут, а в случае предательства играть фазу наказания. Эта пара стратегий при $\delta \geqslant \frac{2}{3}$ составляет совершенное подыгровое равновесие Нэша.

Определим, чему равен средний выигрыш в бесконечно повторяющейся игре, если исход первого раунда (D, R), второго раунда (U, L) и т.д. через раз. Ставка дисконтирования $r = 50\%$. Таким образом, коэффициент дисконтирования равен

$$\delta = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Средний выигрыш (*за период*) бесконечной последовательности выигрышей $\pi_1, \pi_2, \ldots$ при данном коэффициенте дисконтирования δ определяется как

$$(1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1}\pi_t.$$

Таким образом, в нашем случае выигрыш первого игрока

$$u_1 = 8 + 4\delta + 8\delta^2 + 4\delta^3 + \ldots = (8 + 8\delta^2 + \ldots) + (4\delta + 4\delta^3 + \ldots) =$$
$$= \frac{8}{1-\delta^2} + \frac{4\delta}{1-\delta^2} = \frac{4(2+\delta)}{1-\delta^2};$$

средний (за период) выигрыш первого игрока

$$\bar{u}_1 = (1-\delta)\frac{4(2+\delta)}{1-\delta^2} = \frac{4(2+\delta)}{1+\delta} = \frac{32}{5} = 6{,}4;$$

выигрыш второго игрока

$$u_1 = 4 + 2\delta + 4\delta^2 + 2\delta^3 + \ldots = (4 + 4\delta^2 + \ldots) + (2\delta + 2\delta^3 + \ldots) =$$
$$= \frac{4}{1-\delta^2} + \frac{2\delta}{1-\delta^2} = \frac{2(2+\delta)}{1-\delta^2};$$

средний (за период) выигрыш второго игрока

$$\bar{u}_1 = (1-\delta)\frac{2(2+\delta)}{1-\delta^2} = \frac{2(2+\delta)}{1+\delta} = \frac{16}{5} = 3{,}2.$$

До сих пор мы рассматривали игры с полной информацией. Теперь мы хотим описать ситуацию с неполной информацией. Тот факт, что каждый игрок знает свою функцию выигрышей, но может не знать функций выигрышей остальных игроков, учитывается следующим образом. Функция выигрыша игрока i теперь имеет вид

$$u_i(a_1, a_2, \ldots, a_n; t_i),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — ходы, соответственно, первого, второго, ..., n-го игроков, а t_i — тип игрока, $t_i \in T_i$, T_i — множество (пространство) возможных типов игрока i.

Введем понятие представлений игроков. *Представление* (или система представлений) игрока i о типах остальных игроков — это вероятность $p(t_{-i}|t_i)$ того, что типы остальных игроков описываются вектором $t_{-i} = (t_1, t_2, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, ..., t_n)$, при условии что i-й игрок имеет (и знает свой) тип t_i. В большинстве случаев, в частности во всех рассматриваемых в данном учебнике задачах, предполагается, что эта вероятность не зависит от типа самого игрока, т.е. мы можем использовать здесь не условную вероятность $p(t_{-i}|t_i)$, а просто $p(t_{-i})$.

Определение 2.11. *Байесова игра n* лиц в нормальной форме определяется:

- набором множеств (пространств) ходов игроков $A_1, A_2, ..., A_n$;
- набором множеств (пространств) типов игроков $T_1, T_2, ..., T_n$;
- представлениями игроков $p_1, p_2, ..., p_n$;
- функциями выигрышей $u_1, u_2, ..., u_n$.

Тип $t_i \in T_i$ игрока i известен игроку i и определяет функцию выигрышей $u_i(a_1, a_2, ..., a_n; t_i)$. Представления $p(t_{-i}|t_i)$ игрока i описывают неопределенность относительно типов t_{-i} оставшихся $n - 1$ игроков при данном типе t_i игрока i. Эту игру будем обозначать набором $G = \langle A, T, p, u\rangle$, где $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$; $T = T_1 \times T_2 \times ... \times T_n$; $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$; $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$.

Байесова игра протекает следующим образом:

1) Природа выбирает вектор типов $t = (t_1, t_2, ..., t_n) \in T$;

2) Природа сообщает каждому игроку i его тип t_i (и никому другому);

3) игроки одновременно выбирают свои ходы (i-й игрок из A_i);

4) игроки получают выигрыши $u_i(a_1, a_2, ..., a_n; t_i)$, $i \in I$.

Теперь мы можем дать определение равновесия по Байесу — Нэшу, или БН-равновесия. Центральная идея здесь все та же, что и в байесовом равновесии: стратегия каждого игрока должна быть лучшим откликом на стратегии других игроков, т.е. БН-равновесие — это просто равновесие по Нэшу в байесовой игре.

Определение 2.12. *Равновесие по Байесу — Нэшу* (или БН-равновесие) в игре с неполной информацией с конечным множеством типов T_i у каждого игрока $i \in I$, априорным распределением p и пространством чистых стратегий каждого игрока A_i есть равновесие по Нэшу в расширенной игре, в которой пространство стратегий игрока — это множество всех отображений из T_i в A_i.

Определение 2.13. Набор стратегий (ситуация) $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ в игре в позиционной форме называется *последовательно рациональным* в информационном множестве H при данной системе представлений μ, если ожидаемый выигрыш игрока j, который ходит в информационном множестве H, при использовании им его стратегии $\sigma_{j(H)}$ не меньше, чем его выигрыш при использовании им любой другой стратегии $\hat{\sigma}_{j(H)}$ при данных представлениях игроков μ и при любом наборе стратегий $\sigma_{-j(H)}$ его оппонентов.

Если ситуация у удовлетворяет этому условию для всех информационных множеств H, то у, по определению, *последовательно рациональна* при данной системе представлений μ.

Определение 2.14. *Сигнальная игра* — это динамическая игра с неполной информацией двух игроков: S (*Sender*) — ведущего (посылающего сигнал) и R (*Receiver*) — получателя сигнала. Игра протекает следующим образом.

1. Природа выбирает тип t_i для ведущего из множества возможных типов $T = \{t_1, ..., t_I\}$ в соответствии с вероятностным распределением $p(t_i)$: $p(t_i) > 0$ для любого i и $p(t_1) + ... + p(t_I) = 1$.

2. Игрок S (посылающий сигнал) наблюдает свой тип t_i и выбирает сигнал m_j из множества возможных сообщений $M = \{m_1, ..., m_J\}$.

3. Получатель наблюдает (получает) сигнал m_j (но не t_i) и затем выбирает действие a_k из множества $A = \{a_1, ..., a_K\}$.

4. Определяются выигрыши $U_S(t_i, m_j, a_k)$ и $U_R(t_i, m_j, a_k)$.

Естественно считать, что множество возможных сообщений зависит от типа игрока, а множество возможных действий зависит от полученного сигнала.

Остановимся на простом случае сигнальной игры:

$$T = \{t_1, t_2\},\ \ M = \{m_1, m_2\},\ \ A = \{a_1, a_2\},\ \ P(t_1) = p.$$

Дерево таких сигнальных игр принято изображать так, как это сделано на рис. 2.1.

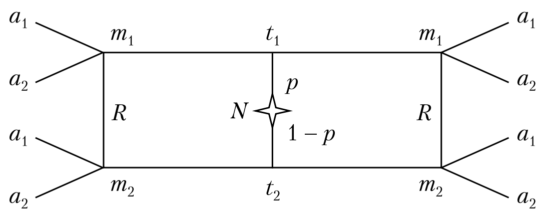


Рис. 2.1

Как всегда, стратегия игрока — это полный план действий: стратегия предписывает допустимое действие в каждом случае, когда игроку, может быть, придется сделать ход. В сигнальной игре чистая стратегия игрока S — это функция $m(t_i)$, указывающая, какое сообщение будет выбрано для каждого типа, который может выбрать Природа, а чистая стратегия игрока R — это функция $a(m_j)$, указывающая, какое действие будет выбрано для каждого возможного сообщения S. В рассматриваемой игре может быть всего четыре чистые стратегии у каждого из игроков:

• первая стратегия S — сыграть m_1, если Природа выбрала t_1, и сыграть m_1 же, если t_2;

• вторая стратегия S — сыграть m_1, если Природа выбрала t_1, и сыграть m_2, если t_2;

• третья стратегия S — сыграть m_2, если Природа выбрала t_1, и сыграть m_1, если t_2.

• четвертая стратегия S — сыграть m_2, если Природа выбрала t_1, и сыграть m_2 же, если t_2;

• первая стратегия R — сыграть a_1, если S выбрала m_1, и сыграть a_1 же, если m_2;

• вторая стратегия R — сыграть a_1, если S выбрала m_1, и сыграть a_2, если m_2;

• третья стратегия R — сыграть a_2, если S выбрала m_1, и сыграть a_1, если m_2;

• четвертая стратегия R — сыграть a_2, если S выбрала m_1, и сыграть a_2 же, если m_2.

Первая и четвертая стратегии S — объединяющие, так как каждый тип посылает один и тот же сигнал, а вторая и третья — разделяющие, так как разные типы посылают разные сигналы. Поскольку S знает всю историю игры и его выбор осуществляется в одноточечном информационном множестве, то вопроса о его представлениях не возникает. Что же касается R, то он выбирает действие после получения сообщения S, но не зная типа S, значит, выбор R происходит в двухточечном информационном множестве.

Мы можем теперь сформулировать требования для сигнальных игр применительно к нашей конкретной ситуации.

Сигнальное требование 1. После получения каждого сообщения m_j из M игрок R должен иметь представление о том, какой тип мог послать сообщение m_j. Обозначим через $\mu(t_i|m_j)$ вероятность того, что сообщение m_j послано типом t_i (естественно, что $\sum\limits_{t_i \in T} \mu(t_i|m_j) = 1$).

При данном сообщении S и представлении R оптимальное действие R характеризуется с помощью следующего требования — требования последовательной рациональности.

Сигнальное требование 2R. Для любого m_j О M действие игрока R, а именно $a^*(m_j)$, должно максимизировать ожидаемую полезность R при данном представлении $\mu(t_i|m_j)$ относительно того, какой тип мог послать сообщение m_j. Другими словами, $a^*(m_j)$ решает задачу

$$\max_{a_k \in A} \left\{ \sum_{t_i \in T} \mu(t_i | m_j) U_R(t_i, m_j, a_k) \right\}.$$

Требование последовательной рациональности применимо и к игроку S, но S имеет полную информацию, а следовательно, тривиальные представления, кроме того, он ходит только в начале игры, значит, стратегия S должна быть оптимальна при данной стратегии R.

Сигнальное требование 2S. Для любого типа $t_i \in T$ сообщение $m^*(t_i)$ игрока S должно максимизировать полезность S при данной стратегии $a^*(m_j)$ игрока R. Другими словами, $m^*(t_i)$ решает задачу

$$\max_{m_j \in M} U_S(t_i, m_j, a^*(m_j)).$$

Сигнальное требование 3. Для любого m_j в M, если существует тип $t_i \in T$, такой что $m^*(t_i) = m_j$, представление R в информационном множестве, соответствующем m_j, должно определяться по правилу Байеса и исходя из стратегии S, т.е.

$$\mu(t_i | m_j) = \frac{p(t_i)}{\sum\limits_{t_i \in T_j} p(t_i)}.$$

Определение 2.15. Совершенное байесово равновесие в чистых стратегиях в сигнальной игре есть пара стратегий $m^*(t_i)$, $a^*(m_j)$ и представление $\mu(t_i|m_j)$, удовлетворяющие сигнальным требованиям 1, 2R, 2S и 3.

Если стратегия S является объединяющей или разделяющей, то и равновесие называется, соответственно, объединяющим или разделяющим.

2.3. Разбор характерных ошибок при решении задач теории игр

В данном параграфе на примерах рассмотрим, как надо и как не надо решать задачи по теории игр.

Пример 2.10. Байесова игра имеет следующий вид:

$p = 1/8$	L	R
U	2; 2	1; 4
D	3; 1	1; 1

$p = 7/8$	L	R
U	2; 1	1; 1
D	3; 1	1; 4

1. Укажите количество типов каждого игрока.
2. Сформулируйте чистые стратегии игроков.
3. Найдите все равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.
4. Найдите все равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

Ответы на вопросы 1 и 2 довольно простые: у первого игрока — один тип, у второго — два типа.

Чистые стратегии игроков: первого $\{U, D\}$, второго — $\{LL, LR, RL, RR\}$. Для ответа на вопрос 3 запишем игру в матричной форме:

	LL	LR	RL	RR
U	$\frac{2+2\cdot 7}{8}=\frac{16}{8}$; $\frac{2+1\cdot 7}{8}=\frac{9}{8}$	$\frac{2+1\cdot 7}{8}=\frac{9}{8}$ $\frac{2+1\cdot 7}{8}=\frac{9}{8}$	$\frac{1+2\cdot 7}{8}=\frac{15}{8}$; $\frac{4+1\cdot 7}{8}=\frac{11}{8}$	$\frac{1+1\cdot 7}{8}=\frac{8}{8}$ $\frac{4+1\cdot 7}{8}=\frac{11}{8}$
D	$\frac{3+3\cdot 7}{8}=\frac{24}{8}$; $\frac{1+1\cdot 7}{8}=\frac{8}{8}$	$\frac{3+1\cdot 7}{8}=\frac{10}{8}$; $\frac{1+4\cdot 7}{8}=\frac{29}{8}$	$\frac{1+3\cdot 7}{8}=\frac{22}{8}$; $\frac{1+1\cdot 7}{8}=\frac{8}{8}$	$\frac{1+1\cdot 7}{8}=\frac{8}{8}$; $\frac{1+4\cdot 7}{8}=\frac{29}{8}$

Получим три равновесия в чистых стратегиях: (U, RR), (D, LR), (D, RR). Далее в п. 4 требуется найти все равновесия в смешанных стратегиях. Сначала удается вычеркнуть доминируемую стратегию LL второго игрока.

Затем, к сожалению, преподаватели теории игр часто применяют способ, который они рекомендуют студентам на практических занятиях, основанный на теореме 2.1, доказательство которой они обычно не приводят.

Другими словами, без всяких оговорок выписываем следующую систему уравнений:

$$9q_1 + 15q_2 + 8(1 - q_1 - q_2) = 10q_1 + 22q_2 + 8(1 - q_1 - q_2);$$
$$9p + 29(1 - p) = 11p + 8(1 - p) = 11p + 29(1 - p).$$

Здесь через p обозначена вероятность того, что первый игрок использует чистую стратегию U, соответственно, $1 - p$ — вероятность того, что он использует чистую стратегию L. Через q_1 обозначена вероятность того, что второй игрок использует чистую стратегию LR, через q_2 — что он использует чистую стратегию LR, соответственно, $1 - q_1 - q_2$ — вероятность того, что второй игрок использует чистую стратегию RR. Первое уравнение данной системы представляет собой условие равенства ожидаемого выигрыша первого игрока при использовании им чистой стратегии U его ожидаемому выигрышу при использовании им чистой стратегии L (стратегия LL второго игрока уже удалена). Второе двойное равенство представляет собой условие равенства ожидаемых выигрышей второго игрока при использовании им чистых стратегий LR, RL и RR. Данная система уравнений справедлива, только если все рассматриваемые чистые стратегии входят в равновесные стратегии с ненулевыми вероятностями.

Из первого уравнения получим $q_1 + 7q_2 = 0$, т.е. $q_1 = q_2 = 0$, таким образом, если $p \neq 0$ и $p \neq 1$, то второй игрок в равновесии играет свою чистую стратегию RR. Из второго двойного равенства получим следующую несовместную систему:

$$29 - 20p = 8 + 3p = 29 - 18p.$$

Несовместность данной системы означает, что все три чистые стратегии LR, RL и RR не могут входить в равновесную стратегию с положительными вероятностями. Предполагая, что одна из данных трех чистых стратегий не участвует в равновесии, имеем три варианта: $21 = 23p$, $21 = 21p$, $20p = 18p$, откуда получается: $p = 21/23$, $p = 1$, $p = 0$.

Таким образом, удалось найти только одно равновесие в смешанных стратегиях:

$$\left(\frac{21}{23}U + \frac{2}{23}D,\ RR\right).$$

Кроме того, остался открытым вопрос, что если $p = 0$ или $p = 1$, могут ли тогда существовать равновесия со смешанными стратегиями второго игрока?

Приведем корректное решение этой же задачи.

	LR (с вероятностью q_1)	RL (с вероятностью q_2)	RR (с вероятностью $1 - q_1 - q_2$)
U (с вероятностью p)	$\frac{2+1\cdot7}{8} = \frac{9}{8}$; $\frac{2+1\cdot7}{8} = \frac{9}{8}$	$\frac{1+2\cdot7}{8} = \frac{15}{8}$; $\frac{4+1\cdot7}{8} = \frac{11}{8}$	$\frac{2+1\cdot7}{8} = \frac{8}{8}$; $\frac{4+1\cdot7}{8} = \frac{11}{8}$
D (с вероятностью $1 - p$)	$\frac{3+1\cdot7}{8} = \frac{10}{8}$; $\frac{1+4\cdot7}{8} = \frac{29}{8}$	$\frac{1+3\cdot7}{8} = \frac{22}{8}$; $\frac{1+1\cdot7}{8} = \frac{8}{8}$	$\frac{1+1\cdot7}{8} = \frac{8}{8}$; $\frac{1+4\cdot7}{8} = \frac{29}{8}$

Ожидаемые выигрыши игроков:

$$\begin{gathered}
U_1 = 9pq_1 + 15pq_2 + 8p(1-q_1-q_2) + 10(1-p)q_1 + \\
+ 22(1-p)q_2 + 8(1-p)(1-q_1-q_2) = \\
= 9pq_1 + 15pq_2 + 8p - 8pq_1 - 8pq_2 + 10q_1 - 10pq_1 + 22q_2 - \\
- 22pq_2 + 8 - 8q_1 - 8q_2 + 8pq_1 + 8pq_2 - 8p = \\
= -pq_1 - 7pq_2 + 2q_1 + 14q_2 + 8 = \\
= -(q_1 + 7q_2)p + 2q_1 + 14q_2 + 8 \xrightarrow[p \in [0;1]]{} \max; \\
U_2 = 9pq_1 + 11pq_2 + 11p(1-q_1-q_2) + \\
+ 29(1-p)q_1 + 8(1-p)q_2 + 29(1-p)(1-q_1-q_2) = \\
= 9pq_1 + 11pq_2 + 11p - 11pq_1 - 11pq_2 + 29q_1 - 29pq_1 + \\
+ 8q_2 - 8pq_2 + 29 - 29q_1 - 29q_2 - 29p + 29pq_1 + 29pq_2 = \\
= -2pq_1 + 21pq_2 - 18p - 21q_2 + 29 = \\
= -2pq_1 + 21(p-1)q_2 - 18p + 29 \xrightarrow[\substack{q_1,\, q_2 \in [0;1]: \\ 0 \leqslant q_1 + q_2 \leqslant 1}]{} \max.
\end{gathered}$$

Максимизируя ожидаемый выигрыш первого игрока, получим следующее:

1) если $q_1 = q_2 = 0$, то p — любое из промежутка $[0; 1]$;

2) если $q_1 + q_2^2 \neq 0$, то $p = 0$.

Максимизируя ожидаемый выигрыш второго игрока, получим:

1) если $p = 0$, то q_1 — любое из промежутка [0; 1], $q_2 = 0$;

2) если $p = 1$, то $q_1 = 0$, q_2 — любое из промежутка [0; 1];

3) если $0 < p < 1$, то $q_1 = q_2 = 0$.

Рассмотрев приведенные две группы условий совместно, получим:

1) $0 \leqslant p \leqslant 1$, $q_1 = q_2 = 0$;

2) $p = 0$, $0 \leqslant q_1 \leqslant 1$, $q_2 = 0$.

Итак, все равновесия в рассматриваемой игре:

$$\{pU + (1 - p)D, RR\},\ 0 \leqslant p \leqslant 1;\ \{D, q_1LR + (1 - q_1)RR\},\ 0 \leqslant q_1 \leqslant 1.$$

Нетрудно заметить, что данное множество исходов содержит в качестве частных случаев все найденные ранее равновесия (в чистых и смешанных стратегиях) и еще бесконечное множество (континуум) других, не замеченных при некорректном решении равновесий. Конечно, в данном случае можно вычеркнуть слабодоминируемые стратегии игроков, свести рассматриваемую игру к матричной (2×2)-игре и, действуя корректно, получить то же самое множество равновесий, но, вообще говоря, вычеркивать слабодоминируемые стратегии при поиске всех равновесий, очевидно, нельзя. Многие их все же вычеркивают, другие, ищущие равновесия, считают, что вычеркивать слабодоминируемую стратегию при поиске всех равновесий все же можно, если при этом не вычеркивается какое-нибудь равновесие в чистых стратегиях. Данное утверждение в общем случае также неверно. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть простой контрпример (см. пример 2.11).

Пример 2.11. Рассмотрим игру двух игроков со следующей платежной матрицей:

	L	R
U	5; 3	4; 3
D	4; 4	5; 3

Зададимся тем же самым стандартным вопросом: найти все равновесия по Нэшу в данной статической игре.

Очевидно, единственным равновесием в чистых стратегиях является $\{U, L\}$. Если вычеркнуть слабодоминируемую стратегию R второго игрока (при этом не вычеркивая никакого равновесия в чистых стратегиях), то получим, что равновесий в смешанных стратегиях вообще нет. Однако их в этой игре бесконечное множество:

	L (с вероятностью q)	R (с вероятностью $1 - q$)
U (с вероятностью p)	5; 3	4; 3
D (с вероятностью $1 - p$)	4; 4	5; 3

Теперь решим задачу так, как на практике по теории игр. Выпишем уравнения:

$$(1)\ 5q + 4(1 - q) = 4q + 5(1 - q);$$

$$(2)\ 3p + 4(1 - p) = 3p + 3(1 - p).$$

Из первого уравнения находим $q = 1 - q$ и, следовательно, $q = \frac{1}{2}$, а из второго уравнения получим $1 - p = 0$ и поэтому $p = 1$.

Таким образом, единственное равновесие в смешанных стратегиях, которое удалось найти:

$$\left\{U, \frac{1}{2}L, + \frac{1}{2}R\right\}.$$

Нелепость найденного решения бросается в глаза. Если $\{U, L\}$ и $\left\{U, \frac{1}{2}L, +\frac{1}{2}R\right\}$ — это *все* равновесия по Нэшу в рассматриваемой игре, то куда же девались другие исходы, лежащие между ними? И чем же они хуже двух найденных равновесий? Природа ошибки понятна: если $p = 1$, то бессмысленно требовать обязательного выполнения равенства (1). Уравнение (2) также ниоткуда не следует, до тех пор пока существует неуверенность в том, что $q \neq 0$, $q \neq 1$.

Приведем корректное решение задачи. Выпишем ожидаемые выигрыши игроков:

$$(3)\, U_1 = 5pq + 4p - 4pq + 4q - 4pq + 5 - 5p - 5q + 5pq = 2pq - p - q + 5 =$$
$$= p(2q-1) - q + 5 \xrightarrow[p\in[0;1]]{} \max;$$
$$(4)\, U_2 = 3pq + 3p - 3pq + 4q - 4pq + 3 - 3p - 3q + 3pq =$$
$$= -pq + q + 3 = q(1-p) + 3 \xrightarrow[q\in[0;1]]{} \max.$$

Из соотношения (3) получим:

- если $2q - 1 > 0$, т.е. $q > \frac{1}{2}$, тогда $p = 1$;
- если $2q - 1 < 0$, т.е. $q < \frac{1}{2}$, тогда $p = 0$.

Если $q = \frac{1}{2}$, то p — любое.

Из соотношения (4) получим:

- если $p = 1$, то q — любое из промежутка $[0; 1]$;
- если $p \in [0; 1)$, то $q = 1$.

Объединив условия, полученные из соотношений (3) и (4), получим: $p = 1$, $\frac{1}{2} \leqslant q \leqslant 1$. Тем самым, все возможные равновесия Нэша в рассматриваемой игре — это

$$\{U, qL + (1-q)R\},\ q \in \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

В частности, получено одно равновесие в чистых стратегиях: $\{U, L\}$.

Пример 2.12. Игра имеет следующий вид:

$p = 1/4$	L	R
U	3; 1	1; 1
D	3; 2	1; 4

$p = 3/4$	L	R
U	2; 1	4; 3
D	3; 1	2; 1

1. Укажите количество типов каждого игрока.
2. Сформулируйте чистые стратегии игроков.
3. Найдите все равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.
4. Найдите все равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

На первые два вопроса ответы очень просты: по два типа у игроков и по четыре чистые стратегии. Интерес представляют последние два вопроса. Дело в том, что если у каждого из игроков по два типа, то, казалось бы, должно быть четыре варианта платежной матрицы, а их всего два. Другими словами, представления каждого игрока о типе другого игрока являются не априорными, а условными вероятностями в зависимости от типа самого игрока. Если первый игрок имеет первый тип, то он знает, что его противник также, почти наверное, имеет первый тип, а если у первого игрока второй тип, то он знает, что и у его противника также второй тип с вероятностью единица. То же самое относится и к представлениям второго игрока относительно типа первого игрока. Таким образом, игра не является байесовской. В игре с неполной информацией хотя бы одному из игроков должен быть неизвестен тип другого игрока. Наша же игра просто распадается на две подыгры в зависимости от хода, сделанного Природой. Поэтому для того чтобы найти все равновесия в чистых стратегиях, вовсе необязательно записывать (4×4)-матрицу:

	LL	*LR*	*RL*	*RR*
UU	$\frac{3+2\cdot 3}{4}=\frac{9}{4}$; $\frac{1+1\cdot 3}{4}=\frac{4}{4}$	$\frac{3+4\cdot 3}{4}=\frac{15}{4}$; $\frac{1+3\cdot 3}{4}=\frac{10}{4}$	$\frac{1+2\cdot 3}{4}=\frac{7}{4}$; $\frac{1+1\cdot 1}{4}=\frac{2}{4}$	$\frac{1+4\cdot 3}{4}=\frac{13}{4}$; $\frac{1+3\cdot 3}{4}=\frac{10}{4}$
UD	$\frac{3+3\cdot 3}{4}=\frac{12}{4}$; $\frac{1+1\cdot 3}{4}=\frac{4}{4}$	$\frac{3+2\cdot 3}{4}=\frac{9}{4}$; $\frac{1+1\cdot 3}{4}=\frac{4}{4}$	$\frac{1+3\cdot 3}{4}=\frac{10}{4}$; $\frac{1+1\cdot 3}{4}=\frac{4}{4}$	$\frac{1+2\cdot 3}{4}=\frac{7}{4}$; $\frac{1+1\cdot 3}{4}=\frac{4}{4}$
DU	$\frac{3+2\cdot 3}{4}=\frac{9}{4}$; $\frac{2+1\cdot 3}{4}=\frac{5}{4}$	$\frac{3+4\cdot 3}{4}=\frac{15}{4}$; $\frac{2+3\cdot 3}{4}=\frac{11}{4}$	$\frac{1+2\cdot 3}{4}=\frac{7}{4}$; $\frac{4+1\cdot 3}{4}=\frac{7}{4}$	$\frac{1+4\cdot 3}{4}=\frac{13}{4}$; $\frac{4+3\cdot 3}{4}=\frac{13}{4}$
DD	$\frac{3+3\cdot 3}{4}=\frac{12}{4}$; $\frac{2+1\cdot 3}{4}=\frac{5}{4}$	$\frac{3+2\cdot 3}{4}=\frac{9}{4}$; $\frac{2+1\cdot 3}{4}=\frac{5}{4}$	$\frac{1+3\cdot 3}{4}=\frac{10}{4}$; $\frac{4+1\cdot 3}{4}=\frac{7}{4}$	$\frac{1+2\cdot 3}{4}=\frac{7}{4}$; $\frac{4+1\cdot 3}{4}=\frac{7}{4}$

Нетрудно заметить, что равновесиями в чистых стратегиях являются следующие исходы:{*UU*, *LR*}, {*UU*, *RR*}, {*UD*, *LL*}, {*UD*, *RL*}, {*DU*, *RR*}, {*DD*, *RL*}, и только они. Однако они получаются значительно проще и без вычисления ожидаемых выигрышей игроков (рассматриваемая игра ведь вовсе не байесовская, а с полной информацией, потому что у каждого игрока по два типа, причем когда первый игрок имеет первый тип, то и второй игрок имеет первый тип, а когда первый игрок имеет второй тип, то и второй игрок имеет второй тип).

Найдем отдельно все равновесия в чистых стратегиях в обеих подыграх. В первой игре:

	L	*R*
U	3; 1	1; 1
D	3; 2	1; 4

Очевидно, это {*U*, *L*}, {*U*, *R*}, {*D*, *R*}.

Во второй игре:

	L	*R*
U	2; 1	4; 3
D	3; 1	2; 1

Здесь два равновесия в чистых стратегиях: {*U*, *R*}, {*D*, *L*}.

Беря теперь декартово произведение множеств, полученных в подыграх, получим указанное выше множество, состоящее из всех шести равновесий в чистых стратегиях в рассматриваемой игре.

Точно так же для нахождения всех равновесий в смешанных стратегиях в нашей игре необязательно рассматривать (4×4)-матрицу ожидаемых выигрышей обоих игроков (из которой не удается вычеркнуть ни одну из чистых стратегий). Достаточно найти отдельно множества всех равновесий в смешанных стратегиях для каждой из двух исходных подыгр, а затем перемножить данные множества. При этом вероятности, с которыми разыгрываются та и другая подыгры, для нахождения равновесий по Нэшу (самих равновесий, а не ожидаемых выигрышей в них) оказываются вообще несущественными.

Для первой исходной подыгры имеем:

	L (с вероятностью q)	R (с вероятностью $1-q$)
U (с вероятностью p)	3; 1	1; 1
D (с вероятностью $1-p$)	3; 2	1; 4

$$U_1 = 3pq + p(1-q) + 3(1-p)q + (1-p)(1-q) =$$
$$= 3pq + p - pq + 3q - 3pq + 1 - p - q + pq = 1 + 2q \xrightarrow[p\in[0;1]]{} \max,$$

откуда находим: p — любое число из промежутка $[0; 1]$;

$$U_2 = pq + p(1-q) + 2(1-p)q + 4(1-p)(1-q) =$$
$$= pq + p - pq + 2q - 2pq + 4 - 4p - 4q + 4pq =$$
$$= 2pq - 3p - 2q + 4 = 2(p-1)q + 4 - 3p \xrightarrow[q\in[0;1]]{} \max,$$

откуда находим:

- если $p = 1$, то q — любое число из промежутка $[0; 1]$;
- если $p < 1$, то $q = 0$.

Таким образом, множество всех равновесий для первой подыгры

$$\{U, qL + (1-q)R\},\ q \in [0; 1];\ \ \{pU + (1-p)D, R\},\ p \in [0; 1].$$

Для второй исходной подыгры имеем:

	L (с вероятностью q)	R (с вероятностью $1-q$)
U (с вероятностью p)	2; 1	4; 3
D (с вероятностью $1-p$)	3; 1	2; 1

$$U_1 = 2pq + 4p(1-q) + 3(1-p)q + 2(1-p)(1-q) =$$
$$= 2pq + 4p - 4pq + 3q - 3pq + 2 - 2p - 2q + 2pq =$$
$$= -3pq + 2p + q + 2 = p(2-3q) + q + 2 \xrightarrow[p\in[0;1]]{} \max,$$

откуда находим:

- если $2 - 3q > 0$, т.е. $q < \dfrac{2}{3}$, тогда $p = 1$;
- если $2 - 3q < 0$, т.е. $q > \dfrac{2}{3}$, тогда $p = 0$;
- если $2 - 3q = 0$, т.е. $q = \dfrac{2}{3}$, то p — любое число из промежутка $[0; 1]$;

$$U_2 = pq + 3p(1-q) + (1-p)q + (1-p)(1-q) =$$
$$= pq + 3p - 3pq + q - pq + 1 - p - q + pq =$$
$$= -2pq + 2p + 1 \xrightarrow[q\in[0;1]]{} \max,$$

откуда находим:

- если $p = 0$, то q — любое число из промежутка $[0; 1]$;
- если $p > 0$, то $q = 0$.

Таким образом, множество всех равновесий второй подыгры:

$$\{U, R\}, \{D, qL + (1-q)R\},\ q \in \left[\frac{2}{3}; 1\right].$$

Итак, множество всех равновесий исходной игры, которое представляет собой декартово произведение множеств равновесий в подыграх, имеет вид

$$\{U; qL + (1-q)R, q \in [0; 1], \text{если тип 1, и } R, \text{если тип 2}\};$$

$$\left\{U, \text{если тип 1, и } D, \text{если тип 2}; \right.$$

$$\left. qL + (1-q)R, q \in [0; 1], \text{если тип 1, и } q \in \left[\frac{2}{3}; 1\right], \text{если тип 2}\right\};$$

$$\{pU + (1-p)D, p \in [0; 1], \text{если тип 1, и } U, \text{если тип 2}; R\};$$

$$\left\{pU + (1-p)D, p \in [0; 1], \text{если тип 1, и } D, \text{если тип 2}; \right.$$

$$\left. R, \text{если тип 1, и } qL + (1-q)R, q \in \left[\frac{2}{3}; 1\right], \text{если тип 2}\right\},$$

или, что то же самое:

$$\{U; qLR + (1-q)RR, q \in [0; 1]\};$$

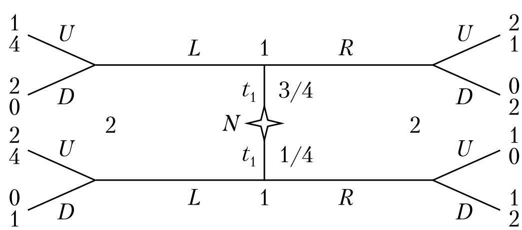
$$\left\{UD; q_1q_2LL + q_1(1-q_2)LR + (1-q_1)q_2RL + (1-q_1)(1-q_2)RR, \right.$$

$$\left. q_1 \in [0; 1], q_2 \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]\right\};$$

$$\{pUU + (1-p)DU, p \in [0; 1], R\};$$

$$\left\{pUD + (1-p)DD, p \in [0; 1], qRL + (1-q)RR, q \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]\right\}.$$

Пример 2.13. Дана следующая сигнальная игра:



Требуется выполнить следующее.

1. Найти все равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.
2. Найти все равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.
3. Указать все совершенные подыгровые равновесия по Нэшу.
4. Найти все совершенные байесовские равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.

Переведя игру из позиционной формы в нормальную, получим следующую матрицу:

	UU	UD	DU	DD
LL	$\frac{1\cdot3+2\cdot1}{4}=\frac{5}{4}$; $\frac{4\cdot3+4\cdot1}{4}=\frac{16}{4}$	$\frac{5}{4}$; $\frac{16}{4}$	$\frac{2\cdot3+0\cdot1}{4}=\frac{6}{4}$; $\frac{0\cdot3+1\cdot1}{4}=\frac{1}{4}$	$\frac{6}{4}$; $\frac{1}{4}$
LR	$\frac{1\cdot3+1\cdot1}{4}=\frac{4}{4}$; $\frac{4\cdot3+0\cdot1}{4}=\frac{12}{4}$	$\frac{1\cdot3+1\cdot1}{4}=\frac{4}{4}$; $\frac{4\cdot3+2\cdot1}{4}=\frac{14}{4}$	$\frac{2\cdot3+1\cdot1}{4}=\frac{7}{4}$; $\frac{0\cdot3+0\cdot1}{4}=\frac{0}{4}$	$\frac{2\cdot3+1\cdot1}{4}=\frac{7}{4}$; $\frac{0\cdot3+2\cdot1}{4}=\frac{2}{4}$
RL	$\frac{2\cdot3+2\cdot1}{4}=\frac{8}{4}$; $\frac{1\cdot3+4\cdot1}{4}=\frac{7}{4}$	$\frac{0\cdot3+2\cdot1}{4}=\frac{2}{4}$; $\frac{2\cdot3+4\cdot1}{4}=\frac{10}{4}$	$\frac{2\cdot3+0\cdot1}{4}=\frac{6}{4}$; $\frac{1\cdot3+1\cdot1}{4}=\frac{4}{4}$	$\frac{0\cdot3+0\cdot1}{4}=\frac{0}{4}$; $\frac{2\cdot3+1\cdot1}{4}=\frac{7}{4}$
RR	$\frac{2\cdot3+1\cdot1}{4}=\frac{7}{4}$; $\frac{1\cdot3+0\cdot1}{4}=\frac{3}{4}$	$\frac{0\cdot3+1\cdot1}{4}=\frac{1}{4}$; $\frac{2\cdot3+2\cdot1}{4}=\frac{8}{4}$	$\frac{7}{4}$; $\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$; $\frac{8}{4}$

Таким образом, единственное равновесие в чистых стратегиях — это $\{LL, UD\}$. Аналогичное же равновесие вместе с соответствующими представлениями второго игрока о вероятностях типов первого игрока $\left\{[L, L], [U, D], p=\frac{3}{4}, 0\leqslant q\leqslant 1\right\}$, очевидно, является совершенным байесовским равновесием по Нэшу в чистых стратегиях (поскольку равновесие является объединяющим, представления второго игрока относительно величины p совпадают с априорной вероятностью $3/4$, а представления относительно q произвольные, поскольку при получении сигнала R при любом $q\in[0;1]$ ожидаемый выигрыш второго игрока при использовании им стратегии d равен 2, а при использовании стратегии u его ожидаемый выигрыш равен q, что меньше, чем 2).

Интерес опять вызывает поиск всех равновесий по Нэшу в смешанных стратегиях.

Удалим никогда не лучшие отклики второго игрока DU и первого игрока RR. После этого отклик второго игрока DD становится не лучшим, и после его удаления отклик первого игрока LR также становится не лучшим. После его удаления приходим к следующей матрице игры:

	UU (с вероятностью q)	UD (с вероятностью $1-q$)
LL (с вероятностью p)	$\frac{5}{4}$; $\frac{16}{4}$	$\frac{5}{4}$; $\frac{16}{4}$
RL (с вероятностью $1-p$)	$\frac{8}{4}$; $\frac{7}{4}$	$\frac{2}{4}$; $\frac{10}{4}$

Выпишем ожидаемые выигрыши игроков:

$$U_1=\frac{5}{4}p+\frac{8}{4}(1-p)q+\frac{2}{4}(1-p)(1-q)=$$
$$=\frac{5}{4}p+\frac{8}{4}q-\frac{8}{4}pq+\frac{2}{4}-\frac{2}{4}p-\frac{2}{4}q+\frac{2}{4}pq=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}p+\frac{3}{2}q-\frac{3}{2}pq=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}q+\frac{3}{2}p\left(\frac{1}{2}-q\right)\xrightarrow[p\in[0;1]]{}\max.$$

Значит, если $q < \frac{1}{2}$, то $p = 1$; если $q > \frac{1}{2}$, то $p = 0$; если $q = \frac{1}{2}$, то p — любое число из промежутка [0; 1].

$$U_2 = \frac{16}{4}p + \frac{7}{4}(1-p)q + \frac{10}{4}(1-p)(1-q) =$$
$$= 4p + \frac{7}{4}q - \frac{7}{4}pq + \frac{10}{4} - \frac{10}{4}p - \frac{10}{4}q + \frac{10}{4}pq =$$
$$= \frac{10}{4} + \frac{3}{2}p - \frac{3}{4}q + \frac{3}{4}pq = \frac{10}{4} + \frac{3}{2}p + \frac{3}{4}q(p-1) \xrightarrow[q \in [0;1]]{} \max.$$

Значит, если $p < 1$, то $q = 0$; если $p = 1$, то q — любое число из промежутка [0; 1].

Таким образом, $0 \leqslant q \leqslant \frac{1}{2}$, $p = 1$, т.е. множество всех равновесий в смешанных стратегиях имеет вид $\left\{LL, qUU + (1-q)UD, 0 \leqslant q \leqslant \frac{1}{2}\right\}$. Это же множество является и множеством всех совершенных подыгровых равновесий Нэша, так как единственной подыгрой исходной игры является сама игра. Данное множество содержит и найденное ранее равновесие в чистых стратегиях (при $q = 0$).

Посмотрим, что получилось бы, если решать задачу так, как многие поступают на практике. Выпишем систему уравнений:

$$\frac{5}{4}q + \frac{5}{4}(1-q) = \frac{8}{4}q + \frac{2}{4}(1-q),$$
$$\frac{16}{4}p + \frac{7}{4}(1-p) = \frac{16}{4}p + \frac{10}{4}(1-p).$$

Преобразуем ее:

$$5 = 8q + 2(1-q),$$
$$7(1-p) = 10(1-p).$$

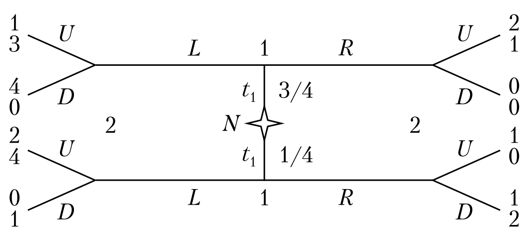
Получим: $p = 1$, $q = \frac{1}{2}$.

Таким образом, удалось найти только одно равновесие (из континуума) в смешанных стратегиях, а именно:

$$\left\{LL, \frac{1}{2}UU + \frac{1}{2}UD\right\}.$$

Куда же делись остальные равновесия в смешанных стратегиях и где равновесие в чистых стратегиях?

Пример 2.14. Дана следующая сигнальная игра:



Требует выполнить следующее.

1. Найти все равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.

2. Найти все равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

3. Указать все совершенные подыгровые равновесия по Нэшу.

4. Найти все совершенные байесовские равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.

Преобразовав форму представления игры, получим следующую матрицу:

	UU	*UD*	*DU*	*DD*
LL	$\frac{1\cdot 3+2\cdot 1}{4}=\frac{5}{4}$; $\frac{3\cdot 3+4\cdot 1}{4}=\frac{13}{4}$	$\frac{5}{4}$; $\frac{13}{4}$	$\frac{4\cdot 3+0\cdot 1}{4}=\frac{12}{4}$; $\frac{0\cdot 3+1\cdot 1}{4}=\frac{1}{4}$	$\frac{12}{4}$; $\frac{1}{4}$
LR	$\frac{1\cdot 3+1\cdot 1}{4}=\frac{4}{4}$; $\frac{3\cdot 3+0\cdot 1}{4}=\frac{4}{4}$	$\frac{1\cdot 3+1\cdot 1}{4}=\frac{4}{4}$; $\frac{3\cdot 3+2\cdot 1}{4}=\frac{11}{4}$	$\frac{4\cdot 3+1\cdot 1}{4}=\frac{13}{4}$; $\frac{0\cdot 3+0\cdot 1}{4}=\frac{0}{4}$	$\frac{4\cdot 3+1\cdot 1}{4}=\frac{13}{4}$; $\frac{0\cdot 3+2\cdot 1}{4}=\frac{2}{4}$
RL	$\frac{2\cdot 3+2\cdot 1}{4}=\frac{8}{4}$; $\frac{1\cdot 3+4\cdot 1}{4}=\frac{7}{4}$	$\frac{0\cdot 3+2\cdot 1}{4}=\frac{2}{4}$; $\frac{0\cdot 3+4\cdot 1}{4}=\frac{4}{4}$	$\frac{2\cdot 3+0\cdot 1}{4}=\frac{6}{4}$; $\frac{1\cdot 3+1\cdot 1}{4}=\frac{4}{4}$	$\frac{0\cdot 3+0\cdot 1}{4}=\frac{0}{4}$; $\frac{0\cdot 3+1\cdot 1}{4}=\frac{1}{4}$
RR	$\frac{2\cdot 3+1\cdot 1}{4}=\frac{7}{4}$; $\frac{1\cdot 3+0\cdot 1}{4}=\frac{3}{4}$	$\frac{0\cdot 3+1\cdot 1}{4}=\frac{1}{4}$; $\frac{0\cdot 3+2\cdot 1}{4}=\frac{2}{4}$	$\frac{7}{4}$; $\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$; $\frac{2}{4}$

Получили два равновесия в чистых стратегиях: $\{LL, UD\}$ и $\{RL, UU\}$.

Таким образом, совершенными байесовскими равновесиями по Нэшу в чистых стратегиях будут

$$\{[R, L], [U, U], p = 0, q = 1\} \text{ и } \left\{[L, L], [U, D], p = \frac{3}{4}, 0 \leqslant q \leqslant \frac{2}{3}\right\}.$$

Поясним, откуда получаются именно такие представления второго игрока.

Первое из равновесий — разделяющее, поэтому, получив сигнал R, второй игрок точно знает, что $q = 1$ (у первого игрока первый тип), а получив сигнал L, второй игрок точно знает, что $p = 0$ (у первого игрока второй тип).

Второе равновесие — объединяющее, поэтому, получив сигнал L, второй игрок знает только, что априорная вероятность $p = \frac{3}{4}$, таковы же будут и его представления. Что касается представлений второго игрока относительно величины q, посмотрим, при каких значениях q его ожидаемый выигрыш при использовании стратегии D после получения сигнала R будет не меньше, чем его ожидаемый выигрыш при использовании стратегии U после получения сигнала R: $0\cdot q + 2\cdot(1 - q) \geqslant 1\cdot q + 0\cdot(1 - q)$, откуда находим: $0 \leqslant q \leqslant \frac{2}{3}$.

Наибольший интерес опять вызывает поиск всех равновесий по Нэшу в смешанных стратегиях. Вычеркнем никогда не лучшие отклики первого игрока *RR* и второго игрока *DD*. После этого отклик второго игрока *DU* также становится не лучшим, и после его удаления отклик первого игрока *LR* становится не лучшим. После его удаления остается следующая матрица:

Стратегии игроков	UU (с вероятностью q)	UD (с вероятностью $1-q$)
LL (с вероятностью p)	$\frac{5}{4}; \frac{13}{4}$	$\frac{5}{4}; \frac{13}{4}$
RL (с вероятностью $1-p$)	$\frac{8}{4}; \frac{7}{4}$	$\frac{2}{4}; \frac{4}{4}$

Выпишем ожидаемые выигрыши игроков:

$$U_1 = \frac{5}{4}q + \frac{8}{4}p(1-q) + \frac{2}{4}(1-p)(1-q) = \frac{5}{4}q + \frac{8}{4}p - \frac{8}{4}pq + \frac{2}{4} - \frac{2}{4}p - \frac{2}{4}q + \frac{2}{4}pq =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}p + \frac{3}{4}q - \frac{3}{2}pq = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}p + \frac{3}{2}q\left(\frac{1}{2} - p\right) \xrightarrow[q \in [0;1]]{} \max.$$

Значит, если $p < \frac{1}{2}$, то $q = 1$; если $p > \frac{1}{2}$, то $q = 0$; если $p = \frac{1}{2}$, то q — любое число из промежутка $[0; 1]$.

$$U_2 = \frac{13}{4}q + \frac{7}{4}p(1-q) + \frac{4}{4}(1-p)(1-q) = \frac{13}{4}q + \frac{7}{4}p - \frac{7}{4}pq + 1 - p - q + pq =$$
$$= 1 + \frac{3}{4}p + \frac{9}{4}q - \frac{3}{4}pq = 1 + \frac{9}{4}q + \frac{3}{4}p(1-q) \xrightarrow[p \in [0;1]]{} \max.$$

Значит, если $q < 1$, то $p = 1$; если $q = 1$, то p — любое число из промежутка $[0; 1]$.

Таким образом, или $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2}$ и $q = 1$, или $p = 1$ и $q = 0$, т.е. множество всех равновесий в смешанных стратегиях: $\left\{LL, pUU + (1-p)UD], 0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2}\right\}$ и $\{RL, UU\}$. Это множество совпадает со множеством всех совершенных подыгровых равновесий Нэша, так как исходная игра не имеет других подыгр, кроме нее самой.

Посмотрим, что получится, если решать задачу с помощью бессмысленного выписывания уравнений. Получим:

$$5p + 5(1-p) = 8p + 2(1-p),$$
$$13q + 7(1-q) = 13q + 4(1-q).$$

Решив систему, найдем: $p = \frac{1}{2}$, $q = 1$.

Таким образом, найдено единственное равновесие (из континуума) в смешанных стратегиях:

$$\left\{LL; \frac{1}{2}UU + \frac{1}{2}UD\right\}.$$

Куда же девались все остальные равновесия, в частности два равновесия в чистых стратегиях?

2.4. Матричные игры. Равновесие в чистых стратегиях

Рассмотрим игру, в которой участвуют два игрока A и B, причем каждый из них имеет конечное число стратегий, соответственно $A_1, A_2, ..., A_m$ и $B_1, B_2, ..., B_n$.

Пусть игрок A выбрал стратегию A_i, а игрок B — стратегию B_k. Будем считать, что выбор игроками стратегий однозначно определяет исход игры — выигрыш a_{ik} игрока A и выигрыш b_{ik} игрока B, причем эти выигрыши связаны равенством $b_{ik} = -a_{ik}$ (игра с нулевой суммой, один из видов антагонистических игр).

При анализе такой игры можно рассматривать выигрыши только одного из игроков, например выигрыши игрока A. Если известны значения выигрыша при каждой паре стратегий $\{A_i, B_k\}$, $i = 1, 2, ..., m$, $k = 1, 2, ..., n$, то их удобно записывать в виде прямоугольной таблицы, строки которой соответствуют стратегиям игрока A, а столбцы — стратегиям игрока B, причем элемент матрицы, стоящий на пересечении строки с номером i и столбца с номером j, представляет собой выигрыш игрока A в случае, если игрок A выбирает стратегию A_i, а игрок B — стратегию B_k:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Такая таблица называется *платежной матрицей, матрицей выплат,* или *матрицей игры,* а игры такого вида — *матричными играми,* или *играми* $m \times n$, или $(m \times n)$*-играми.*

Пример 2.15. Каждый из двух игроков A и B одновременно и независимо друг от друга записывает на листе бумаги любое целое число. Если сумма чисел четна, то игрок A получает от игрока B 1 руб., в противном случае игрок B получает от игрока A 1 руб. У игрока A две стратегии: A_1 — записать четное число, A_2 — записать нечетное число, у игрока B также две стратегии: B_1 — записать четное число, B_2 — записать нечетное число. Матрица данной (2×2)-игры имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.16. Два игрока A и B, не глядя друг на друга, кладут на стол по картонному кружку красного (r), зеленого (g) или синего (b) цвета, сравнивают цвета кружков и расплачиваются друг с другом в соответствии со следующей матрицей игры:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Считая, что игра повторяется многократно, попробуем определить оптимальные стратегии каждого из игроков. Выбирая стратегию игрока A, следует помнить, что игрок B может выбрать ту из своих стратегий, при которой выигрыш игрока A будет минимальным. Например, если первый игрок выбирает стратегию A_r то второй может выбрать стратегию B_r, при которой выигрыш игрока A минимален и равен -2, т.е. это проигрыш двух рублей игроку B. На стратегию A_g игрок B ответит стратегией B_g или B_b, при которых выигрыш игрока A минимален и равен 1. Наконец, на стратегию A_b игрок B ответит стратегией B_g, тогда выигрыш игрока A минимален и равен 3. Поэтому игрок A выбирает стратегию A_g, при которой его минимальный выигрыш максимален (т.е. 1): maxmin = 1.

Если игрок A будет придерживаться этой стратегии, ему гарантирован выигрыш, не меньший 1 при любом поведении противника.

Аналогичные рассуждения можно привести для игрока B. Выбирая свою стратегию, он должен учитывать, что стратегией игрока A может оказаться та, при которой выигрыш этого игрока A будет максимальным. Например, на стратегию B_r он ответит стратегией A_b, при которой выигрыш игрока A максимален и равен 3. На стратегию B_g игрок A ответит стратегией A_r, при которой его выигрыш максимален и равен 2. Наконец, на стратегию B_b игрок A ответит стратегией A_g или A_b, тогда выигрыш игрока A максимален и равен 1. Поэтому игрок B выбирает стратегию B_b, при которой максимальный выигрыш игрока A минимален (т.е. 1): minmax = 1.

Если игрок B будет придерживаться данной стратегии, то при любом поведении противника его проигрыш не превзойдет 1. Таким образом, в нашей игре числа maxmin и minmax совпадают: maxmin = minmax = 1, а соответствующие элементы в табл. 2.1 выделены жирным шрифтом:

Таблица 2.1

Стратегия	B_r	B_g	B_b	min по строке
A_r	–2	2	–1	–2
A_g	2	1	**1**	**1**
A_b	3	–3	1	–3
max по строке	3	2	**1**	1

Стратегии A_g и B_b являются оптимальными в следующем смысле: при многократном повторении игры отказ любого из игроков от выбранной стратегии увеличивает его шансы на проигрыш. В самом деле, если игрок A выберет иную стратегию, например A_r, то игрок B это заметит и выберет стратегию B_r. На выбор A_b игрок B может ответить B_g. В обоих случаях выигрыш игрока A уменьшится. Если же игрок B отказывается от оптимальной стратегии B_b, предпочитая, например, B_r, то игрок A это заметит и отдаст предпочтение стратегии A_b. На стратегию B_g игрок A может ответить A_r. Таким образом, набор стратегий $\{A_g, B_b\}$ является равновесным (в смысле равновесия Нэша).

Матрица выплат игроку B, очевидно, получается из матрицы выплат игроку A переменой знака у каждого из ее элементов.

Рассмотрим теперь любую матричную игру, заданную некоторой платежной матрицей вида (2.1), и опишем общий алгоритм, позволяющий найти игровое равновесие либо определить, что в данной игре равновесия не существует.

I. Действия игрока A.

1. В каждой строке матрицы A находим минимальный элемент и полученные числа приписываем справа к матрице A в виде дополнительного столбца (см. табл. 2.1).

2. Среди чисел дополнительного правого столбца выбираем максимальное число

$$a = \max_i \min_k a_{ik}.$$

Найденное число a называется *нижней ценой игры*. Принцип построения стратегии игрока A, основанный на максимизации минимальных выигрышей, называется *принципом максимина,* а выбираемая в соответствии с этим принципом стратегия A_{i^*} — *максиминной стратегией* игрока A.

II. Действия игрока B.

1. В каждом столбце матрицы A находим максимальный элемент и полученные числа приписываем снизу к матрице A в виде дополнительной строки (см. табл. 2.1).

2. Среди чисел дополнительной нижней строки выбираем минимальное число

$$b = \min_k \max_i a_{ik}.$$

Найденное число b называется *верхней ценой игры*. Принцип построения стратегии игрока B, основанный на минимизации максимальных потерь, называется *принципом минимакса*, а выбираемая в соответствии с этим принципом стратегия B_{k^*} — *минимаксной стратегией* игрока B.

Очевидно, что для любой игры нижняя и верхняя цены связаны соотношением

$$a \leqslant b.$$

В случае если $a = b$, т.е.

$$\max_i \min_k a_{ik} = a_{i^*k^*} = \min_k \max_i a_{ik},$$

пара стратегий $\{A_{i^*}, B_{k^*}\}$ является игровым равновесием в том смысле, что ни один из игроков не заинтересован в том, чтобы это состояние нарушить. В данном случае общее значение нижней и верхней цен игры называется просто *ценой игры* и часто обозначается буквой ν. Цена игры совпадает с элементом $a_{i^*k^*}$ матрицы A — минимальным в строке i^* и максимальным в столбце k^*. Этот элемент называется *седловой точкой матрицы* A, или *точкой равновесия*, в этом случае про игру говорят, что она *имеет седловую точку*. Стратегии, соответствующие седловой точке, называются оптимальными, а тройку

$$\langle A_{i^*}, B_{k^*}, \nu \rangle$$

называют *решением матричной игры с седловой точкой*. Ясно, что седловых точек в матричной игре может быть несколько, причем все они имеют одно и то же значение цены игры.

2.5. Смешанные стратегии в матричных играх

Пример 2.17. Рассмотрим (3×3)-игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

для которой имеем $a = \max_i \min_k a_{ik} = -2$, $b = \min_k \max_i a_{ik} = 2$, а соответствующие стратегии — A_2 и B_2. До тех пор пока игроки придерживаются этих стратегий, средний выигрыш при многократном повторении игры будет равен 1. Однако если игроку B становится известно, что игрок A придерживается стратегии A_2, то он немедленно ответит стратегией B_1, сводя выигрыш $+1$ игрока A к проигрышу -2. В то же время на стратегию B_1 игрока B у игрока A имеется стратегия A_1, дающая ему выигрыш 4. С другой стороны, если игроку A станет известно, что игрок B придерживается стратегии B_2, то игрок A немедленно ответит стратегией A_3, увеличив проигрыш игрока B с -1 до -2. В свою очередь на стратегию A_3 игрока A у игрока B готова ответная стратегия B_3, дающая игроку B выигрыш $+3$, а игроку A, соответственно, — проигрыш -3. Таким образом, набор стратегий $\{A_2, B_2\}$ не является равновесным.

В случае когда нижняя цена игры не равна верхней цене игры, т.е. имеет место неравенство $a < b$, игрок A может обеспечить себе выигрыш, не меньший, чем a, а игрок B имеет возможность не дать ему выиграть больше, чем b, т.е. может обеспечить себе выигрыш, не меньший, чем $-b$.

Возникает вопрос: как разделить между игроками разность $b - a$? Оказывается, компромиссного распределения этой величины и уверенного получения каждым игроком своей доли при многократном повторении игры можно достичь случайным применением своих чистых стратегий. При этом, во-первых, обеспечивается наибольшая скрытность выбора стратегий, ведь результат выбора не может стать известным противнику, поскольку он неизвестен самому игроку; и во-вторых, при некотором разумном построении механизма случайного выбора стратегий они оказываются оптимальными.

Случайная величина, значениями которой являются чистые стратегии игрока, называется его *смешанной стратегией*. Таким образом, задание смешанной стратегии игрока состоит в указании вероятностей, с которыми выбираются его первоначальные чистые стратегии.

Рассмотрим произвольную игру, заданную $(m \times n)$-матрицей $A = (a_{ik})$. Так как игрок A имеет m чистых стратегий, то любая его смешанная стратегия может быть задана набором m неотрицательных чисел $P = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$, сумма которых равна 1. Любая смешанная стратегия второго игрока B, имеющего n чистых стратегий, задается набором n неотрицательных чисел $Q = \{q_1, q_2, ..., q_n\}$, сумма которых равна 1. Заметим, что каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии и что для соблюдения секретности каждый игрок применяет свои стратегии независимо от другого игрока. Поэтому каждая обычная ситуация $\{A_i, B_k\}$ является случайным событием и, в силу независимости выбора стратегий обоими игроками, реализуется с вероятностью p_{iqk}.

Математическое ожидание[1] выигрыша игрока A в условиях применения игроками смешанных стратегий P и Q, очевидно, составляет

$$M(P, Q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}p_iq_k.$$

Это число и принимается за средний выигрыш игрока A в смешанных стратегиях $\{P, Q\}$.

Стратегии $P^* = \{p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*\}$ и $Q^* = \{q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*\}$ называются *оптимальными смешанными стратегиями* игроков A и B соответственно, если для любых смешанных стратегий P и Q выполняется соотношение

$$M(P, Q^*) \leqslant M(P^*, Q^*) \leqslant M(P^*, Q),$$

или, что то же самое, если

$$\max_P \min_Q M(P, Q) = M(P^*, Q^*) = \min_Q \max_P M(P, Q).$$

---

[1] В русскоязычной математической литературе математическое ожидание принято обозначать буквой M (от англ. *mean value*), в англоязычной — буквой E (от англ. *expected value*).

Величина $\nu = M(P^*, Q^*)$ называется *ценой игры*. Тройка $\langle P^*, Q^*, \nu\rangle$ называется *решением игры*.

Теорема 2.2 (основная теорема теории матричных игр, теорема о минимаксе, теорема фон Неймана). *Для любой матричной игры с некоторой матрицей A* величины $\max\limits_P \min\limits_Q M(P, Q)$ и $\min\limits_Q \max\limits_P M(P, Q)$ *существуют и равны между собой. Существует хотя бы одна пара смешанных стратегий* (P^*, Q^*) *, для которой выполняется соотношение*

$$M(P^*, Q^*) = \max_P \min_Q M(P, Q) = \min_Q \max_P M(P, Q).$$

Теорема 2.3 (основные свойства оптимальных смешанных стратегий). *Пусть* $\langle P^*, Q^*, \nu\rangle$ *— решение игры. Оптимальная смешанная стратегия игрока A смешивается только из тех чистых стратегий* $A_{i,\,i} = 1, 2, ..., m$ *(т.е. только те вероятности* p_i, $i = 1, 2, ..., m$, *могут быть отличны от нуля), для которых*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} q_k^* = \nu.$$

Аналогично смешанная стратегия игрока B смешивается только из тех чистых стратегий B_k, $k = 1, 2, ..., n$ *(т.е. только те вероятности* q_k, $k = 1, 2, ..., n$, *могут быть отличны от нуля), для которых*

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik} p_i^* = \nu.$$

При этом справедливы следующие соотношения:

$$\nu = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{i=1}^{m} a_{ik} p_i^* = \max_P \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{i=1}^{m} a_{ik} p_i = \min_Q \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} q_k = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} q_k^*.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Отец и сын играют в игру «Угадай, в какой руке монетка» по следующим правилам:

- отец не берет с сына ничего, если тот не угадал;
- дает сыну 1 руб., если тот угадал, что монетка в левой руке;
- дает сыну 5 руб., если тот угадал, что монетка в правой руке.

Требуется:

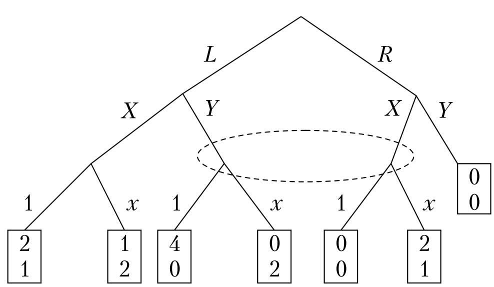
1) описать стратегии игроков;

2) указать нормальную форму игры;

3) ответить на вопрос: есть ли у игроков никогда не лучшие отклики, и если есть, то указать их;

4) найти равновесное по Нэшу поведение сторон.

2.2. Дана позиционная форма игры:



Требуется:
1) описать стратегии игроков;
2) привести игру к нормальной форме;
3) найти все равновесия Нэша.

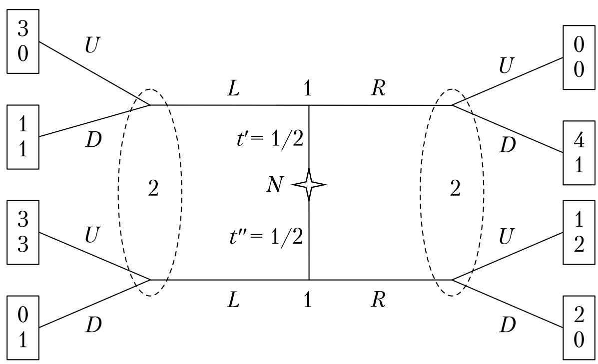
2.3. Рассматривается следующая байесовская игра:

$p = 3/4$	L	R
U	1; 2	1; 1
D	3; 5	1; 1

$p = 1/4$	L	R
U	1; 1	1; 6
D	3; 1	1; 2

Требуется найти все равновесия Нэша.

2.4. Рассматривается следующая сигнальная игра:



Требуется найти все равновесия Нэша, все совершенные байесовские равновесия Нэша и все совершенные подыгровые равновесия.

2.5. Требуется найти верхнюю и нижнюю цены матричной игры и оптимальные стратегии игроков, если матричная игра задана следующей платежной матрицей:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2.6. Три избирателя, 1, 2 и 3, решают, за кого из трех кандидатов, A, B, или C, следует проголосовать. Для победы кандидату необходимо минимум два голоса. Если все кандидаты набирают поровну голосов, то побеждает кандидат A. Функции полезностей избирателей выглядят так: $U_1(A) > U_1(B) > U_1(C)$, $U_2(B) > U_2(C) > U_2(A)$, $U_3(C) > U_3(A) > U_3(B)$.

а) Найдите все равновесия Нэша.

б) Найдите все равновесия Нэша, в которых избиратели не голосуют за свои наихудшие альтернативы.

2.7[1]**.** В некоторой стране живут N капиталистов-товаропроизводителей. Они решают, сколько средств надо потратить на разгон профсоюза рабочих. Пусть $s_i \geqslant 0$ — количество средств, потраченное капиталистом i. Будем считать, что профсоюз удалось уничтожить, если $\sum_{i=1}^{N} s_i > \omega$, где ω — случайная величина, распределенная на $[0; \infty)$ с ненулевой убывающей плотностью f и функцией распределения F. Выигрыш капиталиста i составляет $R - s_i$, если профсоюз разогнан, и $-s_i$, если нет.

а) Найдите условия первого порядка для равновесия Нэша.

б) В стране принят закон в защиту профсоюзов. Теперь, чтобы разогнать профсоюз, капиталисты должны в сумме приложить усилия $\omega + \eta$, где $\eta > 0$ — детерми-

[1] Задача взята из книги: *Асемоглу Д., Робинсон Д.А.* Экономические истоки диктатуры и демократии. М.: НИУ–ВШЭ, 2015.

нированная величина. Найдите условия первого порядка для равновесия Нэша. Изменится ли равновесная вероятность того, что профсоюз будет разогнан?

в) Принят другой закон. Теперь, чтобы разогнать профсоюз, капиталисты должны в сумме приложить усилия $\alpha\omega$, где $\alpha > 0$. Как изменится ваш ответ?

2.8[1]**.** В стране N приходят президентские выборы. В них участвуют два кандидата — сильный и слабый. Стратегией кандидата является его предвыборная программа — левая L, центристская C, или правая R. Матрица выигрышей такова:

Кандидат	Слабый			
Сильный	Стратегия	L	C	R
	L	1; 0	α; $1-\alpha$	$1-\alpha$; α
	C	$1-\alpha$; α	1; 0	$1-\alpha$; α
	R	$1-\alpha$; α	α; $1-\alpha$	1; 0

Здесь $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Если слабый кандидат выберет ту же стратегию, что и сильный, то проиграет вчистую; если выберет другую, то проиграет с меньшим отрывом (что лучше), или даже выиграет. Найдите равновесие.

2.9[2]**.** Общество состоит из диктатора (R) и двух групп граждан (A и B). На первом этапе диктатор решает, стоит ли ему экспроприировать одну из групп, и если да, то какую. Если экспроприации нет, то выигрыш всех трех игроков равен нулю. Если диктатор решил провести экспроприацию, то на втором этапе каждая из групп решает, стоит ли ей бунтовать против диктатора. Бунт удается, только если обе группы решают бунтовать. В таком случае экспроприации не происходит, диктатор несет издержки k, каждая из двух групп получает выигрыш b. Если бунтует только одна группа, то она несет издержки $c > 0$. Вдобавок к этому диктатор экспроприирует $x > 0$ у одной из групп (т.е. выигрыш диктатора составит x, выигрыш экспроприируемой группы — $-x$ либо $-c-x$. Нарисуйте дерево игры. Найдите все совершенные подыгровые равновесия.

2.10[3]**.** Два политика соревнуются друг с другом на президентских выборах. В момент времени $t = 1$ каждый политик $i = 1, 2$ выбирает политическую программу $y_i \in [0; 1]$. В момент времени $t = 2$ политики решают, сколько средств следует потратить на избирательную кампанию: e_1, e_2. Далее каждый из избирателей голосует за одного из политиков. Пусть существует континуум избирателей. Каждый избиратель характеризуется своей наилучшей альтернативой v. Пусть наилучшие альтернативы распределены равномерно на отрезке $[-w; w]$. Предположим, что полезность избирателя с наилучшей альтернативой v при голосовании за кандидата i равна

$$u_i(v) = -(y_i - v)^2 - \sqrt{e_i}.$$

Будем считать, что избиратель голосует за того кандидата, кто приносит ему бóльшую полезность.

а) При данных y_1, y_2, e_1, e_2 найдите V_1, V_2 — доли голосов (от общего числа избирателей), получаемые кандидатами.

[1] Задача взята из книги: *Aragones E., Palfrey Th. R.* The effect of candidate quality on electoral equilibrium: an experimental study // The American Political Science Review. 2004. Vol. 98. № 1. P. 77—90.

[2] Задача взята из книги: *Weingast B. R.* Political foundations of democracy and the rule of law // American Political Science Review. 1997. Vol. 91. № 2. P. 245—263.

[3] Задача взята из книги: *Zakharov A. V.* A model of candidate location with endogenous valence // Public Choice. 2009. Vol. 138. № 3—4. P. 347—366.

б) Пусть полезность кандидата i равна $V_i - e_i$. Найдите, какими будут e_1, e_2 в совершенном подыгровом равновесии при данных y_1, y_2 (предполагая, без потери общности, что $y_1 \leqslant y_2$. Объясните зависимость e_1, e_2 от w и от $y_2 - y_1$.

в) Найдите, чему будут равны y_1, y_2 в совершенном подыгровом равновесии. Почему мы не будем иметь $y_1 = y_2$?

2.11[1]**.** В некоторой республике проходят президентские выборы, в которых принимают участие два кандидата: бывалый и новичок. Стратегия каждого кандидата — это программа, с которой он идет на выборы. Пусть $s_1 \in [0; 1]$ — программа бывалого, $s_2 \in [0; 1]$ — программа новичка. Например, можно считать, что $s = 0$ — крайне левая программа (высокие налоги, высокие затраты на социальную сферу), $s = 1$ — крайне правая политика (низкие налоги). Существует континуум избирателей. Каждый избиратель характеризуется наилучшей альтернативой $v \in [0; 1]$. Величина v равномерно распределена на $[0; 1]$. Пусть выигрыш избирателя с наилучшей альтернативой v при победе бывалого равен $U_1(v) = e - \beta(v - s_1)^2$, при победе новичка — $U_2(v) = e - \beta(v - s_2)^2$. Величина $e > 0$ отражает то, насколько при равных политических программах бывалый кандидат лучше новичка. Пусть в > 0. Каждый избиратель (по определению) голосует за того кандидата, кто приносит ему бóльшую полезность. Пусть выигрыши кандидатов равны V_1, V_2 — долям голосов, которые они получают на выборах.

а) Найдите, как V_1 и V_2 зависят от s_1, s_2. *Подсказка*: найдите сначала позицию $\tilde{v}$ безразличного избирателя — т.е. решение уравнения $U_1(v) = U_2(v)$.

б) Пусть кандидаты выбирают s_1, s_2 одновременно. Будет ли в этой игре существовать равновесие в чистых стратегиях?

в) Пусть бывалый кандидат выбирает s_1, затем новичок выбирает s_2. Найдите равновесие. Почему в равновесии программа бывалого кандидата будет близка к центру?

2.12[2]**.** Пусть депутат i голосует за предлагаемый лоббистом A законопроект, если $a_i + v > b_i$, где $v > 0$ — выигрыш депутата от реализации этого закона. Найдите совершенное подыгровое равновесие. Чему будет равен размер коалиции лоббиста A?

2.13[3]**.** Парламент некоторой страны представлен континуумом депутатов. Парламент должен принять решение по некоторому одномерному вопросу (например, установить уровень затрат на некоторый проект). Законотворческий процесс происходит следующим образом. В момент времени $t = 1$ глава парламентского комитета предлагает принять решение $s_1 \in [0; 1]$. В момент времени $t = 2$ депутаты голосуют («за» либо «против»). Выигрыш парламентария составляет $-\beta(s_1 - v)^2$, если проект принимается, и $-\beta(s_0 - v)^2$, если проект не принимается, где $\beta > 0$. Здесь $s_0 \in [0; 1]$ — статус кво; v — наилучшая альтернатива парламентария. Будем предполагать, что v равномерно распределено на $[0; 1]$. Найдите совершенное подыгровое равновесие в этой игре, если:

а) выигрыш главы комитета равен s_1, если проект принят, и s_0, если проект не принят, т.е. глава комитета заинтересован в высоком уровне затрат на проект;

б) выигрыш главы комитета равен $-\gamma(s_1 - \overline{s})^2$, если проект принимается, и $-\gamma(s_0 - \overline{s})^2$, если нет, где $\overline{s} \in [0; 1]$ — наилучшая альтернатива главы комитета, $\gamma > 0$. Как равновесный s_1 зависит от $\overline{s}$, s_0? Почему в обоих случаях решение будет неоптимальным с точки зрения парламентариев? Как изменится ваш ответ, если для принятия предложения s_1 необходима поддержка 2/3 парламентариев?

---

[1] Задача взята из книги: *Berger M. M., Munger M. C., Potthoff R. F.* The downsian model predicts divergence // Journal of Theoretical Politics. 2000. Vol. 12. № 2. P. 228–240.

[2] Задача взята из книги: *Groseclose T., Snyder J. M.* Buying supermajorities // American Political Science Review. 1996. Vol. 90. № 2. P. 303–315.

[3] Задача взята из книги: *Rosenthal H.* The setter model // Enelow G. M., Hinich M. J. Advances in the spatial theory of voting. Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1990.

2.14. Двое судей должны решить, оправдать (A) или обвинить (C) подсудимого. Каждый судья получает сигнал, виновен подсудимый, или нет. Пусть $\theta_i \in \{I, G\}$ — сигнал, полученный судьей $i = 1, 2$. Пусть p — вероятность того, что подсудимый невиновен. Если подсудимый невиновен, то каждый судья i получает сигнал $\theta_i = I$ с вероятностью 1. Если подсудимый виновен, то $\theta_i = I$ с вероятностью 1/2 и $\theta_i = G$ с вероятностью 1/2. Подсудимый будет осужден, только если оба судьи обвинят его. Выигрыш судьи составляет 1, если принято правильное решение (осужден виновный или оправдан невиновный), 0, если оправдан виновный, и $\alpha < 1$, если осужден невиновный. Найдите байесово равновесие.

2.15. Рассмотрим отрасль, в которой две фирмы конкурируют по Курно. Предположим, что технологии обеих фирм характеризуются постоянными предельными и средними издержками c_j, причем $c_1 > c_2$. Обратная функция совокупного спроса на продукцию отрасли имеет вид $p(Q) = a - bQ$, где $a, b > 0$, $a > c_1$.

а) При каком условии только одна из фирм будет производить продукцию в равновесии? Какая именно фирма? Найдите равновесный выпуск данной фирмы.

б) Допустим, что условие, полученное в п. а), не выполняется. Найдите равновесие в данном случае.

2.16. Рассмотрим следующую модель олигополистической конкуренции. N фирм, имеющих одинаковые постоянные предельные и средние издержки $c > 0$, в каждый период t конкурируют по Бертрану, дисконтируя свои будущие выигрыши в соответствии с коэффициентом дисконтирования $\delta \in (0; 1)$. Игра длится бесконечное число периодов. Функция спроса является непрерывной и убывающей. Предположим, что фирмы используют стратегии возвращения к равновесию по Нэшу:

$$p_{jt} = \begin{cases} p^m, \text{ если все элементы } H_{t-1} \text{ равны } (p^m, p^m, \ldots) \text{ или } t = 1, \\ c, \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

где p^m — равновесная цена при монополии; H_{t-1} — история игры, т.е. все цены, которые выбирали фирмы в предыдущих периодах; $j = 1, \ldots, N$.

При каком условии стратегии возвращения к равновесию по Нэшу составляют совершенное в подыграх равновесие по Нэшу в рассматриваемой модели? Как влияет количество фирм на рынке на возможность поддержания неявного сговора?

2.17. Рассмотрим следующую бесконечно повторяющуюся модель дуополистической конкуренции. Две фирмы, имеющие одинаковые постоянные предельные и средние издержки $c > 0$, в каждый период t конкурируют по Бертрану, дисконтируя свои будущие выигрыши в соответствии с коэффициентом дисконтирования $\delta \in (0; 1)$. Покажите, что при $\delta < 1/2$ в любом совершенном в подыграх равновесии по Нэшу во всех периодах цены будут установлены на уровне предельных издержек.

2.18. Рассмотрим бесконечно повторяющуюся модель дуополистической конкуренции по Курно с коэффициентом дисконтирования $\delta \in (0; 1)$. Обе фирмы имеют одинаковые постоянные предельные и средние издержки $c > 0$. Обратная функция спроса имеет вид $p(Q) = a - bQ$, где $a > c$, $b > 0$.

а) Пусть фирмы используют следующие стратегии возвращения к равновесию по Нэшу: каждая фирма производит половину монопольного выпуска $(q_1, q_2) = \left(\frac{q^m}{2}, \frac{q^m}{2}\right)$ до тех пор, пока никто не отклоняется от этого выпуска, и переключается на выпуск, соответствующий равновесию по Нэшу в статической модели Курно, в противном случае. При каком условии фирмы будут придерживаться неявного сговора, производя половину монопольного выпуска в каждом периоде в совершенном в подыграх равновесии по Нэшу?

б) Пусть фирмы используют следующие стратегии возвращения к равновесию по Нэшу: каждая фирма производит выпуск $(q_1, q_2) = (q, q)$, где $q \in \left(\frac{q^m}{2}, q_i^*\right)$, q^m —

монопольный выпуск; q_i^* — равновесный выпуск фирмы i в статической модели Курно, до тех пор пока никто не отклоняется от этого выпуска, и переключается на выпуск, соответствующий равновесию по Нэшу в статической модели Курно, в противном случае. При каком условии фирмы будут придерживаться неявного сговора, производя выпуск $(q_1, q_2) = (q, q)$ в каждом периоде в совершенном в подыграх равновесии по Нэшу?

2.19. Рассмотрим отрасль, где две фирмы конкурируют по Курно на рынке труда. Производственные функции первой и второй фирм соответственно имеют вид $f_1 = 13L_1 - 0{,}2L_1^2$ и $f_2 = 12L_1 - 0{,}1L_2^2$, L_1 и L_2 – количество труда, нанятого соответственно первой и второй фирмами. Производимую продукцию первая фирма продает по цене $p_1 = 2$, а вторая фирма — по цене $p_2 = 3$. Функция совокупного предложения труда имеет вид $w(L) = 2 + 0{,}1L$, где $L = L_1 + L_2$, w — заработная плата. Какое количество труда будет использовать в равновесии каждая из фирм?

2.20. Пусть на рынке труда присутствуют работники трех типов с производительностью $\theta_1 = 20 + \beta$, $\theta_2 = 23 + \beta$ и $\theta_3 = 26 + \beta$, где $\beta > 0$, и с доходами при альтернативной занятости соответственно $r_1 = 20$, $r_2 = 23$ и $r_3 = 26$. Доля работников каждого типа одинакова и не зависит от типа работника.

а) Найдите равновесие при симметричной информации (т.е. работодателю известен тип каждого работника).

б) Предположим теперь, что работники знают свой тип, а работодателю он неизвестен. При каких значениях параметра β существует равновесие, в котором заняты:

1) работники всех типов;

2) работники первого и второго типов;

3) работники только первого типа?

Будут ли найденные равновесия единственными?

Глава 3
МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

В результате изучения главы 3 студент должен:

знать

• основные теоретические сведения и теоремы, касающиеся моделей В. В. Леонтьева и Дж. фон Неймана;

уметь

• применять модели леонтьевского типа для анализа экономики;

владеть

• техникой составления межотраслевого баланса.

3.1. Модель В. В. Леонтьева

3.1.1. Определение модели

Идея метода межотраслевого баланса впервые была сформулирована в работах советских экономистов 1920-х гг. и затем получила развитие в трудах Василия Васильевича Леонтьева (1906—1999) по изучению структуры американской экономики.

Пусть весь производственный сектор народного хозяйства разбит на n чистых отраслей, т.е. продукция каждой из отраслей предполагается однородной. Предположим, что различные отрасли выпускают разные продукты. Таким образом, в рассматриваемой экономике выпускается n видов продуктов. В процессе производства своего вида продукта каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей. Допустим, что в некоторый момент времени, скажем в году t_0, составлен балансовый отчет по итоговым данным за определенный период времени (например, за истекший год) по форме, представленной в табл. 3.1.

Величина x_{ij} показывает объем продукции отрасли j, израсходованной отраслью i в процессе производства за отчетный период. Число X_i равно общему объему продукции (валовому выпуску) i-й отрасли за тот же период,

Таблица 3.1

Номер отрасли	1	2	...	n	Валовой выпуск	Конечное потребление
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	X_1	Y_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	X_2	Y_2
...	...	...	...	...	...	...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	X_n	Y_n
Сумма	$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} x_{i2}$	...	$\sum_{i=1}^{n} x_{in}$	—	—

а значение Y_i показывает объем продукции, который был потреблен в непроизводственной сфере, для создания запасов и т.д.

Таким образом, j-й столбец (x_{ij}), $i = 1, ..., n$, показывает распределение продукции отрасли j на производственные нужды других отраслей. Если все переменные i-й строки разделить на X_i, то число $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_i}$ можно понимать как объем продукции j-й отрасли, необходимый для производства единицы i-го продукта; число $y_i = \frac{Y_i}{X_i}$ будем понимать как долю продукции i-й отрасли, которая пошла на внепроизводственное потребление.

Числа a_{ij} носят название коэффициентов прямых затрат отраслей i.

Сделаем два предположения.

1. Будем считать технологию производства неизменной в течение некоторого промежутка времени.

2. Будем считать существующую технологию линейной, т.е. такой, при которой для создания объема валового выпуска продукции i-й отрасли X_i необходимо произвести затраты в объемах $X_i a_{ij}$, $j = 1, ..., n$, продукции всех отраслей.

Будем говорить, что матрица $A(a_{ij})$ задает технологию при единичной интенсивности работы всех отраслей. Сопоставим каждой i-й отрасли число $l_i > 0$ — количество прямых затрат на производство единицы продукта i-й отрасли, или затраты трудовых ресурсов при единичной интенсивности технологического процесса.

Таким образом, имеем $(n \times n)$-матрицу A прямых затрат, или матрицу технологических коэффициентов, и вектор $\mathbf{L}^T = (l_1, l_2, l_3, ..., l_n)$ прямых затрат труда ($\mathbf{L}$ — вектор-столбец).

Таким образом, в рассматриваемой модели имеется n воспроизводимых факторов производства и один невоспроизводимый фактор (труд).

Допустим, что в некотором промежутке времени $[T_0; T]$ все отрасли работают таким образом, что годовой объем валового выпуска отрасли с номером i составляет X_i, т.е. считается, что i-я отрасль работает с интенсивностью X_i.

Обозначим через $\mathbf{X}$ вектор валового выпуска, или интенсивности: $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$.

Чтобы произвести единицу первого продукта, необходимо затратить $(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$ продуктов различных отраслей.

По свойству линейности для производства X_1 единиц первого продукта надо затратить $(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})X_1$.

Аналогично чтобы произвести единицу j-го продукта, надо затратить $(a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn})$, а на X_j единиц j-го продукта потребуется $(a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn})X_j$ продуктов.

В то же время, чтобы произвести выпуск $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$, надо затратить первого продукта $X_1a_{11} + X_2a_{21} + ... + X_na_{n1}$, а i-го продукта $X_1a_{1i} + X_2a_{2i} + ... + X_na_{ni}$.

Для выпуска $\mathbf{X}$ надо затратить также $l_1X_1 + l_2X_2 + ... + l_nX_n$ труда.

В матричной форме получаем следующие результаты: для того чтобы произвести $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$, необходимо затратить $\mathbf{X}A$ товаров и $\mathbf{XL}$ труда.

Таким образом, часть общего валового выпуска, пошедшая на производственные нужды, описывается вектором

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}X_i,\ \sum_{i=1}^{n} a_{i2}X_i,\ \dots,\ \sum_{i=1}^{n} a_{in}X_i\right),$$

т.е. вектор производственных затрат равен $\mathbf{X}A$.

Тогда свободный остаток $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \mathbf{X}A$ будет использован на непроизводственные цели. Если каждый год выпускается $\mathbf{X}$, то конечное потребление $\mathbf{X} - \mathbf{X}A = \mathbf{Y}$. Вектор $\mathbf{Y}$ — вектор конечного потребления (спроса) — называется еще вектором чистого выпуска, или непроизводственного потребления, конечного выпуска. Элементы матрицы A и вектора $\mathbf{L}$ называют коэффициентами прямых затрат.

Основной вопрос, возникающий в процессе планирования и при анализе производства, формулируется следующим образом: при заданном векторе $\mathbf{Y}$ конечного потребления требуется определить необходимый вектор $\mathbf{X}$ валового выпуска, т.е. требуется решить систему уравнений $\mathbf{X} - \mathbf{X}A = \mathbf{Y}$ при заданном векторе $\mathbf{Y}$ и матрице A. Данное уравнение вместе с изложенной интерпретацией матрицы A и векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ называется *моделью Леонтьева.*

3.1.2. Равносильные условия продуктивности

Определение 3.1. Матрица A с неотрицательными элементами называется *продуктивной*, если существуют векторы $\mathbf{Y} \gg \mathbf{0}$ и $\mathbf{X} \geqslant \mathbf{0}$, такие что $\mathbf{X} - \mathbf{X}A = \mathbf{Y}$.

Замечание 3.1. Если условия определения 3.1 выполняются, то, очевидно, $\mathbf{X} \geqslant \mathbf{0}$.

Замечание 3.2. Если матрица A продуктивна, то технология такова, что возможно производить все продукты в чистом виде в произвольном количестве (по линейности $\lambda\mathbf{X} - \lambda\mathbf{X}A = \lambda\mathbf{Y}$ для любого λ).

Теорема 3.1. *Пусть A — матрица размера $n \times n$ с неотрицательными элементами. Следующие условия эквивалентны*:

1) A — *продуктивна*;

2) $(E - A)$ — *неотрицательно обратима, т.е. существует* $(E - A)^{-1}$ *и* $(E - A)^{-1} \geqslant 0$ *поэлементно*;

3. $(E - A)$ *обратима и* $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$.

► ***Доказательство.*** Импликация $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ выполняется автоматически. Проверим импликацию $1 \Rightarrow 3$.

Пусть $\mathbf{X} - \mathbf{X}A = \mathbf{Y}$ для некоторых $\mathbf{X} \gg 0$, $\mathbf{Y} \gg 0$. Тогда $\mathbf{X}A = \mathbf{X}$, т.е. $\mathbf{X}A \leqslant \lambda\mathbf{X}$ для некоторого числа $\lambda \in (0; 1)$. Но тогда $\mathbf{X}A^2 \leqslant \lambda\mathbf{X}A \leqslant \lambda^2\mathbf{X}$ и т.д. Получаем $\mathbf{X}A^k \leqslant \lambda^k\mathbf{X}$. Но $\lambda^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, поэтому $\mathbf{X}A^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Но $\mathbf{X} \gg 0$, значит, $A^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ поэлементно. Более того, $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится, поскольку каждый элемент этого матричного ряда мажорируется сходящейся геометрической прогрессией. Обозначим

$$B \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} A^k;\ B_k \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{k} A^i.$$

Имеем

$$(E-A)B_k = B_k(E-A) = (E-A)(E+A+A^2+\ldots+A^k) =$$
$$= E - A + A - A^2 + A^2 - \ldots - A^k + A^k - A^{k+1} = E - A^{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} E.$$

Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty}(E-A)B_k = \lim_{k\to\infty} B_k(E-A) = (E-A)B = B(E-A) = E.$$

т.е. $B = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k = (E-A)^{-1}$. ◄

Следствие 3.1. Неотрицательная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда ее спектральный радиус меньше 1.

Напомним, что спектральный радиус матрицы — это максимум из модулей всех ее собственных чисел.

Следствие 3.2. Матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда

$$\forall \mathbf{Y} \gg \mathbf{0}\ \exists \mathbf{X} \gg \mathbf{0}\colon \mathbf{X} - A\mathbf{X} = \mathbf{Y}.$$

Действительно, пусть матрица A продуктивна, $\mathbf{Y} \gg \mathbf{0}$ — любой строго положительный вектор. Тогда примем

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y}(E-A)^{-1} = \mathbf{Y}(E+A+A^2+A^3+\ldots) = \mathbf{Y} + \mathbf{Y}A + \mathbf{Y}A^2 + \mathbf{Y}A^3 + \ldots\ . \quad (3.1)$$

Замечание 3.3. Формула (3.1) имеет весьма важную экономическую интерпретацию. Для того чтобы произвести чистый выпуск $\mathbf{Y}$, следует затратить $\mathbf{Y}A$ товаров. Чтобы их затратить, их надо произвести, но чтобы их произвести, необходимо затратить $\mathbf{Y}A^2$ товаров, для этого необходимо затратить $\mathbf{Y}A^3$ товаров и т.д.

Коэффициенты матрицы $B = (E - A)^{-1}$ называются *коэффициентами полных затрат*.

Для того чтобы произвести чистый выпуск $\mathbf{Y}$, необходимо тратить не только продукты, но и труд.

Чтобы произвести вектор $\mathbf{Y}$ чистого выпуска, надо затратить величину $\mathbf{YL}$ труда. Но до этого необходимо затратить $\mathbf{Y}A^2\mathbf{L}$ труда на производство $\mathbf{Y}A^2$ товаров и т.д. Получаем

$$\mathbf{XL} = \mathbf{Y}(E+A+A^2+\ldots)\mathbf{L} = \mathbf{YT},$$

где $\mathbf{T} = (E+A+A^2+\ldots)\mathbf{L} = (E-A)^{-1}\mathbf{L}$ — вектор полных затрат труда.

Таким образом,

$$\mathbf{XL} = \mathbf{YT} = \mathbf{Y}(E-A)^{-1}\mathbf{L}.$$

Валовой выпуск, умноженный на прямые затраты труда, равен конечному (чистому) выпуску, умноженному на полные затраты труда.

3.1.3. Система ценовых уравнений

Предположим, что вектор цен $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ и номинальная ставка заработной платы w заданы. Очевидно, что цена единицы i-го продукта равна

$$p_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{in}p_n + l_i w,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

В матричной форме имеем

$$\mathbf{p} = A\mathbf{p} + \mathbf{L}w;\ \ \mathbf{p} - A\mathbf{p} = \mathbf{L}w;\ \ (E - A)\mathbf{p} = \mathbf{L}w;$$

$$\mathbf{p} = (E - A)^{-1}\mathbf{L}w = (E + A + A^2 + ...)\mathbf{L}w = \mathbf{T}w;\ \ \mathbf{p} = \mathbf{T}w, \qquad (3.2)$$

т.е. цены, построенные по затратному принципу, пропорциональны вектору полных затрат труда. Таким образом, схема формирования цен по полным затратам труда (3.2) исходит из системы ценовых уравнений

$$\mathbf{p} = A\mathbf{p} + \mathbf{L}w.$$

Схема формирования цен по правилу «затраты плюс» может быть легко получена, если исходить из системы ценовых уравнений

$$\mathbf{p} = (1 + r)(A\mathbf{p} + \mathbf{L}w), \qquad (3.3)$$

где r — норма прибыли, $r = \dfrac{R - C}{C}$; R — выручка; C — полные затраты).

При не очень больших r система ценовых уравнений (3.3) имеет решение.

3.1.4. Использование схемы межотраслевого баланса

Для наглядного выражения взаимной связи между отраслями используют таблицы определенного вида, называемые таблицами межотраслевого баланса. Впервые таблица межотраслевого баланса (МОБ) была опубликована в 1926 г. в России. Однако своего совершенного развития математическая модель межотраслевого баланса, которая допускает широчайшие возможности для анализа и прогнозирования, достигла в 1930-х гг. в работах В. В. Леонтьева, за что ему в 1936 г. и была присуждена Нобелевская премия.

Пусть весь производственный сектор хозяйства разбит на n чистых отраслей (таких как энергетика, машиностроение и т.д., т.е. некоторая часть хозяйства, более или менее однородная).

Пусть x_{ij} — это стоимость продукта, произведенного в j-й отрасли и потребленного i-й отраслью для производства продукции i-й отрасли стоимостью X_i; X_i — валовой выпуск i-й отрасли, т.е. объем производства i-й отрасли за данный промежуток времени в стоимостном выражении; Y_i — объем потребления продукции i-й отрасли в непроизводственной сфере, так называемый объем конечного потребления, или конечный продукт i-й отрасли, также в стоимостном выражении.

Рассмотрим схему межотраслевого баланса. Таблица межотраслевого баланса (табл. 3.2) состоит из четырех квадрантов:

- I квадрант отражает межотраслевые связи (табл. 3.3);
- II квадрант представляет национальный доход как стоимость условно чистой продукции отрасли z_i, которая включает в себя амортизацию (c_i), оплату труда (v_i) и чистый доход (m_i) i-й отрасли (табл. 3.4):

$$z_i = c_i + v_i + m_i;$$

- III квадрант характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода (табл. 3.5);

Таблица 3.2

<table>
<tr><td rowspan="2">Потребляющие отрасли</td><td colspan="4">Производящие отрасли</td><td rowspan="2">Аморти-зация</td><td rowspan="2">Оплата труда</td><td rowspan="2">Чистый доход</td><td rowspan="2">Валовой продукт</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>...</td><td>n</td></tr>
<tr><td>1</td><td>x_{11}</td><td>x_{12}</td><td>...</td><td>x_{1n}</td><td>c_1</td><td>v_1</td><td>m_1</td><td>X_1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>x_{21}</td><td>x_{22}</td><td>...</td><td>x_{2n}</td><td>c_2</td><td>v_2</td><td>m_2</td><td>X_2</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>I</td><td>...</td><td>...</td><td>II</td><td>...</td><td>...</td></tr>
<tr><td>n</td><td>x_{n1}</td><td>x_{n2}</td><td>...</td><td>x_{nn}</td><td>c_n</td><td>v_n</td><td>m_n</td><td>X_n</td></tr>
<tr><td>Конечный продукт</td><td>Y_1</td><td>Y_2</td><td>III</td><td>Y_n</td><td colspan="3">$\sum_{j=1}^{n} Y_j = \sum_{i=1}^{n} z_i$ IV</td><td>—</td></tr>
<tr><td>Валовой продукт</td><td>X_1</td><td>X_2</td><td>...</td><td>X_n</td><td colspan="3">—</td><td>$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{i=1}^{n} X_i$</td></tr>
</table>

Таблица 3.3

Потребляющие отрасли	Производящие отрасли			
	1	2	...	n
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}
...	...	...	...	...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}

Таблица 3.4

Амортизация	Оплата труда	Чистый доход	Валовый продукт
c_1	v_1	m_1	X_1
c_2	v_2	m_2	X_2
...	...	...	...
c_n	v_n	m_n	X_n

Таблица 3.5

Конечный продукт	Y_1	Y_2	...	Y_n
Валовой продукт	X_1	X_2	...	X_n

• IV квадрант показывает конечное распределение и использование национального дохода и состоит из следующих тождеств:

$$\sum_{j=1}^{n} Y_j = \sum_{i=1}^{n} z_i; \tag{3.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{3.5}$$

Рассмотрим основные соотношения межотраслевого баланса.

1. Рассматривая таблицу межотраслевого баланса по строкам, можно сделать вывод, что сумма материальных затрат любой потребляющей отрасли и ее условно чистой продукции равна валовому выпуску данной отрасли:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + z_i,\ i = 1, 2, ..., n.$$

2. Рассматривая таблицу по столбцам, можно заметить, что валовой выпуск каждой производящей отрасли равен сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Y_i,\ j = 1, 2, ..., n. \tag{3.6}$$

Формула (3.6) описывает систему из n уравнений, которые называются уравнениями распределения продукции отраслей материального производства по направлениям использования.

Валовой национальный доход равен сумме валовых продуктов отраслей:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} Y_j.$$

Отсюда следует, что должно выполняться равенство итогов 2-го и 3-го квадрантов:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{j=1}^{n} Y_j.$$

Данные соотношения отражены в четвертом разделе таблицы межотраслевого баланса (см. формулы (3.4), (3.5)).

3.1.5. Анализ экономики с помощью модели Леонтьева

Рассмотрим примеры анализа экономики с помощью модели В. В. Леонтьева.

Пример 3.1. Даны коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij} и вектор конечной продукции для трехотраслевой экономической системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix},\ \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Требуется выполнить следующие задания.

1. Проверить продуктивность матрицы A.
2. Определить коэффициенты полных затрат.
3. Определить вектор валового выпуска.
4. Определить межотраслевые поставки продукции.
5. Заполнить схему МОБ.

Решение. 1. Матрица A продуктивна на основании достаточного признака, так как сумма элементов в каждом ее столбце меньше 1.

2. Матрица коэффициентов косвенных затрат 1-го порядка

$$A^{(1)} = A^2 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,23 & 0,12 & 0,20 \\ 0,16 & 0,27 & 0,08 \\ 0,17 & 0,10 & 0,16 \end{pmatrix}.$$

Матрица коэффициентов косвенных затрат 2-го порядка

$$A^{(2)} = A^3 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,23 & 0,12 & 0,20 \\ 0,16 & 0,27 & 0,08 \\ 0,17 & 0,10 & 0,16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,153 & 0,103 & 0,132 \\ 0,126 & 0,159 & 0,800 \\ 0,119 & 0,083 & 0,100 \end{pmatrix}.$$

Матрица коэффициентов полных затрат приближенно равна

$$B \approx E + A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 1{,}683 & 0{,}323 & 0{,}732 \\ 0{,}486 & 1{,}929 & 0{,}160 \\ 0{,}589 & 0{,}283 & 1{,}460 \end{pmatrix}.$$

Определим матрицу коэффициентов полных затрат точно. Сначала найдем

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}1 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & 0{,}5 & -0{,}0 \\ -0{,}3 & -0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы $E - A$

$$\Delta = 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 + (-0{,}4) \cdot (-0{,}1) \cdot (-0{,}2) - (-0{,}4) \cdot 0{,}5 \cdot (-0{,}3) -$$
$$- (-0{,}2) \cdot (-0{,}1) \cdot 0{,}8 = 0{,}196.$$

Найдем алгебраические дополнения для элементов матрицы:

$$d_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0{,}5 & -0{,}1 \\ 0{,}0 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}40 \text{ и т.д.}$$

Получим матрицу алгебраических дополнений

$$D = \begin{pmatrix} 0{,}40 & 0{,}16 & 0{,}17 \\ 0{,}12 & 0{,}44 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}08 & 0{,}33 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем D, умножим D^T на $1/\Delta$ и получим матрицу $B = (E - A)^{-1}$:

$$B = \frac{1}{0{,}196} \begin{pmatrix} 0{,}40 & 0{,}12 & 0{,}20 \\ 0{,}16 & 0.44 & 0{,}08 \\ 0{,}17 & 0{,}10 & 0{,}33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020 \\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408 \\ 0{,}867 & 0{,}510 & 1{,}684 \end{pmatrix}.$$

3. Найдем величины валовой продукции трех отраслей:

$$X = \begin{pmatrix} 2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020 \\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408 \\ 0{,}867 & 0{,}510 & 1{,}684 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 775{,}51 \\ 510{,}20 \\ 729{,}59 \end{pmatrix}.$$

4. Для определения элементов первого квадранта схемы МОБ и для определения межотраслевых поставок воспользуемся формулой $x_{ij} = a_{ij}X_j$. Получим

$$\begin{pmatrix} 232{,}65 & 51{,}02 & 291{,}84 \\ 155{,}10 & 255{,}10 & 0 \\ 232{,}65 & 51{,}02 & 145{,}92 \end{pmatrix}.$$

5. Составляющие второго квадранта (условно чистая продукция) находятся как разность между объемами валовой продукции и суммами элементов строк найденного квадранта:

Межотраслевой баланс производства и распределения продукции					
Потребляющие отрасли	Производящие отрасли			Продукт	
	1	2	3	конечный	валовой
1	232,65	51,02	291,84	200	775,510
2	155,10	255,10	0	100	510,200
3	232,65	51,02	145,92	300	729,590
Условно чистая продукция	155,10	153,06	299,88	600	—
Валовой продукт	775,51	510,20	749,70	—	2015,306

Пример 3.2. Задана матрица прямых затрат: $A=\begin{pmatrix}0,4 & 0,3\\ 0,3 & 0,2\end{pmatrix}$, где a_{ij} — объем продукции i-й отрасли, необходимый для производства одной единицы продукта с номером j. Вектор прямых затрат труда $\mathbf{L}$ = (5 4), вектор чистого выпуска $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\ 150\end{pmatrix}$ и номинальная ставка заработной платы w = 1.

Требуется выполнить следующие задания.

1. Проверить продуктивность матрицы A.
2. Определить матрицу коэффициентов полных затрат.
3. Определить вектор валового выпуска.
4. Определить цены по правилу полных затрат.

Решение. Запишем уравнение межотраслевого баланса в матричной форме:

$$\mathbf{X} - A\mathbf{X} = \mathbf{Y}.$$

Тогда

$$(E - A)\mathbf{X} = \mathbf{Y};\ \mathbf{X} = (E - A)^{-1}\mathbf{Y};$$
$$\mathbf{X} = (E + A + A^2 + ...)\mathbf{Y} = (E - A)^{-1}\mathbf{Y};$$
$$\mathbf{LX} = \mathbf{L}(E + A + A^2 + ...)\mathbf{Y} = \mathbf{TY},$$

где

$$\mathbf{T} = \mathbf{L}(E + A + A^2 + ...) = \mathbf{L}(E - A)^{-1};$$
$$\mathbf{LX} = \mathbf{L}(E - A)^{-1}\mathbf{Y} = \mathbf{TY}.$$

Запишем ценовое уравнение модели Леонтьева (матричная запись): $\mathbf{p} = A\mathbf{p} + \mathbf{L}w$, таким образом,

$$\mathbf{p} = \mathbf{L}w(E - A)^{-1} = w\mathbf{L}(E + A + A^2 + ...) = w\mathbf{T}.$$

Леонтьевская матрица:

$$E-A=\begin{pmatrix}0,6 & -0,3\\ -0,3 & 0,8\end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу коэффициентов полных затрат: det $(E - A)$ = 0,48 – 0,09 = = 0,39;

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{0,39}\begin{pmatrix}0,8 & 0,3\\ 0,3 & 0,6\end{pmatrix}^T=\frac{1}{0,39}\begin{pmatrix}0,8 & 0,3\\ 0,3 & 0,6\end{pmatrix}.$$

Тем самым мы доказали, что матрица прямых затрат модели Леонтьева продуктивна.

Таким образом, вектор валового выпуска

$$\mathbf{X}=\frac{1}{0,39}\begin{pmatrix}0,8 & 0,3\\ 0,3 & 0,6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\ 150\end{pmatrix}=(320,51 \quad 307,69);$$
$$\mathbf{T}=(5 \quad 4)\frac{1}{0,39}\begin{pmatrix}0,8 & 0,3\\ 0,3 & 0,6\end{pmatrix}=(13,33 \quad 10);$$

цены по правилу полных затрат

$$\mathbf{p} = \mathbf{T}w = (13,33\ 10).$$

Проверка. Другой способ определения продуктивности матрицы A:

$$\det\begin{pmatrix}0,4-\lambda & 0,3\\ 0,3 & 0,2-\lambda\end{pmatrix}=(0,4-\lambda)(0,2-\lambda)-0,09=\lambda^2-0,6\lambda-0,01;$$

$$\lambda_{1,\,2} = 0,3 \pm \sqrt{0,09 + 0,01} = 0,3 \pm \sqrt{0,1} = 0,3 \pm 0,316;$$

$$\lambda_1 = 0,016;\ \lambda_2 = 0,616.$$

Таким образом, спектральный радиус матрицы A меньше единицы, следовательно, она продуктивна.

3.2. Модель Дж. фон Неймана

3.2.1. Описание модели

В статическом варианте модели В. В. Леонтьева не учитывается фактор времени, играющий важнейшую роль при составлении плана. Модель В. В. Леонтьева допускает динамическую, развернутую во времени формулировку. Рассмотрим, однако, динамическую модель Дж. фон Неймана, в которой допускается совместное производство в каждом технологическом процессе (отрасли) нескольких видов товаров.

Рассмотрим экономику, описываемую парой (X, K), где X — пространство товаров; K — множество производственных процессов, перерабатывающих некоторые количества товаров и другие количества тех же товаров.

Пусть имеется n наименований продуктов (G_i, $i = 1, 2, ..., n$). Тогда $X = \mathbb{R}^n_+$ — неотрицательный ортант n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$.

В модели Дж. фон Неймана множество K состоит из конечного числа процессов $Q_1, Q_2, ..., Q_m$, которые называются базисными. Каждый базисный процесс Q_i представляет собой пару векторов из множества X: $Q_i = (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$. Содержательный смысл процесса Q_i таков. Данный процесс затрачивает вектор товаров $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$, где a_{ij} — количество товара G_j, $j = 1, 2, ..., n$, и производит вектор товаров $\mathbf{b}_i = (b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{in})$. Все векторы $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$, $i = 1, 2, ..., n$, неотрицательны.

Введя обозначения $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, получаем, что технология данной модели задается парой неотрицательных матриц (A, B). Матрица A называется матрицей затрат, B — матрицей выпуска.

Определим неотрицательную линейную комбинацию базисных процесссов $Q_1, Q_2, ..., Q_m$ как новый процесс, в котором затраты и выпуск являются линейными комбинациями векторов затрат и выпуска базисных процессов:

$$z_1Q_1 + z_2Q_2 + ... + z_mQ_m = \left(\sum_{i=1}^{n} z_i a_i,\ \sum_{i=1}^{n} z_i b_i\right) = (\mathbf{z}A, \mathbf{z}B),$$

где $z_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, ..., m$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, ..., z_m)$.

Вектор $\mathbf{z}$ назовем вектором интенсивностей и будем говорить, что в процессе $(\mathbf{z}A, \mathbf{z}B)$ участвует базисный процесс Q_i с интенсивностью z_i. Получившееся более широкое множество процессов обозначим

$$C = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} = \mathbf{z}\mathrm{A}, \mathbf{y} = \mathbf{z}B, \mathbf{z} \geqslant 0\}.$$

В то время как базисные процессы Q_i, $i = 1, 2, ..., m$, соответствуют реальным отраслям, заводам и т.д., каждый элемент $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in C$ есть некоторый фиктивный процесс, описывающий определенный режим совместной работы этих отраслей, заводов, фабрик и т.д. При этом $\mathbf{x}$ представляет собой вектор затрат товаров, а $\mathbf{y}$ — вектор выпуска.

Статический вариант модели Леонтьева является частным случаем модели фон Неймана при $n = m$, $B = E$.

3.2.2. Траектории цен

Перейдем к описанию динамики модели фон Неймана. Через $\mathbf{z}_t$ будем обозначать вектор интенсивностей, описывающий функционирование данной производственной системы в период $(t - 1; t)$. В каждый период $(t - 1; t)$ применяется один из процессов множества C, характеризующийся вектором интенсивностей $\mathbf{z}_t$.

Кроме предположения о линейности модели сделаем еще одно важное предположение: модель фон Неймана замкнута. Это означает, что для производства в период $(t; t + 1)$ можно тратить лишь те продукты, которые были произведены в предыдущий период времени $(t - 1; t)$. Таким образом, предположение о замкнутости модели записывается следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1 A \leqslant \mathbf{z}_0, \\ \mathbf{z}_{t+1} A \leqslant \mathbf{z}_t B, \ t = 1, 2, ..., T - 1. \end{cases}$$

Вектор $\mathbf{z}_0$ представляет собой вектор запасов, имеющихся к началу рассматриваемого периода $[0; T]$. Последовательность векторов $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, ..., $\mathbf{z}_T$, удовлетворяющих приведенной системе неравенств, назовем планом с началом $\mathbf{z}_0$ и обозначим $\{\mathbf{z}t\}$.

Обозначим через p_t^j цену единицы продукта G_j в период $(t - 1; t)$. Соответствующий вектор цен обозначим $\mathbf{p}_t$.

Величина $\mathbf{p}_{t+1}\mathbf{b}_i - \mathbf{p}_t\mathbf{a}_i$ выражает доход процесса Q_i за период $(t - 1; t)$. Основное предположение относительно цен состоит в следующем: никакой из процессов Q_i, $i = 1, 2, ..., m$, не приносит положительного дохода, т.е.

$$\mathbf{p}_{t+1}\mathbf{b}_i - \mathbf{p}_t\mathbf{a}_i \leqslant 0, \ i = 1, 2, ..., m, \ t = 1, 2, ..., T - 1, T,$$

или

$$A\mathbf{p}_t \geqslant B\mathbf{p}_{t+1}, \ t = 1, 2, ..., T. \tag{3.7}$$

В начале периода $(t - 1; t)$ средства тратятся на закупку сырья в количестве $\mathbf{a}_i$ по ценам $\mathbf{p}_t$ данного периода; затем произведенная продукция $\mathbf{b}_i$ продается уже по ценам следующего периода. Данное условие называется *правилом нулевого дохода.*

Допустим, что владелец i-й фирмы обладает капиталом k в начале периода $(t - 1; t)$. Тогда он может на эту сумму купить сырье и осуществить производство с интенсивностью z, удовлетворяющей условию $(z\mathbf{a}_i, \mathbf{p}_t) = k$ (здесь z — число). В том случае, если его доход нулевой, т.е. $(z\mathbf{b}_i, \mathbf{p}_{t+1}) = k$, в течение периода $(t; t + 1)$ он также будет обладать капиталом k.

Сравним покупательные способности капитала k в периодах $(t - 1; t)$ и $(t; t + 1)$. Пусть вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ задает некий набор товаров. Тогда в периоде $(t - 1; t)$ на сумму k можно приобрести $\delta_t = k/(\mathbf{x}, \mathbf{p}_t)$ штук таких наборов, а в периоде $(t; t + 1)$ — уже $\delta_t + 1 = k/(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{t+1})$. Для расширяющейся экономики, как будет показано в модели фон Неймана, характерен случай, когда цены со временем падают ($\mathbf{p}_{t+1} < \mathbf{p}_t$ и, следовательно, $\delta_{t+1} > \delta_t$), т.е. предъявляется еще одно своеобразное требование о замкнутости модели: чтобы с ростом общего числа продуктов денежная масса не увеличивалась.

На самом деле основное содержание правила нулевого дохода таково: максимально возможная прибыль во всех отраслях одинакова, т.е. это лишь иная форма восходящей к теории А. Смита гипотезы о тенденции выравнивания нормы прибыли во всех отраслях хозяйства.

Последовательность цен $\mathbf{p}_t$, $t = 1, 2, ..., T + 1$, удовлетворяющую системе неравенств (3.7), будем называть *траекторией цен* и обозначать $\{\mathbf{p}_t\}$.

3.2.3. Стационарные траектории

Запишем явно предположения о том, что общая масса денег не меняется и постоянно находится в обращении.

Первое предположение записывается в виде равенства

$$\mathbf{z}_t A\mathbf{p}_t = \mathbf{z}_t B\mathbf{p}_{t+1},\ t = 1, 2, ..., T. \tag{3.8}$$

Второе предположение означает, что в начале каждого периода $(t; t + 1)$ вся сумма денег $\mathbf{z}_t B\mathbf{p}_{t+1}$, вырученная от продажи продукции предыдущего производственного цикла, идет на приобретение сырья для производства в данном периоде, т.е.

$$\mathbf{z}_t B\mathbf{p}_{t+1} = \mathbf{z}_{t+1} A\mathbf{p}_{t+1},\ t = 1, 2, ..., T - 1. \tag{3.9}$$

Иногда говорят, что цены в модели фон Неймана (двойственные оценки) $\mathbf{p}_t$ являются лишь математическим инструментом при доказательстве фактов, относящихся к данной модели.

Важную роль в изучении траекторий интенсивностей и цен играют самые простые из возможных динамических траекторий — так называемые стационарные траектории.

Определение 3.2. Траектория интенсивностей $\{\mathbf{z}_t\}$ называется *стационарной*, если существует такое число $v > 0$, что $\mathbf{z}_t = v\mathbf{z}_{t-1}$, или, что то же самое, $\mathbf{z}_t = v^t\mathbf{z}_0$, $t = 1, 2, ...$.

Для того чтобы последовательность $\mathbf{z}_t = v^t\mathbf{z}_0$ была стационарной траекторией интенсивностей, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$v\mathbf{z}A \leqslant \mathbf{z}B\ (\mathbf{z} = \mathbf{z}_0).$$

Введем функцию $\alpha(\mathbf{z}) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{z}B/\mathbf{z}A$. Число $\alpha(\mathbf{z})$ называется *технологическим темпом роста модели на луче* $v\mathbf{z}$, $v > 0$. Смысл числа $\alpha(\mathbf{z})$ понятен: при развитии по стационарной траектории $\mathbf{z}t = v^t\mathbf{z}$ производство всех продуктов остается в неизменной пропорции, хотя общий объем растет (или убывает) в геометрической прогрессии со знаменателем v. Число $\alpha(\mathbf{z})$ показывает, с каким максимальным темпом может расширяться экономика, сохраняя соотношения всех продуктов в пропорции, определяемой вектором $\mathbf{z}$.

Говорят, что в экономике наблюдается *сбалансированный рост*, так как все уровни интенсивности возрастают одинаковыми темпами λ. Константа $\lambda = 1 - v$ называется *темпом сбалансированного роста*,

$$z(t) = (1 + \lambda)^t z(t_0);$$
$$z_i(t + 1) = (1 + \lambda)z_i(t),\ i = 1, 2, ..., m.$$

Предполагается, что цены всех товаров снижаются одинаковыми темпами. Постоянная $\rho = 1 - \mu$ в экономике фон Неймана обозначает *норму про-*

цента, которая характеризует заинтересованность во владении деньгами, потому что определенная сумма денег, на которую можно приобрести данное количество какого-либо товара в момент t, даст возможность купить в $(1+\rho)$ раз большее количество того же товара в момент $t+1$:

$$\mathbf{p}(t) = (1+\rho)^{-t}\mathbf{p}(t_0);\ \ \mathbf{p}_j(t+1) = \frac{\mathbf{p}_j(t)}{1+\rho},\ j = 1, 2, ..., n.$$

Определение 3.3. Траектория цен $\{\mathbf{p}_t\}$ называется *стационарной*, если существует такое число $\mu > 0$, что $\mu\mathbf{p}_{t+1} = \mathbf{p}_t$, или $\mu^t\mathbf{p}_{t+1} = \mathbf{p}$ $(\mathbf{p} = \mathbf{p}_0)$.

Последовательность $\mathbf{p}_{t+1} = \dfrac{1}{\mu^t}\mathbf{p}$ будет траекторией цен тогда и только тогда, когда $\mu A\mathbf{p} \geqslant B\mathbf{p}$.

3.2.4. Равновесие в модели фон Неймана

Введем в рассмотрение функцию $\beta(\mathbf{p}) = \min \mu$, где минимум берется по всем $\mu > 0$, таким что $\mu A\mathbf{p} \geqslant B\mathbf{p}$. Число β показывает, с какой минимальной скоростью должны падать (или расти) цены на продукты производства, оставаясь на луче $\mu\mathbf{p}$, $\mu \geqslant 0$, чтобы всякий процесс не приносил положительной прибыли.

Число $\beta(\mathbf{p})$ называется *экономическим темпом роста модели на луче* $\mu\mathbf{p}$, $\mu \geqslant 0$.

Для стационарных траекторий $\mathbf{z}_t = v^t\mathbf{z}$, $\mathbf{p}_t = \mu\mathbf{p}_{t+1}$ равенства (3.8) и (3.9) принимают вид соответственно

$$\mu\mathbf{z}A\mathbf{p} = \mathbf{z}B\mathbf{p};\ \ v\mathbf{z}A\mathbf{p} = \mathbf{z}B\mathbf{p}.$$

Определение 3.4. Говорят, что модель фон Неймана находится в *состоянии динамического равновесия*, описываемого параметрами $(v, \mathbf{z}, \mu, \mathbf{p})$, где μ, v — положительные числа, а $\mathbf{z}$, $\mathbf{p}$ — неотрицательные ненулевые векторы, если выполнены условия

$$\begin{cases} v\mathbf{z}A \leqslant \mathbf{z}B, \\ \mu A\mathbf{p} \geqslant B\mathbf{p}, \\ \mu\mathbf{z}A\mathbf{p} = \mathbf{z}B\mathbf{p}, \\ v\mathbf{z}B\mathbf{p} = \mathbf{z}B\mathbf{p}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Величина $\mathbf{z}B\mathbf{p}$ представляет собой стоимость выпуска в состоянии равновесия модели фон Неймана, составляющими которого являются векторы $\mathbf{z}$ и $\mathbf{p}$.

Определение 3.5. Состояние равновесия $(v, \mathbf{z}, \mu, \mathbf{p})$ модели фон Неймана называется *невырожденным*, если $\mathbf{z}B\mathbf{p} > 0$.

Теорема 3.2. *Пусть матрицы $A > 0$, $B > 0$ таковы, что в матрице A нет нулевых строк, а в матрице B нет нулевых столбцов. Тогда существует решение системы* (3.10)*, обладающее следующими свойствами:*

$$\mathbf{z}B\mathbf{p} > 0;$$

$$v\mathbf{z}\mathbf{a}^j < z\mathbf{b}^j \Rightarrow p_j = 0;$$

$$\mu\mathbf{a}_i\mathbf{p} > \mathbf{b}_i\mathbf{p} \Rightarrow z_i = 0;$$

$$v = \mu.$$

Требование $\mathbf{a}_i \neq 0$, $i = 1, 2, ..., m$, означает, что у нас нет процессов, которые ничего не тратят, — из ничего нельзя что-либо произвести. Условие $\mathbf{b}^j \neq 0, j = 1, 2, ..., n$, означает, что всякий продукт производится в данной модели, что тоже естественно, ибо такая модель замкнута.

Другими словами, теорема 3.2 утверждает, что при некоторых условиях равновесие существует. Может существовать лишь конечное число состояний равновесия с различными коэффициентами α. Число таких решений системы (3.10) не превосходит $\min(m, n)$.

Если предъявить к матрицам A и B более сильные условия, а именно $a_{ij} + b_{ij} > 0\ \forall i, j$, т.е. любой продукт является либо затратами, либо выпуском в каждом производственном процессе, или если каждый продукт может быть произведен каким-либо производственным процессом и каждый производственный процесс тратит какой-либо продукт, то существуют максимальный темп сбалансированного роста λ^* и минимальная норма процента ρ^*, которые равны между собой:

$$\lambda^* = \rho^* = \frac{\mathbf{z}(t)B\mathbf{p}(t)}{\mathbf{z}(t)A\mathbf{p}(t)} - 1. \tag{3.11}$$

Это равновесие справедливо для всех периодов времени t при соблюдении предположения о том, что начальные точки $\mathbf{p}(t_0)$ и $\mathbf{z}(t_0)$ удовлетворяют соотношению (3.11). Траектория, соответствующая максимальному сбалансированному росту, известна под названием *луча фон Неймана.*

Определение 3.6. *Положением равновесия* в модели фон Неймана называется тройка $(\alpha^*, \mathbf{z}^*, \mathbf{p}^*)$, где $\alpha^* > 0$, $\mathbf{z}^* \geqslant 0$, $\mathbf{z}^* \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{p}^* \geqslant 0$, $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая соотношениям

$$\alpha^*\mathbf{z}^*A \leqslant \mathbf{z}^*B;$$
$$\alpha^*A\mathbf{p}^* \geqslant B\mathbf{p}^*;$$
$$\mathbf{z}^*B\mathbf{p}^* > 0,$$

в этом случае решение $\lambda^* = \rho^*$ является единственным.

Рассмотрим пример анализа модели фон Неймана.

Пример 3.3. Для модели фон Неймана $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ требуется найти темп роста $\alpha_{\text{м}}$ и луч фон Неймана (A — матрица затрат, B — матрица выпуска).

Решение. Нахождение стационарной траектории цен. Для того чтобы существовала стационарная последовательность цен, необходимо и достаточно существования такого неотрицательного вектора $\mathbf{p}$ и такого неотрицательного числа μ, чтобы выполнялись равенства $\mu A\mathbf{p} = B\mathbf{p}$; $\mu\mathbf{p} = A^{-1}B\mathbf{p}$. Имеем:

$${}^{1} = (\quad 1)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$${}^{1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Нас интересуют только неотрицательные собственные числа этой матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 10 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 4) - 10 = \lambda^2 - \lambda + 4\lambda - 4 - 10 = 0;$$

$$\lambda^2+3\lambda-14=0;\ \lambda_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+56}}{2};\ \lambda=\frac{-3+8{,}062}{2}=2{,}531.$$

Найдем собственные векторы матрицы $A^{-1}B$:

$$\begin{pmatrix}1 & 10\\ 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=2{,}53\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix};$$

$$\begin{cases}-1{,}53x+10y=0,\\ x-6{,}53y=0;\end{cases}$$

$x\approx 6{,}53y$, т.е. $\mathbf{p}=\begin{pmatrix}6{,}53\\ 1\end{pmatrix}\pi$, $\pi\in\mathbb{R}$ — собственное пространство матрицы $A-^1B$.

Таким образом,

$$\mathbf{p}_0=\begin{pmatrix}6{,}53\\ 1\end{pmatrix},\ \mathbf{p}_t=\frac{1}{2{,}53^t}\begin{pmatrix}6{,}53\\ 1\end{pmatrix} \qquad (*)$$

— стационарная траектория цен, а $\rho^*=1{,}53=153\%$ — минимальная норма процента, или экономический темп роста модели на луче $\mu\mathbf{p}_0$, $\mu\geqslant 0$.

Определение стационарной траектории интенсивностей. Для того чтобы существовала стационарная последовательность интенсивностей, необходимо и достаточно существования такого неотрицательного вектора $\mathbf{z}$ и такого неотрицательного числа н, чтобы выполнялись равенства $\nu\mathbf{z}a=\mathbf{z}B$, $\nu\mathbf{z}=\mathbf{z}BA^{-1}$. Имеем

$$BA^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 4 & -2\end{pmatrix}.$$

Ищем неотрицательные собственные числа данной матрицы:

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 4\\ 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+2)-16=\lambda^2+\lambda+2\lambda+2-16=\lambda^2+3\lambda-14=0;$$

$$\lambda=2{,}53.$$

Определим собственные векторы матрицы BA^{-1}:

$$\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 4 & -2\end{pmatrix}=2{,}53(x\quad y);$$

$$\begin{cases}-3{,}53x+4y=0,\\ 4x-4{,}53=0;\end{cases}$$

Таким образом, $x\approx 1{,}133y$, т.е. $\mathbf{z}^T=\begin{pmatrix}1{,}1\\ 1\end{pmatrix}\varsigma$, $\varsigma\in\mathbb{R}$, — собственное пространство матрицы BA^{-1}. Поэтому

$$\mathbf{z}_0^T=\begin{pmatrix}1{,}1\\ 1\end{pmatrix},\ \mathbf{z}_t^T=2{,}53^t\begin{pmatrix}1{,}1\\ 1\end{pmatrix} \qquad (**)$$

— стационарная траектория интенсивностей, а $\lambda^*=1{,}53$ — максимальный темп сбалансированного роста, или технологический темп роста модели на луче $\nu\mathbf{z}_0$, $\nu\geqslant 0$.

Проверка. Проверим, выполняется ли соотношение

$$\nu=\frac{\mathbf{z}_0B\mathbf{p}_0}{\mathbf{z}_0A\mathbf{p}_0}=\mu=2{,}53:$$

$$(11{,}1\quad 1)\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6{,}5\\ 1\end{pmatrix}=(5{,}3\quad 8{,}2)\begin{pmatrix}6{,}5\\ 1\end{pmatrix}=42{,}65;$$

$$(11{,}1\quad 1)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6{,}5\\ 1\end{pmatrix}=(2{,}1\quad 3{,}2)\begin{pmatrix}6{,}5\\ 1\end{pmatrix}=162{,}85.$$

Таким образом, $\frac{42{,}65}{16{,}85}$ = 2,53. Очевидно также, что состояние равновесия модели фон Неймана является невырожденным.

Определение луча фон Неймана. Модель фон Неймана находится в положении динамического равновесия, так как максимальный темп сбалансированного роста и минимальная норма процента равны между собой. Темп роста α_m = 1,53, а траектория, соответствующая максимальному сбалансированному росту, или луч фон Неймана, определяется уравнениями (*), (**). Как известно, из этого ($\nu = \mu = \alpha_m$) следует единственность положения равновесия в модели фон Неймана.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. В модели межотраслевого баланса матрица прямых затрат $A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0{,}2\end{pmatrix}$, где a_{ij} — объем продукции i-й отрасли, необходимый для производства одной единицы продукта j-й отрасли; вектор прямых затрат труда $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}5\\ 4\end{pmatrix}$; вектор чистого выпуска $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\ 150\end{pmatrix}$; номинальная ставка заработной платы w = 1.

Требуется выполнить следующие задания.

1. Проверить продуктивность матрицы A.
2. Вычислить матрицу коэффициентов полных затрат.
3. Найти вектор валового выпуска.
4. Определить цены по правилу полных затрат.

3.2. В модели межотраслевого баланса матрица прямых затрат $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}4\end{pmatrix}$, где a_{ij} — объем продукции i-й отрасли, необходимый для производства одной единицы продукта j-й отрасли; вектор прямых затрат труда $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$; вектор чистого выпуска $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}50\\ 100\end{pmatrix}$; номинальная ставка заработной платы w = 1.

Требуется выполнить следующие задания.

1. Проверить продуктивность матрицы A.
2. Вычислить матрицу коэффициентов полных затрат.
3. Найти вектор валового выпуска.
4. Определить цены по правилу полных затрат.

В задачах 3.3—3.13 в модели межотраслевого баланса в таблице заданы коэффициенты прямых поставок a_{ij} и конечный продукт y_i. Требуется выполнить следующие задания.

1. Проверить продуктивность матрицы A.
2. Определить межотраслевые поставки продукции.

3.3.

Отрасль	Коэффициент прямых поставок a_{ij}			Конечный продукт y_i
	1	2	3	
1	0,3	0,1	0,3	150
2	0,1	0,1	0,1	200
3	0,0	0,1	0,1	110

3.4.

Отрасль	Коэффициент прямых поставок a_{ij}			Конечный продукт y_i
	1	2	3	
1	0,1	0,2	0,2	140
2	0,4	0,4	0,4	190
3	0,4	0,4	0,0	100

3.5.

Отрасль	Коэффициент прямых поставок a_{ij}			Конечный продукт y_i
	1	2	3	
1	0,2	0,0	0,4	130
2	0,4	0,0	0,4	180
3	0,4	0,0	0,4	200

3.6.

Отрасль	Коэффициент прямых поставок a_{ij}			Конечный продукт y_i
	1	2	3	
1	0,4	0,1	0,3	120
2	0,4	0,3	0,1	170
3	0,4	0,0	0,3	190

3.7.

Отрасль	Коэффициент прямых поставок a_{ij}			Конечный продукт y_i
	1	2	3	
1	0,0	0,4	0,4	110
2	0,4	0,1	0,1	160
3	0,4	0,3	0,3	180

3.8.

Отрасль	Коэффициент прямых поставок a_{ij}			Конечный продукт y_i
	1	2	3	
1	0,2	0,3	0,4	100
2	0,4	0,0	0,1	150
3	0,4	0,2	0,3	170

3.9.

Отрасль	Коэффициент прямых поставок a_{ij}			Конечный продукт y_i
	1	2	3	
1	0,2	0,3	0,2	200
2	0,4	0,1	0,0	140
3	0,4	0,2	0,2	160

3.10.

Отрасль	Коэффициент прямых поставок a_{ij}			Конечный продукт y_i
	1	2	3	
1	0,1	0,2	0,3	190
2	0,4	0,0	0,0	130
3	0,4	0,1	0,2	150

3.11.

Отрасль	Коэффициент прямых поставок a_{ij}			Конечный продукт y_i
	1	2	3	
1	0,1	0,3	0,1	180
2	0,3	0,3	0,4	120
3	0,4	0,1	0,0	140

3.12.

Отрасль	Коэффициент прямых поставок a_{ij}			Конечный продукт y_i
	1	2	3	
1	0,4	0,0	0,1	170
2	0,3	0,3	0,2	110
3	0,4	0,0	0,1	130

3.13.

Отрасль	Коэффициент прямых поставок a_{ij}			Конечный продукт y_i
	1	2	3	
1	0,2	0,3	0,4	100
2	0,4	0,0	0,1	150
3	0,4	0,2	0,3	170

3.14. Рассматривается модель фон Неймана $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}$ (A и B — соответственно, матрица затрат и матрица выпуска). Требуется определить технологический и экономический темпы сбалансированного роста, стационарную траекторию интенсивностей и стационарную траекторию цен, в модели фон Неймана найти состояние динамического равновесия, проверить его невырожденность, проверить условия существования и единственности положения равновесия, найти темп роста α_M и луч фон Неймана.

3.15. Даны матрица прямых материальных затрат $A=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0{,}5\end{pmatrix}$; вектор прямых затрат труда **L** и вектор конечного потребления **Y** для двухсекторной экономической системы, а также номинальная ставка заработной платы w = 1. Требуется определить вектор валового выпуска и цены по правилу полных затрат для заданных значений **L** и **Y**:

1) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\150\end{pmatrix}$; 2) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\145\end{pmatrix}$; 3) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\140\end{pmatrix}$;

4) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\135\end{pmatrix}$; 5) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\130\end{pmatrix}$; 6) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\125\end{pmatrix}$;

7) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\120\end{pmatrix}$; 8) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\115\end{pmatrix}$; 9) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\110\end{pmatrix}$;

10) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\105\end{pmatrix}$; 11) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\100\end{pmatrix}$; 12) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\95\end{pmatrix}$;

13) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\90\end{pmatrix}$; 14) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\85\end{pmatrix}$; 15) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\80\end{pmatrix}$;

16) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\75\end{pmatrix}$; 17) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\70\end{pmatrix}$; 18) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\65\end{pmatrix}$;

19) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\60\end{pmatrix}$; 20) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\55\end{pmatrix}$; 21) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\50\end{pmatrix}$;

22) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\45\end{pmatrix}$; 23) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\40\end{pmatrix}$; 24) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\35\end{pmatrix}$;

25) $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}100\\30\end{pmatrix}$.

Глава 4
НЕОКЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МИКРОЭКОНОМИКИ

В результате изучения главы 4 студент должен:

знать

• основные неоклассические модели микроэкономики;

• различия между экономикой обмена и экономикой с производством;

уметь

• определять функции спроса и предложения;

• решать теоретические задачи, связанные с неоклассическими моделями микроэкономики;

владеть

• основами микроэкономического анализа.

4.1. Предпочтения и функции полезности

Бинарным отношением на непустом множестве X называется всякое непустое подмножество $\succcurlyeq$ декартова произведения $X \times X$.

Включение $(x, y) \in \succcurlyeq$ обычно записывается как $x \succcurlyeq y$. Бинарное отношение на множестве X называется:

1) рефлексивным, если для любого $x \in X$ верно, что $x \succcurlyeq x$;

2) линейным, если для любой пары $(x, y) \in X \times X$ верно, что или $x \succcurlyeq y$, или $y \succcurlyeq x$ (или и то и другое одновременно);

3) транзитивным, если для всех элементов $x, y, z \in X$ из того, что $x \succcurlyeq y$, $y \succcurlyeq z$, следует, что $x \succcurlyeq z$.

Определение 4.1. Рефлексивное, линейное и транзитивное отношение на заданном множестве называется *отношением предпочтения*, или просто *предпочтением*, на заданном множестве.

Пусть $\succcurlyeq$ — некоторое отношение предпочтения на X, тогда запись $x \succcurlyeq y$ читается как «набор x по крайней мере так же хорош, как и y», или «элемент x не хуже элемента y». Запись $x \succ y$ читается как «x предпочтительнее y» и означает, что $x \succcurlyeq y$, но неверно, что $y \succcurlyeq x$.

Если одновременно $x \succcurlyeq y$ и $y \succcurlyeq x$, то $x \sim y$ (x и y эквивалентны). Пусть x — некоторый элемент множества X, тогда множество $\{y\colon y \succ x\}$ будем называть множеством элементов, лучших, чем x, а $\{y\colon y \prec x\}$ — множеством элементов, худших, чем x; $\{y\colon y \succcurlyeq x\}$ — множеством элементов, не худших, чем x; $\{y\colon y \preccurlyeq x\}$ — множеством элементов, не лучших, чем x.

Если множество X наделено топологической структурой, то можно говорить о непрерывности предпочтений.

Определение 4.2. Отношение предпочтения $\succcurlyeq$ на топологическом пространстве X называется *непрерывным*, если для любого $x \in X$ множества $\{y\colon y \succcurlyeq x\}$ и $\{y\colon y \preccurlyeq x\}$ замкнуты.

Определение 4.3. Будем говорить, что функция $u\colon X \to \mathbb{R}$ задает на множестве X предпочтение $\preccurlyeq$, если для любых $x, y \in X$ верно следующее: $x \preccurlyeq y$, если и только если $u(x) \leqslant u(y)$.

В этом случае соотношение $x \succ y$, конечно же, эквивалентно неравенству $u(x) > u(y)$. Функция u в этом случае называется *функцией полезности*, задающей отношение предпочтения на X.

Когда отношение предпочтения может быть задано функцией полезности? Следующая теорема утверждает, что это возможно для весьма широкого класса отношений предпочтения.

Теорема 4.1[1]**.** *Любое непрерывное отношение предпочтения на топологическом пространстве со счетной базой открытых множеств может быть представлено непрерывной функцией полезности.*

Определение 4.4. Отношение предпочтения $\succcurlyeq$, заданное на выпуклом подмножестве X векторного пространства, называется:

а) *выпуклым*, если из соотношений $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}$, $\mathbf{z} \succcurlyeq \mathbf{x}$, $0 < \alpha < 1$ следует, что выпуклая комбинация $\alpha\mathbf{y} + (1 - \alpha)\mathbf{z} \succcurlyeq \mathbf{x}$;

б) *строго выпуклым*, если из соотношений $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}$, $\mathbf{z} \succcurlyeq \mathbf{x}$, $0 < \alpha < 1$ следует, что $\alpha\mathbf{y} + (1 - \alpha)\mathbf{z} \succ \mathbf{x}$.

Таким образом, отношение предпочтения $\succcurlyeq$, определенное на выпуклом множестве X, выпукло тогда и только тогда, когда множество $\{\mathbf{y} \in X\colon \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}\}$ является выпуклым при любом $\mathbf{x} \in X$.

Определение 4.5. Функция $u\colon C \to \mathbb{R}$, заданная на непустом выпуклом подмножестве C некоторого векторного пространства, называется:

1) *квазивогнутой*, если для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, и любого числа $0 < \alpha < 1$ верно, что

$$u(\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}) \geqslant \min\{u(\mathbf{x}), u(\mathbf{y})\};$$

2) *строго квазивогнутой*, если для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, и любого числа $0 < \alpha < 1$ верно, что

$$u(\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}) > \min\{u(\mathbf{x}), u(\mathbf{y})\};$$

3) *вогнутой*, если для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, и любого числа $0 < \alpha < 1$

$$u(\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}) \geqslant \alpha u(\mathbf{x}) + (1 - \alpha)u(\mathbf{y});$$

4) *строго вогнутой*, если для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, и любого числа $0 < \alpha < 1$

$$u(\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}) > \alpha u(\mathbf{x}) + (1 - \alpha)u(\mathbf{y}).$$

Теорема 4.2. *Пусть C — выпуклое подмножество векторного пространства, а $u\colon C \to \mathbb{R}$ — некоторая функция на нем. Справедливы следующие утверждения:*

а) *функция u квазивогнута тогда и только тогда, когда задаваемое ею отношение предпочтения выпукло;*

б) *функция u строго квазивогнута тогда и только тогда, когда задаваемое ею отношение предпочтения строго выпукло.*

---

[1] Доказательство этого фундаментального результата можно найти в работе: *Hildebrand W., Kirman A. P.* Introduction to equilibrium analysis. Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1976. P. 53.

► ***Доказательство.*** а) Предположим, что функция u квазивогнута и пусть $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, $\mathbf{z} \succcurlyeq \mathbf{y}$ (т.е. $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y})$, $u(\mathbf{z}) \geqslant u(\mathbf{y})$) и $0 < \alpha < 1$. Имеем

$$u(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{z}) \geqslant \min\{u(\mathbf{x}), u(\mathbf{z})\} \geqslant u(\mathbf{y})$$

т.е. $\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{z} \succcurlyeq \mathbf{y}$.

Предположим теперь, что отношение предпочтения $\succcurlyeq$, задаваемое функцией u, является выпуклым, и пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$, $0 < \alpha < 1$.

Не умаляя общности, можно считать, что $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y})$ (т.е. $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$). Из соотношений $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{y}$ и выпуклости $\succcurlyeq$ следует, что $\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{y}$, т.е.

$$u(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) \geqslant u(\mathbf{y}) = \min\{u(\mathbf{x}), u(\mathbf{y})\},$$

что и требовалось доказать.

б) Предположим, что функция u строго квазивогнута и $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, $\mathbf{z} \succcurlyeq \mathbf{y}$, $0 < \alpha < 1$. Тогда $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y})$, $u(\mathbf{z}) \geqslant u(\mathbf{y})$, $u(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{z}) > \min\{u(\mathbf{x}), u(\mathbf{z})\} \geqslant u(\mathbf{y})$, т.е. $\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{z} \succ \mathbf{y}$.

Предположим теперь, что отношение предпочтения $\succcurlyeq$, задаваемое функцией u, является строго выпуклым, и пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$, $0 < \alpha < 1$. Без ограничения общности можно считать, что $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y})$ (т.е. $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$). Из строгой выпуклости $\succcurlyeq$ и соотношений $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{y}$ следует, что $\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \succ \mathbf{y}$, т.е.

$$u(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) > u(\mathbf{y}) = \min\{u(\mathbf{x}), u(\mathbf{y})\},$$

что и требовалось доказать. ◄

Замечание 4.1. Таким образом, функция полезности, порождающая (строго) выпуклое предпочтение, является (строго) квазивогнутой, и наоборот.

Замечание 4.2. Условия, на которых товар j обменивается на товар i, определяются соотношением цен $\frac{p_i}{p_j}$, где p_i, p_j — неотрицательные вещественные числа и $p_j > 0$. Ясно, что $p_i q_i = p_j q_j$, где q_i, q_j — количества товаров i и j, так что

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{q_j}{q_i}.$$

Величина $\frac{p_i}{p_j}$ выражает количество товара j, которое можно обменять на единицу товара i по ценам $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_j, ..., p_n)$.

Определение 4.6. *Упорядоченным* (*частично упорядоченным*) векторным пространством будем называть вещественное векторное пространство (E), наделенное некоторым отношением порядка (частичного порядка) $\succcurlyeq$; при этом должны выполняться следующие два условия, которые связывают алгебраическую и порядковую структуры:

1) если $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$, то $\mathbf{x} + \mathbf{z} \geqslant \mathbf{y} + \mathbf{z}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E$;

2) если $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$, то $\alpha\mathbf{x} \geqslant \alpha\mathbf{y}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ при любом $\alpha \geqslant 0$.

Запись $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ означает, что $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$ и $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Множество $E+ = \{\mathbf{x} \in E: \mathbf{x} \geqslant 0\}$ называется *положительным конусом* пространства E, а его элементы — *положительными векторами*. Примером упорядоченного векторного пространства является $E = \mathbb{R}^l$. Отношение порядка на нем определяется следующим образом:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_l) \geqslant \mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_l)$$

тогда и только тогда, когда $x_i \geqslant y_i$, $i = 1, 2, ..., l$; при этом $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда $\forall i\ x_i \geqslant y_i$ и $\exists i_0\ x_{i_0} < y_{i_0}$.

Определение 4.7. Отношение предпочтения $\succcurlyeq$ на непустом подмножестве X упорядоченного векторного пространства называется:

а) *монотонным*, если из условия $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ следует, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$;

б) *строго монотонным*, если из условия $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ следует, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

Пример 4.1. Предпочтение на R_+^2 определено функцией полезности $u(x, y) = xy$. Ясно, что если $(x_1, y_1) > (x_2, y_2)$, то $u(x_1, y_1) = x_1y_1 \geqslant x_2y_2 = u(x_2, y_2)$ (монотонность). Но $(2, 0) > (1, 0)$; при этом неверно, что $(2, 0) \succ (1, 0)$, т.е. нет строгой монотонности.

Пусть C — выпуклое подмножество векторного пространства. Линия уровня функции u: $C \to \mathbb{R}$ — это множество вида $\{\mathbf{x} \in C: u(\mathbf{x}) = c\}$, где c — любое вещественное число.

В экономике линии уровня функций полезности называют *кривыми безразличия.*

Выпуклость кривой безразличия в сторону начала координат определяется следующим образом: если A и B — произвольные точки на кривой безразличия, то луч, проходящий через начало координат и любую точку z отрезка AB, пересекает кривую по крайней мере в одной точке D, лежащей между 0 и z (рис. 4.1).

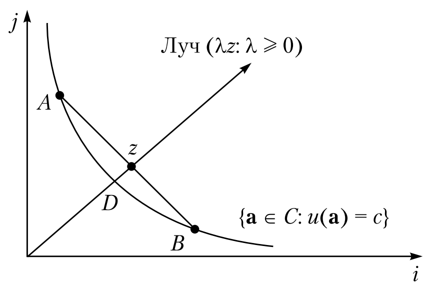


Рис. 4.1

Понятием выпуклости выражается уменьшение маржинальной интенсивности замещения: чем больше у экономического агента имеется товара i, тем меньше он проявляет желания обменять единицу товара j на дополнительную единицу товара i.

Теорема 4.3. *Пусть функция u: $C \to \mathbb{R}$ определена на выпуклом подмножестве C положительного конуса некоторого упорядоченного векторного пространства. Если функция u строго монотонна и квазивогнута, то ее кривые безразличия выпуклы в сторону начала координат.*

► ***Доказательство.*** Предположим, что для элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ выполнены равенства $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{y}) = c$, и пусть $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}$ при некотором $0 < \alpha < 1$. Поскольку функция u квазивогнута, то $u(\mathbf{z}) \geqslant \min\{u(\mathbf{x}), u(\mathbf{y})\} = c$.

Так как функция u строго монотонна, то нетрудно понять, что луч $(\lambda\mathbf{z}: \lambda \geqslant 0)$ не может пересечь линию уровня $\{\mathbf{a} \in C: u(\mathbf{a}) = c\}$ в какой-либо точке вне отрезка, соединяющего точки 0 и z. Это и доказывает выпуклость линии уровня функции u в сторону начала координат. ◄

4.2. Функции спроса

Определение 4.8. *Бюджетное множество* вектора цен (или цены) $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_+$, соответствующее вектору $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^l_+$, определяется следующим образом:

$$B_\omega(\mathbf{p}) = \{x \in \mathbb{R}^l_+;\ \mathbf{px} \leqslant \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}\}.$$

Бюджетная линия (бюджетная поверхность) в бюджетном множестве $B_\omega(\mathbf{p})$ — это множество

$$\{\mathbf{x} \in B_\omega(\mathbf{p}) \colon \mathbf{px} = \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}\}.$$

Определение 4.9. Пусть $\succcurlyeq$ — отношение предпочтения, заданное на подмножестве X векторного пространства E. Вектор $\mathbf{v} \in E$ называется *экстремально желательным набором*, или вектором, *для предпочтения* $\succcurlyeq$, если:

1) $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{v} \in X$ для любого $\mathbf{x} \in X$ и любого $\alpha > 0$;

2) $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{v} \succ \mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in X$ и любого $\alpha > 0$.

Определение 4.10. Пусть $\succcurlyeq$ — отношение предпочтения на множестве X и пусть A — некоторое непустое подмножество множества X. Говорят, что элемент $a \in A$ есть максимальный элемент множества A для предпочтения $\succcurlyeq$, если не существует такого элемента $b \in A$, для которого $b \succ a$. Так как $\succcurlyeq$ (как отношение предпочтения) является линейным, то элемент a максимален тогда и только тогда, когда $\forall x \in A\ a \succcurlyeq x$.

Напомним, что запись $\mathbf{x} \gg \mathbf{0}$ в нашем учебнике означает, что $x_i > 0$ при всех i, аналогично запись $\mathbf{x} \gg \mathbf{y}$ означает, что $x_i > y_i$ при всех i. Вектор $\mathbf{x} \gg 0$ будем называть строго положительным.

Теорема 4.4 [2]. *Для данной цены* $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ *и данного непрерывного предпочтения* $\succcurlyeq$ *на* $\mathbb{R}^l_+$ *справедливо следующее утверждение. Если отношение* $\succcurlyeq$ *строго выпукло и у него существует экстремально желательный набор, то каждое бюджетное множество вектора* p имеет в точности один максимальный элемент для $\succcurlyeq$, *лежащий на бюджетной линии* (*поверхности*).

Определение 4.11. Рассмотрим непрерывное строго выпуклое отношение предпочтения $\succcurlyeq$ на $\mathbb{R}^l_+$, обладающее экстремально желательным набором. Пусть $0 < \omega \in \mathbb{R}^l_+$ — некоторый фиксированный вектор, называемый начальным запасом. Тогда в силу теоремы 4.4 при любой цене $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ в бюджетном множестве $B_\omega(\mathbf{p})$ существует единственный максимальный элемент для предпочтения $\succcurlyeq$. Этот элемент называется *вектором спроса предпочтения* $\succcurlyeq$ при действии цены $\mathbf{p}$ и обозначается $\mathbf{D}_\omega(\mathbf{p})$. Таким образом, определена функция $D_\omega\colon Int(\mathbb{R}^l_+) \to \mathbb{R}^l_+$, которая вектору цен $\mathbf{p}$ ставит в соответствие вектор спроса $\mathbf{D}_\omega(\mathbf{p})$ предпочтения $\succcurlyeq$ при действии цены $\mathbf{p}$. Эта функция называется функцией спроса, отвечающей предпочтению $\succcurlyeq$ (рис. 4.2).

Отметим два важных свойства функции спроса.

1. Поскольку для каждого $\mathbf{p}$ из $Int(\mathbb{R}^l_+)$ вектор спроса лежит на бюджетной поверхности, то $\mathbf{pD}_\omega(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}$.

2. Функция спроса однородна степени 0, т.е.

$$(\forall\lambda > 0)(\forall\mathbf{p} \gg \mathbf{0})\mathbf{D}_\omega(\lambda\mathbf{p}) = \mathbf{D}_\omega(\mathbf{p}).$$

Определение 4.12. Непрерывное отношение предпочтения $\succcurlyeq$ на $\mathbb{R}^l_+$ называется *неоклассическим* в следующих случаях: 1) это отношение строго монотонно и строго выпукло; 2) это отношение строго монотонно и строго выпукло на $Int(\mathbb{R}^l_+)$, причем любой элемент из $Int(\mathbb{R}^l_+)$ предпочитается любому элементу границы.

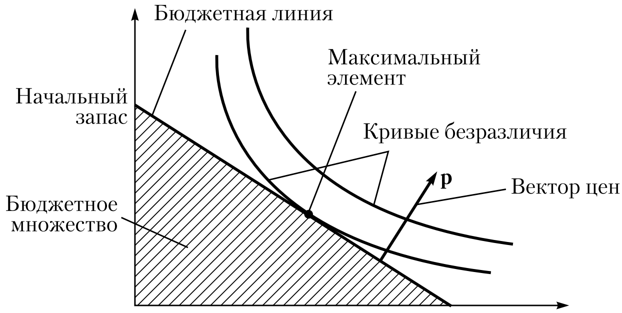


Рис. 4.2

Теорема 4.5 [2]. *Всякая функция спроса, соответствующая неоклассическому предпочтению, непрерывна.*

4.3. Экономика обмена

Определение 4.13. *Экономикой обмена* называется всякое отображение е непустого множества A (называемого множеством участников, или агентов, или потребителей) в $\mathbb{R}^l_+ \times \wp$, где $\wp$ — множество всех предпочтений на $\mathbb{R}^l_+$: $\varepsilon: A \to \mathbb{R}^l_+ \times \wp$.

Если ε — экономика обмена, то значение $\varepsilon_i = (\boldsymbol{\omega}_i, \succcurlyeq_i)$ (для i-го участника) описывает характеристики i-го участника. Вектор $\boldsymbol{\omega}_i$ называется его начальным запасом, а $\succcurlyeq_i$ — отношением предпочтения, или вкусами, i-го участника. Если $\mathbf{p}$ — вектор цены, то $\mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i = w_i$ называется доходом i-го участника при цене $\mathbf{p}$. Если множество A конечно, то вектор $\boldsymbol{\omega} = \sum\limits_{i \in A} \omega_i$ называется полным (агрегированным) запасом экономики.

Определение 4.14. *Неоклассическая экономика обмена* — это такая экономика обмена $\varepsilon: A \to \mathbb{R}^l_+ \times \wp$, что: 1) множество участников A конечно; 2) у каждого участника i имеется ненулевой начальный запас $\boldsymbol{\omega}_i$ (т.е. $\boldsymbol{\omega}_i > 0$), и его предпочтение $\succcurlyeq_i$ является неоклассическим; 3) полный начальный запас $\boldsymbol{\omega}$ строго положителен, т.е. $\boldsymbol{\omega} \gg \mathbf{0}$.

Определение 4.15. Пусть ε — неоклассическая экономика обмена. *Функцией избыточного спроса* экономики ε называется отображение $\zeta: Int(\mathbb{R}^l_+) \to \mathbb{R}^l$, определяемое формулой

$$\zeta(\mathbf{p}) = \sum_{i \in A} \mathbf{D}_i(\mathbf{p}) - \sum_{i \in A} \omega_i.$$

Теорема 4.6. *Для функции избыточного спроса* $\zeta(\mathbf{p})$ *неоклассической экономики обмена выполнен закон Вальраса, т.е.* $\mathbf{p}\zeta(\mathbf{p}) = 0$ *для любой цены* $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$.

► ***Доказательство.*** Очевидно, что для любого $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ справедливо

$$\mathbf{p}\zeta(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\Big(\sum_{i \in A} \mathbf{D}_i(\mathbf{p}) - \sum_{i \in A} \omega_i\Big) = \sum_{i \in A} (\mathbf{p}\mathbf{D}_i(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i) = \sum_{i \in A} 0 = 0. \blacktriangleleft$$

Определение 4.16. Строго положительный вектор цен $\mathbf{p}$ называется *равновесной ценой для неоклассической экономики обмена*, если $\zeta(\mathbf{p}) = 0$.

Теорема 4.7 (Эрроу — Дебре) [2]. *В каждой неоклассической экономике обмена имеется равновесная цена, т.е. существует по крайней мере один вектор* $\mathbf{p} \gg 0$, *для которого* $\zeta(\mathbf{p}) = 0$.

Рассмотрим примеры задач на модель экономики обмена.

Пример 4.2. Рассмотрим экономику с пространством $\mathbb{R}^2_+$ в качестве пространства товаров и тремя участниками ($A = \{1, 2, 3\}$), которые имеют такие характеристики:

- участник 1: начальный запас $\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 2)$, функция полезности $u_1(x, y) = xy$;
- участник 2: начальный запас $\boldsymbol{\omega}_2 = (1, 1)$, функция полезности $u_2(x, y) = x^2y$;
- участник 3: начальный запас $\boldsymbol{\omega}_3 = (2, 3)$, функция полезности $u3(x, y) = xy^2$.

Требуется определить цены равновесия.

Решение. Заметим, что все предпочтения, задаваемые этими функциями полезности, являются неоклассическими и что они все строго монотонны только на $\mathrm{Int}(\mathbb{R}^L_+)$, $L = 2$. Полный запас — это вектор $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3 = (4, 6)$.

Найдем теперь функции спроса участников $\mathbf{x}(\cdot)_1$, $\mathbf{x}(\cdot)_2$, $\mathbf{x}(\cdot)_3$. Зафиксируем цену: $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \gg \mathbf{0}$.

Участник 1 максимизирует функцию полезности $u_1(x, y) = xy$ при бюджетном ограничении $p_1x + p_2y = p_1 + 2p_2$. При использовании множителей Лагранжа очевидно, что в точке максимума должно быть $\nabla u_1 = (y, x) = \lambda p$, поэтому имеем

$$\begin{cases} y = \lambda p_1, \\ x = \lambda p_2, \\ p_1x + p_2y = p_1 + 2p_2. \end{cases}$$

Решив систему, получим функцию спроса участника 1:

$$\boldsymbol{D}_1(\mathbf{p}) = \left(\frac{p_1 + 2p_2}{2p_1}, \frac{p_1 + 2p_2}{2p_2} \right).$$

Для участника 2 имеем

$$\begin{cases} 2xy = \lambda p_1, \\ x^2 = \lambda p_1, \\ p_1x + p_2y = p_1 + 2p_2. \end{cases}$$

Решив систему, находим

$$\boldsymbol{D}_2(\mathbf{p}) = \left(\frac{2p_1 + 2p_2}{3p_1}, \frac{p_1 + p_2}{3p_2} \right).$$

Для участника 3:

$$\begin{cases} y^2 = \lambda p_1, \\ 2xy = \lambda p_2, \\ p_1x + p_2y = 2p_1 + 3p_2, \end{cases}$$

откуда

$$\boldsymbol{D}_3(\mathbf{p}) = \left(\frac{2p_1 + 3p_2}{3p_1}, \frac{4p_1 + 6p_2}{3p_2} \right).$$

Следовательно, общий спрос

$$\boldsymbol{D}_1(\mathbf{p}) + \boldsymbol{D}_2(\mathbf{p}) + \boldsymbol{D}_3(\mathbf{p}) = \left(\frac{11p_1 + 13p_2}{6p_1}, \frac{13p_1 + 20p_2}{6p_2} \right).$$

Вектор избыточного спроса

$$\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{p}) = \left(\frac{11p_1 + 16p_2}{6p_1}, \frac{13p_1 + 20p_2}{6p_2} \right) - (4, 6) = \left(-\frac{13p_1 - 16p_2}{6p_1}, \frac{13p_1 - 16p_2}{6p_2} \right).$$

Равенство $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{p}) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $13p_1 - 16p_2 = 0$. Принимая во внимание, что $p_1 + p_2 = 1$, получим для равновесной цены следующее значение:

$$\mathbf{P}_{\text{eq}}\left(\frac{16}{29}, \frac{13}{29}\right) \approx (0{,}55,\ 0{,}45).$$

Пример 4.3. В экономике обмена потребитель задан следующими характеристиками: его начальный запас $\boldsymbol{\omega} = (1, 1)$, а функция полезности $U(x, y) = ye^x$. Требуется найти функцию спроса данного потребителя.

Решение. Используем метод множителей Лагранжа:

$ye^x + \lambda(p_1 + p_2 - p_1x - p_2y) \to \max$.

Получим систему

$$\begin{cases} e^x = \lambda p_2, \\ ye^x = \lambda p_1, \\ p_1 + p_2 = p_1x + p_2y. \end{cases}$$

Введем обозначение $t = \dfrac{p_1}{p_2}$. Тогда

$$y = \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{t},\ x = \frac{p_1 + p_2 - p_2y}{p_1} = 1 + t - t\frac{1}{t} = t.$$

Таким образом, $\mathbf{D}(\mathbf{p}) = \left(t, \dfrac{1}{t}\right)$.

4.4. Экономика с производством

Определение 4.17. Непустое подмножество Y пространства $\mathbb{R}^l$ называется *технологическим*, или *производственным*, *множеством*, если оно: 1) замкнуто; 2) выпукло; 3) удовлетворяет условию $\mathbb{R}_+ \cap Y = \{0\}$; 4) ограничено сверху, т.е. существует такой вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^l_+$, что $\mathbf{y} \leqslant \mathbf{a}\ \forall \mathbf{y} \in Y$.

Некоторые примеры технологических множеств представлены на рис. 4.3.

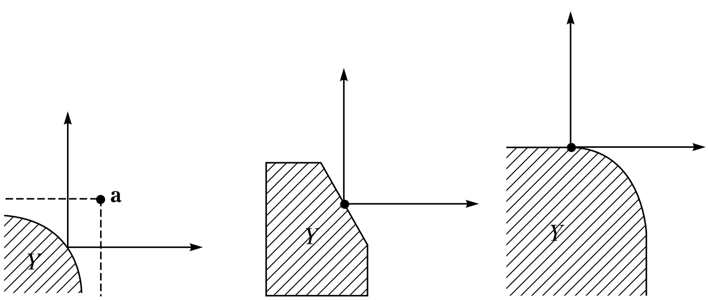


Рис. 4.3

Определение 4.18. Если Y — технологическое множество и $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ — строго положительная цена, то *функцией дохода* при цене $\mathbf{p}$ называется функция $\Re\colon Y \to \mathbb{R}$, определяемая равенством $\Re(\mathbf{y}) = \mathbf{py}$, $\mathbf{y} \in Y$.

Теорема 4.8. *Пусть Y — технологическое множество и $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ — строго положительная цена. Тогда существует по крайней мере один план производства, максимизирующий функцию дохода, т.е. существует вектор $\mathbf{y}_0 \in Y$, такой что $\mathbf{py} \leqslant \mathbf{py}_0$ для любого $\mathbf{y} \in Y$.*

► ***Доказательство.*** Пусть Y — технологическое множество и $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ — строго положительная цена. Поскольку $\mathbf{0} \in Y$, то

$$\sup\{\mathbf{py}: \mathbf{y} \in Y\} = \sup\{\mathbf{py}: \mathbf{y} \in Y; \mathbf{py} \geqslant 0\}.$$

Пусть $A = \{\mathbf{y} \in Y: \mathbf{py} \geqslant 0\}$. На рис. 4.4 множество A представлено мелко заштрихованной областью.

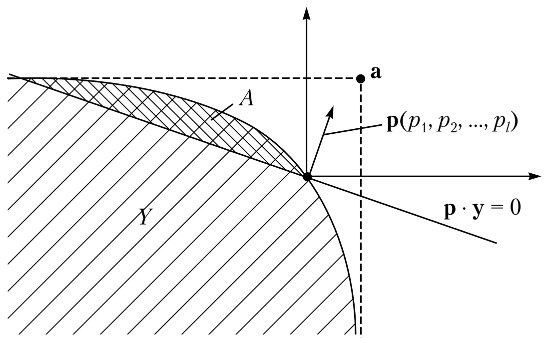


Рис. 4.4

Покажем, что множество A компактно (замкнуто и ограничено). Ясно, что A замкнуто как пересечение двух замкнутых множеств (Y и полупространства $\mathbf{py} \geqslant 0$).

Докажем, что A ограничено. Так как Y содержит $\mathbf{0}$ и ограничено сверху, то достаточно доказать, что отрицательные компоненты векторов из A ограничены снизу. Обозначим

$$\rho = \min\{p_1, p_2, ..., p_l\} > 0,$$

где $p_1, p_2, ..., p_l$ — компоненты вектора $\mathbf{p}$. Пусть для вектора $\mathbf{y} \in Y$ выполнено неравенство $\mathbf{py} \geqslant 0$. Введем обозначения

$$I = \{k: y_k \geqslant 0\}; \; J = \{k: y_k < 0\},$$

где $y_1, y_2, ..., y_l$ — компоненты вектора $\mathbf{y}$. Тогда

$$\sum_{j \in J} p_j y_j \geqslant \sum_{i \in I} p_i y_i,$$

так как $\mathbf{py} \geqslant 0$ и

$$-\sum_{i \in I} p_i y_i \geqslant -\sum_{r=1}^{l} p_r a_r,$$

потому что $\mathbf{y} \leqslant \mathbf{a}$.

Если $y_k < 0$, то

$$\rho y_k \geqslant p_k y_k \geqslant \sum_{j \in J} p_j y_j \geqslant -\sum_{i \in I} p_i y_i \geqslant -\sum_{r=1}^{l} p_r a_r = -\mathbf{pa},$$

и значит,

$$y_k \geqslant -\frac{\mathbf{pa}}{\rho}, \; k = 1, 2, ..., l,$$

поскольку если $y_k \geqslant 0$, то тем более это так.

Таким образом, A ограничено сверху. Следовательно, A компактно, отсюда немедленно вытекает существование плана производства, максимизирующего функцию дохода. ◀

Определение 4.19. *Эффективной поверхностью* (*эффективной границей*) технологического множества Y называется множество

$$EffY = \{\mathbf{y} \in Y : (\mathbf{y} + \mathbb{R}^l_+) \cap Y = \{\mathbf{y}\}\}.$$

На рис. 4.5 изображены эффективные границы двух технологических множеств.

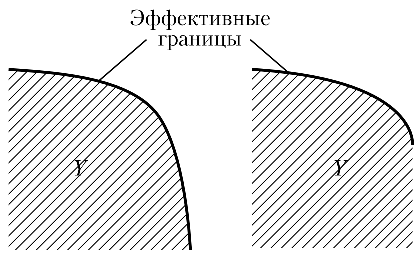


Рис. 4.5

Определение 4.20. Технологическое множество называется *строго выпуклым*, если его эффективная граница не содержит линейных участков.

Теорема 4.9 [2]. *Если технологическое множество Y строго выпукло, то каждая функция дохода имеет единственную точку максимума на Y, т.е. для любой цены* $\mathbf{p} \gg 0$ *существует единственный вектор* $\mathbf{z} \in Y$*, такой что* $\mathbf{py} \leqslant \mathbf{pz}$ *для всех* $\mathbf{y} \in Y$.

Замечание 4.3. В том случае, когда эффективная поверхность технологического множества является поверхностью уровня гладкой строго вогнутой функции g, точку максимума можно найти с помощью метода множителей Лагранжа: градиент ∇g, или $\operatorname{grad} g$, функции g должен быть коллинеарен вектору $\mathbf{p}$:

$$\operatorname{grad} g = \lambda \mathbf{p}.$$

Проиллюстрируем это на пространстве двух товаров (рис. 4.6). Пусть

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \ \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},$$

g — гладкая строго вогнутая функция; $\Re$ — функция дохода,

$$\Re(\mathbf{v}) = \mathbf{pv} = p_1 x + p_2 y.$$

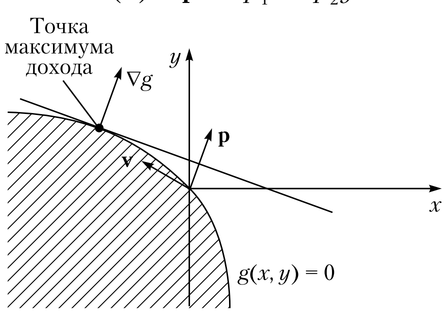


Рис. 4.6

Применение метода множителей Лагранжа дает следующие результаты:

$$L(x, y, \lambda) = \Re(x, y) - \lambda g(x, y);$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = p_1 - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = p_2 - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0. \end{cases}$$

$$\nabla g = \begin{Bmatrix} g'_x \\ g'_y \end{Bmatrix} = \lambda^{-1}\mathbf{p} = \lambda^{-1}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Определение 4.21. Рассмотрим строго выпуклое технологическое множество Y. Тогда для любого вектора цен $\mathbf{p} \gg 0$ существует единственный план производства $\mathbf{y}(\mathbf{p}) \in Y$, максимизирующий функцию дохода $\Re(\mathbf{y}) = \mathbf{py}$. Иными словами, каждое строго выпуклое множество Y определяет некоторую функцию S: $Int(\mathbb{R}^l_+) \to \mathbb{R}^l$, называемую *функцией предложения*, соответствующей технологическому множеству Y.

Теорема 4.10 [2]. *Функция предложения, соответствующая строго выпуклому технологическому множеству*:

1) *однородна нулевой степени*;

2) *ограничена сверху*;

3) *монотонна*.

Определение 4.22. *Неоклассическая экономика* е *с частной собственностью и производством* — это набор из четырех компонент:

1) $\mathbb{R}^l$;

2) $\{\boldsymbol{\omega}_i, \succcurlyeq_i\}_{i-1}^m$;

3) $\{Y_j\}_{j=1}^k$;

4) $\{\theta_{ij}\}$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., k$,

которые интерпретируются следующим образом:

• $\mathbb{R}^l$ — пространство товаров (т.е. в экономике присутствует l типов продуктов);

• имеется m потребителей, обозначаемых индексом i, причем каждый потребитель наделен начальным запасом $\boldsymbol{\omega}_i > \mathbf{0}$ и характеризуется неоклассическим предпочтением $\succcurlyeq_i$, при этом полный запас считается строго положительным, т.е. $\boldsymbol{\omega} = \sum\limits_{i=1}^{m} \boldsymbol{\omega}_i \gg 0$;

• имеется k производителей (фирм), обозначаемых индексом j; j-й производитель характеризуется строго выпуклым технологическим множеством Y_j;

• наличие частной собственности означает, что фирмы принадлежат потребителям. Вещественное число q с индексами i и j есть доля i-го потребителя в доходе, получаемом j-м производителем. Предполагается, что $0 \leqslant \theta_{ij} \leqslant 1$, при этом $\sum\limits_{i=1}^{m} \theta_{ij} = 1$, $j = 1, 2, ..., k$.

Будем обозначать через $\mathbf{S}_j(\mathbf{p})$ функцию предложения j-го производителя в неоклассической экономике с частной собственностью и производством.

Тогда доход i-го потребителя при действии цены $\mathbf{p} \gg 0$ определяется формулой

$$w_i(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{p}\sum_{j=1}^{k}\theta_{ij}\mathbf{S}_j(\mathbf{p}). \qquad (4.1)$$

Поскольку $\boldsymbol{\omega}_i > 0$, то $w_i(\mathbf{p}) > 0$ при любой цене $\mathbf{p} \Lambda \mathbf{0}$, таким образом, доход i-го потребителя является отображением w_i: $Int(\mathbb{R}^l_+) \to (0; +\infty)$.

Теорема 4.11 [2]. *В неоклассической экономике с частной собственностью и производством функция дохода каждого потребителя* w_i: $Int(\mathbb{R}^l_+) \to (0; +\infty)$, *определяемая формулой* (4.1), *непрерывна.*

Бюджетным множеством i-го потребителя является замкнутое выпуклое множество

$$B_i(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^l_+;\ \mathbf{px} \leqslant w_i(\mathbf{p})\}.$$

В силу теоремы 4.4 при каждом $\mathbf{p} \gg 0$ в $B_i(\mathbf{p})$ существует в точности один максимальный элемент для предпочтения $\succcurlyeq_i$. Этот максимальный элемент называется спросом i-го потребителя при действии цены $\mathbf{p}$ и обозначается $\mathbf{D}_i(\mathbf{p})$. Как и в случае экономики обмена, нетрудно показать, что $\mathbf{D}_i(\mathbf{p})$ лежит на бюджетной линии, т.е. выполняется равенство $\mathbf{pD}_i(\mathbf{p}) = w_i(\mathbf{p})$. Таким образом, для каждого потребителя определена функция спроса D_i: $Int(\mathbb{R}^l_+) \to \mathbb{R}^l$.

Определение 4.23. Для неоклассической экономики с частной собственностью и производством *функция избыточного спроса* ζ: $Int(\mathbb{R}^l_+) \to \mathbb{R}^l$ определяется равенством

$$\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{m}\mathbf{D}_i(\mathbf{p}) - \sum_{j=1}^{k}\mathbf{S}_j(\mathbf{p}) - \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\omega}_i = \sum_{i=1}^{m}\mathbf{D}_i(\mathbf{p}) - \sum_{j=1}^{k}\mathbf{S}_j(\mathbf{p}) - \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\omega}.$$

Теорема 4.12. *Для функции избыточного спроса* $\boldsymbol{\zeta}$ *в неоклассической экономике с частной собственностью и производством выполнен закон Вальраса*: $\forall\mathbf{p} \gg \mathbf{0}\ \mathbf{p}\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{p}) = 0$.

► ***Доказательство.*** При каждом $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ имеем

$$\mathbf{p}\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\left(\sum_{i=1}^{m}\mathbf{D}_i(\mathbf{p}) - \sum_{j=1}^{k}\mathbf{S}_j(\mathbf{p}) - \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\omega}_i\right) = \mathbf{p}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\mathbf{D}_i(\mathbf{p}) - \sum_{j=1}^{k}\theta_{ij}\mathbf{S}_j(\mathbf{p}) - \boldsymbol{\omega}_i\right)\right] =$$

$$= \left(\mathbf{pD}_i(\mathbf{p}) - \sum_{j=1}^{k}\theta_{ij}\mathbf{pS}_j(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i\right) = \sum_{i=1}^{m}0 = 0. \blacktriangleleft$$

Теорема 4.13 (Эрроу — Дебре) [2]. *В любой неоклассической экономике с частной собственностью и производством существуют равновесные цены, т.е. существует вектор цен* $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$, *такой что* $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{p}) = 0$.

Рассмотрим примеры задач на модель экономики с частной собственностью и производством.

Пример 4.4. Рассмотрим следующую неоклассическую экономику с частной собственностью и производством.

1. Пространством товаров служит $\mathbb{R}^2$.

2. Имеются два потребителя с характеристиками:

• потребитель 1: начальный запас $\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 2)$, функция полезности $U_1(x, y) = xy$;

• потребитель 2: начальный запас $\boldsymbol{\omega}_2 = (2, 2)$, функция полезности $U_2(x, y) = x^2y$.

3. Имеется один производитель с технологическим множеством

$$Y = \left\{(x, y): x < 1 \text{ и } y \leqslant \frac{x}{x-1}\right\}.$$

4. Доли потребителей в доходе производителя $\theta_{11} = \theta_{21} = \dfrac{1}{2}$.

Требуется определить равновесные цены.

Решение. Эффективная поверхность совпадает в данном случае со всей границей множества Y: $EffY = \left\{(x, y): x < 1 \text{ и } y = \dfrac{x}{x-1}\right\}$ (рис. 4.7).

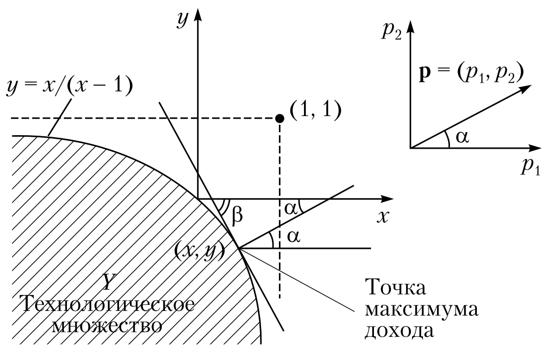


Рис. 4.7

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \gg \mathbf{0}$. Производитель выбирает план, максимизирующий его прибыль. Это такая точка (x, y) на эффективной поверхности, в которой нормаль имеет тангенс угла наклона p_2/p_1.

Продифференцировав равенство $y = \dfrac{x}{x-1}$, получим $y' = -\dfrac{1}{(x-1)^2} = -\operatorname{tg}\beta$, так что тангенс угла наклона нормали равен $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta} = (x-1)^2 = p_2/p_1$.

Другой способ рассуждения, по-видимому, проще для понимания. Запишем условие максимизации прибыли: $\operatorname{grad} y = \lambda\mathbf{p}$, или $\begin{pmatrix} 1/(x-1)^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, откуда непосредственно получается $(x-1)^2 = p_2/p_1$.

Введем параметр $t = \sqrt{p_2/p_1} > 0$. Тогда $x = 1 - t$, $y = \dfrac{1-t}{-t} = 1 - \dfrac{1}{t}$. Функция предложения — это $\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \left(1 - t, 1 - \dfrac{1}{t}\right)$.

Рассмотрим поведение потребителя 1. Его доход

$$w_1(\mathbf{p}) = \mathbf{p}w_1 + \frac{1}{2}\mathbf{p}\mathbf{S}(\mathbf{p}) = p_1 + 2p_2 + \frac{1}{2}p_1(1-t) + \frac{1}{2}p_2\left(1 - \frac{1}{t}\right).$$

Он (потребитель) максимизирует функцию полезности $U_1(x, y) = xy$ при бюджетном ограничении $p_1x + p_2y = w_1(\mathbf{p})$. С помощью метода множителей Лагранжа получим, что для набора (x, y), максимизирующего полезность, выполняется равенство $p_1x = p_2y$.

Таким образом, $w_1(\mathbf{p}) = p_1x + p_2y = 2p_1x = 2p_2y$, и поэтому

$$x = \frac{w_1(\mathbf{p})}{2p_2} = \frac{3}{5} + \frac{5}{4}t^2 - \frac{1}{2}t;\; y = \frac{w_1(\mathbf{p})}{2p_2} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4t^2} - \frac{1}{2t}.$$

Следовательно, функция спроса потребителя 1 — это

$$\mathbf{D}_1(\mathbf{p}) = \left(\frac{3}{5} + \frac{5}{4}t^2 - \frac{1}{2}t;\ \frac{5}{4} + \frac{3}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right).$$

Доход потребителя 2:

$$w_2(\mathbf{p}) = \mathbf{p}w_2 + \frac{1}{2}\mathbf{pS}(\mathbf{p}) = 2p_1 + 2p_2 + \frac{1}{2}p_1(1-t)\frac{1}{2}p_1(1-t) + \frac{1}{2}p_2\left(1 - \frac{1}{t}\right).$$

Функцию полезности $U_2(x, y) = x^2y$ он максимизирует при бюджетном ограничении $p_1x + p_2y = w_2(p)$.

Используя множители Лагранжа, получим, что для набора, максимизирующего полезность, выполняется равенство $p_1x = 2p_2y$. Следовательно,

$$w_2(\mathbf{p}) = p_1x + p_2y = \frac{3}{2}p_1x = 3p_2y.$$

Отсюда вытекает, что

$$x = \frac{2w_2(\mathbf{p})}{3p_1} = \frac{5}{3} + \frac{5}{3}t^2 - \frac{2}{3}t;\ y = \frac{w_2(\mathbf{p})}{3p_2} = \frac{5}{6} + \frac{5}{6t^2} - \frac{1}{3t}.$$

Следовательно, функция спроса потребителя 2

$$\mathbf{D}_2(\mathbf{p}) = \left(\frac{5}{3} + \frac{5}{3}t^2 - \frac{2}{3}t;\ \frac{5}{6} + \frac{5}{6t^2} - \frac{1}{3t}\right).$$

Функция избыточного спроса задается формулой

$$\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{p}) = \mathbf{D}_1(\mathbf{p}) + \mathbf{D}_2(\mathbf{p}) - \mathbf{S}(\mathbf{p}) - \omega_1 - \omega_2 = \left(\frac{35t^2 - 2t - 19}{12};\ \frac{35t^2 - 2t - 19}{12t^2}\right).$$

Таким образом, $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{P}) = 0$ тогда и только тогда, когда $35t^2 - 2t - 19 = 0$. Решив квадратное уравнение и учитывая, что $t > 0$, получим $t = \frac{1+\sqrt{666}}{35} \approx 0{,}766$. Поскольку $p_2/p_1 = t^2 \approx 0{,}587$, то равновесные цены суть $\mathbf{p}_{\text{eq}} = p_1(1, t^2) \approx p_1(1; 0{,}587)$, $p_1 > 0$.

Пример 4.5. В экономике с частной собственностью и производством пространством товаров служит $\mathbb{R}^2$. Производитель задан его технологическим множеством

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x < 1, y \leqslant g(x)\},$$

где $g(x) = \begin{cases} 1 - e^x \text{ при } x \leqslant 0, \\ \ln(1 - x) \text{ при } 0 < x < 1. \end{cases}$

Технологическое множество рассматриваемого производителя приведено на рис. 4.8.

Требуется найти функцию предложения производителя (*Указание*. Ввести обозначение $t = \sqrt{p_2/p_1}$).

Решение. Применим метод множителей Лагранжа:

$$p_1x + p_2y + \lambda(g(x) - y) \to \max,$$

из чего следует, что $\operatorname{grad} g = \lambda\mathbf{p}$, или $p_1 = -\lambda g'_x(x)$ $(y = g(x))$; $p_2 = \lambda$.

Рассмотрим отдельно случаи $0 < x < 1$ и $x \leqslant 0$.

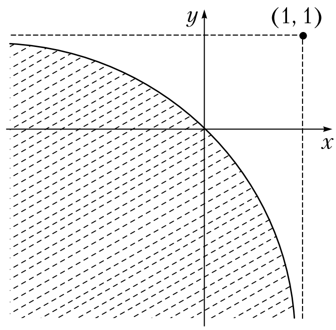


Рис. 4.8

При $0 < x < 1$ имеем $\begin{cases} p_1 = \lambda \dfrac{1}{1-x}, & \dfrac{p_2}{p_1} = 1 - x,\ 0 < t < 1; \\ p_2 = \lambda \cdot 1; & \end{cases}$

При $x \leqslant 0$ имеем $\begin{cases} p_1 = \lambda e^x, & \dfrac{p_2}{p_1} = e^{-x},\ t \geqslant 1. \\ p_2 = \lambda \cdot 1; & \end{cases}$

Тогда получим:

при $0 < t < 1$ $x = 1 - t^2$, $y = \ln(1 - x) = \ln t^2 = 2\ln t$;

при $t \geqslant 1$ $x = -\ln t^2 = -2\ln t$, $y = 1 - e^x = 1 - \dfrac{1}{t^2}$

Таким образом, функция предложения рассматриваемого производителя имеет вид $\mathbf{S}(t) = \begin{cases} \left(-2\ln t,\ 1 - \dfrac{1}{t^2}\right) & \text{при } t \geqslant 1, \\ (1 - t^2,\ 2\ln t) & \text{при } 0 < t < 1. \end{cases}$

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Рассмотрим экономику с частной собственностью и производством, у которой пространством товаров служит $\mathbb{R}^2$ и которая включает в себя двух потребителей и двух производителей со следующими характеристиками:

потребитель 1: начальный запас $\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 3)$, функция полезности $u_1(x, y) = xy$;

потребитель 2: начальный запас $\boldsymbol{\omega}_2 = (2, 3)$, функция полезности $u_2(x,y) = xy^2$;

производитель 1: технологическое множество $Y_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}\colon x < 1, y \leqslant \dfrac{x}{x-1}\right\}$;

производитель 2: технологическое множество $Y_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}\colon x < 1, y \leqslant g(x)\}$, где

$$g(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{при } x \leqslant 0, \\ \ln(1 - x) & \text{при } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Доли потребителей в доходе производителей: $\theta_{11} = \dfrac{1}{3}$; $\theta_{12} = \dfrac{2}{3}$; $\theta_{21} = \dfrac{2}{3}$; $\theta_{22} = \dfrac{1}{3}$.

Требуется выполнить следующие задания.

1. Найти функции предложения производителей.
2. Найти функции спроса потребителей.
3. Найти функцию избыточного спроса.
4. Найти равновесные цены.

(*Указание*. Ввести обозначение $t = \sqrt{p_2/p_1}$.)

4.2. В экономике с частной собственностью и производством пространством товаров служит $\mathbb{R}^2$. Производитель характеризуется технологическим множеством

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x \leqslant a, y \leqslant 1 - e^x\}, \text{ где } a \geqslant 0.$$

Требуется найти функцию предложения производителя.

4.3. В экономике обмена потребитель определен следующими характеристиками: начальный запас $\boldsymbol{\omega} = (4, 5)$; функция полезности $U(x, y) = \min\{3x, 4y\}$. Требуется найти функцию спроса данного потребителя.

4.4. В экономике обмена потребитель определен следующими характеристиками: начальный запас $\boldsymbol{\omega} = (2, 2)$; функция полезности $U(x, y) = xe^y$. Требуется найти функцию спроса данного потребителя. (*Указание*. Ввести обозначение $t = p_2/p_1$.)

4.5. В экономике с частной собственностью и производством потребитель определен следующими характеристиками: его начальный запас $\boldsymbol{\omega} = (4, 5)$; кроме того, он владеет половиной собственного капитала фирмы, функция предложения которой имеет вид

$$\mathbf{S}(p_1, p_2) = \begin{cases} (-2\ln\sqrt{p_2/p_1},\ 1-(p_2/p_1)), \text{ если } p_2/p_1 \ge 1, \\ (1-(p_2/p_1),\ \ln p_2/p_1), \text{ если } 0 < p_2/p_1 < 1. \end{cases}$$

Функция полезности данного потребителя $U(x, y) = \min\{3x, 4y\}$. Требуется найти функцию его спроса.

4.6. В экономике обмена начальный запас потребителя составляет $\boldsymbol{\omega} = (1, 1)$; кроме того, он владеет десятой частью обыкновенных акций фирмы, функция предложения которой имеет следующий вид:

$$\mathbf{S}(p_1, p_2) = \begin{cases} (1,\ 1-e), \text{ если } p_2/p_1 \ge 1, \\ (\ln p_1/p_2,\ 1-(p_1/p_2)), \text{ если } 0 < p_2/p_1 < 1, \end{cases}$$

а функция полезности этого потребителя $U(x, y) = ye^x$. Требуется найти его функцию спроса. (*Указание*. Ввести обозначение $t = p_2/p_1$.)

4.7. Функция полезности потребителя имеет вид $u = \sqrt{xy}$. Найдите оптимальный набор благ потребителя, если доход потребителя равен 100, а цены на блага x и y равны соответственно: а) 1 и 1; б) 1 и 2; в) 1 и 3; г) 5 и 4; д) 5 и 5.

4.8. Бинарное отношение называется *рациональным*, если оно линейно и транзитивно. Покажите, что если множество X конечно и отношение рационально, то существует функция полезности, представляющая это отношение.

4.9. Рассмотрим аддитивно-сепарабельную и дважды дифференцируемую функцию полезности

$$u(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i(x_i),$$

где для всех i выполнено $u_i'(x_i) > 0$. Потребитель обладает доходом $R > 0$, а цены товаров заданы вектором $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$. Известно, что $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) \gg \mathbf{0}$.

Покажите, что если для одного из товаров предельная полезность в $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ раз возрастает, то предельная полезность всех остальных товаров в $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ раз убывает.

4.10. Рассмотрим отношение $\succcurlyeq$ на $\mathbb{R}_+^n$, определяемое следующим образом: $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, если и только если $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$. Опишите свойства отношения $\succcurlyeq$ и покажите, что в общем случае оно не является отношением предпочтения. При каких условиях $\succcurlyeq$ будет отношением предпочтения?

4.11. Покажите, что функция f: $[0; \infty) \to \mathbb{R}$, задаваемая формулой $f(x) = x^2$, строго квазивогнута, но не является вогнутой.

4.12. Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ — элементы векторного пространства, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ — вещественные числа, причем $\alpha_1 \geqslant 0, \alpha_2 \geqslant 0, ..., \alpha_n \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Сумма $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i$ называется выпуклой комбинацией векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$.

Покажите, что функция u: $C \to \mathbb{R}$, заданная на выпуклом множестве C векторного пространства, квазивогнута тогда и только тогда, когда

$$u\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{x}_i\right) \geqslant \min\{u(\mathbf{x}_i): i = 1, ..., n\}$$

для любой выпуклой комбинации $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{x}_i$ элементов из C.

4.13. Пусть $\succcurlyeq$ — отношение предпочтения на топологическом пространстве X, и пусть $u: X \to \mathbb{R}$ — функция полезности, представляющая $\succcurlyeq$ (т.е. $x \succcurlyeq y$ тогда и только тогда, когда $u(x) \geqslant u(y)$). Обязательно ли функция u непрерывна, если непрерывно отношение $\succcurlyeq$?

4.14. Рассмотрим пять отношений предпочтения на $\mathbb{R}^2_+$, задаваемых следующими функциями полезности:

$$u_1(x, y) = x + y;\ \ u_2(x, y) = xy;\ \ u_3(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y};$$
$$u_4(x, y) = y(1 + x);\ \ u_5(x, y) = (x + 1)(y + 2).$$

Опишите свойства этих отношений предпочтения и изобразите их кривые безразличия.

4.15. Рассмотрим два предпочтения на $\mathbb{R}^2_+$, задаваемые следующими функциями полезности:

$$u_1(x, y) = x;\ \ u_2(x, y) = y.$$

Опишите свойства этих отношений предпочтения и изобразите их кривые безразличия.

4.16. Рассмотрим выпуклое компактное множество $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+, x + 2y \leqslant 2\}$. Найдите единственный максимальный элемент этого множества для следующих функций полезности:

а) $u(x, y) = x^2y$;

б) $u(x, y) = (x + 2)y$;

в) $u(x, y) = \min(x, y)$.

4.17. Рассмотрим диск $K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+: (x - 3)^2 + \left(y - \frac{21}{5}\right)^2 \leqslant \frac{41}{25}\right\}$. Найдите единственный максимальный элемент множества K для функции полезности $u(x, y) = xy$.

4.18. Найдите функцию спроса для отношения предпочтения на $\mathbb{R}^2_+$, задаваемого функцией полезности $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, и начального запаса $\boldsymbol{\omega} = (1, 2)$.

4.19. Найдите функцию спроса для отношения предпочтения на $\mathbb{R}^3_+$, задаваемого функцией полезности $u(x, y, z) = \min(x, y, z)$, и начального запаса $\boldsymbol{\omega} = (1, 2, 3)$.

4.20. Индивид L имеет начальный запас, состоящий из 20 долл. в каждый период. Он может взять деньги в долг по процентной ставке 200%, и он может дать деньги в долг по ставке 0%.

а) Покажите бюджетное множество на графике.

б) Пусть L может также инвестировать в проект, который обеспечивает ему $m_1 = 30$ и $m_2 = 15$. Нарисуйте новое бюджетное множество на том же графике. Будет ли L лучше или хуже от инвестирования в этот проект при данных условиях займа и кредитования? Или это нельзя сказать без дополнительной информации о его предпочтениях? Объясните.

в) Обратимся к альтернативному проекту, который обеспечивает $m_1 = 15$ и $m_2 = 30$. Допустим, что L может брать и давать в долг так же, как и ранее. Однако если он выбирает этот проект, он не может иметь дело с предыдущим проектом. Покажите бюджетное множество, доступное для L, если он выбирает этот проект. Будет ли ему лучше или хуже от выбора данного проекта, чем если бы он не выбирал его? Или это нельзя сказать без дополнительной информации о его предпочтениях? Объясните.

4.21. Г-н N будет жить только два периода. В первый период он получит 50 000 долл. Во второй период он будет отдыхать и жить на свои сбережения. Его функция полезности $U(c_1, c_2) = c_1c_2$, где c_1 — это потребление в период 1 и c_2 — это его потребление в период 2. Он может брать и давать в долг при процентной ставке $r = 10\%$.

а) Если процентная ставка повышается, будет ли потребление в период 1 увеличиваться, уменьшаться, или оставаться таким же?

б) Позволит (заставит) ли повышение процентной ставки потреблять больше или меньше в период 2?

в) Если доход нулевой в период 1, и 55 000 долл. в период 2, приведет ли повышение процентной ставки к большему, меньшему потреблению в период 1, или не произойдет изменений?

4.22. Пусть функция полезности потребителя имеет вид $U(c_1, c_2) = c_1c_2$, где $c_1 > 0$ — это потребление в период 1 и $c_2 > 0$ — это его потребление в период 2. Доход потребителя в первом периоде $I_1 = 33$, а во втором — $I_2 = 20$. Первоначальная доходность между периодами $r = 10\%$. Используя метод множителей Лагранжа, найдите равновесное потребление потребителя.

4.23. Рассмотрим экономику обмена с $\mathbb{R}^2$ в качестве пространства товаров, в которой потребители имеют следующие характеристики.

Потребитель 1. Начальный запас (1, 2), функция полезности $u_1(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Потребитель 2. Начальный запас (3, 4), функция полезности $u_2(x, y) = \min(x, y)$.

Потребитель 3. Начальный запас (1, 1), функция полезности $u_3(x, y) = ye^x$.

Найдите функцию избыточного спроса и равновесные цены для этой экономики.

4.24. Обязательно ли эффективная граница технологического множества замкнута?

4.25. Рассмотрим отношение предпочтения $\succcurlyeq$ на $\mathbb{R}^n_+$, задаваемое функцией полезности Кобба — Дугласа $u(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_2}$, где $0 < \alpha_j < 1$ при каждом j и $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$. Требуется выполнить следующие задания.

1. Показать, что предпочтение $\succcurlyeq$ является неоклассическим.
2. Найти функцию спроса для $\succcurlyeq$ и произвольного вектора $\boldsymbol{\omega}$ начальных запасов.

Ответы

Для нескольких задач данной главы приведем ответы.

4.1. 1. $\mathbf{S}_1(\mathbf{p}) = (1 - t, 1 - 1/t)$, $\mathbf{S}_2(\mathbf{p}) = \begin{cases} (-2\ln t, 1 - 1/t^2 \text{ при } t \geqslant 1, \\ (1 - t^2, 2\ln t) \text{ при } 0 < t < 1. \end{cases}$

$$2.\ \mathbf{D}_1(\mathbf{p}) = \begin{cases} \left(\dfrac{6t^2 - t - 2\ln t + 1}{3}, \dfrac{6t^2 - t - 2\ln t + 1}{3t^2}\right) & \text{при } t \geqslant 1, \\ \left(\dfrac{4t^2 - t - 2t^2\ln t + 3}{3}, \dfrac{4t^2 - t - 2t^2\ln t + 3}{3t^2}\right) & \text{при } 0 < t < 1; \end{cases}$$

$$\mathbf{D}_2(\mathbf{p}) = \begin{cases} \left(\dfrac{12t^2 - 4t - 2\ln t + 7}{9}, \dfrac{2(12t^2 - 4t - 2\ln t + 7)}{9t^2}\right) & \text{при } t \geqslant 1, \\ \left(\dfrac{10t^2 - 4t + 2t^2\ln t + 9}{9}, \dfrac{2(10t^2 - 4t + 2t^2\ln t + 9)}{9t^2}\right) & \text{при } 0 < t < 1. \end{cases}$$

$$3.\ \varsigma(\mathbf{p}) = \begin{cases} \left(\dfrac{30t^2 + 2t + 10\ln t - 26}{9}, \dfrac{30t^2 + 2t + 10\ln t - 26}{9t^2}\right) & \text{при } t \geqslant 1, \\ \left(\dfrac{31t^2 + 2t + 8t^2\ln t - 27}{9}, \dfrac{31t^2 + 2t + 8t^2\ln t - 27}{9t^2}\right) & \text{при } 0 < t < 1. \end{cases}$$

4. $t \approx 0{,}91208$; $\mathbf{p}_{\text{eq}} = p_1(1; 0{,}8319)$, $p_1 > 0$.

4.2. $\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \begin{cases} (-\ln(p_2/p_1),\ 1 - p_1/p_2), \text{ если } p_2/p_1 \geqslant e^{-a}, \\ (a,\ 1 - e^{-a}), \text{ если } p_2/p_1 < e^{-a}. \end{cases}$

4.17. $(4, 5)$.

4.18. $\mathbf{x}(\mathbf{p}) = \dfrac{p_1 + 2p_2}{p_1 + p_2}\left(\dfrac{p_2}{p_1}, \dfrac{p_1}{p_2}\right)$.

4.19. $\mathbf{x}(\mathbf{p}) = \dfrac{p_1 + 2p_2 + 3p_3}{p_1 + p_2 + p_3}(1, 1, 1)$.

4.23. $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{p}) = (3t - 2, (2 - 3t)/2)$, где $t = p_2/p_1$.

4.25. $\mathbf{x}(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})(\alpha_1/p_1, \alpha_2/p_2, \ldots, \alpha_n/p_n)$, где $(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{p}$ и $\boldsymbol{\omega}$.

Глава 5
ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В результате изучения главы 5 студент должен:

знать

- основные понятия и положения регрессионного анализа данных;
- теорему Гаусса — Маркова;

уметь

- строить эконометрические модели;
- анализировать имеющиеся данные с помощью эконометрических моделей;

владеть

- навыками проверки гипотез;
- основами эконометрического анализа.

5.1. Постановка задачи. Модель множественной линейной регрессии. Теорема Гаусса — Маркова

По определению, *регрессия* — это зависимость среднего значения случайной величины от некоторой другой величины или нескольких величин, или условное математическое ожидание $M(y|x) = f(x)$.

Таким образом, модель регрессии описывает вероятностное соотношение между *объясняющими переменными* (регрессорами, независимыми переменными) и *зависимой* (*результирующей*) *переменной*.

В регрессионных моделях зависимая (объясняемая) переменная y представляется в виде функции

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = f(x_1, x_2, ..., x_k, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_p),$$

где $x_1, x_2, ..., x_k$ — независимые (объясняющие) переменные; $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_p$ — параметры.

Естественным первым приближением для функции регрессии является ее линеаризация, и соответствующая модель называется *моделью линейной регрессии*. Предположим, что нашей задачей является подобрать («подогнать») функцию из параметрического семейства $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta})$, наилучшим образом описывающую зависимость y от $\mathbf{x}$, т.е. выбрать наилучшее значение параметра $\boldsymbol{\beta}$. Общая модель линейной регрессии, которая чаще всего используется на практике, выражает упрощенные, но довольно реалистические предположения о функциональном соотношении между регрессорами и объясняемой переменной. Основными гипотезами будут следующие.

1. Спецификация модели

$$y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + ... + в_k x_{tk} + \varepsilon_t,\ \ t = 1, 2, ..., n,$$

или в матричной форме

$$\mathbf{Y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\mathbf{Y}$ — вектор-столбец наблюдений размерности n; X — $(n \times k)$-матрица значений объясняющих переменных $(n > k)$; $\boldsymbol{\beta}$ — вектор-столбец коэффициентов регрессии размерности k; $\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор-столбец ошибок (случайных величин) размерности n:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

2. Матрица X составлена из известных коэффициентов (неслучайных величин) и имеет максимальный ранг $\operatorname{rank}(X) = k$. Другими словами, объясняющие переменные $x_1, x_2, ..., x_k$ детерминированы и столбцы матрицы X линейно независимы.

Существуют две возможные причины возникновения случайных ошибок ε_i:

1) рассматриваемая модель является упрощением действительности, и на самом деле есть и другие параметры, от которых зависит y, или эта зависимость может иметь другой вид;

2) ошибки измерения.

Таким образом, ε_i — это случайная величина с некоторой функцией распределения, которой соответствует функция распределения случайной величины y_i.

Основная цель — на основе наблюдений угадать, подобрать, подогнать процесс, который в действительности порождает наблюдаемые опытные данные. Будем строго различать (и обозначать разными буквами) случайные величины ошибки и наблюденные, или реализованные, реализовавшиеся, значения этих ошибок. Кроме того, разумеется, как и в статистике, будем различать и обозначать разными символами истинные неслучайные (и неизвестные нам) значения параметров случайных величин или случайных процессов, лежащих в основе данных, и их выборочные аналоги, оцененные нами по наблюдаемым данным и поэтому являющиеся случайными величинами.

В классической модели линейной регрессии, помимо предположения о спецификации модели накладываются дополнительные и довольно жесткие предположения о стохастической природе процесса.

3. Математическое ожидание вектора ошибок является нулевым вектором, $M(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$, а его матрица рассеяния, или матрица ковариации, является скалярной матрицей:

$$V(\boldsymbol{\varepsilon}) = M(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T) = \sigma^2 E_n.$$

Другими словами, ε_i некоррелированы, имеют нулевые средние и одну и ту же дисперсию σ^2: для любого $i = 1, 2, ..., n$ $M(\varepsilon_i) = 0$; $M(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$; для любых $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$ если $i \neq j$ то $M(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0$.

Часто добавляется еще условие $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. В этом случае модель называется нормальной, или классической нормальной, линейной регрессионной моделью (*classical normal linear regression model*). Тогда третье условие можно записать в виде $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 I_n)$, т.е. $\boldsymbol{\varepsilon}$ — нормально распределенный случайный вектор со средним 0 и матрицей ковариаций $\sigma^2 I_n$.

При построении регрессии y на x отклонения точек (x, y) от «подгоняемой» прямой должны быть сделаны насколько возможно малыми. Остается определить, какие отклонения следует брать: по оси Y, по оси X, «нормальные» отклонения, получаемые с помощью перпендикуляров, опускаемых из каждой точки на прямую, т.е. расстояния от точек до искомой прямой, или же отклонения, наименьшие в смысле минимизации еще каких-нибудь подходящих в этой ситуации функционалов. Поскольку рассматривается зависимость y от x, представляется естественным минимизировать сумму квадратов отклонений по оси Y, т.е. применить метод наименьших квадратов. Как будет видно в дальнейшем, именно это интуитивно принятое решение приводит к оптимальным в некотором смысле оценкам, а именно, к оценкам, имеющим наименьшую дисперсию среди всех линейных (по Y) несмещенных оценок.

Итак, целью метода наименьших квадратов (МНК), или *ordinary least squares* (*OLS*), является выбор вектора оценок $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, минимизирующего сумму квадратов остатков e_i, т.е. квадрат длины вектора $\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - X\hat{\boldsymbol{\beta}}$. Другими словами, минимизируется следующая функция:

$$ESS = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_{i1}\beta_1 - x_{i2}\beta_2 - \ldots - x_{ik}\beta_k)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \mathbf{e}^T\mathbf{e} \to \min.$$

Имеем

$$\mathbf{e}^T\mathbf{e} = (\mathbf{Y} - X\hat{\boldsymbol{\beta}})^T(\mathbf{Y} - X\hat{\boldsymbol{\beta}}) =$$
$$= \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T X\hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T X^T\mathbf{Y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T X^T X\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}^T X^T\mathbf{Y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T X^T X\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

(учитывалось, что $\mathbf{Y}^T X\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}^T X^T\mathbf{Y}$, потому что это скаляры и $(\mathbf{Y}^T X\hat{\boldsymbol{\beta}})^T = \hat{\boldsymbol{\beta}}^T X^T\mathbf{Y}$). Далее,

$$\frac{\partial \mathbf{e}^T\mathbf{e}}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} = -2X^T\mathbf{Y} + 2X^T X\hat{\boldsymbol{\beta}} = 0$$

($\hat{\boldsymbol{\beta}}^T X^T X = X^T X\hat{\boldsymbol{\beta}}$, так как $X^T X$ — симметричная матрица).

Если A — некоторая $(m \times n)$-матрица, то $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T A) = \mathrm{rank}(AA^T)$; $\mathrm{rank}(X) = k$, поэтому $\mathrm{rank}(X^T X) = k$, т.е. $X^T X$ обратима, поэтому

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}} = (X^T X)^{-1} X^T\mathbf{Y}.$$

Докажем, что вектор остатков $\mathbf{e}$ ортогонален всем независимым переменным $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (столбцам матрицы X). Действительно,

$$X^T\mathbf{e} = X^T(\mathbf{Y} - X\hat{\boldsymbol{\beta}}) = X^T(\mathbf{Y} - X(X^T X)^{-1} X^T\mathbf{Y} = 0,$$

т.е. вектор остатков $\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$ ортогонален подпространству π пространства $\mathbb{R}^n$, образованному величинами $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Таким образом, вектор $\hat{\mathbf{Y}} = X\hat{\boldsymbol{\beta}} \in \pi$ есть ортогональная проекция вектора $\mathbf{Y}$ на гиперплоскость π.

Заметим также, что сумма квадратов остатков

$$\mathbf{e}^T\mathbf{e} = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}^T X^T\mathbf{Y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T X^T X\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T(2X^T\mathbf{Y} - X^T X(X^T X)^{-1} X^T\mathbf{Y}) =$$
$$= \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T X^T\mathbf{Y}.$$

Значения объясняемой, или зависимой, переменной Y_i часто называют *наблюденными* значениями в отличие от тех значений $\hat{Y}_i$, которые получаются из уравнения регрессии

$$\hat{\mathbf{Y}} = X\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{OLS}}$$

и которые называют *предсказанными* по уравнению регрессии, независимо от того, строится ли регрессионная модель для предсказания или для объяснения зависимостей.

Для симметричных неотрицательно определенных матриц можно ввести отношение порядка $\geqslant$ ($>$).

Определение 5.1. Будем писать, что $A \geqslant 0$, если A неотрицательно определена, и $A > 0$, если A положительно определена. Будем писать, что $A \geqslant B$ ($A > B$), если матрица $A - B$ неотрицательно определена (положительно определена).

Утверждение 5.1. Если $A \geqslant B$, то $a_{ii} \geqslant b_{ii}$ для всех i.

► ***Доказательство.*** Для доказательства достаточно рассмотреть $x_i^T(A - B)x_i$, где $x_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, ..., \delta_{in})^T$, δ_{ij} — символ Кронекера, т.е.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Теорема 5.1 (Гаусса — Маркова). *Предположим, что*:

1) $\mathbf{X} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$;

2) X — *детерминированная* ($n \times k$)-*матрица, имеющая максимальный ранг* k*;*

3) $M(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$, $V(\boldsymbol{\varepsilon}) = M(\boldsymbol{\beta\beta}^T) = \sigma^2 E_n$.

Тогда оценка метода наименьших квадратов $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{OLS}} = (X^TX)^{-1}X^T\mathbf{Y}$ *является наиболее эффективной* (*в смысле наименьшей дисперсии*) *оценкой в классе линейных* (*по* $\mathbf{Y}$) *несмещенных оценок, или best linear unbiased estimator* (*BLUE*).

► ***Доказательство.*** 1. Проверим несмещенность МНК-оценки:

$$M(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{OLS}}) = M((X^TX)^{-1}X^T\mathbf{Y}) = (X^TX)^{-1}X^TM(X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = (X^TX)^{-1}X\boldsymbol{\beta} + 0 = \boldsymbol{\beta}.$$

Обозначим $A = (X^TX)^{-1}X^T$, тогда $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{OLS}} = A\mathbf{Y}$. Любую другую линейную оценку $\boldsymbol{\beta}$ можно, не умаляя общности, представить в виде $\boldsymbol{\beta} = (A + C)\mathbf{Y}$, где C — некая ($k \times n$)-матрица. Если оценка $\boldsymbol{\beta}$ несмещенная, то

$$\boldsymbol{\beta} = M(\boldsymbol{\beta}) = (A + C)M(\mathbf{Y}) = (A + C)X\boldsymbol{\beta} = (I + CX)\boldsymbol{\beta},$$

откуда следует, что $CX = 0$.

2. Вычислим матрицу ковариации $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{OLS}}$:

$$V(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{OLS}}) = V(A\mathbf{Y}) = AV(\mathbf{Y})A^T = AV(\boldsymbol{\varepsilon})A^T = \sigma^2 AI_nA^T =$$
$$= \sigma^2(X^TX)^{-1}X^TX(X^TX)^{-1} = \sigma^2(X^TX)^{-1}$$

(потому что X^TX — симметричная матрица).

3. Получаем

$$\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta} = (A + C)\mathbf{Y} - \boldsymbol{\beta} = (A + C)X\boldsymbol{\beta} + (A + C)\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta} =$$
$$= AX\boldsymbol{\beta} + CX\boldsymbol{\beta} + (A + C)\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta} = (A + C)\boldsymbol{\varepsilon},$$

так как $CX = 0$, $AX = E$.

Матрица ковариаций вектора $\mathbf{b}$ равна

$$V(\mathbf{b}) = M((\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta})(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta})^T) = M((A + C)\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}^T(A + C)^T) = (A + C)\sigma^2 I_n(A + C)^T =$$
$$= \sigma^2(AA^T + CA^T + AC^T + CC^T) =$$
$$= \sigma^2[(X^TX)^{-1}X^TX(X^TX)^{-1} + CX(X^TX)^{-1} + (X^TX)^{-1}X^TC^T + CC^T] =$$
$$= \sigma^2(X^TX)^{-1} + \sigma^2CC^T,$$

так как $CX = 0$, т.е. $V(\mathbf{b}) = V(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}) + \sigma^2CC^T$. Матрица CC^T, очевидно, неотрицательно определена: для любого вектора $\mathbf{U}$ имеет место

$$\mathbf{U}^TCC^T\mathbf{U} = (C^T\mathbf{U}, C^T\mathbf{U}) \geqslant 0.$$

Значит, $V(\mathbf{b}) \geqslant V(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}})$ (отношение порядка на множестве симметричных неотрицательно определенных матриц). Из данного неравенства следует соответствующее неравенство для дисперсий оценок коэффициентов регрессии $D(b_i) \geqslant D(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}})$ (так как i-й диагональный элемент матрицы ковариаций $V(\mathbf{b})$ равен дисперсии i-й компоненты вектора коэффициентов $\mathbf{b}$, и аналогично для вектора $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}$). ◀

5.2. Некоторые сведения из линейной алгебры и теории вероятностей

Для понимания следующих основных результатов, касающихся линейной регрессии, мы должны напомнить некоторые известные факты из линейной алгебры и теории вероятностей.

Утверждение 5.2. Симметричная $(n \times n)$-матрица A имеет n собственных чисел (некоторые из них могут совпадать), им соответствуют n собственных векторов, которые могут быть выбраны попарно ортогональными.

Определение 5.2. Матрица, столбцы которой составляют ортонормированную систему векторов, называется *ортогональной*.

Утверждение 5.3. Симметричная матрица A может быть приведена к диагональному виду при помощи ортогонального преобразования: $\Lambda = O^TAO$, где O — ортогональная матрица.

Определение 5.3. Квадратная $(n \times n)$-матрица A называется *неотрицательно определенной*, если для каждого вектора $\mathbf{x}$ выполняется неравенство $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} \geqslant 0$.

Определение 5.4. Матрица M называется *идемпотентной*, если она совпадает со своим квадратом.

Определение 5.5. Квадратная $(n \geqslant n)$-матрица A называется *положительно определенной*, если для каждого ненулевого вектора $\mathbf{x} \neq 0$ выполняется неравенство $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} > 0$.

Утверждение 5.4. Собственные числа идемпотентной матрицы могут принимать значение только 0 или 1.

► ***Доказательство.*** Пусть $\mathbf{x}$ — собственный вектор идемпотентной матрицы A, λ — соответствующее ему собственное число. Тогда $\lambda\mathbf{x} = A\mathbf{x} = A^2\mathbf{x} = A\lambda\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$, т.е. $\lambda - \lambda^2 = 0$. ◀

Утверждение 5.5. Ранг идемпотентной симметричной матрицы равен ее следу.

► ***Доказательство.*** Пусть A — симметричная идемпотентная матрица. Ее можно представить в виде $A = O\Lambda O^T$, где на диагонали Λ стоят нули и единицы (собственные числа матрицы A). Так как ортогональная матрица невырождена, $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\Lambda)$, но ранг Λ равен числу ненулевых элементов на ее главной диагонали, т.е. числу собственных чисел матрицы A, равных 1, т.е. следу матрицы Λ.

Но $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}(O\Lambda O^T) = \mathrm{tr}(OO^T\Lambda) = \mathrm{tr}\,\Lambda$, т.е. след A также равен следу Λ, или числу собственных чисел матрицы A, равных 1. ◄

Утверждение 5.6. Ортогональная матрица удовлетворяет соотношению $O^TO = I$.

Утверждение 5.7. Если O — ортогональная матрица, то $O^T = O^{-1}$.

Утверждение 5.8. Ортогональная матрица имеет определитель, равный +1 или –1.

Определение 5.6. Случайный вектор $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ называется *невырожденным нормальным* (*гауссовским*) случайным вектором, если плотность его распределения задается равенством $p(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-1/2\,(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, где $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$ — вектор, S — симметричная положительно определенная матрица.

Определение 5.7. Преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$ вида $\mathbf{Y} = B\mathrm{X} + \mathbf{l}$, являющееся композицией линейного преобразования B и параллельного переноса на вектор $\mathbf{l}$, называется *аффинным преобразованием.*

Определение 5.8. Нормальный вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$, у которого $\mathbf{m} = \mathbf{0}$, $\Sigma = E$, называется *стандартным нормальным вектором.*

Перечислим **свойства многомерного нормального распределения.**

1. Если $\mathbf{X} \sim N(\mathbf{m}, \Sigma)$, то $M(\mathbf{X}) = \mathbf{m}$, $V(\mathbf{X}) = \Sigma$.

2. Любой подвектор (т.е. вектор, составленный из некоторых компонент исходного вектора) нормального вектора также является нормальным вектором.

3. Пусть $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — пара независимых нормальных векторов. Тогда объединенный вектор $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}$ также является нормальным.

4. Если $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}$ — нормальный вектор и его компоненты $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ некоррелированы, то они независимы.

5. Пусть B: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$, B — его матрица, $\mathrm{rank}(B) = k$ и $\mathbf{l}$ — произвольный вектор в $\mathbb{R}^k$. Тогда если $\mathbf{X} \sim N(\mathbf{m}, \Sigma)$, то случайный вектор $\mathbf{Y} = B\mathrm{X} + \mathbf{l}$ является нормальным с параметрами $B\mathbf{m} + \mathbf{l}$ и $B\Sigma B^T$.

В частности:

а) линейная комбинация компонент нормального вектора есть гауссовская случайная величина;

б) ортогональное линейное преобразование стандартного нормального вектора есть стандартный нормальный вектор.

6. Любой нормальный вектор может быть получен аффинным преобразованием из стандартного нормального вектора и ортогональным аффинным преобразованием из вектора с независимыми компонентами.

► ***Доказательство.*** Пусть $\mathbf{X} \sim N(\mathbf{m}, \Sigma)$. Поскольку Σ симметрична и положительно определена, то существует ортогональная матрица P, такая что $\Lambda = P^T\Sigma P$. Вектор $\mathbf{S} = P^T\mathbf{X} - P^T\mathbf{m}$ является гауссовским по свойству 5, и по этому свойству $M(\mathbf{S}) = P^T\mathbf{m} - P^T\mathbf{m} = 0$, $V(\mathbf{S}) = P^T\Sigma(P^T)^T = \Lambda$.

Следовательно, компоненты вектора $\mathbf{S}$ некоррелированы, а тогда в силу свойства 4 и независимы.

Пусть $\Lambda^{1/2}$ — диагональная матрица, полученная из Λ извлечением квадратных корней из ее элементов, а $\boldsymbol{\varepsilon}$ — стандартный нормальный вектор. Тогда $\mathbf{X} = P\Sigma + \mathbf{m} = P\Lambda^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m}$, где P — ортогональная матрица; $\mathbf{S}$ — вектор, имеющий нулевое математическое ожидание и независимые компоненты; $\boldsymbol{\varepsilon} = \Lambda^{-1/2}\mathbf{S}$.

По свойству 5 вектор $\mathbf{Y}= P\Lambda^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m}$ имеет математическое ожидание $\mathbf{m}$ и матрицу ковариаций S, т.е. совпадает по распределению с вектором $\mathbf{X}$. ◄

7. Пусть $\boldsymbol{\varepsilon}$ — стандартный n-мерный нормальный вектор, $\mathbf{X} = A\boldsymbol{\varepsilon} + a$, $\mathbf{Y} = B\boldsymbol{\varepsilon} + b$, $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$, $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^q$. Тогда $\operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = AB^T$, в частности $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ независимы тогда и только тогда, когда $AB^T = O$.

8. **Лемма Фишера.** Пусть A — симметричная идемпотентная $(n \times n)$-матрица, $\operatorname{rank}(A) = r$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — стандартный n-мерный гауссовский вектор. Тогда случайная величина $\chi^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T A\boldsymbol{\varepsilon}$ имеет распределение $\chi^2(r)$.

► ***Доказательство.*** Матрицу A можно представить в виде $A = P^T\Lambda P$, где P — ортогональная матрица, Λ — диагональная матрица, на главной диагонали которой расположены единицы и нули, причем число единиц равно рангу матрицы A. Имеем $\chi^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T A\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^T P^T\Lambda P\boldsymbol{\varepsilon} = \Sigma^T\Lambda\mathbf{S}$, где вектор $\mathbf{S} = P\boldsymbol{\varepsilon}$ в силу свойства 5 является стандартным нормальным вектором. Отсюда следует, что χ^2 представляет собой сумму квадратов независимых стандартных нормальных величин в количестве, равном рангу матрицы A. ◄

9. Пусть $\mathbf{X} \sim N(\mathbf{m}, \Sigma)$. Тогда случайная величина $(\mathbf{X} - \mathbf{m})^T\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}(\mathbf{X} - \mathbf{m})$ имеет распределение $\chi^2(n)$. (Этот результат также называется леммой Фишера, как и еще ряд результатов.)

► ***Доказательство.*** $\boldsymbol{\varepsilon}$ — симметрична и положительно определена, поэтому существует ортогональная матрица P, такая что $\Lambda = P^T\boldsymbol{\varepsilon}P$, где Λ — диагональная матрица и все ее диагональные элементы $\lambda_i > 0$. Тогда по свойству 5 вектор $\mathbf{S} = P^T\mathbf{X} - P^T\mathbf{m}$ является нормальным, причем $M(\mathbf{S}) = 0$, $V(\mathbf{S}) = \Lambda$. Поэтому $\mathbf{X} = P\Sigma + \mathbf{m}$, $\mathbf{X} - \mathbf{m} = P\Sigma = P\Lambda^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}$, где $\boldsymbol{\varepsilon} = \Lambda^{-1/2}\mathbf{S}$ — стандартный нормальный вектор (так как $\mathbf{S}$ — нормальный вектор с независимыми компонентами). Следовательно,

$$(\mathbf{X} - \mathbf{m})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{X} - \mathbf{m}) = \boldsymbol{\varepsilon}^T\Lambda^{1/2}P^T\Sigma^{-1}P\Lambda^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon},\ \Sigma = P\Lambda P^T,\ \Sigma^{-1} = P\Lambda^{-1}P^T,$$

поэтому

$$(\mathbf{X} - \mathbf{m})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{X} - \mathbf{m}) = \boldsymbol{\varepsilon}T\Lambda^{1/2}P^TP\Lambda^{-1}P^TP\text{Л}^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}T\boldsymbol{\varepsilon} \sim \chi^2(n). \blacktriangleleft$$

5.3. Дисперсионный анализ многомерной регрессии. Коэффициент детерминации

Среднее значение объясняемой переменной будем обозначать $\overline{Y}$, таким образом,

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Рассмотрим вариацию (разброс) значений объясняемой переменной Y_i вокруг среднего значения:

$$\mathrm{var}(Y) = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 = TSS.$$

Назовем эту величину *TSS* (*total sum of squares*), или полной суммой квадратов. Разобьем эту вариацию на две части: объясненную регрессионным уравнением и не объясненную (т.е. связанную с ошибками ε_i). Для любого значения наблюденной величины

$$Y_i - \overline{Y} = (Y_i - \hat{Y}_i) + (\hat{Y}_i - \overline{Y}).$$

Следовательно,

$$\mathrm{var}(Y) = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)(\hat{Y}_i - \overline{Y}) + \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2,$$

или в векторной форме

$$\mathrm{var}(\mathbf{Y}) = (\mathbf{Y} - \overline{Y}\mathbf{S})^T(\mathbf{Y} - \overline{Y}\mathbf{S}) =$$
$$= (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})^T(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) + (\hat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{S})^T(\hat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{S}) + 2(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})^T(\hat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{S}).$$

Если вектор $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ принадлежит линейной оболочке векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_k$, то $\overline{e} = \frac{1}{n}\mathbf{e}^T\mathbf{S} = 0$, потому что $X\mathbf{e} = \mathbf{e}X = \mathbf{0}$ $(\mathbf{e} \perp \pi)$. Тогда

$$2(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})^T(\hat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{S}) = 2\mathbf{e}^T(\hat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{S}) = 2\mathbf{e}^T X\hat{\boldsymbol{\beta}} - 2\overline{Y}\mathbf{e}^T\mathbf{S} = 0,$$

т.е. вариацию зависимой переменной

$$\mathrm{var}(\mathbf{Y}) = \underbrace{\|\mathbf{Y} - \overline{Y}\mathbf{S}\|^2}_{TSS} = \underbrace{\|\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}\|^2}_{ESS} + \underbrace{\|\hat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{S}\|^2}_{TSS}$$

представили в виде суммы двух частей: объясненной регрессионным уравнением и не объясненной им (т.е. связанной с ошибками). Записывая последнее равенство в отклонениях $\mathbf{y} = \mathbf{Y} - \overline{Y}\mathbf{S}, \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\mathbf{S}$, опять получаем теорему Пифагора: $\mathrm{var}(\mathbf{Y}) = \mathbf{y}^T\mathbf{y} = \mathbf{e}^T\mathbf{e} + \hat{\mathbf{y}}^T\hat{\mathbf{y}}$.

Слагаемое, которое представляет собой часть вариации объясняемой переменной, объясненную регрессионным уравнением, называют *RSS* (*regression sum of squares*):

$$RSS = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2,$$

а слагаемое, которое представляет собой часть вариации объясняемой переменной, не объясненную регрессионным уравнением, называют *ESS* (*error sum of squares*)

$$ESS = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2.$$

Таким образом,

$$TSS = RSS + ESS.$$

Определение 5.9. *Коэффициентом детерминации*, или долей объясненной вариации, называется величина

$$R^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{\mathbf{e}^T\mathbf{e}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}} = \frac{\hat{\mathbf{y}}^T\hat{\mathbf{y}}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}} = \frac{RSS}{TSS}.$$

Заметим, что коэффициент R^2 корректно определен, только если $\mathbf{S} \in \pi$, т.е. если константа включена в уравнение регрессии. Только в этом случае имеет смысл рассматривать статистику R^2. В силу определения R^2 принимает значения из промежутка $[0; 1]$. Коэффициент детерминации показывает качество подгонки регрессионной модели к наблюдаемым значениям Y_i.

Если $R^2 = 0$, то регрессия $\mathbf{Y}$ на $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_k$ не улучшает качество предсказания Y_t по сравнению с тривиальным предсказанием $\hat{Y}_t = \overline{Y}$.

Значение $R^2 = 1$ означает точную подгонку: все $e_t = 0$, т.е. все точки наблюдения лежат на регрессионной плоскости.

Попыткой устранить эффект, связанный с ростом R^2 при возрастании числа регрессоров, является коррекция R^2 на это число. *Скорректированным* R^2 называется величина $R^2_{adj} = 1 - \dfrac{\mathbf{e}^T\mathbf{e}/(n-k)}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}/(n-1)}$, здесь числитель — несмещенная оценка дисперсии ошибок, а знаменатель — несмещенная оценка дисперсии $\mathbf{Y}$.

R^2_{adj} имеет следующие свойства:

1) $R^2_{adj} = 1 - (1 - R^2)\dfrac{n-1}{n-k}$;

2) $R^2 \geqslant R^2_{adj}$ при $k > 1$;

3) $R^2_{adj} \leqslant 1$, но может принимать значения меньше нуля.

В определенном смысле использование R^2_{adj} более корректно для сравнения регрессий при изменении количества регрессоров.

Замечание 5.2. Разберемся, что лучше: $\mathbf{Y}$ или $\hat{\mathbf{Y}}$. Имеем

$$\begin{cases} V(\mathbf{Y}) = V(X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = V(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 I_n, \\ V(\hat{\mathbf{Y}}) = V(N\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 NN^T = \sigma^2 N. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$V(\mathbf{Y}) - V(\hat{\mathbf{Y}}) = \sigma^2(I - N) = \sigma^2 M.$$

Матрица M — идемпотентна, следовательно, все ее собственные числа равны нулю или единице; кроме того, M — неотрицательно определена, следовательно, $V(\mathbf{Y}) \geqslant V(\hat{\mathbf{Y}})$ (отношение порядка для неотрицательно определенных матриц).

Тогда $V(Y_t) \geqslant V(\hat{Y}_t)$, так как это диагональные элементы соответствующих ковариационных матриц. *В качестве значения зависимой переменной часто лучше брать предсказанное по модели значение, чем фактически наблюдаемое.*

5.4. Проверка гипотез

Распределение суммы квадратов остатков. Имеем следующее:

• оценка метода наименьших квадратов $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}} = (X^TX)^{-1}X^T\mathbf{Y}$;

• вектор прогнозных значений: $\hat{\mathbf{Y}} = X\hat{\boldsymbol{\beta}} = X(X^TX)^{-1}X^T\mathbf{Y} = N\mathbf{Y}$, где $N = X(X^TX)^{-1}X^T$;

• вектор остатков регрессии

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = (I - N)\mathbf{Y} = M\mathbf{Y}, \qquad (5.1)$$

где $M = E - N$.

Проверим симметричность и идемпотентность матриц M и N, т.е. то, что они являются проекторами (с геометрической точки зрения идемпотентная матрица соответствует оператору проецирования на векторное пространство):

$$\begin{gathered}
N^T = (X(X^TX)^{-1}X^T)^T = X(X^TX)^{-1}X^T = N; \\
NX = X(X^TX)^{-1}X^TX = X; \\
\forall \mathbf{Y}:\ X^T(\mathbf{Y} - N\mathbf{Y}) = X^T(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) = X^T(\mathbf{Y} - X(X^TX)^{-1}X^T\mathbf{Y}) = 0; \\
N^2 = X(X^TX)^{-1}X^TX(X^TX)^{-1}X^T = X(X^TX)^{-1}X^T = N; \\
M^T = (E - N)^T = E - N = M; \\
MX = (E - N)X = O; \\
M^2 = (E - N)(E - N) = E - N - N + N^2 = E - N = M.
\end{gathered} \qquad (5.2)$$

Таким образом, N — матрица ортогонального проектирования на пространство π, порожденное векторами $\mathbf{x}_i$; M — матрица ортогонального проектирования на $\pi^{\perp}$.

Вычислим математическое ожидание и матрицу ковариаций вектора остатков $\mathbf{e}$:

$$\begin{gathered}
M(\mathbf{e}) = M(M\mathrm{Y}) = MM(\mathbf{Y}) = MX\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}; \\
V(\mathbf{e}) = V(M\mathrm{Y}) = MV(\mathbf{Y})M^T = M\sigma^2EM^T = \sigma^2M.
\end{gathered} \qquad (5.3)$$

Сумма квадратов остатков $\sum \mathbf{e}_t^2 = \mathbf{e}^T\mathbf{e}$ является естественным кандидатом на оценку дисперсии ошибок σ^2, очевидно, с некоторым поправочным коэффициентом, зависящим от числа степеней свободы.

Проверим, будет ли такая оценка несмещенной.

Так как $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, то

$$\mathrm{tr}(N) = \mathrm{tr}(X(X^TX)^{-1}X^T) = \mathrm{tr}(X^TX(X^TX)^{-1}) = \mathrm{tr}(E_k) = k,$$

а тогда, поскольку $\mathrm{tr}(A - B) = \mathrm{tr}(A) - \mathrm{tr}(B)$, используя формулу (5.3) получаем

$$M(\mathbf{e}T\mathbf{e}) = \mathrm{tr}\,V(\mathbf{e}) = \sigma^2\mathrm{tr}(M) = \sigma^2\mathrm{tr}(E_n - N) = \sigma^2(n - k).$$

Следовательно, $M\left(\dfrac{\mathbf{e}^T\mathbf{e}}{n-k}\right) = \sigma^2$, т.е. $s^2 = \dfrac{\mathbf{e}^T\mathbf{e}}{n-k} = \dfrac{\sum \mathbf{e}_t^2}{n-k}$ — несмещенная оценка дисперсии ошибок σ^2.

По формулам (5.1) и (5.2) имеем

$$\mathbf{e} = M\mathrm{Y} = M(X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = M\mathrm{e}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{e} = M\boldsymbol{\varepsilon}. \qquad (5.4)$$

Ранг идемпотентной симметричной матрицы равен ее следу (предложение 5.4), поэтому

$$\mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(E_n - N) = \mathrm{tr}(E_n - N) = n - k.$$

Тогда $\frac{s^2}{\sigma^2}(n-k) = \frac{\mathbf{e}^T\mathbf{e}}{\sigma^2} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^T M^T M\boldsymbol{\varepsilon}}{\sigma^2} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^T M\boldsymbol{\varepsilon}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$ по лемме Фишера (свойство 8).

Независимость оценок $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ и $\mathbf{s}^2$. Запишем выражение оценки метода наименьших квадратов в следующем виде:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}} = (X^TX)^{-1}X^T(X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\beta} + (X^TX)^{-1}X^T\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\beta} + A\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{5.5}$$

где $A = (X^TX)^{-1}X^T$.

Сравнивая формулы (5.4) и (5.5), видим, что случайные векторы $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ и $\mathbf{e}$ имеют совместное многомерное нормальное распределение по свойству 5, поэтому чтобы доказать их независимость, достаточно доказать их некоррелируемость по свойству 4, а именно, что $AM = \mathbf{0}$ (свойство 7).

Имеем

$$AM^T = AM = (X^TX)^{-1}X^T(E - X(X^TX)^{-1}X^T) =$$
$$= (X^TX)^{-1}X^T - (X^TX)^{-1}X^TX(X^TX)^{-1}X^T = 0,$$

поэтому (так как $M(\mathbf{e}) = 0$)

$$\mathrm{cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{e}) = M((\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})\mathbf{e}^T) = M(A\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T M) = \sigma^2 AM = 0.$$

Так как s^2 является функцией от $\mathbf{e}$, то $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ и s^2 тоже независимы.

Проверка гипотезы H_0: $\beta_i = \beta_{i0}$ против альтернативной гипотезы H_1: $\beta_i \neq \beta_{i0}$.

Известно следующее.

1. $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}} = (X^TX)^{-1}X^T\mathbf{Y}$, $M(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}) = \boldsymbol{\beta}$, $V(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}) = \sigma^2(X^TX)^{-1}$ (см. теорему Гаусса — Маркова), т.е. $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}} - \boldsymbol{\beta} \sim N(0, \sigma^2(X^TX)^{-1})$, или $\hat{\beta}_{\mathrm{OLS},\,i} - \beta_i \sim N(0, \sigma^2_{\hat{\beta}_i})$, где $\sigma^2_{\hat{\beta}_i} = \sigma^2 q_{ii}$, q_{ii} — i-й диагональный элемент матрицы $(X^TX)^{-1.}$ В качестве оценки дисперсии $\hat{\beta}_{\mathrm{OLS},\,i}$ возьмем $\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_i} = \hat{\sigma}^2 q_{ii} = s^2 q_{ii}$.

2. $\frac{s^2}{\sigma^2} \sim \frac{1}{n-k}\chi^2(n-k)$.

3. Оценки $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}$ и s^2 независимы. Поэтому

$$t = \frac{\hat{\beta}_{\mathrm{OLS},i} - \beta_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} = \frac{(\hat{\beta}_{\mathrm{OLS},i} - \beta_i)/\sigma_{\hat{\beta}_i}}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}/\sigma_{\hat{\beta}_i}} = \frac{(\hat{\beta}_{\mathrm{OLS},i} - \beta_i)/\sigma_{\hat{\beta}_i}}{s\sqrt{q_{ii}}\big/(\sigma\sqrt{q_{ii}})} =$$
$$= \frac{(\hat{\beta}_{\mathrm{OLS},i} - \beta_i)/\sigma_{\hat{\beta}_i}}{s/\sigma} \sim t(n-k).$$

Таким образом, $[\hat{\beta}_{\mathrm{OLS},\,i} - t_c\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}; \hat{\beta}_{\mathrm{OLS},\,i} + t_c\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}]$ — 95%-ный *доверительный интервал* для истинного значения коэффициента β_i, где t_c _ двусторонняя 95%-ная квантиль распределения Стьюдента с $(n-k)$ степенями свободы.

Для тестирования нулевой гипотезы H_0: $\beta_i = \beta_{i0}$ можно также применить t-статистику, а именно, нулевая гипотеза отклоняется на 95%-ном доверительном уровне, если $|t| > t_c(95\%, n-k)$.

Проверка гипотезы H_0: $\beta_2 = \beta_3 = ... = \beta_k = 0$ против альтернативы H_1: неверно, что выполнено H_0.

Пусть в число регрессоров входит константа (свободный член): $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{t_2} + \beta_3 X_{t_3} + ... + \beta_k X_{t_k} + \varepsilon_i$.

Рассмотрим статистику

$$F=\frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-k}{k-1}=\frac{RSS/(k-1)}{ESS/(n-k)}=\frac{\left(\sum\hat{y}_t^2/(k-1)\right)/\sigma^2}{\left(\sum e_t^2/(n-k)\right)/\sigma^2}=\frac{\left(\sum\hat{y}_t^2/\sigma^2\right)/(k-1)}{s^2/\sigma^2},$$

где $\hat{y}_t=\hat{Y}_t-\overline{Y}$.

Во-первых, известно, что знаменатель имеет распределение $\frac{1}{n-k}\chi^2(n-k)$.

Во-вторых, покажем, что числитель имеет распределение $\frac{1}{k-1}\chi^2(k-1)$.

Заметим, что:

а) $\hat{\mathbf{Y}}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\overset{(a)}{=}N\mathbf{Y}$, где $N=X(X^TX)^{-1}X^T$ — оператор ортогонального проектирования на подпространство р, порожденное векторами $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_k$. Операцию взятия отклонения от среднего $y=Y-\overline{Y}$ можно записать в матричной форме:

$$y=\mathbf{Y}-\overline{\mathbf{Y}}=\mathbf{Y}-\mathbf{S}\left(\frac{1}{n}\sum Y_i\right)=\mathbf{Y}-\frac{1}{n}\mathbf{S}\mathbf{S}^T\mathbf{Y}=(I-P)\mathbf{Y},$$

где $P=\frac{1}{n}\mathbf{S}\mathbf{S}^T$ — $(n\times n)$-матрица, $\mathbf{S}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, т.е. $P_{ij}=\frac{1}{n}$. Имеем $\forall\mathbf{Y}$

$$(\mathbf{Y}-P\mathbf{Y})^T\mathbf{S}=n\overline{\mathbf{Y}}-\overline{\mathbf{Y}}\mathbf{S}^T\mathbf{S}=n\overline{\mathbf{Y}}-n\overline{\mathbf{Y}}=0,$$

так как $\overline{\mathbf{Y}}\mathbf{S}^T\mathbf{S}=\mathbf{Y}^T\frac{1}{n}\mathbf{S}\mathbf{S}^T\mathbf{S}=\mathbf{Y}^T\mathbf{S}=n\overline{\mathbf{Y}}$. Таким образом P — ортогональный проектор на вектор $\mathbf{S}$;

б) $P\mathbf{S}=\mathbf{S}$. Так как $\mathbf{S}\in\pi$, то $PN\overset{(b)}{=}P$, т.е. последовательное ортогональное проектирование $\mathbf{Y}$ на π, а потом на $\mathbf{S}$ совпадает с ортогональным проектированием $\mathbf{Y}$ на $\mathbf{S}$ (теорема о трех перпендикулярах);

в) имеем $\overline{\hat{\mathbf{Y}}}\mathbf{S}=P\hat{\mathbf{Y}}\overset{(a)}{=}PN\mathbf{Y}\overset{(b)}{=}P\mathbf{Y}\overset{(c)}{=}\overline{\mathbf{Y}}\mathbf{S}$, тогда

$$\hat{y}=\hat{\mathbf{Y}}-\overline{\hat{\mathbf{Y}}}\mathbf{S}=\hat{\mathbf{Y}}-\overline{\mathbf{Y}}\mathbf{S}\overset{(a)(c)}{=}(N-P)\mathbf{Y}=(N-P)(X\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon})=x\boldsymbol{\beta}+(N-P)\boldsymbol{\varepsilon}$$

($NX=X$, $PX=\mathbf{S}\overline{\mathbf{X}}$, где $\overline{\mathbf{X}}$ — вектор-строка, i-я компонента которого равна среднему значению элементов i-й строки матрицы X, поэтому $(N-P)X=x$ — $(n\times k)$-матрица с нулевым первым столбцом).

Поэтому если гипотеза H_0 верна, то $x\boldsymbol{\beta}=0$ и $\hat{\mathbf{y}}=(N-P)\boldsymbol{\varepsilon}$.

Матрица $(N-P)$ симметричная и идемпотентная:

$$(N-P)^2=N^2-NP-PN+P^2=N-NP-P+P=N-N^TP^T=$$
$$=N-(PN)^T=N-P^T=N-P,$$

поэтому $\operatorname{rank}(N-P)=\operatorname{tr}(N-P)=\operatorname{tr}(N)-\operatorname{tr}(P)=k-1$.

Следовательно, по свойству 8 (лемма Фишера)

$$\frac{\sum\hat{\mathbf{y}}_t^2}{\sigma^2}=\frac{\hat{\mathbf{y}}^T\hat{\mathbf{y}}}{\sigma^2}=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^T(N-P)^T(N-P)\boldsymbol{\varepsilon}}{\sigma^2}=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^T(N-P)\boldsymbol{\varepsilon}}{\sigma^2}\sim\chi^2(k-1).$$

Поскольку $\hat{\boldsymbol\beta}_{\text{OLS}}$ и $\mathbf{e}$ независимы, а значит, $\hat{\mathbf{y}}$ и $\mathbf{e}$ независимы, то статистика F имеет распределение Фишера:

$$F = \frac{\sum \hat{\mathbf{y}}_t^2 / (k-1)}{\sum e_t^2 / (n-k)} \approx F(k-1, n-k).$$

Гипотеза H_0 отвергается на 95%-ном доверительном уровне, если $F > F_c$, где F_c — односторонняя 95%-ная квантиль распределения Фишера $F(k-1, n-k)$.

Проверка линейного ограничения общего вида. Пусть нулевая гипотеза имеет вид общего линейного ограничения H_0: $H\boldsymbol\beta = \mathbf{r}$, где H — $(q\times k)$-матрица; $\boldsymbol\beta$ — вектор коэффициентов размерности k; $\mathbf{r}$ — вектор ограничений размерности q, $q \leqslant k$ (число ограничений не превосходит числа параметров), и ограничения линейно независимы, т.е. $\operatorname{rank}(H) = q$.

Так как $\hat{\boldsymbol\beta}_{\text{OLS}} \sim N(\boldsymbol\beta, \sigma^2(X^TX)^{-1})$ по свойству 5, то $H\hat{\boldsymbol\beta} - \mathbf{r} \sim N(H\boldsymbol\beta - \mathbf{r}, \Sigma)$, где Σ — $(q\times q)$-матрица, $\Sigma = V(H\hat{\boldsymbol\beta} - \mathbf{r}) = V(H\hat{\boldsymbol\beta}) = HV(\hat{\boldsymbol\beta})H^T = \sigma^2 H(X^TX)^{-1}H^T$.

Другими словами, $H\hat{\boldsymbol\beta} - \mathbf{r} \sim N(H\boldsymbol\beta - \mathbf{r}, \sigma^2 H(X^TX)^{-1}H^T)$.

По свойству 9 (также лемма Фишера):

$$\frac{1}{\sigma^2}(H\hat{\boldsymbol\beta} - \mathbf{r} - H\boldsymbol\beta + \mathbf{r})^T[H(X^TX)^{-1}H^T]^{-1}(H\hat{\boldsymbol\beta} - \mathbf{r} - H\boldsymbol\beta + \mathbf{r}) \sim \chi^2(q).$$

Если нулевая гипотеза верна, то

$$\frac{1}{\sigma^2}(H\hat{\boldsymbol\beta} - \mathbf{r})^T[H(X^TX)^{-1}H^T]^{-1}(H\hat{\boldsymbol\beta} - \mathbf{r}) \sim \chi^2(q).$$

Поскольку $\hat{\boldsymbol\beta}$ и $\mathbf{e}$ независимы, а $\dfrac{\mathbf{e}^T\mathbf{e}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$, то

$$F = \frac{(H\hat{\boldsymbol\beta} - \mathbf{r})^T[H(X^TX)^{-1}H^T]^{-1}(H\hat{\boldsymbol\beta} - \mathbf{r})/q}{\mathbf{e}^T\mathbf{e}/(n-k)} \sim F(q, n-k). \tag{5.6}$$

Другими словами, если нулевая гипотеза H_0: $H\boldsymbol\beta - \mathbf{r} = 0$ верна, то с вероятностью 0,95 статистика F меньше, чем $F_c(q, n-k)$, где $F_c(q, n-k)$ — 95%-ная квантиль распределения Фишера $F(q, n-k)$.

Не делая никаких предположений относительно гипотезы H_0, вместо статистики (5.6) исходим:

1) из независимости $\hat{\boldsymbol\beta}$ и $\mathbf{e}$;

2) того, что $\dfrac{\mathbf{e}^T\mathbf{e}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$;

3) свойства 9 (леммы Фишера),

тогда получаем

$$F = \frac{(\hat{\boldsymbol\beta} - \boldsymbol\beta)^T H^T[H(X^TX)^{-1}H^T]^{-1}H(\hat{\boldsymbol\beta} - \boldsymbol\beta)/q}{\mathbf{e}^T\mathbf{e}/(n-k)} \sim F(q, n-k). \tag{5.7}$$

Частный случай общей линейной гипотезы. Рассмотрим случай общей линейной гипотезы $H\boldsymbol\beta = \mathbf{r}$, когда нулевая гипотеза имеет вид H_0: $\beta_{k-q+1} = \beta_{k-q+2} = \ldots = \beta_k = 0$. Все матрицы с размером k по одной из сторон разобьем на блоки со сторонами $k-q$ и q: $H = (O\ E_q)$; $\hat{\boldsymbol\beta} = \begin{pmatrix}\mathbf{b}_1\\ \mathbf{b}_2\end{pmatrix}$; $\boldsymbol\beta = \begin{pmatrix}\boldsymbol\beta_1\\ \boldsymbol\beta_2\end{pmatrix}$; $X = (X_1\ X_2)$, тогда $H\hat{\boldsymbol\beta} = (O\ E_q)\begin{pmatrix}\mathbf{b}_1\\ \mathbf{b}_2\end{pmatrix} = \mathbf{b}_2$, $X\hat{\boldsymbol\beta} = X_1\mathbf{b}_1 + X_2\mathbf{b}_2$, где матрица X_1 имеет размер $n\times(k-q)$, матрица X_2 — размер $n\times q$, векторы $\mathbf{b}_1$, $\boldsymbol\beta_1$ — размер $k-q$, векторы $\mathbf{b}_2$, $\boldsymbol\beta_2$ — размер q. Обозначим:

$$Q = X^T X = \begin{pmatrix}X_1^T\\ X_2^T\end{pmatrix}(X_1\ X_2) = \begin{pmatrix}X_1^T X_1 & X_1^T X_2\\ X_2^T X_1 & X_2^{\mathrm{T}} X_2^T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{21} & Q_{22}\end{pmatrix};$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix}Q^{11} & Q^{12}\\ Q^{21} & Q^{22}\end{pmatrix}$$

(известно, что $(Q^{22})^{-1} = Q_{22} - Q_{21}Q_{11}^{-1}Q_{12}$)

Числитель дроби в выражении (5.7), при условии что верна нулевая гипотеза H_0: $\beta_2 = 0$, имеет вид

$$(\hat{\boldsymbol\beta}-\boldsymbol\beta)^T\begin{pmatrix}O\\ E_q\end{pmatrix}\left[(O\ E_q)Q^{-1}\begin{pmatrix}O\\ E_q\end{pmatrix}\right]^{-1}(O\ E_q)(\hat{\boldsymbol\beta}-\boldsymbol\beta) = \mathbf{b}_2^T Q_{22}^{-1}\mathbf{b}_2 =$$
$$= \mathbf{b}_2^T(Q_{22} - Q_{21}Q_{11}^{-1}Q_{12})\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2^T[X_2^T X_2 - X_2^T X_1(X_1^T X_1)^{-1}X_1^T X_2]\mathbf{b}_2 =$$
$$= \mathbf{b}_2^T X_2^T[E_n - X_1(X_1^T X_1)^{-1}X_1^T]X_2\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2^T X_2^T M_1 X_2\mathbf{b}_2, \qquad (5.8)$$

где $M_1 = E_n - X_1(X_1^TX_1)^{-1}X_1^T$ — матрица ортогонального проектирования на $\pi_1^\perp$ — ортогональное дополнение к π_1 (пространству, порожденному первыми $k-q$ столбцами матрицы X_1) в $\mathbb{R}^n$. Действительно,

$$M_1X_1 = IX_1 - X_1(X_1^TX_1)^{-1}X_1^TX_1 = O,$$

а любой вектор, ортогональный X_1, т.е. такой, что $X_1^T\mathbf{Y} = \mathbf{0}$, не изменяется матрицей M_1:

$$M_1\mathbf{Y} = E\mathbf{Y} - X_1(X_1^TX_1)^{-1}X_1^T\mathbf{Y} = \mathbf{Y}.$$

Обозначим: $\mathbf{e}^*$ — вектор остатков «короткой» регрессии (только на X_1), $\mathbf{e}$ — вектор остатков «длинной» регрессии (на $X = (X_1\ X_2)$). Тогда $M_1X_1\mathbf{b}_1 = 0$, так как M_1 — проектор на подпространство, ортогональное X_1, и $\mathbf{e}^* = M_1\mathbf{Y} = M_1(X_1\mathbf{b}_1 + X_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{e}) = M_1X_1\mathbf{b}_1 + M_1X_2\mathbf{b}_2 + M_1\mathbf{e} = M_1X_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{e}$, где $M_1\mathbf{e} = \mathbf{e}$, так как $\mathbf{e}$ ортогонален X_1 и X_2. Следовательно, так как M_1 — симметричная идемпотентная матрица, то

$$\mathbf{e}^{*T}\mathbf{e}^* = (\mathbf{e} + M_1X_2\mathbf{b}_2)^T(\mathbf{e} + M_1X_2\mathbf{b}_2) =$$
$$= \mathbf{e}^T\mathbf{e} + \mathbf{b}_2^TX_2^TM_1X_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{e}^TM_1X_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_2^TX_2^TM_1\mathbf{e}.$$

Два последних слагаемых здесь равны нулю, так как $M_1\mathbf{e} = \mathbf{e}$, $X_2^T\mathbf{e} = \mathbf{e}^TX_2 = 0$ (остатки ортогональны регрессорам). Таким образом,

$$\mathbf{e}^{*T}\mathbf{e}^* - \mathbf{e}^T\mathbf{e} = \mathbf{b}_2^TX_2^TM_1X_2\mathbf{b}_2. \qquad (5.9)$$

Полученное выражение (5.9) совпадает с выражением (5.8), поэтому статистику F из формулы (5.7) в случае выполнения гипотезы H_0 можно записать как

$$F = \frac{(\mathbf{e}^{*T}\mathbf{e}^* - \mathbf{e}^T\mathbf{e})/q}{\mathbf{e}^T\mathbf{e}/(n-k)} = \frac{(ESS_R - ESS_{UR})/q}{ESS_{UR}/(n-k)} \sim F(q, n-k), \qquad (5.10)$$

где ESS_R — сумма квадратов остатков «короткой» регрессии (*restricted*); ESS_{UR} — сумма квадратов остатков «длинной» регрессии (*unrestricted*). Таким образом,

$$F = \frac{(RSS_{UR} - RSS_R)/q}{(TSS - RSS_{UR})/(n-k)} = \frac{(R^2_{UR} - R^2_R)/q}{(1 - R^2_{UR})/(n-k)} \sim F(q, n-k), \quad (5.11)$$

где R^2_R, R^2_{UR} — коэффициенты детерминации для «короткой» и «длинной» регрессий.

Замечание 5.1. Данные представления F-статистики в формах (5.10), (5.11) справедливы и в общем случае произвольного линейного ограничения $H\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$. Тогда метод наименьших квадратов для «короткой» регрессии состоит в минимизации функции ESS при условии $H\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$.

В качестве «длинной» регрессии выступает регрессия без ограничений на параметры $\boldsymbol{\beta}$. Линейной заменой регрессоров общий случай сводится к рассмотренному случаю линейного ограничения вида $\beta_{k-q+1} = \beta_{k-q+2} = \ldots = \beta_k = 0$. Как и в частном случае, матрицы с размером k по одной из сторон разобьем на блоки со сторонами $k - q$ и q:

$$\underset{q\times k}{H} = \begin{pmatrix} \underset{q\times(k-q)}{H_1} & \underset{q\times q}{H_2} \end{pmatrix}; \ \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{pmatrix}\begin{matrix} {\scriptstyle k-q} \\ {\scriptstyle q} \end{matrix}; \ \underset{n\times k}{X} = \begin{pmatrix} \underset{n\times(k-q)}{X_1} & \underset{n\times q}{X_2} \end{pmatrix}.$$

Матрицы имеют размер: H — $q\times k$, H_1 — $q\times(k-q)$, H_2 — $q\times q$, X — $n\times k$, X_1 — $n\times(k-q)$, X_2 — $n\times q$; векторы: $\boldsymbol{\beta}$ — k, $\boldsymbol{\beta}_1$ — $(k-q)$, $\boldsymbol{\beta}_2$ — q. Не умаляя общности, будем считать, что $\operatorname{rank}(H_2) = q$ (иначе переставим столбцы матрицы H). Тогда

$$H\boldsymbol{\beta} = H_1\boldsymbol{\beta}_1 + H_2\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{r};$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = H_2^{-1}(\mathbf{r} - H_1\boldsymbol{\beta}_1).$$

Введем новые переменные:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \boldsymbol{\beta}_1, \\ \mathbf{u}_2 = \boldsymbol{\beta}_2 - H_2^{-1}(\mathbf{r} - H_1\boldsymbol{\beta}_1). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{u}_1, \\ \boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{u}_2 + H_2^{-1}(\mathbf{r} - H_1\mathbf{u}_1). \end{cases}$$

и, подставляя эти выражения в уравнение регрессии, получаем

$$\mathbf{Y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} = X_1\boldsymbol{\beta}_1 + X_2\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\varepsilon} = X_1\mathbf{u}_1 + X_2[\mathbf{u}_2 + H_2^{-1}(\mathbf{r} - H_1\mathbf{u}_1)] + \boldsymbol{\varepsilon} =$$
$$= (X_1 - X_2H_2^{-1}H_1)\mathbf{u}_1 + X_2\mathbf{u}_2 + X_2H_2^{-1}\mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Затем, обозначая

$$\begin{cases} Z_1 = X_1 - X_2H_2^{-1}H_1, \\ Z_2 = X_2, \end{cases}$$

получаем $\mathbf{W} = Z\mathbf{u} + \mathbf{e}$, где $Z = (Z_1 \ \ Z_2)$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

В новых переменных «короткая» регрессия отличается от «длинной» условием H_0: $U_{k-q+1} = U_{k-q+2} = ... = U_k = 0$, и уже известно, что в этом случае, если верна нулевая гипотеза, то F-статистика вида (5.10), (5.11) имеет распределение $F(q, n - k)$. Кроме того, совершенно очевидно, что остатки «длинной» регрессии $\mathbf{e}$ в старых и новых переменных совпадают, и что остатки короткой регрессии $\mathbf{e}^*$ в новых переменных в предположении справедливости нулевой гипотезы совпадают с остатками «короткой» регрессии в старых переменных, когда минимизируется ESS при условии $H\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$.

Еще один частный случай линейной гипотезы. Рассмотрим другой частный случай общей линейной гипотезы $H\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$, когда матрица H имеет размер $1 \times k$, т.е. матрица $H = \mathbf{c}^T$, $\mathbf{c}$ — вектор размера k. Тогда нулевая гипотеза принимает вид H_0: $\mathbf{c}^T\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta}$. Для проверки этой гипотезы исходя из общих соображений можно использовать F-статистику, которая в этом случае распределена по закону Фишера $F(1, n - k)$.

В то же время $\mathbf{c}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N(\mathbf{c}^T\boldsymbol{\beta}, \sigma^2_{\mathbf{c}^T\hat{\beta}})$ как линейная комбинация совместно нормально распределенных случайных величин, причем

$$\sigma^2_{\mathbf{c}^T\hat{\beta}} = V(\mathbf{c}^T\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{c}^T V(\hat{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{c} = \sigma^2\mathbf{c}^T(X^TX)^{-1}\mathbf{c},$$

а оценка этой дисперсии

$$\hat{\sigma}^2_{\mathbf{c}^T\hat{\beta}} = \hat{\sigma}^2\mathbf{c}^T(X^TX)^{-1}\mathbf{c} = s^2\mathbf{c}^T(X^TX)^{-1}\mathbf{c}.$$

Тогда

$$t = \frac{\mathbf{c}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}^T\boldsymbol{\beta}}{\hat{\sigma}_{\mathbf{c}^T\hat{\boldsymbol{\beta}}}} = \frac{\mathbf{c}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}^T\boldsymbol{\beta}}{s\sqrt{\mathbf{c}^T(X^TX)^{-1}\mathbf{c}}} = \frac{(\mathbf{c}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}^T\boldsymbol{\beta})/\hat{\sigma}_{\mathbf{c}^T\hat{\beta}}}{s/\sigma} \sim t(n-k),$$

поскольку:

1) $(\mathbf{c}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}^T\boldsymbol{\beta})/\hat{\sigma}_{\mathbf{c}^T\hat{\beta}} \sim N(0, 1)$;

2) $\dfrac{s^2}{\sigma^2} \sim \dfrac{1}{n-k}\chi^2(n-k)$;

3) $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ и s^2 независимы.

Другими словами, если справедлива гипотеза H_0: $\mathbf{c}^T\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta}$, то t-статистика

$$t = \frac{\mathbf{c}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \theta}{s\sqrt{\mathbf{c}^T(X^TX)^{-1}\mathbf{c}}} \sim t(n-k).$$

С другой стороны, в рассматриваемом случае $q = 1$ и F-статистика имеет вид

$$F = \frac{1/(q\sigma^2)(\mathbf{c}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \theta)^T[\mathbf{c}^T(X^TX)^{-1}\mathbf{c}]^{-1}(\mathbf{c}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \theta)}{s^2/\sigma^2} = \frac{(\mathbf{c}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \theta)^2}{s^2[\mathbf{c}^T(X^TX)^{-1}\mathbf{c}]} = t^2.$$

В данном случае проверка гипотезы с помощью F-статистики эквивалентна проверке гипотезы с помощью t-статистики.

5.5. Построение и анализ эконометрических моделей

В данном параграфе приведены примеры решения задач на построение и анализ эконометрических моделей.

Пример 5.1. В результате исследования факторов, определяющих экономический рост по 73 странам, получено следующее уравнение регрессии:

$$\hat{G} = 1{,}4 - \underset{-5{,}9}{0{,}52}P + \underset{4{,}34}{0{,}17}S + \underset{3{,}91}{11{,}16}I - \underset{-0{,}79}{0{,}38}D - \underset{-2{,}7}{4{,}75}In,$$

где $\hat{G}$ — темпы экономического роста (темпы роста среднедушевого ВВП, в % к базисному периоду); P — реальный среднедушевой ВВП, %; S — бюджетный дефицит, % к ВВП; I — объем инвестиций, % к ВВП; D — внешний долг, % к ВВП; In — уровень инфляции, %. Под коэффициентами указаны фактические значения t-критерия для коэффициентов множественной регрессии. Имеем $R^2 = 0{,}60$.

1. Требуется проверить гипотезу о достоверности полученной модели в целом.

2. До получения результатов этого исследования ваш однокурсник заключил с вами пари, что эмпирические результаты по данной модели докажут наличие обратной связи между темпами экономического роста и объемом внешнего долга страны (% к ВВП). Выиграл ли это пари ваш однокурсник?

Решение. 1. Имеем $F = \dfrac{R^2}{1 - R^2}\dfrac{n-k}{k-1} = \dfrac{0{,}6}{0{,}4}\cdot\dfrac{67}{5} = 20{,}1$; $F_{\text{кр}}(5\%; 5; 67) = 2{,}37$; $F > F_{\text{кр}}$.

Следовательно, модель значима.

2. H_0: $\beta_S = 0$; $t = 3{,}91$; $t(0{,}05; 67) \approx 2$. Коэффициент при D значимо не отличается от 0, хотя он и отрицателен. Ваш однокурсник проиграл пари, его выиграли вы.

Пример 5.2. Для трех видов продукции A, B и C модели зависимости удельных постоянных расходов от объема выпускаемой продукции выглядят следующим образом:

$$Y_A = 600;\ \ Y_B = 80 + 0{,}7x;\ \ Y_C = 40x0{,}5.$$

Требуется выполнить следующие задания.

1. Определить коэффициент эластичности по каждому виду продукции.

2. Сравнить при $x = 1000$ эластичность затрат для продукции B и C.

3. Определить, каким должен быть объем выпускаемой продукции, чтобы коэффициенты эластичности для продукции B и C были равны.

Решение. 1. Найдем коэффициенты эластичности по каждому виду продукции: $Э^A_{yx} = 0$; $Э^B_{yx} = \dfrac{\partial y}{\partial x}\dfrac{x}{y} = 0{,}7\dfrac{x}{80 + 0{,}7x}$; $\ln y_C = \ln 40 + 0{,}5\ln x$; $Э^C_{yx} = \dfrac{\partial \ln y}{\partial \ln x} = 0{,}5$.

2. $Э^B_{yx}(1000) = 0{,}7\dfrac{1000}{80 + 0{,}7\cdot 1000} = \dfrac{700}{780} = 0{,}897$; $Э^C_{yx}(1000) = 0{,}5$; $Э^B_{yx} > Э^C_{yx}$.

3. $\dfrac{0{,}7x}{80 + 0{,}7x} = 0{,}5$; $0{,}7x = 40 + 0{,}35x$; $0{,}35x = 40$; $x = \dfrac{40}{0{,}35} = 114{,}2857$.

Пример 5.3. Пусть имеется следующая модель регрессии, характеризующая зависимость y от x: $y = 8 - 7x + е$. Известно также, что $r_{xy} = -0{,}5$; $n = 20$. Требуется выполнить следующие задания.

1. Построить доверительный интервал для коэффициента регрессии в этой модели:

а) с вероятностью 0,9;

б) с вероятностью 0,99.

2. Проанализировать результаты, полученные в п. 1, и пояснить причины их различий.

Решение. 1. Оценка среднеквадратического отклонения параметра b регрессионного уравнения $\hat{y} = a + bx$ равна

$$S_b = \frac{|b|\sqrt{1-R^2}}{\sqrt{n-2}\,R} = 2{,}8577$$

в то время как критические значения t-статистики: $t(0{,}10;\ 18) = 1{,}734$; $t(0{,}01;\ 18) = 2{,}878$. Имеем $\dfrac{\beta - b}{S_b} \sim t(18)$, следовательно:

а) 90%-ный доверительный интервал для в:

$$b - t(0{,}10;\ 18)S_b \leqslant \beta \leqslant b + t(0{,}10;\ 18)S_b;$$

$$-7 - 1{,}734 \cdot 2{,}8577 \leqslant \beta \leqslant -7 + 1{,}734 \cdot 2{,}8577;$$

$$-1{,}95525 \leqslant \beta \leqslant -2{,}0447;$$

б) 99%-ный доверительный интервал для в:

$$b - t(0{,}01;\ 18)S_b \leqslant \beta \leqslant b + t(0{,}01;\ 18)S_b;$$

$$-7 - 2{,}878 \cdot 2{,}8577 \leqslant \beta \leqslant -7 + 2{,}878 \cdot 2{,}8577;$$

$$-5{,}2245 \leqslant \beta \leqslant 1{,}2245.$$

2. Доверительный интервал, накрывающий истинное значение коэффициента при экзогенной переменной с вероятностью 0,99, естественно, содержит в себе доверительный интервал, накрывающий β с меньшей вероятностью 0,9.

Пример 5.4. По совокупности 30 предприятий торговли изучается зависимость между признаками: x — цена на товар A, тыс. руб.; y — прибыль торгового предприятия, млн руб. При оценке регрессионной модели были получены следующие промежуточные результаты:

$$\sum(y_i - \hat{y})^2 = 39\,000; \quad \sum(y_i - \overline{y})^2 = 120\,000.$$

Требуется выполнить следующие задания.

1. Пояснить, какой показатель корреляции можно определить по этим данным.
2. Построить таблицу дисперсионного анализа для расчета значения F-критерия Фишера.
3. Сравнить фактическое значение F-критерия с табличным. Сделать выводы.

Решение. 1. Теоретическое корреляционное отношение (индекс корреляции)

$$R_{xy} = \sqrt{1 - \frac{ESS}{TSS}} = \sqrt{1 - \frac{39\,000}{120\,000}} = \sqrt{1 - 0{,}325} = \sqrt{0{,}675} = 0{,}8216.$$

2. В результате простых вычислений получаем следующую таблицу:

Вариация	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Дисперсия на одну степень свободы	F-отношение	
				фактическое	табличное при $\alpha = 0{,}05$
Общая	29	120 000	—	—	—
Объясненная	1	81 000	81 000,0000	58,1538	4,24
Остаточная	28	39 000	1392,8571	—	—

$$F = \frac{RSS/1}{ESS/(n-k)}.$$

3. $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}}$, следовательно, модель значима.

Пример 5.5. По 30 наблюдениям матрица парных коэффициентов корреляции оказалась следующей:

Переменная	y	x_1	x_2	x_3
y	1,00	—	—	—
x_1	0,30	1,00	—	—
x_2	0,60	0,10	1,00	—
x_3	0,40	0,15	0,80	1,00

Требуется выполнить следующие задания.

1. Построить уравнение регрессии в стандартизованном виде и сделать выводы.

2. Определить показатель множественной корреляции (нескорректированный и скорректированный).

3. Оценить целесообразность включения переменной $x1$ в модель после введения в нее переменных x_2 и x_3.

Решение. 1. Запишем систему уравнений для стандартизованных переменных:

$$\begin{cases} 0,3 = \beta_1 + 0,1\beta_2 + 0,5\beta_3, \\ 0,6 = 0,1\beta_1 + \beta_2 + 0,8\beta_3, \\ 0,4 = 0,15\beta_1 + 0,8\beta_2 + \beta_3. \end{cases}$$

Решив систему, найдем:

$$0,57 = 0,99\beta_2 + 0,785\beta_3;$$
$$\beta_2 = 0,576 - 0,793\beta_3;$$
$$0,24 = 0,99\beta_1 + 0,07\beta_3;$$
$$\beta_1 = 0,242 - 0,071\beta_3;$$
$$0,4 = 0,036 - 0,11\beta_3 + 0,461 - 0,634 + \beta_3;$$
$$-0,097 = 0,355\beta_3;$$
$$\beta_3 = -0,273;\ \ \beta_2 = 0,792;\ \ \beta_1 = 0,262;$$
$$t_y = 0,262t_{x_1} + 0,792t_{x_2} - 0,273t_{x_3}.$$

2. Показатели корреляции определим как корень из коэффициентов детерминации:

$$R = \sqrt{\beta_1 r_{yx_1} + \beta_2 r_{yx_2} + \beta_3 r_{yx_3}} = \sqrt{0,262 \cdot 3 + 0,792 \cdot 0,6 - 0,273 \cdot 0,4} = \sqrt{0,445} = 0,667;$$
$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{ESS/(n-k)}{TSS/(n-1)} = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-k} = 1 - (1 - 0,445)\frac{30-1}{30-4} = 1 - 0,619 = 0,381;$$
$$R_{adj} = 0,617.$$

3. $R^2_{yx_1x_2x_3} = R^2 = 0,445;$

$$\begin{cases} 0,6 = \beta_2 + 0,8\beta_3, \\ 0,4 = 0,8\beta_2 + \beta_3; \end{cases}$$
$$0,32 = 0,64\beta_2 + 0,8\beta_3;$$
$$0,28 = 0,36\beta_2;$$
$$\beta_2 = 0,778;\ \ \beta_3 = 0,4 - 0,8 \cdot 0,778 = -0,222;$$
$$t_y = 0,778t_{x_2} - 0,222t_{x_3};$$
$$R^2_{yx_2x_3} = \beta_2 r_{yx_2} = 0,378;$$
$$F_{x_1} = \frac{R^2_{yx_1x_2x_3} - R^2_{yx_2x_3}}{1 - R^2_{yx_1x_2x_3}} \frac{n-4}{1} = \frac{0,445 - 0,378}{1 - 0,445} 26 = 3,131;$$
$$F_{\text{кр}}(0,05;\ 1;\ 26) = 4,24;$$

$F_{x_1} < F_{\text{кр}}$, следовательно, не стоит добавлять x_1.

Пример 5.6. Зависимость среднемесячной производительности труда от возраста рабочих характеризуется моделью $y = a + bx + cx^2$. Ее использование привело к результатам, представленным в таблице.

Номер п/п	Производительность труда рабочих y, тыс. руб.		Номер п/п	Производительность труда рабочих y, тыс. руб.	
	фактическая	расчетная		фактическая	расчетная
1	12	10	6	11	12
2	8	10	7	12	13
3	9	11	8	9	10
4	15	14	9	11	10
5	16	15	10	9	9

Требуется оценить качество модели, определив ошибку аппроксимаций и индекс корреляции и используя F-критерий Фишера.

Решение. Уравнение регрессии имеет вид $y = a + bx + cx^2$.

1. Определим ошибку аппроксимаций. Имеем:

$$\overline{y} = \frac{\sum y_i}{10},\ A = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{10}}\frac{1}{\overline{y}} = 0{,}102.$$

2. Определим индекс корреляции. Имеем:

$$ESS = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = 14, TSS = \sum (y_i - \overline{y})^2 = 60{,}4.$$

Тогда индекс корреляции равен

$$R_{xy} = \sqrt{1 - \frac{ESS}{TSS}} = \sqrt{1 - \frac{14}{60{,}4}} = \sqrt{0{,}7682} = 0{,}8765.$$

3. Найдем значение F-критерия Фишера. Коэффициент детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS} = 0{,}7682,$$

тогда

$$F = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{(n-k)}{(k-1)} = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{7}{2} = \frac{0{,}7682}{1-0{,}7682}\cdot\frac{7}{2} = 11{,}6,$$

в то время как критическое значение F-критерия Фишера $F_{кр}(0{,}05;\ 2;\ 7) = 4{,}74$.

Так как 11,6 > 4,74, то модель значима.

Пример 5.7. Изучалась зависимость вида $y = ax^b$. Для преобразованных в логарифмах переменных получены следующие данные:

$\sum xy = 4{,}2087$; $\sum x = 8{,}2370$; $\sum x^2 = 9{,}2334$; $\sum y = 3{,}9310$; $\sum (y - \hat{y}_x) = 0{,}0014$.

Требуется выполнить следующие задания.

1. Найти параметр b.

2. Найти показатель корреляции, предполагая $\sigma_y = 0{,}08$. Оценить его значимость.

3. Оценить значимость уравнения регрессии, если известно, что $n = 9$.

Решение. Имеем $\ln y = \ln a + b \ln x$.

$$1.\ b = \frac{\overline{yx} - \overline{y}\,\overline{x}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{n\sum xy - \sum y \sum x}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = \frac{9\cdot 4{,}2087 - 8{,}2370\cdot 3{,}9310}{9\cdot 9{,}2834 - 8{,}2370^2} = \frac{5{,}4987}{15{,}7024} = 0{,}3502.$$

2. $R_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sum (y_i - \overline{y}_i)^2}{\sum (y_i - \overline{y})^2}}$;

$\sum (y_i - \overline{y}_i)^2 = n\sigma_y^2 = 9 \cdot 0{,}0064 = 0{,}0576$;

$R_{xy} = \sqrt{1 - \frac{0{,}0014}{0{,}0576}} = \sqrt{1 - 0{,}02431} = \sqrt{0{,}9757} = 0{,}9878$;

$t = \frac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}} = \frac{0{,}9878\sqrt{9-2}}{0{,}0122} = 23{,}6613$;

$t_{кр}(0{,}05; 7) = 2{,}365$; $t > t_{кр}$. Показатель корреляции значим.

3. $F = \frac{R^2}{1 - R^2}(n - k) = 23{,}6613$; $F_{кр}(0{,}05; 1; 7) = 5{,}59$, $F > F_{кр}$.

Уравнение регрессии значимо.

Пример 5.8. Зависимость объема производства y (тыс. ед.) от численности занятых x (человек) по 15 заводам концерна характеризуется следующим образом.

Уравнение регрессии: $y = 30 - 0{,}4x + 0{,}04x^2$.

Доля остаточной дисперсии в общей составляет 20%.

Требуется определить следующие параметры.

1. Индекс корреляции.
2. Значимость уравнения регрессии.
3. Коэффициент эластичности, предполагая, что численность занятых составляет 30 человек.

Решение. 1. $R_{xy} = \sqrt{1 - \frac{ESS}{TSS}} = \sqrt{1 - 0{,}2} = 0{,}8944$.

2. $F = \frac{R^2}{1 - R^2}\frac{n - k}{k - 1} = \frac{0{,}8}{1 - 0{,}8}\frac{15 - 3}{3 - 1} = \frac{0{,}8 \cdot 12}{0{,}2 \cdot 2} = 24$;

$F_{кр}(0{,}05; 1; 7) = 5{,}59$; $F > F_{кр}$. Уравнение регрессии значимо.

3. $Э_{yx} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y} = \frac{(-0{,}4 + 0{,}8x)x}{30 - 0{,}4x + 0{,}04x^2}$; $Э_{yx(30)} = \frac{(-0{,}4 + 0{,}8 \cdot 30)30}{30 - 0{,}4 \cdot 30 + 0{,}04 \cdot 30^2} = \frac{60}{54} =$
$= 1{,}11$.

Пример 5.9. По группе из 10 заводов, производящих однородную продукцию, получено уравнение регрессии себестоимости единицы продукции y (тыс. руб.) от уровня технической оснащенности x (тыс. руб.): $y = 20 + \frac{700}{x}$. Доля остаточной дисперсии в общей составила 0,19.

Требуется определить следующие параметры.

1. Коэффициент эластичности, предполагая, что стоимость активных производственных фондов составляет 200 тыс. руб.
2. Индекс корреляции.
3. F-критерий Фишера.

Сделать выводы.

Решение. 1. $Э_{yx} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y} = \frac{-700}{x^2}\frac{x}{20 + 700/x} = \frac{-700}{20x + 700}$;

$Э_{yx(200)} = \frac{700}{20 \cdot 200 + 700} = -\frac{700}{4700} = -0{,}1489$.

2. $R_{xy} = \sqrt{1 - \dfrac{ESS}{TSS}} = \sqrt{1 - 0{,}19} = 0{,}9.$

3. $F = \dfrac{R^2}{1 - R^2}(n - k) = 23{,}6613$; $F_{кр}(0{,}05;\ 1;\ 8) = 5{,}32$; $F > F_{кр}$. Модель значима.

Пример 5.10. По данным, полученным от 20 фермерских хозяйств одного из регионов, изучается зависимость объема выпуска продукции растениеводства y (млн руб.) от четырех факторов: численности работников L (человек), количества минеральных удобрений на 1 га посева M (кг), количества осадков в период вегетации R (г) и качества Q (баллов). Были получены следующие варианты уравнений регрессии и доверительные интервалы с вероятностью $P = 0{,}95$ для коэффициентов регрессии:

1. $\hat{y} = 2 + 0{,}5L + 1{,}7M - 2R$, $R^2 = 0{,}77$.

Граница	Доверительный интервал для коэффициентов регрессии при факторе		
	L	M	R
Нижняя	0,1		
Верхняя		2,3	1,5

2. $\hat{y} = 6{,}4 + 0{,}7L + 1{,}5M - 2R + 0{,}8Q$, $R^2 = 0{,}81$.

Граница	Доверительный интервал для коэффициентов регрессии при факторе			
	L	M	R	Q
Нижняя	0,3			0,4
Верхняя		2,3	1,5	1,2

Требуется выполнить следующие задания.

1. Восстановить пропущенные границы доверительных интервалов в каждом уравнении.

2. Выбрать наилучшее уравнение регрессии. Дать интерпретацию его параметров и доверительных интервалов для коэффициентов регрессии на примере одного из факторных признаков.

3. Оценить целесообразность включения в модель $y = f(L, M, R)$ фактора Q.

Решение. 1. $t_{кр}(0{,}05;\ 16) = 2{,}120$; $t_{кр}(0{,}05;\ 15) = 2{,}131$;

$$-t_{кр} \leqslant \frac{\beta - b}{\sigma_b} \leqslant b + t_{кр};\ b - t\sigma_b \leqslant \beta \leqslant b + t\sigma_b.$$

1-е уравнение. Найдем пропущенные границы доверительных интервалов:

$$L\colon 0{,}5 - 2{,}12\sigma_{b_1} = 0{,}1;\quad 2{,}12\sigma_{b_1} = 0{,}4;$$
$$b_1 + 2{,}12\sigma_{b_1} = 0{,}5 + 0{,}4 = 0{,}9;$$
$$M\colon 1{,}7 + 2{,}12\sigma_{b_2} = 2{,}3;\quad 2{,}12\sigma_{b_2} = 0{,}6;$$
$$1{,}7 - 2{,}12\sigma_{b_2} = 1{,}7 - 0{,}6 = 1{,}1;$$

Точно так же находим пропущенную границу доверительного интервала для R: $-5{,}5$.

2-е уравнение. Таким же способом находим пропущенные границы интервалов:

для L: 1,1; для M: 3,2; для R: $-2{,}8$.

2. Вычислим и сравним скорректированные коэффициенты детерминации для наших уравнений:

$$R^2_{adj_1} = 1-(1-R^2)\frac{n-1}{n-k} = 1-(1-0,77)\frac{19}{16} = 0,7269;$$
$$R^2_{adj_2} = 1-(1-R^2)\frac{n-1}{n-k} = 1-(1-0,81)\frac{19}{15} = 0,7593.$$

Второе уравнение лучше, поскольку его скорректированный коэффициент детерминации больше.

3. $F = \dfrac{R^2_{yLMRQ} - R^2_{yLMR}}{1-R^2_{yLMRQ}}\dfrac{n-k}{1} = \dfrac{0,81-0,77}{1-0,81}\cdot 15 = 37,5789.$

Целесообразно включить в модель фактор Q, поскольку расчетное значение F-статистики 37,58 больше критического значения $F_{кр}(0,05;\ 1;\ 15) = 4,54$.

Пример 5.11. По 20 наблюдениям зависимость спроса на товар y от его цены x характеризуется уравнением $\lg y = 1,75 - 0,35\lg x$. Доля остаточной дисперсии в общей составила 18%. Требуется выполнить следующие задания.

1. Записать данное уравнение в виде степенной функции.
2. Оценить эластичность спроса на товар в зависимости от его цены.
3. Определить индекс корреляции.
4. Оценить значимость уравнения регрессии через F-критерий Фишера. Сделать выводы.

Решение.

1. $Y = \dfrac{10^{1,75}}{x^{0,35}}.$

2. $Э_{yx} = \dfrac{d\ln y}{d\ln x} = \dfrac{d\lg y}{d\lg x} = -0,35.$

3. $R = \sqrt{1-\dfrac{ESS}{TSS}} = \sqrt{1-0,18} = 0,9055.$

4. $F = \dfrac{R^2}{1-R^2}(n-k) = \dfrac{0,82}{1-0,82}(20-2) = 82,$

$F_{кр}(0,05;\ 1;\ 18) = 4,41$; $F > F_{кр}$. Уравнение значимо.

Пример 5.12. По 30 наблюдениям получены следующие данные: $R^2 = 0,65$, $\bar{y} = 200$, $\bar{x}_1 = 150$, $\bar{x}_2 = 20$, $\bar{x}_3 = 100$. Уравнение регрессии

$$\hat{y} = a + 0,176x_1 + 0,014x_2 - 7,75x_3.$$

Требуется выполнить следующие задания.

1. Найти скорректированный коэффициент корреляции, оценив значимость уравнения регрессии в целом.
2. Определить частные коэффициенты эластичности.
3. Оценить параметр a.

Решение. 1. Вычислим скорректированный коэффициент детерминации:

$$R^2_{adj} = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-k} = 1 - (1 - 0,65)\frac{30-1}{30-4} = 1 - 0,35\frac{29}{26} = 0,6096.$$

Тогда $R_{adj} = 0,7808$. Найдем расчетное значение F-статистики:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-k}{k-1} = \frac{0,65}{0,35}\cdot\frac{26}{3} = 16,095.$$

Критическое значение $F_{кр}(0,05;\ 29;\ 26) = 1,907$.

Уравнение в целом значимо, так как расчетное значение F-статистики больше критического значения.

2. Определим частные коэффициенты эластичности величины $\hat{Y}$ по трем факторам:

$$Э_{yx_1} = b_1 \frac{x_1}{\hat{y}x_1 \cdot x_2x_3} = 0{,}176 \frac{x_1}{a + 0{,}176x_1 + 0{,}014 \cdot 20 - 100 \cdot 7{,}75};$$

$$Э_{yx_1}(150) = 0{,}176 \frac{150}{200} = 0{,}132;$$

$$Э_{yx_2} = b_2 \frac{x_2}{\hat{y}_{x_2 \cdot x_1x_3}} = 0{,}176 \frac{x_2}{a + 0{,}176 \cdot 150 + 0{,}014x_2 - 100 \cdot 7{,}75};$$

$$Э_{yx_2}(20) = 0{,}014 \ \frac{20}{200} = 0{,}0014;$$

$$Э_{yx_3} = \frac{x_3}{\hat{y}_{x_3 \cdot x_1x_2}} = -7{,}75 \frac{x_3}{a + 0{,}176 \cdot 150 + 0{,}014 \cdot 20 - 7{,}75 \cdot x_3};$$

$$Э_{yx_3}(100) = -7{,}75 \ \frac{100}{200} = -38{,}75.$$

3. Оценим параметр a:

$$a = \overline{y} - 0{,}176\overline{x}_1 - 0{,}014\overline{x}_2 + 7{,}75\overline{x}_3 =$$
$$= 200 - 0{,}176 \cdot 150 - 0{,}014 \cdot 20 + 7{,}75 \cdot 100 = 948{,}32.$$

Пример 5.13. По 25 предприятиям концерна изучается зависимость потребления материалов y (т) от энерговооруженности труда x_1 (кВт·ч на одного рабочего) и объема произведенной продукции x_2 (тыс. ед.). Данные приведены в таблице.

Признак	Среднее значение	Среднеквадратическое отклонение	Парный коэффициент корреляции
y	12,00	2,0	$t_{yx_1} = 0{,}52$
x_1	4,36	0,5	$t_{yx_2} = 0{,}84$
x_2	10,00	1,8	$t_{x_1x_2} = 0{,}43$

Требуется выполнить следующие задания.

1. Построить уравнение множественной регрессии и пояснить экономический смысл его параметров.

2. Определить частные коэффициенты эластичности и стандартизованные коэффициенты регрессии.

3. Найти частные и множественный коэффициенты корреляции.

4. Оценить значимость уравнения регрессии с помощью F-критерия Фишера.

Решение. Выпишем систему уравнений для коэффициентов стандартизованного уравнения регрессии:

$$\begin{cases} 0{,}52 = \beta_1 + 0{,}43\beta_2, \\ 0{,}84 = 0{,}43\beta_1 + \beta_2. \end{cases}$$

Тогда $0{,}1588 = 0{,}8151\beta_1$; $\beta_1 = 0{,}1948$; $\beta_2 = 0{,}7562$; $t_y = 0{,}1948t_{x_1} + 0{,}7562t_{x_2}$.

1. $\dfrac{y - \overline{y}}{\sigma_y} = 0{,}1948 \dfrac{x_1 - \overline{x}_1}{\sigma_{x_1}} + 0{,}7562 \dfrac{x_2 - \overline{x}_2}{\sigma_{x_2}},$

$\dfrac{y - 12}{2} = 0{,}1948 \dfrac{x_1 - 4{,}36}{0{,}5} + 0{,}7562 \dfrac{x_2 - 10}{1{,}8},$

$y - 12 = 0{,}7792(x_1 - 4{,}36) + 0{,}8402\ (x_2 - 10),$

$y = 0{,}2007 + 0{,}7792x_1 + 0{,}8402x_2.$

$$2.\ Э_{yx_1}=b_1\frac{x_1}{y_{x_1x_2}}=\frac{0,7792\,x_1}{0,2007+0,7792\,x_1+0,8402\cdot 10,0},\ Э_{yx_1}(4,36)=0,2831;$$

$$Э_{yx_2}=b_2\frac{x_2}{\hat{y}_{x_2x_1}}=\frac{0,8402\,x_2}{0,2007+0,7792\cdot 4,36+0,8402\,x_1},\ Э_{yx_2}(10)=0,7002.$$

$$3.\ r_{yx_1x_2}=\frac{r_{yx_1}-r_{yx_2}\,r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1-r^2_{yx_2})(1-r^2_{x_1x_2})}}=\frac{0,52-0,84\cdot 0,43}{\sqrt{(1-0,84^2)\cdot(1-0,43^2)}}=$$

$$=\frac{0,1588}{\sqrt{0,2944\cdot 0,8151}}=\frac{0,1588}{0,4899}=0,3241;$$

$$r_{yx_2x_1}=\frac{r_{yx_2}-r_{yx_1}r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1-r^2_{yx_1})(1-r^2_{x_1x_2})}}=\frac{0,84-0,52\cdot 0.43}{\sqrt{(1-0,52^2)\cdot(1-0,43^2)}}=$$

$$=\frac{0,6164}{\sqrt{0,7296\cdot 0,8151}}=\frac{0,6164}{0,7712}=0,7993;$$

$$R_{yx_1x_2}=R=\sqrt{\beta_1 r_{yx_1}+\beta_2 r_{yx_2}}=\sqrt{0,1948\cdot 0,52+0,7562\cdot 0,84}=\sqrt{0,7365}=0,8582.$$

4. $F=\dfrac{R^2}{1-R^2}\dfrac{n-k}{k-1}=\dfrac{0,7365}{1-0,7365}\cdot\dfrac{22}{3}=30,7457\ F_{кр}(0,05;1;22)=4,30;\ F>F_{кр}$. Модель значима.

Пример 5.14. По 40 предприятиям одной отрасли исследовалась зависимость производительности труда y от уровня квалификации рабочих x_1 и энерговооруженности их труда x_2. Результаты оказались следующими. Уравнение регрессии $\hat{y}=a+10x_1+2x_2$. $R^2=0,85$.

Стандартные ошибки параметров — 0,5; 2; ?.

t-Критерий для параметров — 3; ?; 5.

Требуется выполнить следующие задания.

1. Определить параметр a и заполнить пропущенные значения (отмеченные знаком «?»).

2. Оценить значимость уравнения в целом, используя значение множественного коэффициента корреляции.

3. Определить, какой из факторов оказывает более сильное воздействие на результат.

Решение. 1. Так как $\dfrac{a}{\sigma_a}=t_a$, имеем $\dfrac{a}{0,5}=3$, откуда находим $a=15$; точно так же $t_{b_1}=\dfrac{b_1}{\sigma_{b_1}}=\dfrac{10}{2}=5$, откуда находим $\dfrac{2}{\sigma_{b_1}}=5$; $\sigma_{b_1}=0,4$.

2. Расчетное значение F-статистики

$$F=\frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-k}{k-1}=\frac{0,85^2}{1-0,85^2}\cdot\frac{40-3}{3-1}=\frac{0,7225}{1-0,7225}\cdot\frac{37}{2}=48,17;$$

в то время как критическое значение $F_{кр}(0,05;1;37)=4,08$; таким образом $F>F_{кр}$, т.е. модель значима.

$$3.\ F_{x_1}=(t_{b_1})^2=\frac{R^2-r^2_{yx_1}}{1-R^2}(n-k);$$

$$25=\frac{0,7225-r^2_{yx_1}}{1-0,7225}\cdot 37,\ r^2_{yx_1}=0,7225-\frac{25\cdot(1-0,7225)}{37}=0,535,\ r_{yx_1}=0,73;$$

$$F_{x_2}=t^2_{b_2}=\frac{R^2-r^2_{yx_2}}{1-R^2}(n-k);$$

$$25=\frac{0{,}7225-r^2_{yx_2}}{1-0{,}7225}\cdot 37,\; r^2_{yx_2}=0{,}7225-\frac{25\cdot(1-0{,}7225)}{37}=0{,}535,\; r_{yx_2}=0{,}73.$$

Ни один из факторов не оказывает более сильного воздействия на результат; статистическая связь обоих факторов с результатом одинакова.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. В результате исследования факторов, определяющих экономический рост, по 73 странам получено следующее уравнение регрессии (под коэффициентами указаны стандартные ошибки коэффициентов регрессии):

$$\hat{G}=1{,}4-\underset{1{,}04}{0{,}52}P+\underset{0{,}045}{0{,}18}S+\underset{3{,}04}{12{,}16}I-\underset{0{,}79}{0{,}38}D-\underset{1{,}15}{4{,}60}In,$$

где $\hat{G}$ — темпы экономического роста (темпы роста среднедушевого ВВП); P — реальный среднедушевой ВВП; S — бюджетный дефицит, % к ВВП; I — объем инвестиций, % к ВВП; D — внешний долг, % к ВВП; In — уровень инфляции, %. $R2$ = 0,60.

1. Требуется проверить значимость каждого коэффициента и гипотезу о достоверности полученной модели в целом.

2. До получения результатов этого исследования ваш однокурсник заключил с вами пари, что эмпирические результаты по данной модели докажут наличие обратной связи между темпами экономического роста и объемом внешнего долга страны (% к ВВП). Выиграл ли это пари ваш однокурсник?

5.2. По 40 предприятиям одной отрасли исследовалась зависимость производительности труда y от уровня квалификации рабочих x_1 и энерговооруженности их труда x_2. Результаты оказались следующими. Уравнение регрессии $\hat{y}=a+10x_1+2x_2$; $R^2=0{,}80$.

Стандартные ошибки параметров — 0,5; 2,5; ?.

t-Критерий для параметров — 3; ?; 4.

Требуется выполнить следующие задания.

1. Определить параметр a и заполнить пропущенные значения (отмеченные знаком «?»).

2. Определить значимость уравнения в целом, используя значения множественного коэффициента корреляции.

5.3. Зависимость спроса на товар y от его цены x характеризуется по 20 наблюдениям уравнением $\lg y = 2{,}75 - 0{,}7\lg x$. Доля остаточной дисперсии в общей составила 20%.

Требуется выполнить следующие задания.

1. Записать данное уравнение в виде степенной функции.

2. Оценить эластичность спроса на товар в зависимости от его цены.

3. Ответить, права ли была администрация предприятия, если до проведения данного исследования она предполагала, что эластичность спроса по цене равна –0,8.

5.4. Имеется регрессионная модель, построенная по 20 наблюдениям и характеризующая зависимость Y от X: $Y = 5 - 7X + \varepsilon$, причем известно, что $r_{XY} = -0{,}5$.

Требуется построить доверительный интервал для коэффициента при переменной X в этой модели:

а) с вероятностью 0,9;

б) с вероятностью 0,99.

5.5. На основе квартальных данных с 1999 по 2005 г. с помощью метода наименьших квадратов получено следующее уравнение (под коэффициентами указаны стандартные ошибки):

$$Y_t=\underset{2{,}17}{2{,}34}+\underset{0{,}0022}{0{,}0088}X_{t1}-\underset{5{,}16}{6{,}45}X_{t2}+\underset{0{,}005}{0{,}035}X_{t3}-\underset{0{,}5}{2{,}5}X_{t4}.$$

Имеем $RSS = 150$, $ESS = 25$. Требуется выполнить следующие задания.

1. Проверить значимость каждого из коэффициентов.

2. Определить коэффициент детерминации.

3. Протестировать значимость регрессии в целом.

4. Когда в уравнение добавили три фиктивные переменные, соответствующие трем первым кварталам года, величина RSS выросла до 170. Проверить гипотезу о наличии сезонности.

5.6. Для той же исходной модели, что и в задаче 5.5, были раздельно построены две регрессии на основе данных, соответственно, за I квартал 1999 г. — II квартал 2001 г. и III квартал 2001 г. — IV квартал 2005 г. и получены следующие значения сумм квадратов остатков: $ESS_1 = 8$, $ESS_2 = 12$.

Требуется проверить (с помощью теста Чоу) гипотезу о том, что в середине 2001 г. произошло структурное изменение.

5.7. По данным 400 наблюдений построена линейная зависимость со свободным членом логарифма цены квартиры от логарифма жилой площади, логарифма общей площади, логарифма площади кухни, логарифма расстояния от метро и еще четырех фиктивных переменных, отражающих, соответственно, расположение квартиры на первом или на последнем этаже, тип дома, наличие балкона и наличие лифта. Предполагается, что дисперсия ошибки линейно зависит от логарифма жилой площади. Для тестирования ошибок модели на гетероскедастичность применяется тест Голдфелда — Куандта по данной переменной, а именно, данные упорядочиваются по убыванию логарифма жилой площади, исключаются средние наблюдения (четверть всех наблюдений) и строятся независимые регрессии для 150 первых и для 150 последних из оставшихся наблюдений. Суммы квадратов остатков для двух регрессий равны, соответственно, 6,4 и 3,2. Что можно сказать относительно предположения о гомоскедастичности остатков на 5%-ном уровне значимости?

5.8. Рассматривается модель со свободным членом, связывающая логарифм количества вакансий и логарифм уровня безработицы, построенная по 100 наблюдениям. Сумма квадратов остатков равна 2,01, в то время как $\sum_{i=2}^{100}(e_i - e_{i-1})^2 = 4$, где e_i — остаток в i-м уравнении. Что можно сказать о наличии или об отсутствии корреляции во времени (на основании теста Дарвина — Уотсона)?

5.9. Требуется ответить на следующие вопросы.

Если в модели отсутствуют некоторые существенные переменные, то МНК-оценки параметров рассматриваемой модели:

1. В общем случае смещены или нет?

2. Обладают большей или меньшей ковариационной матрицей, чем оценки параметров истинной модели?

3. Каков знак смещения у оценки дисперсии?

Если в модель включены несущественные переменные, то МНК-оценки ее параметров:

1. Смещены или нет?

2. Обладают большей или меньшей ковариационной матрицей, чем оценки параметров истинной модели?

3. Смещена ли в этом случае оценка дисперсии?

5.10. Требуется ответить на следующие вопросы.

Для обобщенной регрессионной модели обычная МНК-оценка является:

1. Смещенной или нет?

2. Состоятельной или нет?

3. Эффективной (в смысле минимума дисперсии в классе линейных несмещенных моделей) или нет?

Оценка матрицы ковариаций вектора оценок является:

1. Смещенной или нет?

2. Состоятельной или нет?

3. К чему может привести использование такой оценки?

5.11. При изучении характера влияния количества ингибитора (замедлителя реакции) на длительность процесса химической реакции получены следующие данные (в условных единицах):

Количество ингибитора	11	15	17	19	22	25	29	30
Время до завершения реакции, с	11,55	15,50	17,95	18,30	23,00	23,90	28,00	29,70

Предполагая, что зависимость длительности реакции y от количества ингибитора x имеет вид $y = a_0 + a_1x$, требуется оценить параметры a_0 и a_1, проверить гипотезу H_0: $a_0 = 1$ против альтернативы H_1: $a_0 \neq 1$, проверить гипотезу H_0: $a_0 = 20$ против альтернативы H_1: $a_0 \neq 20$.

5.12. С помощью бинарных переменных требуется написать уравнение, соответствующее наличию двух структурных изменений в моменты времени t_0 и t_1 (предполагается, что $t_1 > t_0$). Как будет выглядеть нулевая гипотеза для проверки предположения об отсутствии структурного изменения в момент времени t_0? Как будет выглядеть нулевая гипотеза для проверки предположения об отсутствии структурного изменения в момент времени t_1? Как будет выглядеть нулевая гипотеза для проверки предположения об отсутствии и того и другого структурных сдвигов?

Предположим, что вы оцениваете линейную функцию потребления: $c_t = \alpha + \alpha y_t + \varepsilon_t$ среди n индивидуумов. Как учесть возможный сдвиг этой функции при переходе от городского потребителя к сельскому, если вы считаете, что маргинальная склонность к потреблению постоянна, в то время как средняя склонность к потреблению может меняться? Как проверить гипотезу о том, что маргинальные склонности к потреблению индивидуумов с доходом выше и ниже уровня y^* различаются?

5.13. Предположим, что модель $Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$, $t = 1, 2, ..., n$, удовлетворяет условиям классической регрессии. Рассматривается следующая оценка коэффициента β:

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{Y_t - \overline{Y}}{X_t - \overline{X}}.$$

Является ли оценка $\tilde{\beta}$ смещенной, линейной, состоятельной? Какова дисперсия $\tilde{\beta}$? Как соотносится дисперсия данной оценки параметра в с его оценкой, построенной методом наименьших квадратов?

5.14. Приводится оценка уравнения спроса на деньги по годовым данным за период с 1966 по 1985 г. (всего 20 наблюдений):

$$M_i = -3169{,}42 - \underset{22{,}59}{14{,}92} R_i + \underset{0{,}1434}{1{,}568} Y_i + \varepsilon_i,\ R^2 = 0{,}9336;\ R^2_{adj} = 0{,}928,$$

где переменные регрессии обозначают следующее: M — денежный агрегат M_2; R — учетная ставка Федеральной резервной системы США; Y — ВВП, скорректированный на сезонность. Под коэффициентами приведены стандартные ошибки оценок коэффициентов регрессии.

Требуется выполнить следующие задания.

1. Определить, какие из переменных регрессии статистически значимо отличны от нуля (критическое значение t-статистики на 5%-ном уровнем значимости равно 2,11)?

2. Построить 95%-ный доверительный интервал для коэффициента регрессии при переменной Y.

3. Провести проверку гипотезы о совместном равенстве нулю коэффициентов при переменных R и Y.

4. Проверить гипотезу об отрицательном влиянии процентной ставки на спрос на деньги. Каковы в данном случае должны быть нулевая и альтернативная гипотезы? ($t_{\text{кр}}$ = 1,74 для одностороннего теста)

5.15. В кейнсианской теории спрос на деньги в месяц (в долларах) зависит от дохода в месяц (в долларах) и процентной ставки. Рассмотрим следующую модель:

$$\lg(m_t) = \beta_1 + \beta_2 \lg(y_t) + \beta_3 \lg(i_t) + \varepsilon.$$

Оценка параметров дала следующие результаты (под коэффициентами приведены стандартные ошибки оценок коэффициентов регрессии):

$$\lg(m_t) = \underset{0,082}{0,575} + \underset{0,016}{0,709} \lg(y_t) - \underset{0,021}{0,053} \lg(i_t) + \varepsilon.$$

Число наблюдений n = 103.

Требуется выполнить следующие задания.

1. Вычислить t-статистики и ответить на вопрос, на каком уровне значимости все коэффициенты могут быть признаны значимыми.

2. Проинтерпретировать полученные результаты.

3. Записать модель в мультипликативном виде (в виде произведения) и рассчитать прогноз спроса на деньги в точке y = 1000, i = 10.

4. Определить, как изменятся коэффициенты регрессии, если доход измерять в тысячах долларов, а спрос на деньги — в сотнях долларов?

5. Определить, на сколько процентов вырастет спрос на деньги, если доход вырастет на 1%.

5.16. Дана модель $\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, количество регрессоров k, количество наблюдений n, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$. Рассмотрим оценку вида $\hat{\boldsymbol{\beta}} = A\mathbf{y}$ где A такова, что $AX = E$, E — единичная матрица, $nA\Sigma A^T \xrightarrow[n\to\infty]{} Q$. Требуется выполнить следующие задания.

1. Определить, каковы размерности матриц X, A, E.

2. Доказать, что оценка $\hat{\beta}$ — несмещенная.

3. Определить, чему равна матрица ковариаций $V(\hat{\boldsymbol{\beta}})$?

4. Доказать, что $\hat{\beta}$ состоятельна.

5. Определить, при какой матрице A оценка параметров будет наиболее эффективна.

5.17. Для проверки гипотезы о совпадении структуры спроса на спектакли театров Москвы, Санкт-Петербурга и Екатеринбурга построены три регрессии (для каждого города своя) — средняя наполненность зала (в %) от средней цены билета на спектакль в данном театре, общероссийского рейтинга театра и константы. Количество наблюдений по городам: Москва — 15, Санкт-Петербург — 10, Екатеринбург — 7. Стандартные ошибки в этих регрессиях: Москва — $\hat{\sigma}_1$ = 0,2, Санкт-Петербург — $\hat{\sigma}_2$ = 0,05, Екатеринбург — $\hat{\sigma}_3$ = 0,1. Общая регрессия по всем трем городам имеет стандартную ошибку $\hat{\sigma}$ = 0,15. Требуется проверить указанную гипотезу.

5.18. В классической линейной регрессионной модели $y = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$; $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}; \sigma^2 I)$ оценка вектора коэффициентов дается выражением $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (X^TX)^{-1}X^T\mathbf{y}$ и имеет следующую матрицу ковариаций: $V(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (X^TX)^{-1}\sigma^2$. Если же ошибки имеют совместное распределение $\varepsilon \sim N(\mathbf{0}; \Omega)$, то оценка вектора коэффициентов дается выражением $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}} = (X^T\Omega^{-1}X)^{-1}X^T\Omega^{-1}\mathbf{y}$. Найдите $V(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}})$ (выпишите выражение для нее). Какому распределению (и с какими параметрами) будет подчиняться вектор $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}}$? В предположении, что $\dfrac{X^T\Omega^{-1}X}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} Q$, требуется показать, что оценка $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}}$ состоятельна.

5.19. Дана модель $y = x\beta + \varepsilon$. Предлагается следующая оценка коэффициента β:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}.$$

1. Проверьте несмещенность этой оценки.

2. Проверьте состоятельность оценки. (*Указание.* Рассмотрите контрпример $x_t = (-1)^t\frac{1}{t}$, $t = 1, 2, ..., n$.)

5.20. Предположим, что модель $Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$, $t = 1, 2, ..., n$, удовлетворяет условиям классической регрессии. Рассматривается следующая оценка коэффициента β:

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{Y_t - \bar{Y}}{X_t - \bar{X}}.$$

Ответьте на следующие вопросы.

1. Является ли оценка $\tilde{\beta}$ смещенной?

2. Является ли оценка $\tilde{\beta}$ линейной?

3. Является ли оценка $\tilde{\beta}$ состоятельной? (*Указание.* Рассмотрите контрпример $x_t = (-1)^t\frac{1}{t}$, $t = 1, 2, ..., n$.)

4. Какова дисперсия $\tilde{\beta}$?

5. Как соотносится дисперсия данной оценки параметра β с дисперсией оценки параметра β, полученной методом наименьших квадратов?

5.21. Рассматривается трехмерная регрессионная модель $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{1t} + \beta_3 X_{2t} + \varepsilon_t$. Число наблюдений $n = 103$. Получены оценки параметров: $\hat{\beta}_1 = 1{,}45$, $\hat{\beta}_2 = 2{,}97$, $\hat{\beta}_3 = 3{,}05$.

Задана матрица

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}.$$

Сумма квадратов остатков равна 10. Требуется проверить следующие гипотезы на 5%-ном уровне значимости:

а) $\beta_2 = \beta_3 = 2\beta_1$;

б) $\beta_2 = 3$;

в) $\beta_2 = \beta_3 = 0$.

5.22. Необходимо сделать выбор между линейной $y_t = \mathbf{x}_t^T\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t$ и логлинейной $z_t = \ln(y_t) = (\ln(\mathbf{x}_t))^T\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t$ моделями. Обе рассматриваемые модели были оценены методом наименьших квадратов и получены соответствующие прогнозные значения $\tilde{y}_t$ и $\tilde{z}_t$.

После этого методом наименьших квадратов оценили уравнение

$$y_t = \mathbf{x}_t^T\boldsymbol{\beta} + \delta_{\text{LIN}}(\ln(\tilde{y}_t) - \tilde{z}_t) + \varepsilon_t,$$

получив МНК-оценку переменной δ_{LIN}, равную 1,5, и стандартную ошибку этой оценки, равную 0,5. Затем оценили уравнение

$$z_t = (\ln(\mathbf{x}_t))^T\boldsymbol{\beta} + \delta_{\text{LOG}}(\tilde{y}_t - \exp(\tilde{z}_t)) + \varepsilon_t,$$

получив МНК-оценку переменной δ_{LOG}, равную 0,5, и стандартную ошибку этой оценки, равную 0,4. Какую из двух моделей следует выбрать, тестируя обе гипотезы «линейная модель против логлинейной» и «логлинейная модель против линейной» на 5%-ном уровне значимости?

5.23. Процесс, порождающий данные, описывается соотношением

$$y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \beta_4 x_{t4} + \varepsilon_t,$$
$$M(\varepsilon_t) = 0, M(\varepsilon_t^2) = \sigma^2, M(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, t \neq s, t, s = 1, 2, ..., n.$$

Строится регрессия y на x_1, x_2, x_3 и стандартным образом оценивается матрица ковариаций МНК-оценок параметров β. Требуется показать, что оценки параметров регрессии являются смещенными, имеют меньшую дисперсию, чем соответствующие оценки, полученные в истинной модели, а оценка дисперсии построенной регрессии смещена вверх.

5.24. С помощью бинарных переменных напишите уравнение, соответствующее наличию двух структурных изменений в моменты времени t_0 и t_1 (предполагается, что $t_0 < t_1$).

5.25. Объясните геометрический смысл вектора предсказанных значений и оценок коэффициентов регресиии. Прокомментируйте исходя из геометрического смысла число степеней свободы числителя в выражении для F-статистики.

5.26. Объясните геометрический смысл вектора остатков и равенство их в среднем нулю при наличии константы в модели. Прокомментируйте исходя из геометрического смысла число степеней свободы знаменателя в выражении для F-статистики.

5.27. Что имеют в виду, когда говорят, что коэффициент детерминации является показателем угла между вектором и его проекцией?

5.28. Что означает, что метод МНК позволяет получить наилучший в среднем предиктор? Как это связано с понятием условного математического ожидания?

5.29. В чем различие между теоретической и эмпирической линиями регрессии?

5.30. Что означает, что оценки МНК при выполнении условий теоремы Гаусса — Маркова являются *BLUE*? Как это связано со свойством эффективности?

5.31. Приведите пример ситуации (объясняемая величина, набор регрессоров, природа ошибки, спецификация модели), при регрессионном анализе которой методом МНК коэффициент детерминации окажется малым, притом что построенная модель будет «хорошей». Объясните как можно детальнее, почему в приведенной вами ситуации такое будет происходить.

5.32. Приведите пример ситуации (объясняемая величина, набор регрессоров, природа ошибки, спецификация модели), при регрессионном анализе которой методом МНК коэффициент детерминации окажется большим, притом что построенная модель будет «плохой». Объясните как можно детальнее, почему в приведенной вами ситуации такое будет происходить.

5.33. Для того чтобы отчетная работа была оценена более высоким баллом, студент при построении парной регрессии увеличил объем выборки в k раз (k — номер варианта). Изначальное число наблюдений было 10, в модели присутствует константа. Как изменились характеристики регрессии (коэффициенты, стандартные ошибки, RSS, ESS, R^2, F)?

5.34. При оценке модели в логарифмах, объясняющей зависимость доли рынка фирмы от величины затрат, прибыли и ряда других факторов, выдвинута гипотеза, что сумма коэффициентов при логарифме прибыли и при логарифме затрат может быть признана равной нулю.

Какие бы данные вам понадобились, чтобы проверить гипотезу, и как бы вы это стали делать?

Какой следует сделать вывод (экономический) в случае признания гипотезы?

Как вы будете использовать полученную информацию для корректировки модели?

5.35. При оценке линейной модели вероятности распада брака в зависимости от частоты измен в год мужа, частоты измен в год жены и ряда других факторов выяснилось, что коэффициенты при регрессорах, отвечающих за измены, равны.

Какие бы данные вам понадобились, чтобы проверить гипотезу, и как бы вы это стали делать?

Какой следует сделать вывод (социологический) в случае признания гипотезы?

Как вы будете использовать полученную информацию для корректировки модели?

5.36. При оценке зависимости быстроты выздоровления больных от логарифмов количества использованных медикаментозных и народных средств выяснилась необходимость проверить гипотезу о том, что коэффициент при первом регрессоре может быть вдвое больше, чем при втором.

Какие бы данные вам понадобились, чтобы проверить гипотезу, и как бы вы это стали делать?

Какой следует сделать вывод (экономический) в случае признания гипотезы?

Как вы будете использовать полученную информацию для корректировки модели?

5.37. При построении по странам логарифмической зависимости объема сбережений от уровня ВВП и численности населения проверялась гипотеза о том, что сумма коэффициентов при логарифме ВВП и при логарифме численности населения равна 1.

Какие бы данные вам понадобились, чтобы проверить гипотезу, и как бы вы это стали делать?

Какой следует сделать вывод (экономический) в случае признания гипотезы?

Как вы будете использовать полученную информацию для корректировки модели?

5.38. Для проверки гипотезы о том, что между шоками экономический рост различен, проведена оценка влияния темпа роста ВВП России на объем реальных инвестиций, ВВП на душу населения и константу четырьмя способами: общая регрессия за весь период с 1992 по 2006 г., регрессии за периоды с 1992 по 1994 г., с 1995 по 1998 г. и с 1999 по 2006 г. Замеры производились раз в полгода. Стандартные ошибки в этих регрессиях: $\hat{\sigma}_1 = 0{,}02$, $\hat{\sigma}_2 = 0{,}005$, $\hat{\sigma}_3 = 0{,}01$. Общая регрессия по всем трем периодам дает стандартную ошибку $\hat{\sigma} = 0{,}015$. Проверьте гипотезу (дисперсию темпа роста считать одинаковой на всем протяжении наблюдений).

5.39. При анализе покупательского спроса зависимость среднего числа посетителей универмага от числа рекламных акций, идущих в день наблюдения, погодных условий (температура на улице, влажность, сила ветра) и константы исследователи решили учесть эффект выходного дня и эффект понедельника. В результате оценивания регрессий с учетом этих эффектов и без их учета получили значения скорректированного коэффициента детерминации $R^2_{adj} = 0{,}85$ и $R^2_{adj} = 0{,}8$. Наблюдения велись в течение года по два дня в неделю. Проверьте гипотезу о наличии указанных эффектов.

5.40. Для того чтобы попытаться предугадать оценки по эконометрике, была построена регрессия с такими объясняющими факторами: средний балл за 2-й курс, посещаемость, пол, тип оконченной школы (специальная или нет) и константа. Однако возникло подозрение, что в разных группах эта зависимость различна. При оценивании по группам получены следующие значения *RSS*: для группы из 130 человек — 10, для группы из 131 человека — 40, для группы из 133 человек — 25. Регрессия, оцененная без различия групп, дала *RSS* = 90. Проверьте гипотезу о различии регрессий по группам.

5.41. Для тестировании гипотезы о том, что рынки одно-, двух- и многокомнатных квартир различны, исследователь построил вначале общую модель по 504 наблюдениям без учета количества комнат, взяв в качестве регрессоров общую площадь, тип дома (панельный или нет), номер этажа, расстояние до метро (в минутах) и константу. При этом F-статистика оказалась равной 700. С введением в модель бинарных (*dummy*) переменных F-статистика оказалась равной 366. Проверьте гипотезу.

5.42. При исследовании частоты супружеских измен в зависимости от возраста респондента, числа лет в супружестве, уровня финансовой самостоятельности, количества детей и пола тест Голдфельда — Квандта показал, что дисперсия ошибок для мужчин меньше, чем для женщин. Как вы будете использовать эту информацию? На какие характеристики оценок эта информация повлияет?

5.43. При оценке уровня потребления C как функции дохода I и уровня цен p тест Вальда показал, что автономное потребление $C_{\text{а}}$ может быть принято равным 3000 руб/мес. (с уровнем доверительности 0,9). Как вы используете эту информацию для уточнения оценки потребления? На какие характеристики оценок эта информация повлияет?

5.44. При оценке ненаблюдаемых цен p_1, p_2 ресурсов R_1, R_2 методом МНК через затраты фирмы TC при применении теста Вальда выяснилось на 10%-ном уровне значимости, что один ресурс вдвое дороже другого. Как вы будете использовать эту информацию для получения более точных оценок стоимости факторов производства? На какие характеристики оценок эта дополнительная информация повлияет?

5.45. Для объяснения размера валового национального продукта через денежный агрегат M_2 были построены следующие модели (Y = валовой национальный продукт, $X = M_2$, под коэффициентами указаны t-статистики, r^2 – квадрат коэффициента корреляции между зависимой и независимой переменными):

$$\ln Y = \underset{3,1652}{0,5531} + \underset{41,889}{0,9882}\ln X,\ r^2 = 0,9926;$$

$$\ln Y = \underset{100,05}{6,8616} + \underset{15,597}{0,00057}X,\ r^2 = 0,9493;$$

$$Y = \underset{-23,494}{-16329,0} + \underset{27,549}{25,848}\ln X,\ r^2 = 0,9832;$$

$$Y = \underset{1,369}{101,20} + \underset{38,867}{1,5323}X,\ r^2 = 0,9915.$$

1. Проинтерпретируйте коэффициенты наклона в каждой модели.

2. Можно ли сравнить между собой коэффициенты детерминации в каких-нибудь моделях?

3. Какая модель, на ваш взгляд, наиболее адекватна? На каком критерии вы основываете свой вывод?

4. В соответствии с теорией монетаризма существует прямая пропорциональная связь между темпом изменения ВВП и предложением денег. Из какого уравнения монетаризма эта связь вытекает, чему равен коэффициент пропорциональности? Какая регрессия соответствует этой теории? Проверьте гипотезу, что коэффициент пропорциональности равен единице.

5.46. При исследовании спроса на международные резервы получена следующая регрессия на основе данных по 28 развивающимся странам (40 кварталов с 1976 по 1985 г. для каждой страны, всего 1120 точек наблюдений), под коэффициентами указаны t-статистики:

$$\ln(S/P) = \underset{2,5128}{0,1223} + \underset{17,6377}{0,4079}\ln(Y/P) + \underset{15,2437}{0,5040}\ln\sigma_{\text{BP}} - \underset{-2,7449}{0,0918}\ln\sigma_{\text{EX}},$$

$$R^2 = 0,8268;\ F = 1151;\ n = 1120.$$

Здесь S — уровень номинальных резервов, долл. США; P — дефлятор ВВП для приведения к уровню США; σ_{BP} — среднее квадратичное отклонение платежного баланса страны; σ_{EX} — среднее квадратичное отклонение обменного курса.

1. Соответствуют ли знаки при переменных ожидаемым? Поясните.

2. Проинтерпретируйте значения коэффициентов при собственных регрессорах.

3. Проверьте гипотезу, что эластичность спроса на резервы по ВВП и вариативности платежного баланса одинакова.

4. Проверьте гипотезу, что все коэффициенты одновременно могут оказаться равными нулю.

5.47. По 11 годовым наблюдениям были построены следующие регрессии (Y — количество чашек кофе на одного человека в день, X — цена кофе в долларах за фунт; под коэффициентами указаны стандартные ошибки):

$$Y = \underset{0,1216}{2,6911} - \underset{0,1140}{0,4795}X, \ r^2 = 0,6628;$$

$$\ln Y = \underset{0,0152}{0,7774} - \underset{0,0494}{0,2530}\ln X, \ r^2 = 0,7448.$$

1. Проинтерпретируйте значения коэффициентов наклона в каждой из моделей.

2. Известно, что средние выборочные значения Y и X равны 2,43 и 1,11 соответственно. Оцените при этих значениях эластичность спроса кофе по цене на основе первой модели. Сравните полученное значение с коэффициентом из второй модели. Можно ли считать значения одинаковыми? Можно ли сказать, что спрос на кофе неэластичен?

3. Какая модель, с вашей точки зрения, наиболее адекватна — постоянной эластичности или постоянного предельного спроса по цене? Обоснуйте.

4. Если бы рассматривалась модель $Y = \alpha + \beta \ln X + \varepsilon$, то чему бы были равны коэффициенты? (Рассчитайте их на основе оцененных ранее моделей и значений центра выборки.)

5.48. Для выявления факторов, влияющих на цену на кондиционеры для салонов самолетов была построена следующая регрессия по 19 наблюдениям (Y — цена в долл. США; X_1 — рейтинг кондиционера по *BTU*; X_2 — КПД по расходу энергии; X_3 — число посадочных мест в салоне самолета; под коэффициентами указаны стандартные ошибки):

$$Y = -68,236 + \underset{0,005}{0,023}X_1 + \underset{8,992}{19,729}X_2 + \underset{3,082}{7,653}X_3, \ R^2 = 0,84.$$

1. Проинтерпретируйте результаты регрессии. Согласуются ли они с экономическим смыслом?

2. Проверьте на 5%-ном уровне значимости, что рейтинг агентства *BTU* не влияет на ценообразование.

3. Какой из факторов наиболее сильно влияет на вариативность цены? Какой наиболее значим для ценообразования?

4. Можно ли считать, что учтенных трех факторов достаточно для объяснения ценообразования на кондиционеры? Какую долю вариацию цен на рынке кондиционеров они объясняют?

5.49. На основе квартальных данных с I квартала 1961 г. по II квартал 1977 г. оценена функция спроса на кофе (под коэффициентами указаны t-статистики):

$$\ln Q = 1,2789 - \underset{-2,14}{0,1647}\ln P + \underset{1,23}{0,5115}\ln I + \underset{0,55}{0,1483}P' - \underset{-3,36}{0,0089}T -$$

$$- \underset{-3,74}{0,0961}D_1 - \underset{-6,03}{0,1570}D_2 - \underset{-0,37}{0,0097}D_3, \ R^2 = 0,80.$$

Смысл переменных: Q — количество потребленного кофе на одного человека (в фунтах), P — цена на кофе (за фунт в ценах 1967 г.), I — располагаемый доход (в тыс. долл., приведенный к 1967 г.), P' — цена на чай (за четверть фунта в ценах 1967 г.), T — номер наблюдения, D_1 — дамми-переменная, для I квартала, т.е. бинарная переменная, такая что

$$D_1 = \begin{cases} 1, \text{ если наблюдение относится к первому кварталу,} \\ 0, \text{ если наблюдение относится не к первому кварталу,} \end{cases}$$

D_2 — дамми-переменная для II квартала, D_3 — дамми-переменная для III квартала.

1. Чему равна эластичность кофе по доходу?

2. К какому типу товаров относится кофе? Является ли он нормальным товаром? Является ли он предметом роскоши? Проверьте эти гипотезы.

3. Является ли спрос на кофе эластичным по цене? Проверьте эту гипотезу.

4. Проверьте гипотезу, что чай и кофе — товары-субституты.

5. Каков смысл коэффициента при T? Каков темп роста (или падения) потребления кофе со временем?

6. На что влияют коэффициенты при дамми-переменных? Какое предположение лежит в основе этой модели?

5.50. Может ли при учете структурного сдвига в модели F-статистика уменьшиться по сравнению с моделью без учета сдвига? Обоснуйте ваш ответ. Что вы можете сказать об изменении значимости модели в целом?

5.51. При оценивании модели были получены следующие промежуточные результаты:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \hat{\sigma}^2 = 2.$$

Проверьте гипотезу $\beta_1 = \beta_2$ на 10%-ном уровне значимости (количество наблюдений считать достаточно большим).

5.52. Занимаясь изучением чистого экспорта, исследователь оценил следующее уравнение: $X = \alpha + \beta \ln Y + \gamma R + u$, где Y — валовый национальный доход, млрд долл., R — процентная ставка, %; X — чистый экспорт, млн долл. (средние значения: $X = 5$, $R = 12$)[1]:

Source	SS	df	MS
Model	708.667941	****	*********
Residual	*********	****	*********
Total	2867.55991	****	*********

Number of obs	=	***
F(***, 501)	=	***
Prob > F	=	******
R-squared	=	******
Adj R-squared	=	******
Root MSE	=	******

X	Coef.	Std. Err.	t	[95% Conf.	Interval]
lnY	********	.0164755	*****	*******	.0011622
R	********	1.408489	-6.14	-11.41101	-5.877361
_cons	30.07877	********	8.76	*******	********

1. Дайте интерпретацию коэффициента β.

2. Найдите эластичность чистого экспорта по доходу в точке $X = 5{,}5$ и $Y = 200$.

3. Как изменятся коэффициенты регрессии, если Y измерять в млн долл.?

4. На каком минимальном уровне значимости будет значим коэффициент β?

5. Найдите 90%-ный доверительный интервал для коэффициента β.

6. Рассчитайте прогнозное значение и 90%-ный доверительный интервал для него в точке, соответствующей 125% от среднего значения факторов.

7. Найдите 95%-ный доверительный интервал для дисперсии ошибок регрессии.

8. Заполните пропуски в таблице.

5.53. Занимаясь изучением предложения денег в стране, исследователь оценил следующее уравнение: $M = \alpha + \beta Y + \gamma R + u$, где M — денежная масса, млн долл.; Y — валовой внутренний доход, млрд долл.; R — процентная ставка, %:

---

[1] В этой и следующей задачах приводимые результаты соответствуют выдаче на экран результатов в пакете *Stata*.

Source	SS	df	MS
Model	*********	****	*********
Residual	*********	****	*********
Total	*********	****	*********

Number of obs	=	***
F(***, ***)	=	36.39
Prob > F	=	0.0000
R-squared	=	0.1425
Adj R-squared	=	0.1386
Root MSE	=	14.115

M	Coef.	Std. Err.	t	[95% Conf.	Interval]
Y	.4770299	*******	****	4.963776	6.996291
R	-6.795488	*******	****	-.1711575	.0113384
_cons	********	3.90063	-0.15	-11.51152	-1.353463

1. Дайте интерпретацию коэффициента при R.

2. Вычислите, насколько необходимо увеличить денежную массу, если Y вырастет на 1%.

3. Как изменятся коэффициенты регрессии, если ее строить в отклонениях от равновесного уровня: $(M, Y, R) = (50, 100, 4)$.

4. Проверьте гипотезу, что $\beta = 0{,}7$ против альтернативы $\beta < 0{,}7$.

5. Проверьте на 10%-ном уровне значимости гипотезу о значимости константы.

6. Рассчитайте прогнозное значение и 90%-ный доверительный интервал для него в точке, соответствующей 110% от равновесного значения факторов.

7. Найдите 95%-ный доверительный интервал для дисперсии ошибок регрессии.

8. Заполните пропуски в таблице.

5.54. Дана модель $y = y_0 + (x - x_0)\beta + \varepsilon$. Предлагается следующая оценка коэффициента β: $\hat{\beta} = \overline{\left(\dfrac{y_i - y_0}{x_i - x_0}\right)}$. Проверьте ее на несмещенность и состоятельность (считается, что любые необходимые выборочные функции от x существуют и конечны). Как вы считаете: будет ли ее дисперсия больше, меньше или равна дисперсии оценки МНК? Ответ поясните.

5.55. Дана модель $y = x\beta + \varepsilon$ с классическими предположениями об ошибках. Предлагается следующая оценка коэффициента β: $\hat{\beta} = \overline{\left(\dfrac{y}{x}\right)}$. Проверьте ее на несмещенность и состоятельность (считается, что среднее степени (-2) для x существует). Как вы считаете: будет ли ее дисперсия больше, меньше или равна дисперсии оценки МНК? Ответ поясните.

5.56. Дана модель $y = x\beta + \varepsilon$ с классическими предположениями об ошибках. Предлагается следующая оценка коэффициента β: $\hat{\beta} = \dfrac{\overline{y}}{\overline{x}}$. Проверьте ее на несмещенность и состоятельность (считается, что среднее арифметическое для x существует). Как вы считаете: будет ли дисперсия больше, меньше или равна дисперсии оценки МНК? Ответ поясните.

5.57. Исследователь построил регрессию y на x_1 и получил следующие результаты:

Source	SS	df	MS
Model	401.453748	1	401.453748
Residual	1067.42372	251	4.25268415
Total	1468.87747	252	5.82887885

Number of obs	=	253
F(1, 251)	=	94.40
Prob > F	=	0.0000
R-squared	=	0.2733
Adj R-squared	=	0.2704
Root MSE	=	2.0622

y	Coef.	Std. Err.	t	P > |t|	[95% Conf.	Interval]
x1	.1356114	.0139576	9.72	0.000	.1081225	.1631002
_cons	6.649915	.7266599	9.15	0.000	5.218787	8.081042

Предположив, что фактор z также влияет на y, он построил еще одну регрессию (спецификация модели: $y = \alpha x_1 + \beta z_2 + u$) и получил следующие результаты:

Source	SS	df	MS
Model	452.231438	2	226.115719
Residual	1016.64603	250	4.06658413
Total	1468.87747	252	5.82887885

Number of obs	=	253
F(2, 250)	=	55.60
Prob > F	=	0.0000
R-squared	=	0.3079
Adj R-squared	=	0.3023
Root MSE	=	2.0166

y	Coef.	Std. Err.	t	P > |t|	[95% Conf.	Interval]
x1	.1172495	.0146045	8.03	0.000	.088486	.1460129
Z2	.1759841	.0498026	3.53	0.000	.077898	.2740702
_cons	5.564282	.7741556	7.19	0.000	4.039584	7.08898

1. С помощью F-теста проверьте, улучшилась ли регрессия после добавления фактора z^2 (на 1%-ном уровне значимости) и выберите одну из двух регрессий.

2. Для выбранной регрессии на 10%-ном уровне значимости проверьте гипотезу о том, что $\alpha = 0{,}08$ против альтернативы $\alpha > 0{,}08$.

3. Для регрессии $y = \alpha x_1 + \beta z_2 + u$ найдите максимальное значение y при условии, что значение фактора x_1 задано и равно 100.

5.58. Имеется модель спроса на товары уличной торговли «все по p рублей» за 15 лет (1993—2007):

$$q = \underset{129{,}18}{957{,}335} - \underset{21{,}327}{110{,}153}\,p + \underset{62{,}225}{255{,}529}\,a - \underset{8{,}020}{43{,}376}\,a^2 + \underset{10{,}743}{15{,}381}\,dp,$$

где q — количество продаваемого в день товара, шт.; p — цена единицы товара, руб.; a — расходы на рекламу в месяц, тыс. руб.; d — дамми-переменная, отражающая период наблюдения (0 — до кризиса 1998 г., 1 — после).

1. Объясните, почему исследователь выбрал такую форму модели. Какую бы ее модификацию предложили вы?

2. Проинтерпретируйте значение коэффициента при dp, определите его уровень значимости.

3. Найдите предельный объем продаж по расходу на рекламу, если на нее тратится 2,8 тыс. руб. в месяц, а товар в этом году продается по цене 10 руб/шт.

4. Проверьте гипотезу, что коэффициент при p равен -100, на 90%-ном уровне значимости.

5. Найдите оптимальную цену, по которой следует продавать товар при данном уровне расходов на рекламу и стоимости закупки 2 руб/шт.

5.59. Дана $y = \alpha + \beta x + u$ — спецификация модели. $R^2 = 0{,}8$, $TSS = 100$, $F = 200$. Найдите $RMSE$ и R^2_{adj}.

5.60. Основываясь на ковариационной матрице Y, X_1 и X_2:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & Y & X_1 & X_2 \\ \hline Y & 20 & 1 & 0{,}9 \\ X_1 & 1 & 0{,}1 & 0{,}05 \\ X_2 & 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05 \end{array}\right),$$

найдите $RMSE$ в регрессии $Y - \overline{Y} = \beta_1(X - \overline{X}_1) + \beta_2(X - \overline{X}_2) + \varepsilon$, оцененной по 100 наблюдениям.

5.61. Основываясь на приведенных данных об Y, $X1$ и $X2$, найдите коэффициенты и показатель R^2 в регрессии $Y - \overline{Y} = \beta_1(X - \overline{X}_1) + \beta_2(X - \overline{X}_2) + \varepsilon$, оцененной по 100 наблюдениям:

$$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = 400;\ \sum (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 = 2;\ \sum (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 = 1;$$

$$\sum(X_{1i}-\bar{X}_1)(X_{2i}-\bar{X}_2)=1;\ \sum(X_{1i}-\bar{X}_1)(Y_i-\bar{Y})=20;$$
$$\sum(X_{2i}-\bar{X}_1)(Y_i-\bar{Y})=18.$$

Если бы в регрессию была включена константа, то чему она была бы равна? Почему?

5.62. Дана модель $y = d_{1i}\beta_1 + d_{2i}\beta_2 + \varepsilon_i$, $i = 1, ..., 3n$;

$$d_1=\begin{cases}1, i=1,...,2n,\\0, i=2n+1,...,3n;\end{cases}\quad d_2=\begin{cases}0, i=1,...,n,\\1, i=n+1,...,3n.\end{cases}$$

1. Найдите оценки МНК $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$.

2. Чему равна матрица ковариаций $\operatorname{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$?

3. Если $y_i = 0$, $i = 1, ..., n, 2n + 1, ..., 3n$, то как вы объясните получившиеся значения коэффициентов?

5.63. Дана модель $y = d_{1i}\beta_1 + d_{2i}\beta_2 + \varepsilon_i$, $i = 1, ..., 3n$;

$$d_1=\begin{cases}1, i=1,...,n,\\0, i=n+1,...,3n;\end{cases}\quad d_2=\begin{cases}1, i=1,...,2n,\\0, i=2n+1,...,3n.\end{cases}$$

1. Найдите остатки от регрессии МНК y на d_1. Можно ли было ожидать из геометрического смысла регрессии, что они имеют такой вид? Объясните почему.

2. Найдите остатки от регрессии d_2 на d_1. Можно ли было ожидать из геометрического смысла регрессии, что они имеют такой вид? Объясните почему.

3. Найдите $\hat{\beta}_2$. Проинтерпретируйте результат.

5.64. Имеются данные о расходах респондентов, половина из которых — женщины, на новогодние подарки. Строится регрессия расходов (руб.) на константу и пол (1 — женский, 0 — мужской). Какой смысл имеют коэффициенты этой регрессии? Определите, во сколько раз вариация оценки константы будет отличаться от вариации оценки коэффициента при дамми-переменной (дисперсия заработной платы по всем наблюдениям одинаковая). Какой экономический смысл будут иметь остатки этой регрессии, и в каких регрессиях их имеет смысл использовать?

5.65. Имеются помесячные данные о количестве проданных путевок на курорты Анталии за несколько лет. Строится регрессия объема продаж (шт.) на две дамми-переменные: первая принимает значение 1, если наблюдаемый месяц — летний, и 0 — во все остальные месяцы, вторая принимает значение 0, если наблюдаемый месяц — летний, и 1 — во все остальные месяцы. Какой смысл имеют коэффициенты этой регрессии? Определите, во сколько раз вариация оценки первой переменной будет отличаться от вариации оценки второй переменной? (Дисперсия ошибок во всех наблюдениях одинакова.)

Какой экономический смысл будут иметь остатки этой регрессии, и в каких регрессиях имеет смысл их использовать?

Глава 6
МОДЕЛИ ФИНАНСОВОГО МЕНЕДЖМЕНТА

В результате изучения главы 6 студент должен:

знать

• модель оценки доходности финансовых активов;

• теорию Модильяни — Миллера;

уметь

• оценивать ожидаемую доходность и риск портфеля ценных бумаг;

владеть

• основными приемами финансового анализа и финансового менеджмента.

6.1. Обзор ключевых понятий и положений

Теоретические положения данного раздела математических методов и моделей в экономике относительно просты (несмотря на то что он является совершенно обязательным пререквизитом для понимания современного экономического анализа), но уверенное владение материалом, изложенным в данной главе приобретается только в результате решения большого количества задач. Вот почему в качестве введения к нему ограничимся кратким обзором основных понятий и положений.

Денежные ресурсы, участвующие в финансовой операции, имеют *временну́ю ценность*.

Эффективность любой финансовой операции $PV \rightarrow FV$, предполагающей наращение исходной суммы PV (*present value*) до ожидаемой в будущем к получению суммы FV (*future value*), может быть охарактеризована соответствующей ставкой. Известны два вида ставок: процентная и учетная.

Процентная ставка рассчитывается отношением наращения к базовой величине PV:

$$r = \frac{FV - PV}{PV}.$$

Учетная ставка рассчитывается отношением наращения к возвращаемой, или наращенной, величине FV:

$$r = \frac{FV - PV}{FV}.$$

В финансовых операциях в качестве *коэффициента дисконтирования* может использоваться либо процентная (математическое дисконтирование), либо учетная (банковское дисконтирование) ставка.

Схема простых процентов предполагает неизменность базы, с которой происходит начисление:

$$FV = PV(1 + nr),$$

где n — число периодов начисления.

Схема сложных процентов предполагает их капитализацию, т.е. база, с которой происходит начисление, постоянно возрастает:

$$FV = PV(1 + r)^n,$$

где n — также число периодов начисления. Более частое начисление сложных процентов обеспечивает более быстрый рост наращиваемой суммы.

Точный процент исчисляется исходя из точного числа дней, а *обыкновенный* — исходя из приближенного числа дней в году.

При начислении *процентов за дробное число лет* более эффективна смешанная схема, предусматривающая начисление сложных процентов за целое число лет и простых процентов за дробную часть года.

Эффективная процентная ставка позволяет сравнивать финансовые операции с различной частотой начисления и неодинаковыми процентными ставками.

Для *небольших значений процентной* ставки r частное от деления 72 на r показывает число периодов, за которое исходная сумма удвоится при наращивании ее по этой ставке с использованием формулы сложных процентов (правило 72-х).

Аннуитет — денежный поток с равными поступлениями через равные промежутки времени.

Если срок действия аннуитета ограничен, аннуитет называется *срочным*; если поступления осуществляются неопределенно долго, аннуитет называется *бессрочным*. Если платежи осуществляются в начале периодов, аннуитет носит название *пренумерандо*, если в конце периодов — *постнумерандо*.

Значения мультиплицирующих и дисконтирующих множителей для упрощения расчетов табулируются в специальных *финансовых таблицах* (обычно четыре вида).

В основе *оценки облигаций* заложены алгоритмы оценки аннуитетов.

Определяются различные виды доходности облигаций, связанные между собой несложными правилами.

Привилегированные акции, эмитированные с условием обязательного погашения по истечении некоторого времени, оцениваются подобно срочным облигациям.

Ожидаемая общая доходность обыкновенной акции состоит из ожидаемой дивидендной доходности и доходности капитализированной прибыли.

Реинвестирование прибыли способствует росту цены акций фирмы только в том случае, если невыплаченная прибыль реинвестируется в проекты с доходностью, превышающей рентабельность собственного капитала фирмы.

Производственный риск связан с понятием операционного, или производственного, левериджа, а финансовый — с понятием финансового левериджа.

Операционный леверидж характеризуется соотношением между постоянными и переменными расходами в их общей сумме. Чем выше уровень операционного левериджа, тем выше производственный риск компании.

Финансовый леверидж — характеристика соотношения между заемным и собственным капиталом; уровень финансового левериджа прямо пропорционально влияет на степень финансового риска компании.

Методы оценки и анализа инвестиционных проектов подразделяются на две категории:

а) основанные на дисконтированных оценках;

б) основанные на учетных оценках.

Основными критериями, используемыми в оценке инвестиционных проектов, являются:

• чистая приведенная стоимость (*net present value, NPV*);

• индекс рентабельности инвестиции (*profitability index, PI*);

• внутренняя норма доходности (*internal rate of return, IRR*);

• модифицированная внутренняя норма прибыли (*modified internal rate of return, MIRR*);

• срок окупаемости инвестиции (*payback period, PP*);

• расчетная норма прибыли (*accounting rate of return, ARR*).

Логика критерия NPV такова:

• если $NPV < 0$, то в случае принятия проекта владельцы компании понесут убыток;

• если $NPV = 0$, то в случае принятия проекта благосостояние владельцев компании не изменится, но в то же время объемы производства возрастут, т.е. компания увеличится в масштабах;

• если $NPV > 0$, то в случае принятия проекта благосостояние владельцев компании увеличится.

Логика критерия PI: он характеризует доход на единицу затрат.

Логика критерия IRR: он показывает максимальный уровень затрат, который может быть ассоциирован с данным проектом, т.е. если цена капитала, привлекаемого для финансирования проекта, больше *IRR*, то проект может быть выполнен только в убыток и его следует отвергнуть.

Логика критерия MIRR: это коэффициент дисконтирования, уравнивающий приведенную стоимость оттоков денежных средств (инвестиций) и наращенную величину притоков, причем операции дисконтирования оттоков и наращения притоков выполняются с использованием цены капитала проекта. *MIRR* характеризует эффективность проекта.

Логика критерия PP: он показывает число базовых периодов, за которое исходная инвестиция будет полностью возмещена за счет генерируемых проектом притоков денежных средств. Если базовый период — год, то чаще всего расчет идет по годам, однако можно выделять и дробную часть года, если абстрагироваться от предположения, что приток денежных средств осуществляется в конце года.

Критерий *NPV* отражает прогнозную оценку изменения экономического потенциала предприятия в случае принятия рассматриваемого проекта; обладает свойством аддитивности, т.е. *NPV* различных проектов можно суммировать для нахождения общего эффекта.

Величина *NPV* вычисляется следующим образом:

$$NPV = -I + \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i}{(1+r)^i},$$

где I — величина начальных инвестиций в проект в 0-й период; $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ — инкрементальный релевантный денежный поток, связанный с проектом, т.е. C_i — это разность между денежным потоком предприятия в период i, если проект исполняется, и денежным потоком предприятия в период i, если проект отвергнут (разумеется, каждая величина C_i в конкретный период i может быть как положительной, так и равной нулю или отрицательной); n — длительность инвестиционного проекта, другими словами, после прохождения n временны́х периодов денежные потоки предприятия будут такими же, какими бы они были, если бы данный проект не был выполнен (в частности, может быть, что $n = +\infty$); r — ставка дисконтирования, т.е. временна́я стоимость денег для рассматриваемого предприятия.

Величина *IRR* равняется корню уравнения $NPV(x) = 0$, т.е. это такая ставка дисконтирования, такая временна́я стоимость денег, которая уравнивает чистую приведенную стоимость денежных притоков от данного проекта и чистую привенденную стоимость денежных оттоков от него. Можно показать, что для регулярного денежного потока уравнение $NPV(x) = 0$ имеет единственный положительный корень. *Регулярным денежным потоком* называется такой денежный поток, у которого если и есть $C_i < 0$, то при небольших значениях i, а начиная с некоторого временно́го промежутка все $C_i \geqslant 0$.

Критерий *IRR* показывает лишь максимальный уровень затрат, который может быть ассоциирован с оцениваемым проектом (в частности, если *IRR* двух альтернативных проектов больше цены привлекаемых для их реализации источников средств, то выбор лучшего из них по критерию *IRR* невозможен; *IRR* не обладает свойством аддитивности; для нерегулярных денежных потоков *IRR* может иметь несколько значений).

Критерий *NPV* предполагает дисконтирование денежного потока по цене капитала проекта, а критерий *IRR* — по ставке, численно равной *IRR*.

Критерий NPV является наиболее универсальным и предпочтительным при анализе инвестиционных проектов, поскольку именно он характеризует возможный прирост благосостояния владельцев компании.

Точка Фишера является пограничной точкой на оси абсцисс графика *NPV*, разделяющей ситуации: «улавливаемые» критерием *NPV* и «не улавливаемые» критерием *IRR*.

Если значение цены капитала находится за пределами точки Фишера, то критерии *NPV* и *IRR* дают одинаковые результаты при оценке альтернативных инвестиционных проектов; если цена капитала меньше точки Фишера, то критерии *NPV* и *IRR* противоречат друг другу.

Точка Фишера численно равна *IRR* потока дельта-проекта, т.е. потока, составленного из разностей соответствующих элементов исходных потоков. Для ее нахождения необходимо:

а) составить гипотетический дельта-проект;

б) найти *IRR* этого проекта.

Для сравнительного анализа проектов различной продолжительности применяются следующие *методы:*

- наименьшего общего кратного;
- бесконечного повторения сравниваемых проектов;
- эквивалентного аннуитета.

В условиях инфляции корректируется либо прогнозный денежный поток, либо коэффициент дисконтирования.

Анализ инвестиционных проектов в условиях риска выполняется одним из двух методов: методом безрискового эквивалента или методом скорректированного на риск коэффициента дисконтирования.

Оптимизация бюджета капиталовложений имеет место всякий раз, когда по некоторым причинам *размер инвестиций ограничен сверху*.

6.2. Модель оценки доходности финансовых активов

6.2.1. Линия рынка капитала

Модель оценки доходности финансовых активов (*capital asset pricing model, CAPM*) была разработана Уильямом Ф. Шарпом и впервые опубликована в статье «Оценка финансовых активов: теория рыночного равновесия в условиях риска»[1].

Модель оценки основывается на следующих предположениях.

1. Инвесторы оценивают инвестиционные портфели, основываясь на ожидаемых доходностях и их стандартных отклонениях за период владения.

2. Инвесторы никогда не бывают пресыщенными. При выборе между двумя портфелями они предпочтут тот, который при прочих равных условиях дает наибольшую ожидаемую доходность.

3. Инвесторы не желают рисковать. При выборе между двумя портфелями они предпочтут тот, который при прочих равных условиях имеет наименьшее стандартное отклонение.

4. Частные активы бесконечно делимы. При желании инвестор может купить часть акции.

5. Существует безрисковая процентная ставка, по которой инвестор может дать взаймы (инвестировать) или взять в долг денежные средства.

6. Налоги и операционные издержки несущественны.

7. Для всех инвесторов период вложения одинаков.

8. Безрисковая процентная ставка одинакова для всех инвесторов.

9. Информация свободно и незамедлительно доступна для всех инвесторов.

10. Инвесторы имеют однородные ожидания, т.е. они одинаково оценивают ожидаемые доходности, средние квадратичные отклонения и ковариации доходностей ценных бумаг.

Определение 6.1. *Эффективным портфелем* называется такой портфель, который обеспечивает максимальную ожидаемую доходность при любом уровне риска или минимальный уровень риска для любой ожидаемой доходности.

Рассмотрим сначала множество всевозможных портфелей, или допустимое множество, в случае двух активов.

Пусть ожидаемая доходность ценной бумаги A есть $r_A = 5\%$, а среднее квадратичное отклонение доходности $\sigma_A = 4\%$, тогда как для бумаги B, соответственно, $r_B = 8\%$ и $\sigma_B = 10\%$. Построим множество допустимых портфелей и затем выделим из него подмножество эффективных портфелей.

---

[1] *Sharpe W. F.* Capital asset prices: A theory of market equilibrium under condition of risk // Journal of Finance. 1964. Vol. 19. № 3. P. 425–442.

Пусть x — доля портфеля, инвестируемая в ценную бумагу A, соответственно $(1 - x)$ — доля портфеля, инвестируемая в ценную бумагу B. Тогда

$$r_p = x_A r_A + x_B r_B;$$

$$\sigma_p^2 = \sqrt{x^2\sigma_A^2 + (1-x)^2\sigma_B^2 + 2x(1-x)\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B}.$$

Рассмотрим три значения коэффициента корреляции $r_{A,B}$: +1; 0; –1 (рис. 6.1).

На рис. 6.1 приведены ожидаемые доходности и средние квадратичные отклонения доходностей (риски) портфелей, составленных из двух финансовых активов A и B при различных структурах портфеля для трех крайних случаев: вариант 1 — доходности активов полностью коррелируют, коэффициент корреляции равен 1; вариант 2 — доходности портфелей некоррелированы, коэффициент корреляции равен 0; вариант 3 — финансовые активы находятся в противофазе, коэффициент корреляции доходностей равен –1. Для каждого из трех вариантов на левом рисунке изображено изменение ожидаемой доходности портфеля с ростом доли в нем ценной бумаги B от 0 до 100%. На центральном рисунке для каждого варианта изображено изменение риска портфеля (среднеквадратичного отклонения доходности) с ростом доли в портфеле ценной бумаги B. На правом рисунке для каждого из трех вариантов изображена кривая в координатах «риск — доходность», которая показывает изменение эти характеристик при изменении структуры портфеля.

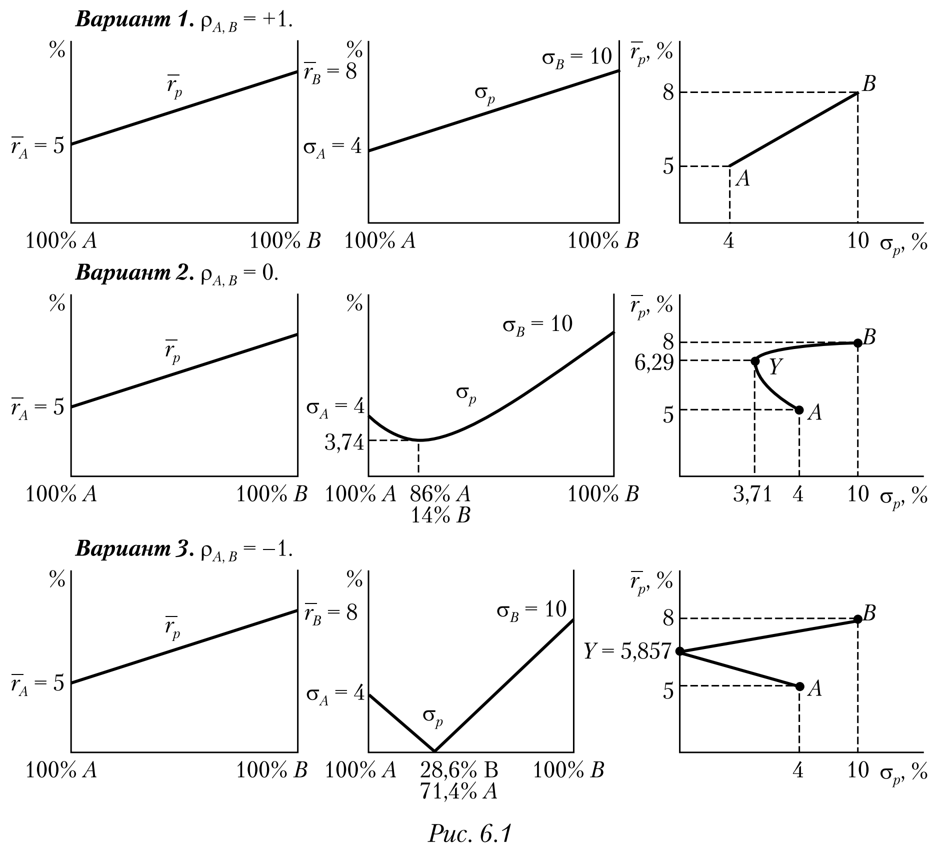


Рис. 6.1

Таким образом, на рис. 6.1 показано допустимое, или возможное, множество портфелей. В нашем случае двух активов допустимое множество представляет собой отрезок прямой или кривой, причем любая комбинация риска и доходности на соответствующей кривой может быть получена распределением денежных ресурсов между ценными бумагами A и B.

Определение 6.2. Набор портфелей, каждый из которых обеспечивает максимальную ожидаемую доходность для некоторого уровня риска и минимальный риск для некоторого значения ожидаемой доходности, называется *эффективным множеством.*

Все ли портфели из допустимого множества являются одинаково хорошими? Нет. В вариантах 2 и 3 только часть допустимого множества YB является эффективной.

При увеличении числа активов линия трансформируется в некоторую область, где точки A, H, G, E соответствуют отдельным ценным бумагам (рис. 6.2). Все остальные точки заштрихованной области, включая ее границы, соответствуют портфелям, состоящим из двух или более акций. Эта область называется допустимым, или возможным, множеством. Граница BCE определяет эффективное множество и называется также *границей эффективности.*

На рис. 6.3 добавлен безрисковый актив с доходностью r_{RF}. По определению, безрисковый актив имеет нулевой риск, $\sigma = 0\%$, поэтому он может быть изображен точкой на вертикальной оси.

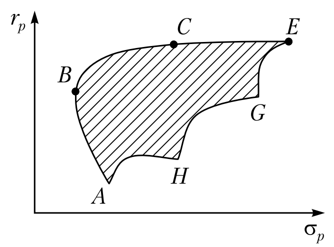


Рис. 6.2

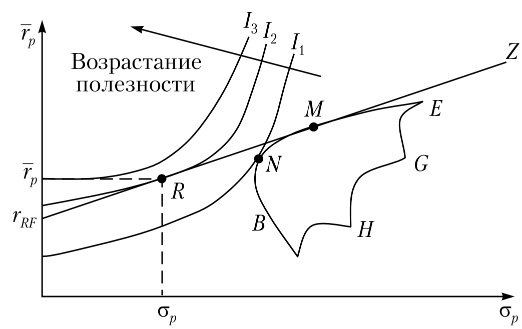


Рис. 6.3

Инвестор перейдет из точки N в точку R, которая находится на более высокой достижимой кривой безразличия риск-доходность. Таким образом, добавление безрисковой бумаги ведет к изменению эффективного множества: оно теперь лежит вдоль линии $r_{RF}MZ$, а не вдоль кривой BCE.

И так как эффективное множество представляет собой луч, то оптимальный портфель включает инвестиции в так называемый касательный портфель M, комбинированные с определенным количеством безрисковых вложений и кредитов. В итоге в равновесном случае все инвесторы выбирают один и тот же касательный портфель M.

В связи с тем что все инвесторы имеют одно и то же эффективное множество, единственной причиной, по которой они предпочтут различные портфели, является то, что они характеризуются различными кривыми безразличия. Таким образом, различные инвесторы выбирают различные портфели из одного и того же эффективного множества ввиду различного предпочтения ими риска и доходности.

Это означает, что каждый инвестор распределит свои средства среди рискованных бумаг в одной и той же относительной пропорции, увеличивая безрисковое заимствование или кредитование с целью достижения предпочтительной для него комбинации риска и дохода. Это свойство *CAPM* часто называют *теоремой разделения*, или *сепарации*. Оптимальная для инвестора комбинация рискованных активов не зависит от предпочтений относительно риска и дохода. Другими словами, оптимальная комбинация рискованных активов может быть определена без построения кривых безразличия каждого инвестора, следовательно, доля любой рискованной ценной бумаги среди всех рискованных ценных бумаг в портфеле каждого инвестора будет одной и той же.

6.2.2. Рыночный портфель

Другим важным свойством *CAPM* является то, что в состоянии равновесия каждый вид ценных бумаг имеет ненулевую долю в касательном портфеле. Это означает, что в состоянии равновесия доля любой ценной бумаги в портфеле *M* отлична от нуля.

Если каждый инвестор приобретает портфель *M* и при этом в него не включены инвестиции во все виды бумаг, то получается, что никто не инвестировал в те бумаги, которые имели нулевую долю в *M*. Это должно привести к тому, что курсы ценных бумаг с нулевой долей в *M* упадут, вызвав рост их ожидаемой доходности до тех пор, пока в касательном портфеле их доля не станет отличной от нуля.

В итоге установится баланс, когда прекратятся все изменения курсов, рынок займет положение равновесия. Тогда, во-первых, каждый инвестор захочет держать определенное положительное число рискованных бумаг каждого вида. Во-вторых, текущий рыночный курс каждой ценной бумаги будет находиться на уровне, уравновешивающем спрос и предложение. В-третьих, величина безрисковой ставки будет такой, что общая сумма денежных средств, взятых в долг, будет равна общей сумме денег, предоставленных взаймы. В результате соотношение долей каждой бумаги в касательном портфеле в состоянии равновесия будет соответствовать соотношению долей бумаг в так называемом рыночном портфеле, которому дано следующее определение.

Определение 6.3. *Рыночный портфель* — это портфель, состоящий из всех ценных бумаг, в котором доля каждой бумаги соответствует ее относительной рыночной стоимости. Относительная рыночная стоимость ценной бумаги равна ее совокупной рыночной стоимости, деленной на сумму совокупных рыночных стоимостей всех ценных бумаг.

Таким образом, вполне правомерно отождествить касательный портфель с рыночным, поэтому он и обозначен как *M*. Теоретически *M* состоит не только из обыкновенных акций, но и из других видов инвестиций, таких как облигации, привилегированные акции и недвижимость. Однако на практике иногда под *M* понимают портфель, содержащий только обыкновенные акции.

Еще одно равносильное понятие — *средняя акция* в рыночном портфеле — определяется как статистическое понятие в терминах ожидаемой доходности, среднего квадратичного отклонения и ковариации с другими активами.

Линия $r_{RF}MZ$ называется *линией рынка капитала* (*capital market line, CML*).

Ее наклон $\frac{\overline{r}_m - r_{RF}}{\sigma_m}$, поэтому уравнение *CML* может быть записано следующим образом:

$$\overline{r}_p = r_{RF} + \frac{\overline{r}_m - r_{RF}}{\sigma_m}\sigma_p.$$

Состояние равновесия на рынке ценных бумаг может быть охарактеризовано двумя ключевыми величинами. Первая — это ордината точки пересечения *CML* с вертикальной осью (т.е. безрисковая ставка), которую часто называют *наградой за ожидание*. Вторая — это наклон *CML*, который называют *наградой за единицу принятого риска*. Фондовый рынок позволяет осуществлять торговлю временем и риском по ценам, определяемым спросом и предложением. Таким образом, две эти величины можно интерпретировать как цены времени и риска.

Линия *CML* устанавливает линейную зависимость между ожидаемой доходностью $\overline{r}_p$ и риском σ_p. Величина $\overline{r}_m - r_{RF}$ называется *премией за рыночный риск*.

Ожидаемая доходность эффективного портфеля (т.е. лежащего на *CML*) равна сумме безрисковой ставки и *премии за риск*, равной произведению величины $(\overline{r}_m - r_{RF})/\sigma_m$, т.е. *награды за единицу риска*, на среднее квадратичное отклонение доходности портфеля σ_p, т.е. на *величину риска* данного портфеля.

6.2.3. Линия рынка ценных бумаг

Перейдем теперь от риска и доходности эффективных портфелей к риску и доходности отдельных ценных бумаг.

Линия *CML* представляет собой равновесное соотношение ожидаемой доходности и среднеквадратического отклонения для эффективных портфелей. Отдельные рискованные бумаги всегда будут находиться ниже этой прямой, так как единичная рискованная бумага сама по себе является неэффективным портфелем.

В *CAPM* рискованность ценной бумаги измеряется ее коэффициентом β, характеризующим изменчивость доходности акции относительно доходности рынка ценных бумаг. По определению, некая средняя акция имеет β, равный 1; акция, изменчивость доходности которой выше, чем в среднем на рынке, имеет $\beta > 1$, а акция с изменчивостью доходности ниже рыночной — $\beta < 1$.

Коэффициент β — это индекс чувствительности к ситуации на рынке: он измеряет относительную чувствительность данной акции по сравнению со средней акцией, или рынком:

$$\beta_i = \frac{\operatorname{cov}(r_i, r_m)}{\sigma_m^2} = \frac{\rho_{i,m}\sigma_i\sigma_m}{\sigma_m^2} = \frac{\rho_{i,m}\sigma_i}{\sigma_m},$$

где ρ_i, m — коэффициент корреляции доходности i-й ценной бумаги и рынка в целом, так что

$$\bar{r}_i = r_{RF} + (\bar{r}_m - r_{RF})\beta_i = r_{RF} + (\bar{r}_m - r_{RF})\text{cov}(r_i, r_m)/\sigma_m^2 =$$
$$= r_{RF} + [(\bar{r}_m - r_{RF})/\sigma_m]\sigma_i \text{cov}(r_i, r_m)/(\sigma_i\sigma_m) =$$
$$= r_{RF} + [(\bar{r}_m - r_{RF})/\sigma_m]\sigma_i\rho_{i,m} = r_{RF} + \varphi\sigma_i\rho_{i,m},$$

где $\varphi = (\bar{r}_m - r_{RF})/\sigma_m$ — плата за единицу принятого риска.

Уравнение, устанавливающее связь между риском акции, измеряемым β, и доходностью акции, называется *уравнением линии рынка ценных бумаг* (*security market line*, *SML*):

$$\bar{r}_i = r_{RF} + (\bar{r}_m - r_{RF})\beta_i,$$

где r_i — требуемая доходность i-й акции; r_{RF} — безрисковая доходность; r_m — требуемая доходность портфеля, состоящего из всех акций, или рыночного портфеля, или средней акции в рыночном портфеле; $\bar{r}_m - r_{RF} = RP_m$ — рыночная премия за риск, или цена риска для средней акции. Это та дополнительная доходность, превышающая безрисковую доходность, которая требуется, чтобы компенсировать инвесторам принимаемую ими среднюю величину риска; β_i — коэффициент в i-й акции; $(\bar{r}_m - r_{RF})\beta_i = RP_i$ — премия за риск владения i-й акцией. Этот показатель варьирует в зависимости от того, является ли данная акция более или менее рискованной по сравнению с другими, т.е. имеющей большее или меньшее значение β.

Интересен тот факт, что рискованная ценная бумага с $\text{cov}(r_i, r_m) - \sigma_{i,m} = 0$ будет иметь ожидаемую доходность, равную ставке процента безрисковой бумаги r_{RF}. Объясняется это тем, что такая рискованная ценная бумага, так же как и безрисковая, не добавляет риска в рыночный портфель. И это имеет место, несмотря на то что рискованная бумага имеет положительное среднее квадратичное отклонение, а у безрисковой бумаги оно нулевое.

Возможно даже, что ожидаемая доходность некоторых рискованных бумаг окажется ниже, чем безрисковая ставка. Согласно *CAPM* это происходит, когда $\sigma_i, m < 0$, т.е. ценные бумаги вносят отрицательную величину риска в рыночный портфель (вносимый ими в рыночный портфель риск меньше, чем в случае, когда в эти бумаги инвестируется меньше средств).

Другим примечательным фактом является то, что рискованная бумага с $\sigma_{i,m} = \sigma_m^2$ будет иметь ожидаемую доходность $\bar{r}_m$, равную ожидаемой доходности рыночного портфеля. Это связано с тем, что такая бумага вносит среднюю величину риска в рыночный портфель.

Следует отметить, что *SML* должна проходить через точку, изображающую рыночный портфель. Значение в для этой точки равно 1, а ожидаемая доходность равна $\bar{r}_m$, т.е. ее координатами является пара 1 и $\bar{r}_m$. Так как значение коэффициента в безрисковых бумаг равно 0, то *SML* должна проходить также через точку с координатами 0 и r_{RF}, т.е. должна пересекать вер-

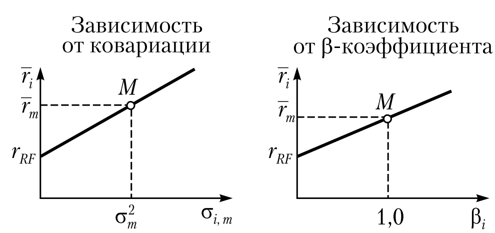


Рис. 6.4

тикальную ось в точке с ординатой r_{RF} (см. рис. 6.4, через M обозначен рыночный портфель).

Теперь легко вычислить наклон *SML* как разницу ординат этих точек $(\overline{r}_m - r_{RF})$), деленную на разницу их абсцисс (1 – 0), в итоге наклон равен $\overline{r}_m - r_{RF}$. Эти две точки, которые определяют положение луча *SML*, представляют собой приемлемые ожидаемые доходности ценных бумаг и портфелей с различными значениями β.

Согласно модели оценки доходности финансовых активов ожидаемая премия за риск по каждому виду инвестиций пропорциональна коэффициенту бета этих инвестиций. Это означает, что каждый вид инвестиций должен принадлежать наклонной прямой рынка ценных бумаг, связывающей казначейские векселя и рыночный портфель.

Равновесное состояние, представленное *SML*, складывается в результате суммарного эффекта корректировки инвесторами структуры своих портфелей и результирующего давления на курсы бумаг. Имея набор курсов ценных бумаг, инвесторы вычисляют ожидаемые доходности и ковариации, а затем определяют состав своих оптимальных портфелей. Если спрос на ценные бумаги какого-либо вида отличен от их предложения, то такая несбалансированность будет влиять на их курс. Получив новую информацию о курсах, инвесторы пересмотрят свои намерения относительно различных бумаг. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока общий спрос на ценные бумаги какого-либо вида не уравновесит их предложение.

Для отдельного инвестора курс ценных бумаг и их перспективы заданы, а количество он может менять. Для рынка же в целом количество бумаг фиксировано (по крайней мере в короткий промежуток времени), а их курсы постоянно меняются. Как и на любом конкурентном рынке, для достижения равновесия на рынке ценных бумаг необходима корректировка курсов бумаг до тех пор, пока не установится соответствие между спросом на бумаги и их предложением.

6.2.4. Характеристическая линия акции (модель рынка)

В модели рынка предполагается, что доход по обыкновенной акции связан с доходом по рыночному индексу следующим образом:

$$r_j = \alpha_j + \beta_j r_I + \varepsilon_j, \qquad (6.1)$$

где r_j — доход по бумаге j за определенный период; α_j — ордината точки пересечения прямой с вертикальной осью; β_j — величина наклона луча; r_I — доход по рыночному индексу за определенный период; ε_j — величина случайной ошибки.

Естественно задаться вопросом о взаимосвязи линейной модели рынка и *CAPM*. Прежде всего следует заметить, что в обеих моделях величина наклона именуется «бета» (β) и обе они каким-то образом связаны с рынком. Однако между ними существует два значительных различия.

Первое заключается в том, что линейная модель рынка является факторной моделью, где в качестве фактора выступает рыночный индекс. И в отличие от *CAPM* она не является равновесной моделью, описывающей процесс формирования курсов ценных бумаг.

У. Шарп назвал эту линию регрессии (6.1) характеристической линией акции.

Параметры уравнения регрессии рассчитываются методом наименьших квадратов, например:

$$\beta_j = \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_{ji} - \bar{r}_j)(r_{Ii} - \bar{r}_I)}{\sum_{i=1}^{n}(r_{Ii} - \bar{r}_I)^2} = \frac{\operatorname{cov}(r_j, r_I)}{\sigma_I^2} = \frac{\rho_{jI}\sigma_j\sigma_I}{\sigma_I^2} = \rho_{jI}\frac{\sigma_j}{\sigma_I}.$$

Уравнение характеристической линии называется *моделью рынка* (*market model*). Предполагается, что сложившаяся в прошлом связь между акцией j и рынком в целом сохранится и в будущем, т.е. *прогнозируемые значения* доходности акции и доходности на рынке в среднем связаны той же линейной зависимостью $\hat{r}_j = \alpha_j + \beta_j\hat{r}_I + \varepsilon_j$.

Второе отличие состоит в том, что рыночная модель использует рыночный индекс, в то время как *CAPM* — рыночный портфель.

Рыночный портфель сочетает в себе все обращающиеся на рынке бумаги, а рыночный индекс — только ограниченное их число (например, 500 для индекса S&P 500). Поэтому концептуально коэффициент β_i из рыночной модели отличается от коэффициента β_i из *CAPM*. Это связано с тем, что β в рыночной модели измеряется относительно рыночного индекса, а β в *CAPM* — относительно рыночного портфеля. Однако на практике, в связи с тем что точно определить структуру рыночного портфеля не удается, используют рыночный индекс. Поэтому β, определенный с помощью рыночного индекса, несмотря на концептуальное различие, принимают в качестве оценки β в *CAPM*.

Рыночные индексы. Одним из наиболее широко известных индексов является *Standart & Poor's Stock Price Index* (или сокращенно S&P 500), который представляет собой средневзвешенную величину курсов акций 500 наиболее крупных компаний. Другим индексом, который универсальнее S&P 500 в том смысле, что он охватывает большее число акций, является *NYSE Composite Index*, для вычисления которого используются курсы акций, зарегистрированных на Нью-Йоркской фондовой бирже. На Американской фондовой бирже используется аналогичный индекс, охватывающий все бумаги, которые на ней котируются. Национальная ассоциация фондовых дилеров вычисляет индекс внебиржевого оборота акций, котируемых в системе *NASDAQ*.

Несомненно, наиболее часто цитируемым рыночным индексом является индекс Доу — Джонса. Хотя этот индекс основан на показателях лишь 30 акций и использует менее совершенную процедуру усреднения, он обеспечивает по крайней мере беспристрастную оценку ситуации на рынке акций.

Рыночный и собственный риск. Совокупный риск σ_j^2 для ценной бумаги i может быть разделен на две составляющие: $\sigma_j^2 = \beta_j^2\sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon j}^2$, где $\beta_j^2\sigma_I^2$ — рыночный риск; $\sigma_{\varepsilon j}^2$ — собственный риск.

Каждая фирма помимо изменений рынка в целом сталкивается также с явлениями, существенными только для нее и не зависящими от общего состояния экономики. Такие ситуации приводят к изменению доходности акций фирмы j вне зависимости от ситуации на рынке в целом. Подобные явления объясняются случайной ошибкой ε_i. Эта составляющая общего риска называется *диверсифицируемым*, или *специфическим* для компании, *риском*. Рациональный инвестор устраняет ее влияние, составляя диверсифицированный портфель акций. Тенденция изменения вместе с рынком содержит риск, так как цены на рынке колеблются и колебания не могут быть элиминированы. Этот компонент общего риска называется *рыночным*, или *недиверсифицируемым*, *риском*.

Таким образом, зависимость между общим риском акции, рыночным риском и диверсифицируемым риском может быть выражена следующим образом:

$$\sigma_j^2 = \beta_j^2\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon j}^2,$$

где σ_j^2 — дисперсия ожидаемой доходности (или общий риск) акции j; β_j — коэффициент в акции j; σ_M^2 — дисперсия рынка; $\beta_j^2\sigma_M^2$ — недиверсифицируемый риск; $\sigma_{\varepsilon j}^2$ — дисперсия регрессионной ошибки акции j (диверсифицируемый риск).

Диверсифицируемый риск может и должен быть устранен диверсификацией. Премия за риск владения акцией рассчитывается исходя из рыночного, а не общего риска:

$$RP_j = (r_M - r_{RF})\beta_j.$$

Рыночный риск связан с риском рыночного портфеля и значением коэффициента в данной ценной бумаги. Для бумаги с бóльшими значениями этого коэффициента значение рыночного риска больше. В рамках модели *CAPM* у таких бумаг также бóльшие ожидаемые доходности. Отсюда следует, что ценные бумаги с бóльшими значениями рыночного риска должны иметь бóльшие ожидаемые доходности.

Нерыночный риск не связан с коэффициентом β, поэтому увеличение собственного риска не ведет к росту ожидаемой доходности. Итак, согласно *CAMP* инвесторы вознаграждаются за рыночный риск, но их нерыночный риск не компенсируется.

Коэффициенты в акций различных компаний подсчитываются и публикуются агентствами *Merrill Lynch*, *Value Line* и многими другими. Коэффициенты в акций большинства компаний варьируют в пределах 0,75—1,5, а среднее значение для всех акций равно 1,0. Естественно, что β в модели рынка рассматривается как аппроксимация β в CAPM.

Рассмотрим примеры задач на составление портфеля.

Пример 6.1. Пусть в распоряжении инвестора имеется всего две возможности: A — безрискового вложения или заимствования под 10% (ценная бумага типа A); B — рискованного вложения в ценные бумаги типа B с ожидаемой доходностью 20% и риском 10%. Как инвестор должен распределить имеющиеся у него средства, чтобы ожидаемая доходность сформированного портфеля составила 30%? Каков будет риск данного портфеля?

Решение. Пусть x — доля денежных средств агента, инвестированных в бумагу A; $1 - x$ — доля средств, инвестированных в бумагу B; T — требуемая ожидаемая доходность портфеля (рис. 6.5).

Имеем:

$$T = 30;\ T = xA + (1 - x)B;$$
$$30 = 10\,x + (1 - x)\cdot 20;$$
$$10 = -10x;\ x = -1;\ \ T = -A + 2B.$$

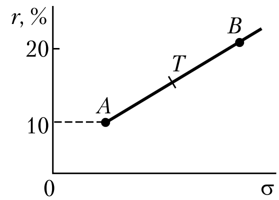


Рис. 6.5

Таким образом, для достижения ожидаемой доходности 30% инвестор должен занять под 10% сумму денег, равную величине его собственных средств, и вложить удвоенную таким образом сумму его собственных средств в бумаги типа B. Но риск такого портфеля будет равен, очевидно, уже 20%.

Замечание. На этом шуточном примере можно увидеть в миниатюре влияние рычага (в данном случае финансового), или левериджа, с которым более подробно познакомимся далее.

Пример 6.2. Пусть в распоряжении инвестора имеются те же две возможности, что и в предыдущей задаче, а именно: A — безрискового вложения или заимствования под 10% (бумаги A), B — рискованного вложения в ценные бумаги B с ожидаемой доходностью 20% и риском 10%. Как инвестору распорядиться имеющимися у него средствами, чтобы ожидаемая доходность сформированного портфеля составила 25%, и каков будет риск данного портфеля?

Решение. Введя те же обозначения, что и в предыдущей задаче, и применив аналогичные рассуждения, получим:

$$25 = 10x + (1 - x)20;$$

$$5 = -10x;\ \ x = -1/2;$$

$$T = -1/2A + 3/2B.$$

Проверка: $25\% = -1/2 \cdot 10\% + 3/2 \cdot 20\%$.

Таким образом, агенту следует занять под 10% еще половину той суммы денег, которая у него имеется, и вложить 3/2 величины его собственных средств в бумаги типа B. Тогда ожидаемая доходность сформированного портфеля будет равна 25%, а риск такого портфеля, очевидно, равен 15%.

6.3. Теория Модильяни — Миллера[1]

6.3.1. Анализ цены и структуры капитала

Первая теорема Модильяни — Миллера. Первая теорема Модильяни — Миллера, или ММ-теорема, утверждает, что *в мире без налогов и транзакционных издержек рыночная стоимость левериджированной компании, т.е. компании, использующей заемные источники финансирования, равна рыночной стоимости точно такой же, но нелевериджированной компании, т.е. компании, работающей целиком на собственном капитале.*

Доказывается эта теорема чрезвычайно просто, исходя из соображений отсутствия арбитража и рассматривая механизм конкуренции.

---

[1] *Modigliani, F.* The cost of capital, corporation finance and the theory of investment / F. Modigliani, M. H. Miller // American Economic Review. — 1958, June. — Vol. 48. — P. 261—297; *Modigliani, F.* Reply to heins and sprenke / F. Modigliani, M. H. Miller // American Economic Review. — 1969. — Vol. 59. — P. 592—595.

Существует специальный термин для обозначения «денежного станка» — *арбитраж*[1]. На хорошо работающем рынке капитала любая потенциальная «машина для деланья денег» почти мгновенно будет разрушена инвесторами, которые все разом попытаются извлечь из нее выгоду. Отсутствие арбитражных возможностей на совершенном рынке капитала — один из основных постулатов теории финансов. Мы часто будем им пользоваться в различных доказательствах.

Будем использовать следующие стандартные обозначения:

D — величина долга компании (*debt*);

S — рыночная стоимость собственного капитала компании (*stocks* — акции);

V — ценность компании (*value*),

$$V = D + S;$$

V_L — стоимость левериджированной компании;

V_U — стоимость нелевериджированной компании;

K_d — стоимость заемных источников (проценты за кредит);

K_e — стоимость собственного капитала компании (та минимальная доходность, которую требуют собственники за свои вложения);

$K_L = K_{e_L}$ — стоимость собственного капитала (та минимальная доходность, которую требуют собственники за свои вложения) левериджированной компании;

$K_A = K_U = K_{e_U}$ — стоимость собственного капитала (та минимальная доходность, которую требуют собственники за свои вложения) нелевериджированной компании;

WACC (*weighted average cost of capital*) — средневзвешенная цена капитала компании

$$WACC = K_d \frac{D}{V} + K_e \frac{S}{V};$$

EBIT (*earnings before interest and taxes*) — прибыль до вычета процентов и налогов — то же, что и *NOI* (доход компании до удовлетворения интересов облигационеров и акционеров);

NOI (*net operating income*) — чистый операционный доход, или прибыль до вычета налогов и процентов;

PR (*payout ratio*) — доля дохода после выплаты процентов и налогов, направляемая на выплаты дивидендов;

RR (*reinvestment ratio*) — доля дохода после выплаты процентов и налогов, которая реинвестируется.

Идея доказательства. Рассмотрим две компании с совершенно одинаковыми активами. У них обеих, естественно, один и тот же операционный, или экономический, риск, они обе ожидают получить один и тот же чистый операционный доход. Однако они по-разному финансируются. Общая стоимость каждой компании формируется из рыночной стоимости собственного капитала и рыночной стоимости заемного капитала:

---

[1] *Брейли Р., Майерс С.* Принципы корпоративных финансов. 7-е изд. М.: Олимп-Бизнес, 2004.

Показатели	Компания 1	Компания 2
Долг	D_1	—
Собственный капитал	S_1	S_2
Стоимость компании	$D_1 + S_1$	S_2
Доход (*EBIT*, или *NOI*)	$\overline{NOI}$[1]	$\overline{NOI}$
WACC	$K_d \frac{D_1}{D_1 + S_1} + K_e \frac{S_1}{D_1 + S_1} = \frac{\overline{NOI}}{D_1 + S_1}$	$\frac{K_e S_2}{S_2} = \frac{\overline{NOI}}{S_2}$

Не умаляя общности, предположим для простоты рассмотрения, что все доходы после уплаты процентов направляются на выплаты акционерам в виде дивидендов, т.е. $PR = 1$, а $RR = 0$, что, очевидно, нисколько не меняет существа дела.

Рассмотрим акционера компании 1. Пусть его доход Y_1 составляет долю α от дохода собственников компании, т.е. $Y_1 = \alpha(NOI - K_d D_1)$.

Предположим, что акционер компании 1 продает свои акции, еще берет в банке ссуду αD_1 и покупает акции компании 2. В этом случае ему будет принадлежать доля $\frac{\alpha D_1 + \alpha S_1}{S_2}$ компании 2 и, следовательно, его доход $Y_2 = \frac{\alpha(D_1 + S_1)}{S_2} NOI - K_d \alpha D_1$.

Сравним Y_1 и Y_2. Очевидно, что $Y_2 > Y_1$ тогда и только тогда, когда $\frac{D_1 + S_1}{S_2} > 1$. Если данное условие выполнено, то будет ли акционер компании 1 так поступать? Конечно, будет. Но в числителе рассматриваемой дроби стоит ценность компании 1, а в знаменателе — ценность компании 2. Значит, до тех пор пока ценность компании 1 больше ценности компании 2, акционер компании 1 будет продавать акции более дорогой компании и покупать акции более дешевой. От этой арбитражной операции ценность акций первой компании будет падать, а второй — расти. И так будет продолжаться до тех пор, пока стоимости обеих компаний, находящихся в одинаковых экономических условиях, не сравняются: $V_L = V_U$.

При доказательстве теоремы Модильяни — Миллера предполагается, что и компании, и отдельные индивидуумы могут брать и давать в долг по одной и той же безрисковой процентной ставке. При таких условиях индивидуальные инвесторы, действуя самостоятельно и используя механизм конкуренции, могут скомпенсировать эффект любого изменения структуры капитала компании.

На практике корпоративный долг не свободен от риска, и фирмы не могут ограничиться безрисковыми процентными ставками, применяемыми для государственных ценных бумаг. На первый взгляд может показаться, что уже одно это отменяет результат первой теоремы Модильяни — Миллера. Такова распространенная естественная ошибка. В действительности же структура капитала бывает неважна, даже когда долг связан с риском.

---

[1] Ожидаемый доход, т.е. математическое ожидание данной случайной величины. Если бы доход был точно известен, то не было бы риска.

Тот факт, что компания берет заем, еще не гарантирует возврата денег: компания выплачивает долг полностью, только если ее активы стоят дороже, чем долговые обязательства. Это означает, что акционеры компании несут ограниченную ответственность. Разумеется, многие люди хотели бы занимать деньги на условиях ограниченной ответственности. В силу этого они, вероятно, с радостью приплатили бы за акции с долговой нагрузкой, если бы предложение таких акций было недостаточным, чтобы удовлетворить их спрос. Однако рынок буквально переполнен акциями компаний, прибегающих к заимствованию, поэтому, выпуская долговые обязательства, руководство той или иной компании едва ли заставит инвесторов платить ценовую премию именно за акции данной компании.

Вторая теорема Модильяни — Миллера. Ожидаемая доходность обыкновенных акций фирмы с долговой нагрузкой, или цена собственного капитала левериджированной компании возрастает пропорционально отношению долга к собственному капиталу (D/S), *исчисленному в рыночных ценах. Темпы роста зависят от расхождения между* K_A, *ожидаемой доходностью портфеля всех ценных бумаг фирмы* (ценой *собственного капитала нелевериджированной компании*) *и* K_d *— ожидаемой доходностью долговых обязательств*:

$$K_{e_L} = K_{e_U} + (K_{e_U} - K_d)\frac{D}{S}. \qquad (6.1)$$

► ***Доказательство.*** Имеем

$$K_{e_L} = \frac{NOI - K_d D}{S} = \frac{NOI}{V_U}\frac{V_U}{S} - \frac{K_d D}{S} + \frac{NOI}{V_U}\frac{D}{S} - \frac{NOI}{V_U}\frac{D}{S} =$$

$$= \frac{NOI}{V_U}\left(\frac{V_U}{S} - \frac{D}{S}\right) + \frac{D}{S}\left(\frac{NOI}{V_U} - K_d\right) = K_{e_U} + (K_{e_U} - K_d)\frac{D}{S}. ◄$$

Равносильное рассуждение: ожидаемая доходность инвестиционного портфеля равна средневзвешенной величине ожидаемых доходностей отдельных ценных бумаг. Таким образом, ожидаемая доходность портфеля, состоящего из *всех* ценных бумаг компании (акций и облигаций), равна

$$\begin{matrix}\text{Ожидаемая}\\ \text{доходность}\\ \text{активов}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Доля}\\ \text{долга}\end{matrix} \cdot \begin{matrix}\text{Ожидаемая}\\ \text{доходность}\\ \text{долга}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Доля}\\ \text{акций}\end{matrix} \cdot \begin{matrix}\text{Ожидаемая}\\ \text{доходность}\\ \text{акций}\end{matrix},$$

или

$$K_A = \frac{D}{D+S}K_d + \frac{S}{D+S}K_{e_L},$$

откуда следует формула (6.1), поскольку ожидаемая доходность активов — это то же, что ожидаемая (требуемая) доходность собственного капитала нелевериджированной компании, т.е. ожидаемая доходность обыкновенных акций без долговой нагрузки.

Тогда, поскольку стоимость компании — это сумма ее дисконтированного ожидаемого денежного потока $V = \frac{NOI}{WACC}$, а по первой теореме Модильяни — Миллера $V_L = V_U$, в то время как NOI у двух совершенно одинаковых по операционной деятельности и различающихся лишь источниками финансирования компаний, очевидно, один и тот же, получаем, что средневзвешенная цена капитала у рассматриваемых компаний, левериджированной и нелевериджированной, также совершенно одинакова: $WACC_L = WACC_U$.

Это соотношение получается непосредственно:

$$WACC_L = \frac{S}{V}K_{e_L} + \frac{D}{V}K_d = \frac{S}{V}K_{e_U} + (K_{e_U} - K_d)\frac{D}{S}\frac{S}{V} + \frac{D}{V}K_d =$$
$$= \frac{S}{V}K_{e_U} + \frac{D}{V}K_{e_U} = K_{e_U} = WACC_U.$$

Итак, согласно первой теореме Модильяни — Миллера менеджеру не нужно обращать внимания на оптимальную структуру капитала, т.е. здесь нет минимизации $WACC$, и все внимание следует обратить на максимизацию NOI. Однако эмпирические факты свидетельствуют о том, что оптимальная структура капитала все же существует.

Перечислим еще раз условия, при которых выполняется первая теорема Модильяни — Миллера.

1. У индивидуума есть возможность обращаться на финансовые рынки по той же самой ставке, что и у корпорации.

2. Долг рассматривается как безрисковый, не существует угрозы банкротства.

3. Отсутствуют налоги.

4. Отсутствуют транзакционные издержки.

6.3.2. Первая и вторая теоремы Модильяни — Миллера с учетом корпоративных налогов

В действительности налоговая система той или другой страны влияет на целевую структуру пассива в различных отраслях экономики. Рассмотрим случай, когда введен налог на прибыль. Сначала проанализируем ситуацию, когда налоговое законодательство разрешает включать все начисленные проценты в себестоимость реализованной продукции, выводя их тем самым из налогооблагаемой базы. Тогда ценность компании, не использующей финансовый леверидж, $V_U = \dfrac{NOI(1 - T_C)}{K_U^*}$, где T_C — ставка налога на прибыль; K_U^* — посленалоговая требуемая доходность собственного капитала (здесь звездочка поставлена для отличия от доналоговой требуемой доходности, рассмотренной в предыдущем разделе, однако дальше звездочку у символа K_U будем опускать, так как в дальнейшем все время будет рассматриваться ситуация, когда имеют место налоги).

Для левериджированной компании имеем два денежных потока:

• $(NOI - K_dD)(1 - T_C)$ — доход владельцев собственного капитала (акционеров);

• K_dD — то, что получат владельцы заемного капитала (доход облигационеров). Тогда получаем весь денежный поток:

$$(NOI - K_dD)(1 - T_C) + K_dD = NOI(1 - T_C) + T_CK_dD. \qquad (6.2)$$

Первое слагаемое в формуле (6.2) представляет собой операционный доход, который так же рискован, как и весь доход компании в целом, т.е. его требуемая доходность равна требуемой доходности активов компании, не использующей финансовый леверидж. Поэтому нужно дисконтировать его по ставке K_U^*. Второе слагаемое — это тот налоговый щит, который возникает при использовании долгового финансирования, и следует дисконтировать этот почти не рискованный денежный поток по ставке K_d.

Продисконтировав обе части денежного потока левериджированной компании (каждую по своей ставке, отвечающей ее уровню риска), получаем

$$V_L = \frac{NOI(1 - T_C)}{K_U} + \frac{T_C K_d D}{K_d} = V_U + T_C D,$$

т.е. стоимость левериджированной компании превосходит стоимость точно такой же, но не левериджированной компании, на сегодняшнюю ценность «спасенных налогов компании», или на сегодняшнюю ценность налогового щита (приведенную стоимость бессрочного аннуитета $T_C D$). Повторяя выкладки, аналогичные сделаным при выводе формулы (6.1), получим

$$K_{e_L} = K_{e_U} + (K_{e_U} - K_d)\frac{D}{S}(1 - T_C), \tag{6.3}$$

т.е. имеем

$$\begin{aligned} K_{e_L} &= \frac{(NOI - K_d D)(1-T)}{S} = \\ &= \frac{NOI(1-T)}{V_U}\frac{V_U}{S} - \frac{K_d D(1-T)}{S} + \frac{NOI(1-T)}{V_U}\frac{D}{S} - \frac{NOI(1-T)}{V_U}\frac{D}{S} = \\ &= \frac{NOI(1-T)}{V_U}\left(\frac{V_U}{S} - \frac{D}{S}\right) + \frac{D}{S}\left(\frac{NOI(1-T)}{V_U} - K_d(1-T)\right). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Воспользовавшись тем, что $V_L = V_U + T_{CD}$, и подставляя $V_U = V_L - T_{CD}$ в формулу (6.4), получим

$$\left(\frac{V_U}{S} - \frac{D}{S}\right) = \frac{V_L - D - T_C D}{S} = \frac{S + D - D - T_C D}{S} = \left(1 - T_C\frac{D}{S}\right). \tag{6.5}$$

В своюочередь, $\dfrac{NOI(1 - T)}{V_U} = K_{e_U}$. Подставляя данное выражение и равенство (6.5) в формулу (6.4), находим

$$\begin{aligned} K_{e_L} &= K_{e_U}\left(1 - T_C\frac{D}{S}\right) + \frac{D}{S}[K_{e_U} - K_d(1 - T_C)] = \\ &= K_{e_U} + (K_{e_U} - K_d)\frac{D}{S}(1 - T_C). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Из формулы (6.6) следует, что средневзвешенная цена капитала компании в этом случае равна

$$WACC = K_d\frac{D}{S}(1 - T_C) + K_e\frac{S}{V}. \tag{6.7}$$

Можно представить $K_{e_U}\left(1+\dfrac{D}{S}\right)=K_{e_L}+\dfrac{D}{S}(1-T_C)K_d$, откуда следует утверждение, равносильное равенству (6.6):

$$K_{e_U}=\frac{S}{S+D}K_{e_L}+\frac{D}{S+D}(1-T_C)K_d=\frac{S}{V}K_{e_L}+\frac{D}{V}(1-T_C)K_d.$$

В ситуации, когда не вся величина расходов по обслуживанию долга может быть отнесена на себестоимость и тем самым выведена из-под налогообложения, формула (6.7) нуждается в очевидной корректировке, например:

$$WACC=K'_d\frac{D}{V}(1-T_C)+(K_d-K'_d)\frac{D}{V}+K_e\frac{S}{V},\ \text{если } K_d>K'_d;$$

$$WACC=K_d\frac{D}{V}(1-T_C)+K_e\frac{S}{V},\ \text{если } K_d\leqslant K'_d,$$

где K'_d — величина ставки, в пределах которой на момент оценки разрешено включать проценты за кредит в себестоимость продукции.

6.3.3. Теоремы Модильяни — Миллера с учетом корпоративных налогов и персональных налогов

Рассмотрим ситуацию, когда кроме корпоративного налога на прибыль по ставке T_C имеет место также подоходный персональный налог на зафиксированные доходы по ставке T_p и подоходный налог на прирост капитала (*capital gain*) по ставке T_g. Не умаляя общности, предположим, что компания не платит дивидендов, т.е. после уплаты корпоративного налога на прибыль весь доход акционеров облагается по ставке T_g. Так как весь доход акционеров $NOI(1-T_C)(1-T_g)$ реинвестируется, то ценность компании, не использующей финансовый леверидж, равна

$$V_U=\frac{NOI(1-T_C)(1-T_g)}{K_{e_U}}.$$

Если компания использует финансовый леверидж, то денежный поток состоит из двух частей. Первая часть $(NOI-K_dD)(1-T_C)(1-T_g)$ так же рискованна, как операционный доход компании в целом, т.е. его требуемая доходность равна требуемой доходности активов компании, не использующей финансовый леверидж. Поэтому приходится дисконтировать ее по ставке K_U^* требуемой посленалоговой доходности активов компании. У владельцев заемного капитала доход зафиксирован, они облагаются налогом по ставке персонального налога, и эта часть денежного потока $K_dD(1-T_p)$ должна дисконтироваться по посленалоговой (т.е. после обложения персональным налогом) стоимости заемного капитала. Таким образом, имеем

$$(NOI-K_dD)(1-T_C)(1-T_g)+K_dD(1-T_p)=$$
$$=NOI(1-T_C)(1-T_g)+K_dD[(1-T_p)-(1-T_C)(1-T_g)]$$

и, дисконтируя по соответствующим ставкам, получаем

$$V_L=V_U+D\left[1-\frac{(1-T_C)(1-T_g)}{(1-T_p)}\right].$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой сегодняшнюю ценность налогового щита. Если, в частности, $\frac{(1 - T_C)(1 - T_g)}{(1 - T_p)} = 1$, то результаты совпадают с теоремами Модильяни — Миллера без налогов.

6.3.4. Связь теории Модильяни — Миллера и САРМ. Формула Хамады

Предположим, как и ранее, что долг можно считать практически безрисковым, а стоимость заемного финансирования равняется доходности безрисковых активов. Тогда

$$K_A = K_{e_U} = K_{RF} + (K_m - K_{RF})\beta_{e_U}; \tag{6.8}$$

$$K_{e_L} = K_{RF} + (K_m - K_{RF})\beta_{e_L}, \tag{6.9}$$

где K_A — требуемая доходность активов компании; K_m — доходность рынка в целом, или доходность среднерыночной ценной бумаги; β_{e_L} — коэффициент собственного капитала левериджированной компании ($\beta_{e_U} = \beta_A$ — β активов компании, равная коэффициенту β собственного капитала нелевериджированной компании). Подставляя выражения (6.8) и (6.9) в формулу (6.3), получаем

$$K_{RF} + (K_m - K_{RF})\beta_{e_L} =$$

$$= K_{RF} + (K_m - K_{RF})\beta_{e_U} + [K_{RF} + (K_m - K_{RF})\beta_{e_U} - K_d]\frac{D}{S}(1 - T),$$

откуда, приравнивая K_{RF} и K_d и приводя подобные, находим

$$\beta_{e_L} = \beta_{e_U}\left(1 + \frac{D}{S}(1 - T)\right). \tag{6.10}$$

Формула (6.10) была получена Р. Хамадой[1] в 1969 г. и носит его имя.

Задачи для самостоятельного решения

Задачи 6.1—6.3 — на модель оценки доходности финансовых активов, 6.4—6.46 — это задачи финансовой арифметики и оценки инвестиционных проектов, 6.47—6.52 — на модель Модильяни — Миллера и формулу Хамады.

6.1. Ожидаемая доходность акций *A* и *B* равна соответственно 10 и 20%, их стандартные отклонения равны 5 и 60%. Коэффициент корреляции между доходностями акций равен 0,5. Требуется рассчитать ожидаемую доходность и стандартное отклонение портфеля, состоящего на 40% из акций *A* и на 60% из акций *B*.

6.2. Имеются данные о двух проектах:

Проект *A*		Проект *B*	
Доходность, %	Вероятность	Доходность, %	Вероятность
12	0,2	12	0,4
15	0,3	15	0,3
18	0,4	16	0,2
19	0,1	35	0,1

[1] *Hamada, R. S.* Portfolio analysis, market equilibrium and corporation finance // Journal of Finance. 1969. Vol. 24. P. 13—31.

Требуется выполнить следующие задания.

1. Рассчитать ожидаемую доходность.
2. Рассчитать стандартное отклонение.
3. Обосновать выбор того или иного проекта.

6.3. Портфель инвестора состоит из ценных бумаг со следующими характеристиками:

Актив	Общая рыночная стоимость, долл.	Коэффициент β
A	50 000	0,0
B	10 000	0,9
C	25 000	1,1
D	8000	1,2
E	7000	1,7

Доходность безрисковых ценных бумаг равна 7%, доходность на рынке в среднем — 14%. Требуется рассчитать:

1) коэффициент β портфеля;

2) ожидаемую доходность портфеля.

6.4. Предприятие получило кредит на один год в размере 10 млн руб. с условием возврата 16 млн руб. Рассчитайте процентную и учетную ставки.

6.5. Выполните сравнительный анализ графиков изменения наращения капитала при реализации схем простых и сложных процентов.

6.6. На счете в банке 1,2 млн руб. Банк платит 12,5% годовых. Предлагается войти всем капиталом в совместное предприятие, при этом прогнозируется удвоение капитала через пять лет. Принимать ли это предложение?

6.7. Вы имеете 10 млн руб. и хотели бы удвоить эту сумму через пять лет. Каково минимально приемлемое значение процентной ставки?

6.8. Банк предлагает 15% годовых. Чему должен быть равен первоначальный вклад, чтобы через три года иметь на счете 5 млн руб.? Какая сумма предпочтительнее при ставке 9%: 1000 долл. сегодня или 2000 долл. через восемь лет?

6.9. Рассчитайте наращенную сумму с исходной суммы в 2 млн руб. при размещении ее в банке на условиях начисления простых и сложных процентов, если годовая ставка 15%, а периоды наращения 90 дней, 180 дней, 1 год, 5 лет, 10 лет.

6.10. На вклад в банк в размере 1 млн руб. сроком на пять лет банк начисляет 8% годовых. Какая сумма будет на счете к концу срока, если начисление процентов производится по схеме простых и сложных процентов: а) ежегодно; б) каждые полгода?

6.11. Приведены данные о денежных потоках:

Проект	Год				
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й
А	100	200	200	300	300
Б	600	—	—	—	—
В	—	—	—	—	1200
Г	200	—	200	—	200

Рассчитайте для каждого потока показатели FV при $r = 12\%$ и PV при $r = 15\%$ для двух случаев: 1) потоки имеют место в начале года; б) потоки имеют место в конце года.

6.12. Анализируются два варианта накопления средств по схеме аннуитета постнумерандо (т.е. поступление денежных средств осуществляется в конце соответствующего временнóго интервала):

план 1: вносится вклад на депозит 500 долл. каждые полгода при условии, что банк начисляет 8% годовых с полугодовым начислением процентов;

план 2: делается ежегодный вклад в размере 1000 долл. на условиях 9% годовых при ежегодном начислении процентов.

Требуется определить следующее.

1. Какая сумма будет на счете через 10 лет при реализации каждого плана? Какой план предпочтителен?

2. Изменится ли ваш выбор, если процентная ставка в плане 2 будет снижена до 8,5%?

6.13. Анализируются два варианта накопления средств по схеме аннуитета пренумерандо, т.е. поступление денежных средств осуществляется в начале соответствующего временно́го интервала:

план 1: вносится вклад на депозит 500 долл. каждые полгода при условии, что банк начисляет 8% годовых с полугодовым начислением процентов;

план 2: делается ежегодный вклад в размере 1000 долл. на условиях 9% годовых при ежегодном начислении процентов.

Требуется определить следующее.

1. Какая сумма будет на счете через 12 лет при реализации каждого плана? Какой план предпочтителен?

2. Изменится ли ваш выбор, если процентная ставка в плане 2 будет снижена до 8,5%?

6.14. Вы заняли на четыре года 10 тыс. долл. под 14% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года. Определите величину годового платежа.

6.15. Вы заняли на пять лет 12 тыс. долл. под 12% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года. Определите, какая часть основной суммы кредита будет погашена за первые два года.

6.16. На ежеквартальные взносы в банк в размере 100 тыс. руб. по схеме пренумерандо банк начисляет 12% годовых: а) раз в год; б) раз в полгода. Какая сумма будет на счете через три года?

6.17. На взносы в банк каждые полгода в течение пяти лет по 1000 долл. по схеме пренумерандо банк начисляет ежеквартально проценты по ставке 12% годовых. Какая сумма будет на счете в конце срока?

6.18. Г-н N в течение шести лет намерен ежегодно вкладывать по 4000 долл. в облигации с купонной доходностью 7% (схема пренумерандо). Чему равна сумма к получению в конце периода?

6.19. Г-н N инвестировал 700 тыс. долл. в пенсионный контракт. На основе анализа таблиц смертности страховая компания предложила условия, согласно которым определенная сумма будет выплачиваться ежегодно в течение 20 лет исходя из ставки 15% годовых. Какую сумму будет получать ежегодно г-н N?

6.20. Рассчитайте будущую стоимость 1000 долл. для следующих ситуаций:

а) пять лет, 8% годовых, ежегодное начисление процентов;

б) пять лет, 8% годовых, полугодовое начисление процентов;

в) пять лет, 8% годовых, ежеквартальное начисление процентов.

6.21. Рассчитайте текущую стоимость каждого из приведенных ниже денежных поступлений, если коэффициент дисконтирования равен 12%:

а) 5 млн руб., получаемые через три года;

б) 50 млн руб., получаемые через 10 лет.

6.22. Фирме нужно накопить 2 млн долл., чтобы через 10 лет приобрести здание под офис. Наиболее безопасным способом накопления является приобретение безрисковых государственных ценных бумаг, генерирующих годовой доход по ставке

8% при полугодовом начислении процентов. Каким должен быть первоначальный вклад фирмы?

6.23. Г-н N желает приобрести пенсионный контракт, по которому он мог бы получать ежегодно по 7000 долл. в течение оставшейся жизни. Страховая компания, используя таблицы смертности, оценила, что клиент сможет прожить 20 лет, и установила 6% годовых. Сколько нужно заплатить за контракт? А при 8% годовых?

6.24. Имея на счете 40 тыс. долл., вы прогнозируете свой доход в течение следующих двух лет в сумме 60 и 70 тыс. долл. соответственно. Ожидаемая процентная ставка в эти годы будет 8 и 14%. Минимальные расходы составят в текущем году 20 тыс. долл.; в последующие годы ожидается их прирост с темпом 10% в год. Рассчитайте потенциально доступную к потреблению сумму в каждом году из последующих двух лет.

6.25. Банк предоставил ссуду в размере 10 млн руб. на 30 месяцев под 30% годовых на условиях ежегодного начисления процентов. Рассчитайте возвращаемую сумму при различных схемах начисления процентов.

6.26. Появилась возможность получить кредит либо на условиях 12% годовых с квартальным начислением процентов, либо на условиях 12,4% годовых с годовым начислением процентов. Какой вариант предпочтительней, если выплата процентов будет сделана единовременно с погашением кредита?

6.27. Раз в полгода делается взнос в банк по схеме пренумерандо в размере 500 долл. на условии 8% годовых, начисляемых каждые шесть месяцев. Какая сумма будет на счете через пять лет? Как изменится эта сумма, если проценты будут начисляться раз в год?

6.28. Предприятие имеет возможность участвовать в некоторой деловой операции, которая принесет доход в размере 10 млн руб. по истечении двух лет. Оно должно выбрать один из двух вариантов получения доходов: либо по 5 млн руб. по истечении каждого года, либо единовременное получение всей суммы в конце двухлетнего периода.

1. Существуют ли такие условия, когда выбор варианта для вас безразличен?

2. Изменится ли ваше решение, если доход второго года уменьшится на 4 млн руб.?

3. Сформулируйте различные условия, при которых вариант единовременного получения дохода может быть предпочтительным.

6.29. Оцените текущую стоимость облигации номиналом 1000 долл., купонной ставкой 9% годовых и сроком погашения через три года, если рыночная норма прибыли равна 7%.

6.30. Исчислите текущую стоимость бессрочной облигации, если выплачиваемый по ней годовой доход составляет 100 тыс. руб., а рыночная доходность — 12%.

6.31. Вы приобретаете бескупонную государственную облигацию номиналом 5000 долл., погашаемую через 25 лет. Какова ее текущая цена, если ставка банковского процента равна 15%?

6.32. Последний выплаченный дивиденд по акции равен 1 долл. Ожидается, что он будет расти в течение следующих трех лет с темпом 14%; затем темп прироста стабилизируется на уровне 5%. Какова цена акции, если рыночная норма прибыли 15%?

6.33. Проект, требующий инвестиций в размере 160 тыс. долл., предполагает получение годового дохода в размере 30 тыс. долл. на протяжении 15 лет. Оцените целесообразность такой инвестиции, если коэффициент дисконтирования 15%.

6.34. Проект, рассчитанный на 15 лет, требует инвестиций в размере 150 тыс. долл. В первые пять лет никаких поступлений не ожидается, однако в последующие 10 лет ежегодный доход составит 50 тыс. долл. Следует ли принять этот проект, если коэффициент дисконтирования равен 15%?

6.35. Анализируются проекты (долл.):

	IC	C_1	C_2
А	–4000	2500	3000
Б	–2000	1200	1500

Здесь через IC обозначены вложения в соответствующие проекты в нулевом периоде, а через C_1 и C_2 — денежные поступления в первый и второй периоды реализации проектов. Предполагается, что начиная с третьего периода никаких дополнительных поступлений от реализации проектов уже не будет: все будет так, как если бы проектов не было.

Ранжируйте проекты по критериям *IRR, PP, NPV*, если r = 10%.

6.36. Рассматриваются альтернативные проекты:

А	–50 000	15 625	15 625	15 625	15 625	15 625
Б	–80 000	—	—	—	—	140 000

Требуется выполнить следующие задания.

1. Найти точку Фишера.
2. Сделать выбор при r = 5% и при r = 10%.

6.37. Для каждого из нижеприведенных проектов рассчитайте *NPV* и *IRR*, если значение коэффициента дисконтирования равно 20%.

А	–370	—	—	—	—	1000
Б	–240	60	60	60	60	—
В	–263,5	100	100	100	100	100

6.38. Анализируются четыре проекта, причем А и В, а также Б и Г — взаимоисключающие. Требуется составить возможные комбинации проектов и выбрать оптимальную:

Проект	*IC*	*NPV*	*IRR*, %
А	–600	65	25
Б	–800	29	14
В	–400	68	20
Г	–280	30	9

6.39. Величина требуемых инвестиций по проекту равна 18 тыс. долл.; предполагаемые доходы: в первый год — 1500 долл., в последующие восемь лет — по 3600 долл. Оцените целесообразность принятия проекта, если цена капитала 10%.

6.40. Величина инвестиции 1 млн руб.; прогнозная оценка генерируемого по годам дохода: 344; 395; 393; 322 тыс. руб. Рассчитайте значения показателей *IRR* и *MIRR*, если цена капитала 10%.

6.41. Проанализируйте два альтернативных проекта, если цена капитала 10%:

А	–100	50	70	—
Б	–100	30	40	60

6.42. Рассматривается проект А: –1; 8; –14; 7. Рассчитайте *IRR* и *MIRR* проекта А, если цена капитала равна 10%.

6.43. Предприятие имеет возможность инвестировать: а) до 55 млн руб.; б) до 90 млн руб., при этом цена капитала составляет 10%. Составьте оптимальный инвестиционный портфель из следующих альтернативных проектов (млн руб.):

А	30	6	11	13	12
Б	20	4	8	12	5
В	40	12	15	15	15
Г	15	4	5	6	6

6.44. Анализируются четыре проекта (тыс. долл.):

Год	Проект				Год	Проект			
	А	Б	В	Г		А	Б	В	Г
0	–31	–60	–25	–40	6	6	—	—	—
1	6	20	30	—	7	6	—	–	—
2	6	20	25	—	8	6	—	–	—
3	6	40	—	—	9	6	—	–	—
4	6	10	—	—	10	6	80	—	—
5	6	—	—	—	—	—	—	—	—

Цена капитала — 12%. Бюджет ограничен суммой 120 тыс. долл. Предполагая, что проекты независимы и делимы, составьте оптимальную комбинацию.

6.45. Приведены данные о двух проектах (млн руб.):

П1	–10	5	3	2	4
П2	–10	2	3	5	4

Какой критерий не делает различия между этими проектами?

Не делая специальных расчетов, ответьте на вопросы (ответы обосновать).

1. Одинаковы ли *IRR* этих проектов?
2. Если *IRR* различны, какой проект имеет большее значение *IRR* и почему?

6.46. Имеются данные о четырех проектах:

Год	Проект			
	П1	П2	П3	П4
0	–10 000	–13 000	–10 000	–6000
1	6000	8000	5000	5000
2	6000	8000	5000	2000
3	2000	1000	5000	2000

Полагая, что цена капитала составляет 12%, ответьте на следующие вопросы.

1. Какой проект имеет наибольший *NPV*?
2. Какой проект имеет наименьший *NPV*?
3. Чему равно значение *IRR* проекта П1?
4. Чему равно значение *IRR* проекта П1, если денежные потоки третьего года считаются слишком непредсказуемыми и поэтому должны быть исключены из расчета?

6.47. Пусть T_C = 34 %, T_p = 28%, T_g = 20%, K_{e_U} = 20% (в посленалоговом исчислении), *NOI* = 200 долл. Требуется выполнить следующее.

1. Рассчитать ценность такой компании, не использующей финансовый левередж.
2. Ответить на вопрос: увеличит ли при таких ставках ценность компании использование финансового левериджа в размере 100 долл. под 10% годовых?

6.48. Стоимость компании 100 тыс. долл.; ставка налога на прибыль T = 34%; стоимость заемного финансирования K_d = 10%; доходность среднерыночной акции K_m = 15%; коэффициент в активов, или коэффициент в собственного капитала компании, $\beta_A = \beta_{e_U}$ = 1,5.

1. Компания не использует заемное финансирование. Какова цена собственного капитала, или требуемая доходность активов такой компании?

2. Пусть компания станет придерживаться следующей политики финансирования: заменит одну пятую часть своего капитала на заемный, т.е. выкупит у акционеров одну пятую часть своих акций и на эти деньги купит облигации (долг считаем безрисковым). Требуется ответить на следующие вопросы.

I. Какова будет цена компании?

II. Каков будет коэффициент β собственного капитала компании?

III. Чему будет равна требуемая доходность на собственный капитал компании?

IV. Какова будет средневзвешенная цена капитала компании?

6.49. Рыночная цена акций компании А равна 2,50 долл. Ожидаемый валовой годовой дивиденд (дивиденд до выплаты налога на прибыль корпорации, т.е. величина налогооблагаемой прибыли на акцию) равен 8%. Рассчитайте цену собственного капитала компании.

6.50. Компания А эмитировала 10%-ные долговые обязательства. Чему равна цена этого источника средств, если налог на прибыль компании составляет 33%?

6.51. Рассчитайте средневзвешенную цену (*WACC*) капитала компании А, если структура ее источников такова:

Источник средств	Доля в общей сумме источников, %	Цена, %
Акционерный капитал	80	12,0
Долгосрочные долговые обязательства	20	6,5

Как изменится значение показателя *WACC*, если доля акционерного капитала снизится до 60%?

6.52. В компании, не имеющей заемных источников средств, цена капитала составляет 10%. Если фирма эмитирует 8%-ные долгосрочные обязательства, цена собственного капитала изменится в связи с повышением рискованности структуры источников средств (налог на прибыль не учитывать).

1. Следуя положениям теории Модильяни — Миллера, исчислите цену собственного капитала компании при следующей структуре источников средств:

Собственный капитал, %:	80	60	20
Заемный капитал, %:	20	40	80

2. Рассчитайте значение *WACC* для каждого случая.

3. Повторите расчеты пп. 1 и 2 при условии, что налог на прибыль равен 33%.

Глава 7
МЕТОД РЕАЛЬНЫХ ОПЦИОНОВ

В результате изучения главы 7 студент должен:

знать

- понятия, связанные со стохастическими интегралами;
- основы теории опционов;
- формулы Блэка — Шоулса;
- лемму Ито;

уметь

- решать стохастические дифференциальные уравнения;

владеть

- методом реальных опционов.

7.1. Предварительные сведения. Винеровский процесс

Для того чтобы перейти к изложению одного из основных методов современного экономического анализа — метода реальных (или экономических, в отличие от финансовых) опционов, напомним основные сведения, касающиеся случайных процессов и стохастических дифференциальных уравнений.

Стохастический процесс развивается во времени таким образом, что хотя бы частично является случайным. Например, температура: ее изменение во времени частично детерминировано (увеличение в течение дня и падение ночью, увеличение летом и уменьшение зимой) и частично случайно и непредсказуемо. Другой пример — цена компьютеров фирмы *IBM*: она колеблется случайным образом, на длительном промежутке времени имеет ожидаемый положительный темп роста, который компенсирует инвесторам риск держания актива.

Стохастический процесс определяется вероятностным законом развития x_t переменной x во времени t. Таким образом, для данных моментов времени $t_1 < t_2 < t_3$ и т.д. имеем или можем вычислить вероятность того, что соответствующие значения x_1, x_2, x_3 и т.д. лежат в некотором определенном диапазоне, например $P\{a_1 < x_1 \leqslant b_1, a_2 < x_2 \leqslant b_2, ...\}$. Напомним также строгие определения.

Определение 7.1. Пусть Ω — заданное множество, тогда σ-*алгебра* на Ω есть семейство $\Im$ подмножеств множества Ω со следующими свойствами:

1) $\varnothing \in \Im$;

2) $F \in \Im \Rightarrow F^C \in \Im$, где $F^C = \Omega \backslash F$ — дополнение множества F в Ω;

3) $A_1, A_2, ... \in \Im \Rightarrow A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \Im$.

Пара $(\Omega, \Im)$ называется *измеримым пространством*. Вероятностной мерой на измеримом пространстве $(\Omega, \Im)$ называется функция $P\colon \Im \to [0; 1]$, такая что:

1) $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$;

2) если $A_1, A_2, \ldots \in \Im$ и $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — непересекающаяся система (т.е. $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$), то $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Тройка $(\Omega, \Im, P)$ называется *вероятностным пространством*.

При любом заданном семействе U подмножеств множества Ω существует наименьшая σ-алгебра H_U, содержащая U, а именно: $H_U = \cup\{H\colon H$ есть σ-алгебра множества Ω, $U \subset H\}$.

H_U называется *σ-алгеброй, порожденной семейством U*.

Например, если U есть набор всех открытых подмножеств топологического пространства Ω (в частности, $\Omega = \mathbb{R}^n$), то $\mathcal{B} = H_U$ называется *борелевской σ-алгеброй на* Ω, а элементы $B \in \mathcal{B}$ называются *борелевскими множествами*.

Пусть $(\Omega, \Im, P)$ — заданное вероятностное пространство. Тогда функция $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется *$\Im$-измеримой*, если $Y^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega\colon Y(\omega) \in U\} \in \Im$ для всех открытых множеств $U \subset \mathbb{R}^n$ (или, что эквивалентно, для всех борелевских множеств $U \subset \mathbb{R}^n$).

Определение 7.2. *Случайная величина* X есть $\Im$ -измеримая функция $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$. *Случайный процесс* — это параметрический набор случайных величин $\{X_t\}_{t \in T}$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$ и принимающих значения в $\mathbb{R}^n$.

Если $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — произвольная функция, то *σ-алгебра H_X, порожденная функцией X*, есть наименьшая σ-алгебра на Ω, содержащая все множества вида $X^{-1}(U)$, множества $U \subset \mathbb{R}^n$ открыты.

Нетрудно проверить, что $H_X = \{X^{-1}(B)\colon B \in \mathcal{B}\}$, где $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$. Ясно, что функция X является H_X-измеримой, а H_X есть наименьшая σ-алгебра, относительно которой X измерима.

Каждая случайная величина X порождает вероятностную меру μ_X на $\mathbb{R}^n$, определенную равенством $\mu_X(B) = P(X^{-1}(B))$, которая называется *распределением* величины X.

Конечномерные распределения процесса $X = \{X_t\}_{t \in T}$ — это меры $\mu_{t_1, t_2, \ldots, t_k}$, определенные на $\mathbb{R}^{nk}$, $k = 1, 2, \ldots$, формулами

$$\mu_{t_1, t_2, \ldots, t_k}(F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_k) = P(X_{t_1} \in F_1, X_{t_2} \in F_2, \ldots, X_{t_k} \in F_k),\ t_i \in T,$$

где $F_1, F_2, \ldots, F_k$ — борелевские множества в $\mathbb{R}^n$.

Семейство всех конечномерных распределений определяет многие (но не все) важные свойства процесса X.

Зафиксируем $x \in \mathbb{R}^n$ и определим

$$p(t, x, y) = (2\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right)$$

для $y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Для $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_k$ определим меру $\nu_{t_1, t_2, \ldots, t_k}$ на $\mathbb{R}^{nk}$ соотношением

$$\nu_{t_1, t_2, \ldots, t_k}(F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_k) =$$

$$= \int\limits_{F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_k}^{t} p(t_1, x, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \ldots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 dx_2 \ldots dx_k,$$

где используется обозначение $dy = dy_1 ... dy_k$ для меры Лебега и применяется условие $p(0, x, y)dy = \delta_x(y)$ (данная плотность соответствует единичной точечной массе, сосредоточенной в точке x).

Определение 7.3. Случайный процесс $\{W_t\}_{t \geqslant 0}$ с конечномерными распределениями, заданными условием

$$P^x(W_{t_1} \in F_{t_1}, ..., W_{t_k} \in F_{t_k}) =$$

$$= \int\limits_{F_1 \times F_2 \times ... \times F_k}^{t} p(t_1, x, x_1)p(t_2 - t_1, x_1, x_2)...p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k)dx_1 dx_2 ... dx_k,$$

называется *броуновским движением*, или *винеровским процессом*, начинающимся в точке x (как очевидно, $P^x(W_0 = x) = 1$).

Существование такого вероятностного пространства $(\Omega, \Im, P)$ и винеровского процесса $\{W_t\}_{t \geqslant 0}$ на Ω гарантируется теоремой Колмогорова о продолжении[1].

Приведем некоторые существенные свойства винеровского процесса.

Винеровский процесс W_t — это стохастический процесс в непрерывном времени, обладающий следующими свойствами.

1. Это процесс с независимыми приращениями, т.е. случайные величины $Y = (W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, ..., W_{t_k} - W_{t_{k-1}})$ независимы в совокупности всякий раз, когда $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant ... \leqslant t_k$.

2. $W_0 = 0$.

3. $W_t - W_s \in N(0, t - s)$, $t > s$, т.е. приращение процесса за конечный промежуток времени имеет нормальное распределение с дисперсией, которая возрастает пропорционально длине промежутка. Плотность распределения этого приращения

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right).$$

Очевидно, что винеровский процесс является марковским, т.е. распределение вероятности для всех будущих значений процесса зависит только от его текущего значения и не зависит от прошлых значений данного процесса.

Таким образом, если $Z(t)$ — винеровский процесс, то приращение Z за время Δt можно представить в виде $\Delta Z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$, где ε — нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием 0 и среднеквадратическим отклонением 1.

7.2. Стохастические интегралы

Случайный процесс удобно рассматривать как функцию двух переменных — времени и случая $X(t, \omega) = X_t(\omega)$, $t \geqslant 0$, $\omega \in \Omega$. Для случайных процессов кроме обычного интеграла Лебега по времени вводится также конструкция стохастических интегралов (Ито, Стратоновича и др.), когда интегрирование ведется по винеровскому процессу. Обычно в экономике рассматриваются интегралы Ито. Наметим в общих чертах один из возможных способов построения.

---

[1] См.: *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Физматлит, 2009.

Определение 7.4. Пусть $W_t(\omega)$ есть n-мерный броуновский (винеровский) процесс. Определим $F_t = F_t^{(n)}$ как *σ-алгебру, порожденную случайными величинами* $W_s(\cdot)$, $s \leqslant t$. Другими словами, F_t есть наименьшая σ-алгебра, содержащая все множества вида

$$\{\omega\colon W_{t_1}(\omega) \in F_1,\ W_{t_2}(\omega) \in F_2, ..., W_{t_k}(\omega) \in F_k\},$$

где $t_j \leqslant t$ и $F_j \subset \mathbb{R}^n$ — борелевские множества, $j \leqslant k = 1, 2, ...$ (предполагается, что все множества меры нуль включены в F_t).

Систему множеств F_t часто представляют как «историю процесса W_s вплоть до момента времени t». Можно показать, что функция $h(\omega)$ является F_t-измеримой тогда и только тогда, когда она может быть представлена почти всюду как поточечный предел сумм функций вида $g_1(W_{t_1})$, $g_2(W_{t_2})$, ..., $g_k(W_{t_k})$, где $g_1, g_2, ..., g_k$ — ограниченные непрерывные функции и $t_j \leqslant t$ при $j \leqslant k$, $k = 1, 2, ...$. На интуитивном уровне тот факт, что функция h является F_t-измеримой, означает, что значение величины $h(\omega)$ в принципе может быть вычислено по значениям процесса $W_s(\omega)$ при $s \leqslant t$. Например, функция $h_1(\omega) = W_{t/2}(\omega)$ является F_t-измеримой, в то время как $h_2(\omega) = W_{2t}(\omega)$ не является таковой.

Отметим, что $F_s \subset F_t$ при $s < t$, т.е. $\{F_t\}$ является *возрастающим семейством*, и что $F_t \subset \mathfrak{I}$ для всех t.

Определение 7.5. Пусть $\{N_t\}_{t \geqslant 0}0$ является возрастающим семейством σ-алгебр подмножеств множества Ω. Процесс $g(t, \omega)\colon [0; \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется *N_t-согласованным*, если для каждого $t \geqslant 0$ функция $\omega \to g(t, \omega)$ является N_t-измеримой.

Таким образом, процесс $h_1(\omega) = W_{t/2}(\omega)$ является F_t-согласованным, в то время как процесс $h_2(\omega) = W_{2t}(\omega)$ не является таковым.

Опишем класс функций, для которых интеграл Ито определен.

Определение 7.6. Обозначим через $\nu = \nu(S, T)$ класс функций $f(t, \omega)$: $[0; \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$, таких что выполняются следующие условия:

1) функция $(t, \omega) \to f(t, \omega)$ является $(\mathcal{B} \times F)$-измеримой, где $\mathcal{B}$ обозначает борелевскую σ-алгебру на $[0; \infty)$;

2) функция $f(t, \omega)$ является F_t-согласованной;

3) $M\left(\int\limits_S^T f(t, \omega)^2 dt\right) < \infty$.

Функция $\varphi \in \nu(S, T)$ называется *ступенчатой*, если она имеет вид

$$\varphi(t, \omega) = \sum_{j \geqslant 0} e_j(\omega) \chi_{[j \cdot 2^{-n},\, (j+1) \cdot 2^{-n}]}(t),$$

где χ обозначает характеристическую (индикаторную) функцию; n — натуральное число.

Отметим, что так как $\varphi \in \nu$, каждая функция e_j должна быть F_t-измеримой. Таким образом, $h_1(\omega) = W_{t/2}(\omega)$ является ступенчатой, а $h_2(\omega) = W_{2t}(\omega)$ — нет.

Для ступенчатой функции $\varphi(t, \omega)$ определим интеграл Ито следующим естественным образом:

$$\int\limits_S^T \varphi(t, \omega) dW_t(\omega) = \sum_{j \geqslant 0} e_j(\omega)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})(\omega),$$

где

$$t_k = t_k^{(n)} = \begin{cases} k\cdot 2^{-n} \text{ при } S \leqslant k\cdot 2^{-n} \leqslant T, \\ S \text{ при } k\cdot 2^{-n} < S, \\ T \text{ при } k\cdot 2^{-n} > T. \end{cases}$$

Имеет место следующее важное свойство.

Лемма 7.1 (*изометрия Ито*). Если ступенчатая функция $\varphi(t, \omega)$ ограничена, то

$$M\left(\left(\int_S^T \varphi(t, \omega)dW_t(\omega)\right)^2\right) = M\left(\int_S^T \varphi(t, \omega)^2 dt\right). \tag{7.1}$$

Определение 7.7 (интеграл Ито). Пусть $f \in \nu(S, T)$. Тогда *интеграл Ито* функции f (от S до T) определяется равенством

$$\int_S^T f(t, \omega)dW_t(\omega) = \lim_{n\to\infty}\int_S^T \varphi_n(t, \omega)dW_t(\omega) \text{ (предел в } L^2(P)), \tag{7.2}$$

где $\{\varphi_n\}$ есть последовательность ступенчатых функций, таких что

$$M\left(\int_S^T (f(t, \omega) - \varphi_n(t, \omega))^2 dt\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{7.3}$$

Доказывается, что для любой функции $f \in \nu(S, T)$ такая последовательность $\{\varphi_n\}$, удовлетворяющая формуле (7.3), существует. Более того, в силу формулы (7.1) предел (в $L^2(P)$) существует и не зависит от конкретного выбора $\{\varphi_n\}$, если выполняется условие (7.3).

Следствие 7.1 (*изометрия Ито*). Для всех $f \in \nu(S, T)$ имеет место равенство

$$M\left(\left(\int_S^T f(t, \omega)dW_t(\omega)\right)^2\right) = M\left(\int_S^T f(t, \omega)^2 dt\right).$$

Пример 7.1. Непосредственно исходя из определения, покажем, что

$$\int_a^b W_t dW_t = \frac{W_b^2 - W_a^2}{2} - \frac{b-a}{2}.$$

Если τ — разбиение интервала, то через $|\tau|$ обозначим ранг разбиения. Разобьем отрезок $[a; b]$ на n равных частей длины t/n, где $t = b - a$:

Тогда

$$\int_a^b w_t dw_t = \lim_{|\tau|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} w_{t_i}(w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) = \lim_{|\tau|\to 0}\sum_i\left(\frac{w_{t_{i+1}} + w_{t_i}}{2} - \frac{w_{t_{i+1}} - w_{t_i}}{2}\right)(w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) =$$

$$= \lim_{|\tau|\to 0}\frac{1}{2}\sum_i (w_{t_{i+1}}^2 - w_{t_i}^2) - \lim_{|\tau|\to 0}\frac{1}{2}\sum_i (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 = \frac{w_b^2 - w_a^2}{2} - \frac{1}{2}\lim_{|\tau|\to 0}\sum (\Delta w_{t_i})^2.$$

Рассмотрим суммы вида $\sum_i (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2$. Имеем $z_i = \dfrac{w_{t_{i+1}} - w_{t_i}}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \sim N(0,1)$ — последовательность независимых одинаково (стандартно нормально) распределенных случайных величин.

Предположим, что разбиение равномерное. Тогда

$$w_{t_{i+1}} = w\frac{t(i+1)}{n},\ w_{t_i} = w\frac{ti}{n},\ z_i = \frac{w\dfrac{t(i+1)}{n} - w\dfrac{ti}{n}}{\sqrt{t/n}};$$

$$\sum_i (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 = t\sum_{i=0}^{n-1} \frac{z_i^2}{n};\ M(z_i^2) = V(z_i) = 1.$$

По закону больших чисел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} z_i^2 \overset{\text{п.н}}{=} 1$ (обозначение «п.н.» означает «почти наверное», т.е. с вероятностью 1 или за исключением случаев с вероятностной мерой 0). Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n-1} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 \overset{\text{п.н}}{=} t$, поэтому

$$\int_a^b w_t dw_t \overset{\text{п.н}}{=} \frac{w_b^2 - w_a^2}{2} - \frac{b-a}{2}.$$

Как ясно из примера, определение интеграла Ито не очень эффективно для вычисления конкретных интегралов. Это напоминает ситуацию с обычным интегралом Римана, когда для непосредственных вычислений не пользуются формальным определением интеграла Римана, а вместо этого используют формулу Ньютона — Лейбница и правило дифференцирования сложных функций. При вычислении интегралов Ито аналогичную роль играет некий вариант правила дифференцирования сложной функции, называемый формулой Ито, или формулой замены переменной в стохастическом интеграле (интеграле Ито).

Здесь и в дальнейшем M означает то же, что и M^0 — математическое ожидание относительно вероятностного закона P^0 для броуновского движения, начинающегося в нуле, а P означает то же, что и P^0.

Определение 7.8. Поток (на $(\Omega, \Im)$) есть семейство $N = \{N_t\}_{t\geqslant 0}$ σ-алгебр $N_t \in \Im$, таких, что $0 \leqslant s < t \Rightarrow M_s \subset M_t$ (т.е. семейство $\{N_t\}$ является возрастающим). Случайный n-мерный процесс $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ на $(\Omega, \Im, P)$ называется *мартингалом* относительно потока $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$ (и относительно P), если выполнены следующие условия:

1) M_t является N_t-измеримым для всех t;

2) $M(|M_t|) < \infty$ для всех t;

3) $M(M_s|N_t) = M_t$ для всех $s \geqslant t$.

(математическое ожидание в п. 2) и условное математическое ожидание в п. 3) берутся относительно $P = P0$).

Интеграл Ито $\int f dW$ может быть определен для более широкого класса подынтегральных функций f, чем ν. Во-первых, условие измеримости 2) из определения 7.6 может быть ослаблено следующим образом.

2′) Существует возрастающее семейство σ-алгебр H_t, $t \to 0$, такое что:

а) W_t является мартингалом относительно H_t;

б) процесс f_t является H_t-согласованным.

Отметим, что из а) следует, что $F_t \subset H_t$. Суть данного обобщения состоит в том, что можно допустить зависимость f_t от большего разнообразия событий, чем события из F_t, если только W_t остается мартингалом относительно истории процессов f_s, $s \leqslant t$. Нетрудно заметить, что в этом случае, как и ранее, можно произвести построение интеграла Ито.

Рассмотрим наиболее важный случай, в котором применимо условие 2′), а условие 2) определения 7.6 неприменимо.

Предположим, что $W_t(\omega) = W_k(t, \omega)$ есть k-я координата n-мерного броуновского движения $(W_1, W_2, ..., W_n)$. Пусть $F_t^{(n)}$ — σ-алгебра, порожденная $W_1(s_1, \cdot), ..., W_n(s_n, \cdot)$, $s_k \leqslant t$. Тогда $W_k(t, \omega)$ есть мартингал относительно $F_t^{(n)}$, потому что приращения $W_k(s, \cdot) - W_k(t, \cdot)$ не зависят от $F_t^{(n)}$ при $s > t$. Таким образом, мы определили $\int\limits_0^t f(s, \omega) dW_k(s, \omega)$ для $F_t^{(n)}$-согласованных интегрантов $f(t, \omega)$. Эта конструкция включает в себя такие интегралы, как $\int W_2 dW_1$ или $\int \sin(W_1^2 + W_2^2) dW_2$, содержащие несколько компонент n-мерного броуновского движения (здесь использовано обозначение $dW_1 = dW_1(t, \omega)$ и т.д.). Этот подход позволяет определить многомерный интеграл Ито следующим образом.

Определение 7.9. Пусть $W = (W_1, W_2, ..., W_n)$ — n-мерное броуновское движение. Обозначим через $\nu_H^{m\times n}(S, T)$ множество $(m \times n)$-матриц $v = (v_{ij}(t, \omega))$, в которых каждый элемент $v_{ij}(t, \omega)$ удовлетворяет условиям 1) и 3) определения 7.6 и условию 2′) относительно некоторого потока $H = \{H_i\}_{t\geqslant 0}$.

Если $v \in \nu_H^{m\times n}(S, T)$, то, используя матричные обозначения, определим *многомерный интеграл Ито*

$$\int\limits_S^T v dW = \int\limits_S^T \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{m1} & \dots & v_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_1 \\ \vdots \\ dW_n \end{pmatrix}$$

как $(m \times 1)$-матрицу (вектор-столбец), i-я компонента которой есть следующая сумма (обобщенных) одномерных интегралов Ито:

$$\sum_{j=1}^n \int\limits_S^T v_{ij}(s, \omega) dW_j(s, \omega).$$

Если $H = F^{(n)} = \{F_t^n\}_{t\geqslant 0}$, то опускаем индекс H в обозначении $\nu_H^{m\times n}(S, T)$ и получаем $\nu^{m\times n}(S, T)$, а если $m = 1$, то пишем $\nu_H^n(S, T)$ вместо $\nu_H^{1\times n}(S, T)$ и, соответственно, $\nu^n(S, T)$ вместо $\nu^{1\times n}(S, T)$. Положим также

$$\nu^{m\times n} = \nu^{m\times n}(0; \infty) = \bigcap_{T>0} \nu^{m\times n}(0; T).$$

Следующее обобщение интеграла Ито состоит в ослаблении условия 3) определения 7.6 и замене его следующим условием:

3′) $P\left(\int\limits_S^T f(s, \omega)^2 ds\right) = 1.$

Определение 7.10. Через $w_H(S, T)$ обозначим класс процессов $f(t, \omega) \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию 1) определения 7.6 и условиям 2′) и 3′). Аналогично тому как вводилось обозначение для ν, считаем $w_H = \bigcap\limits_{T>0} w_H(0, T)$ и пишем в матричном случае $w_H^{m\times n}(S, T)$ и т.д. Если $H = F(n)$, то вместо $w_{F^{(n)}}(S, T)$ пишем $w(S, T)$ и т.д. Будем также иногда опускать верхний индекс и писать просто F вместо $F^{(n)}$, когда размерность ясна из контекста.

Нетрудно заметить, что в этом случае также можно определить интеграл Ито как предел (по вероятности) интегралов от ступенчатых функций.

7.3. Процесс Ито. Формула Ито

Определение 7.11. Пусть W_t — одномерное броуновское движение на $(\Omega, \Im, P)$. *Процесс Ито* (*одномерный*), или *стохастический интеграл*, — это случайный процесс X_t на $(\Omega, \Im, P)$ вида

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega)ds + \int_0^t v(s, \omega)dW_s, \tag{7.4}$$

где $v \in w_H$ — такая функция, что $P\left(\int_0^t v(s, \omega)^2 ds < \infty \text{ для всех } t \geqslant 0\right) = 1$ (см. определение 7.10). Также будем считать, что функция u является H_t-согласованной (где H_t — такое же семейство, как и в п. 2′), см. параграф 7.2) и что $P\left(\int_0^t |u(s, \omega)|ds < \infty \text{ для всех } t \geqslant 0\right) = 1$.

Если X_t — процесс Ито вида (7.4), то уравнение (7.4) иногда записывают в более краткой форме — в *форме дифференциалов* (дифференциальной форме):

$$dX_t = u(t, \omega)dt + v(t, \omega)dW_t. \tag{7.5}$$

Именно эта дифференциальная запись процессов Ито особенно привлекательна для экономистов.

Теорема 7.1 (одномерная формула Ито). *Пусть X_t — процесс Ито, задаваемый дифференциалом* (7.5), *и пусть $g(t, x) \in C^2([0; \infty) \times \mathbb{R})$. Тогда $Y_t = g(t, X_t)$ снова есть процесс Ито и*

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2, \tag{7.6}$$

где $(dX_t)^2 = (dX_t)(dX_t)$ вычисляется по следующим правилам:

$$dt\cdot dt = dt\cdot dW_t = dW_t\cdot dt = 0,\ \ dW_t\cdot dW_t = dt. \tag{7.7}$$

► ***Доказательство.*** Сначала заметим, что если подставить равенство $dX_t = udt + vdW_t$ в формулу (7.6) и использовать правила (7.7), то получим эквивалентное выражение

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) + u_s\frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2}v_s^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s)\right)ds + \\ + \int_0^t v_s\frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)dW_s, \tag{7.8}$$

где $u_s = u(s, \omega)$, $v_s = v(s, \omega)$. Отметим, что полученное выражение (7.8) представляет собой процесс Ито в соответствии с формулой (7.4).

Можно допустить, что функции g, $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ ограничены, так как если доказать равенство (7.8) для этого случая, то общий случай можно получить с помощью аппроксимации функции g функциями g_n класса C^2, такими что g_n, $\frac{\partial g_n}{\partial t}$, $\frac{\partial g_n}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2}$ ограничены для каждого n и равномерно сходятся на компактных подмножествах множества $[0; +\infty) \times \mathbb{R}$ к g, $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ соответственно. Более того, из формулы (7.2) ясно, что функции $u_s = u(s, \omega)$, $v_s = v(s, \omega)$ можно считать ступенчатыми. Используя разложение Тейлора, получаем

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \sum_j \Delta g(t_j, X_j) = g(0, X_0) + \sum_j \frac{\partial g}{\partial t}\Delta t_j + \sum_j \frac{\partial g}{\partial x}\Delta X_j +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(\Delta t_j)^2 + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x}(\Delta t_j)(\Delta X_j) + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\Delta X_j)^2 + \sum_j R_j,$$

где частные производные $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ и т.д. вычисляются в точках (t_j, X_j), $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $\Delta X_j = X_{j+1} - X_j$, $\Delta g(t_j, X_j) = g(t_{j+1}, X_{j+1}) - g(t_j, X_j)$, а $R_j = o(|\Delta t_j|^2 + |\Delta X_j|^2)$ для всех j. Если $\Delta t_j \to 0$, то

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial t}\Delta t_j = \sum_j \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_j)\Delta t_j \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s)ds;$$

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial x}\Delta X_j = \sum_j \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, X_j)\Delta X_j \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)dX_s.$$

Поскольку u и v являются ступенчатыми функциями, получаем, что

$$\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\Delta X_j)^2 = \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}u_j^2(\Delta t_j)^2 + 2\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}u_j v_j(\Delta t_j)(\Delta W_j) + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}v_j^2(\Delta W_j)^2,$$

где $u_j = u(t_j, \omega)$, $v_j = v(t_j, \omega)$. Здесь первые два члена стремятся к нулю при $\Delta t_j \to 0$. Например,

$$M\left(\left(\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}u_j v_j(\Delta t_j)(\Delta W_j)\right)^2\right) = \sum_j M\left(\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}u_j v_j\right)^2\right)(\Delta t_j)^3 \to 0$$

при $\Delta t_j \to 0$.

Докажем, что третий член формулы, т.е. $\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}v_j^2(\Delta W_j)^2$, стремится к $\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}v^2 ds$ в $L^2(P)$ при $\Delta t_j \to 0$.

Для того чтобы доказать это утверждение, положим

$$a(t) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x_t)v^2(t, \omega);\; a_j = a(t_j)$$

и рассмотрим

$$M\left(\left(\sum_j a_j(\Delta W_j)^2-\sum_j a_j\Delta t_j\right)^2\right)=\sum_i\sum_j M(a_ia_j[(\Delta W_i)^2-\Delta t_i][(\Delta W_j)^2-\Delta t_j]).$$

Если $i<j$, то величины $a_ia_j[(\Delta W_i)^2-\Delta t_i]$ и $(\Delta W_j)^2-Дt_j$ независимы, так что соответствующие члены обращаются в нуль. То же самое верно, если $i>j$. Таким образом, остается сумма

$$\sum_j M(a_j^2[(\Delta W_j)^2-\Delta t_j]^2)=\sum_j M(a_j^2)M[(\Delta W_j)^4-2(\Delta W_j)^2\Delta t_j+(\Delta t_j)^2]=$$
$$=\sum_j M(a_j^2)[3(\Delta t_j)^2-2(\Delta t_j)^2+(\Delta t_j)^2]=2\sum_j M(a_j^2)(\Delta t_j)^2\to 0$$

при $\Delta t_j\to 0$.

Другими словами, установлено, что $\sum\limits_j a_j(\Delta W_j)^2\to\int\limits_0^t a(s)ds$ в $L^2(P)$ при $\Delta t_j\to 0$; часто это кратко выражается замечательной формулой

$$(dW_t)^2=dt. \tag{7.9}$$

Из рассмотренных рассуждений следует также, что $\sum\limits_j R_j\to 0$ при $\Delta t_j\to 0$.

Это завершает доказательство теоремы 7.1. ◄

Замечание 7.1. Отметим, что для справедливости теоремы достаточно, чтобы функция $g(t,x)$ принадлежала классу C^2 на $[0;+\infty)\times U$, где $U\subset R$ — открытое множество, такое что $X_t(\omega)\in U$ для всех $t\geqslant 0$, $\omega\in\Omega$. Более того, достаточно, чтобы функция $g(t,x)$ принадлежала классу C^1 по t и классу C^2 по x.

Применение формулы Ито приводит к следующей теореме.

Теорема 7.2 (формула интегрирования по частям). Предположим, что функция $f(s,\omega)=f(s)$ *зависит лишь от s и что f непрерывна и имеет ограниченную вариацию на* $[0;t]$. *Тогда справедливо соотношение*

$$\int_0^t f(s)dW_s=f(t)W_t-\int_0^t W_s df_s.$$

Обратимся к случаю большей размерности. Пусть $W(t,\omega)=(W_1(t,\omega),\ldots,W_m(t,\omega))$ обозначает m-мерное броуновское движение. Если каждый из процессов $u_i(t,\omega)$ и $v_{ij}(t,\omega)$ удовлетворяет условиям, заданным в определении 7.11 ($1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant m$), то можно построить следующие n процессов Ито:

$$\begin{cases} dX_1=u_1dt+v_{11}dW_1+\ldots+v_{1m}dW_m,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ dX_n=u_ndt+v_{n1}dW_1+\ldots+v_{nm}dW_m,\end{cases}$$

или в матричной форме

$$dX(t)=udt+vdW(t),$$

где

$$X(t)=\begin{pmatrix}X_1(t)\\ \vdots\\ X_n(t)\end{pmatrix};\ u=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix};\ v=\begin{pmatrix}v_{11} & \ldots & v_{1m}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ v_{n1} & \ldots & v_{nm}\end{pmatrix};\ dW(t)=\begin{pmatrix}dW_1(t)\\ \vdots\\ dW_m(t)\end{pmatrix}.$$

Такой процесс $X(t)$ называется *n-мерным процессом Ито* (или просто процессом Ито).

Теорема 7.3 (формула Ито для общего случая). *Пусть* $dX(t) = udt + vdW(t)$ *— n-мерный процесс Ито и пусть* $g(t, x) = (g_1(t, x), ..., g_p(t, x))$ *— отображение класса* C^2 *из* $[0; \infty) \times \mathbb{R}^n$ *в* $\mathbb{R}^p$. *Тогда процесс* $Y(t, \omega) = g(t, X(t))$ *снова является процессом Ито, k-я компонента* Y_k *которого задается формулой*

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X)dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X)dX_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X)dX_i dX_j,$$

где $dW_i dW_j = \delta_{ij} d_t$, $dW_i dt = dt dW_i = 0$.

Доказательство полностью аналогично одномерному случаю.

7.4. Примеры использования формулы Ито

Простейшим обобщением броуновского движения является следующий процесс Ито, называемый *броуновским движением со сносом* (*drift*):

$$dX_t = \alpha dt + \sigma dW_t,$$

где α и σ — константы, причем α называется параметром сноса, σ — параметром дисперсии (или волатильностью).

За любой временной интервал Δt изменение X_t, обозначаемое ΔX_t, нормально распределено, имеет математическое ожидание $M(\Delta X) = \alpha \Delta t$ и дисперсию $D(\Delta X) = \sigma^2 \Delta t$.

Переходя к рассуждениям на физическом уровне строгости, столь популярном в литературе по экономическому анализу, и полагая, что Δt становится бесконечно малым приращением времени dt, можно представить приращение винеровского процесса как $dW = \varepsilon\sqrt{dt}$, где ε — стандартная нормальная случайная величина.

Рассмотрим *процесс Ито общего вида*

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t. \tag{7.10}$$

Считая dW_t приращением винеровского процесса за бесконечно малый промежуток времени dt, получаем $M(dX_t) = a(X_t, t)dt$, $D(dX_t) = b^2(X_t, t)dt$. Будем называть $a(X_t, t)$ ожидаемым мгновенным темпом сноса, $b^2(X_t, t)$ — мгновенной нормой дисперсии.

Очень важный для экономики случай процесса (7.10) — *геометрическое броуновское движение со сносом*. Здесь $a(X_t, t) = \alpha X_t$, $b(X_t, t) = \sigma X_t$, где α и σ — константы. В этом случае уравнение (10.10) принимает вид

$$dX_t = \alpha X_t d_t + \sigma X_t dW_t.$$

Таким образом, относительное изменение X_t, т.е. dX_t/X_t, нормально распределено. Так как это есть изменение натурального логарифма от X_t, то абсолютные изменения X_t, т.е. ΔX_t, являются *логнормально распределенными*.

Пример 7.2. Запишем процесс Ито e^{W_t} в дифференциальной форме. Положим $dX = 0 \cdot dt + 1 \cdot dW$. По лемме Ито имеем

$$de^W = e^W \cdot 1 \cdot dW + 1/2 \cdot 1^2 \cdot e^W dt = e^W dW + 1/2 \cdot e^W dt.$$

Пример 7.3. Запишем процесс $\varphi = W_t e^{-qW_t - 1/2q^2t}$ в дифференциальной форме. Пусть $F(t, x) = xe^{-qx-1/2q^2t}$; $dX_t = 1 \cdot dW_t + 0 \cdot dt$. Тогда $\varphi = F(t, X_t)$. Имеем:

$$F'_x = e^{-qx_t - 1/2q^2t}(1 - qx);$$
$$F''_{xx} = e^{-qx_t - 1/2q^2t}[(1 - qx)(-q) - q] = e^{-qx_t - 1/2q^2t}(q^2x - 2q);$$
$$F'_t = xe^{-qx_t - 1/2q^2t}(-1/2q^2).$$

По лемме Ито получаем

$$d\varphi = e^{-qW_t - 1/2q^2t}(1 - qW)dW_t + e^{-qW_t - 1/2q^2t}[-1/2q^2x + 1/2(q^2x - 2q)]dt =$$
$$= e^{-qW_t - 1/2q^2t}[(1 - qW_t)dW_t - qdt].$$

Пример 7.4. Рассмотрим геометрическое броуновское движение $dX_t = \alpha X_t d_t + \tau X_t dW_t$. Рассмотрим случайный процесс $Y_t = \ln X_t$. Получим:

$$F(x) = \ln x;\ Y_t = F(X_t);\ F'_x = 1/x;\ F''_{xx} = -1/x^2;\ F'_t = 0;$$
$$dY_t = 1/X_t dX_t - 1/X^2(dX_t)^2 = 2dt + \sigma dW_t - 1/2\sigma^2 dt = (\alpha - 1/2\sigma^2)dt + \sigma dW_t.$$

Следовательно, для любого конечного промежутка времени T приращение $\log X_t$ нормально распределено с математическим ожиданием $(\alpha - 1/2\sigma^2)T$ и дисперсией $\sigma^2 T$.

Пример 7.5. Рассмотрим случайный процесс $Y_t = W_t^2$. Тогда:

$$dX_t = 1 \cdot dW_t + 0 \cdot dt;\ F(x, t) = x^2;\ Y_t = F(X_t, t);$$

$$F'_t = 0;\ F'_x = 2x;\ F''_{xx} = 2;$$
$$dY_t = dW_t^2 = 2W_t dW_t + 1/2 \cdot 2dt;$$
$$W_t^2 - W_0^2 = 2\int_0^T W_t dW + \int_0^T dt;\ \int_0^T W_t dW_t = W_i^2/2 - T/2.$$

7.5. Цена опциона. Формула Блэка — Шоулса

Опцион[1] как экономическое явление — это оформленное договором право купить, продать (или отказаться от сделки) на протяжении договорного срока и по фиксированной договорной цене определенный объем валюты, любых товаров, ценных бумаг (включая производные бумаги) либо получить определенный доход от финансового вложения или денежного займа (в виде разностной величины, фиксированного размера, процента).

Покупатель опциона — сторона договора, приобретающая право на покупку, продажу либо на отказ от сделки. Другими словами, это держатель опциона.

Продавец опциона — сторона договора, обязанная поставить или принять предмет сделки по требованию покупателя. Другими словами, это лицо, подписавшее опцион.

Опцион на покупку (*call*) — это право, но отнюдь не обязанность, держателя опциона получить от лица, подписавшего опцион, определенную имущественную ценность (акцию, заем, фьючерсный контракт и т.д.) в заданный будущий момент времени (или в любой момент определенного промежутка времени) по заранее установленной цене.

---

[1] От *нем. Die Option* — первоначально юридический термин, означающий оптацию, т.е. выбор подданства или гражданства.

Опцион на продажу (*put*) — данное право, но отнюдь не обязанность, продать имущественную ценность в определенный будущий момент (или промежуток) времени по заранее оговоренной цене.

Различают *европейский опцион*, при котором это право (на покупку или на продажу) может быть реализовано только в момент наступления срока истечения опционного контракта, и *американский опцион*, при котором это право (соответственно, покупки или продажи) может быть реализовано в любое время в пределах опционного срока.

Обозначим:

S — спот-цена базисного актива, т.е. сегодняшний биржевой курс того продукта, на покупку или продажу которого заключается опционный контракт;

K — страйк, т.е. та цена купли-продажи, которая оговорена в опционе;

T — оставшийся срок (в годах) до даты истечения контракта;

σ — волатильность биржевого курса базисного актива, т. е. среднеквадратическое отклонение изменения в единицу времени цены того блага, на которое заключается опционный контракт;

r_F — безрисковая ставка процента (годовая).

Теоретическая (равновесная) цена европейского колл-опциона согласно формуле Блэка — Шоулса равна

$$C = S\Phi(d_1) - K(1 + r_F)^{-T}\Phi(d_2),$$

а пут-опциона —

$$P = K(1 + r_F)^{-T}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1),$$

где $d_1 = \dfrac{\ln(S/K) + [\ln(1 + r_F) + 0{,}5\sigma^2]T}{\sigma\sqrt{T}}$; Φ — функция распределения стандартного нормального закона; $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

Часто вместо безрисковой годовой процентной ставки r_F в формулах Блэка — Шоулса используется более удобная для теоретического рассмотрения номинальная годовая безрисковая процентная ставка при условии непрерывного начисления процентов, другими словами — сила роста непрерывно начисляемых процентов R_F, связанная с r_F соотношением $1 + r_F = e^{R_F}$, или $R_F = \ln(1 + r_F)$. Тогда все формулы Блэка — Шоулса очевидным образом модифицируются заменой $\ln(1 + r_F)$ на R_F и $(1 + r_F)^{-T}$ на $\exp(-R_FT)$.

Цена, по которой можно купить опцион, называется его *премией*.

Рассмотрим вывод дифференциального уравнения Блэка — Шоулса. Предположим, что цена актива S подчинена закону геометрического броуновского движения:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW.$$

Предположим, что f — цена производного финансового инструмента на S. Тогда f должна быть некой функцией от S и f. Следовательно, по лемме Ито

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dW.$$

Построим динамический портфель, состоящий из короткой позиции по одной единице производного инструмента f и длинной позиции по $\frac{\partial f}{\partial S}$ единицам актива $\sigma^2 S^2$. Тогда ценность портфеля П равна $\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S$, а ее изменение за короткий промежуток времени dt есть

$$d\Pi = -df + \frac{\partial f}{\partial S}dS = -\left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt - \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dW +$$
$$+\frac{\partial f}{\partial S}\mu S dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dW = -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt.$$

Так как полученное выражение не содержит члена с dW, портфель Р остается безрисковым в течение короткого промежутка времени dt и должен поэтому из условия отсутствия арбитража приносить за время dt такую же доходность на вложенный капитал, как и любой другой краткосрочный безрисковый финансовый актив, т.е.

$$d\mathrm{P} = r\Pi dt,$$

где r — безрисковая процентная ставка. Таким образом, получаем

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt = r\left(-f + \frac{\partial f}{\partial S}S\right)dt,$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf.$$

Получено дифференциальное уравнение Блэка — Шоулса. Оно имеет множество решений, соответствующих всем различным производным финансовым инструментам, которые можно определить на основе актива S. Получаемые частные решения зависят от различных граничных условий, соответствующих тому или иному производному инструменту. Для европейского колл-опциона основное граничное условие имеет вид $f = \max(K - X, 0)$, если $t = T$, где K — страйк, а T — срок исполнения опциона. В случае же европейского пут-опциона оно принимает вид $f = \max(X - S, 0)$, если $t = T$.

7.6. Приложение метода реальных опционов к задаче об инвестициях

Постановка задачи. Фирма должна решить, следует ли ей делать вложения в некоторый проект и когда именно. Затраты инвестирования (I) известны и постоянны, но ценность проекта (V) следует закону геометрического броуновского движения.

Простое правило *NPV* (см. параграф 6.1) требует инвестировать, если $V > I$, т.е. если ценность рассматриваемого проекта превосходит затраты на инвестиции.

Однако поскольку будущая ценность проекта неизвестна, имеются альтернативные издержки того, чтобы инвестировать сегодня. Следовательно, оптимальное инвестиционное правило состоит в том, чтобы инвестировать, если V по меньшей мере достигает некоторого критического значения V^*, превосходящего I. Как увидим в дальнейшем, для разумных значений параметров эта критическая величина V^* может в 2 и 3 раза превосходить I.

Ценность проекта V развивается в соответствии со следующим геометрическим броуновским движением:

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dW, \tag{7.11}$$

где dW — приращение винеровского процесса.

Возможность инвестировать для фирмы равносильна обладанию колл-опционом — правом, но отнюдь не обязанностью приобрести акцию с указанной ценой. Следовательно, решение инвестировать равносильно решению выполнить такой опцион.

Обозначим ценность инвестиционной возможности (т.е. ценность опциона инвестирования) через $F(V)$. Установим правило, которое максимизирует это значение. Так как чистый доход от инвестирования в течение времени t равен $V_t - I$, будем максимизировать ожидаемую сегодняшнюю стоимость

$$F(V) = \max_t M((V_t - I)e^{-qt}) = M((V_T - I)e^{-qT}),$$

где M — математическое ожидание; T — (неизвестный) будущий момент времени, когда делаются инвестиции; q — ставка дисконтирования, и максимизация подчинена условию (7.11) для V.

Нужно предположить, что $\alpha < \rho$, в противном случае $F(V)$ может быть сделано сколь угодно большим за счет выбора T. Тогда ожидание было бы всегда наилучшей стратегией и оптимальный момент для инвестирования не существовал бы. Обозначим $\delta = \rho - \alpha > 0$.

Детерминированный случай. Рассмотрим сначала случай, когда неопределенность отсутствует, т.е. в уравнении (7.11) σ равна 0. Тогда

$$\frac{dV}{dt} = \alpha V;\ \ V(t) = V_0 e^{\alpha t},$$

где $V_0 = V(0)$.

Таким образом, если дано текущее V, ценность инвестиционной возможности в предположении, что мы инвестируем в некоторый будущий момент T, равна

$$F(V) = (V_0 e^{\alpha t} - I)e^{-\rho}T. \tag{7.12}$$

Предположим, что $\alpha \leqslant 0$. Тогда $V(t)$ будет оставаться постоянной или падать с течением времени, так что, очевидно, нужно инвестировать немедленно, если $V > I$, или не инвестировать никогда, если $V \leqslant I$. Следовательно, $F(V) = \max\{V - I, 0\}$ (т.е. совпадает с простым критерием NPV, который исходит из $\alpha = 0$, вернее, просто не рассматривает изменение $V(t)$ во времени).

Что, если $0 < \alpha < \rho$? Тогда $F(V) > 0$, даже если текущее значение $V < I$, потому что в конечном счете V будет превосходить I. Точно так же, если даже V сейчас превосходит I, может быть, все же лучше ждать, чем инвестировать немедленно. Чтобы это увидеть, максимизируем $F(V)$ по отношению к T:

$$\frac{dF(V)}{dT} = -(\rho - \alpha)Ve^{-(\rho-\alpha)T} + \rho I e^{-\rho T} = 0;\ \ \frac{d^2F(V)}{dT^2} < 0 \Leftrightarrow \alpha > 0;$$

$$T^* = \frac{1}{\alpha}\max\left\{\log\left(\frac{\rho I}{(\rho-\alpha)V}\right), 0\right\}. \tag{7.13}$$

Заметим, что если V немного больше I, то получаем $T^* > 0$. Причина для инвестиций в этом случае в терминах PV состоит в том, что затраты на инвестиции убывают с множителем $e^{-\rho T}$, а доходы — с меньшим множителем $e^{-(\rho-\alpha)T}$.

Для каких значений V оптимально инвестировать немедленно? Полагая $T^* = 0$, видим, что нужно инвестировать немедленно, если $V \geqslant V^*$, где $V^* = \frac{\rho}{\rho-\alpha} I > I$.

Подставив выражение для T^* (7.13) вместо T в формулу (7.12), получаем

$$F(V) = \begin{cases} \dfrac{\alpha I}{\rho-\alpha}\left(\dfrac{(\rho-\alpha)V}{\rho I}\right)^{\rho/\alpha} & \text{для } V \leqslant V^*, \\ V - I & \text{для } V > V^*. \end{cases}$$

График $F(V)$ от V для $I = 1$; $\rho = 0{,}10$; $\alpha = 0$; $0{,}03$; $0{,}06$ представлен на рис. 7.1.

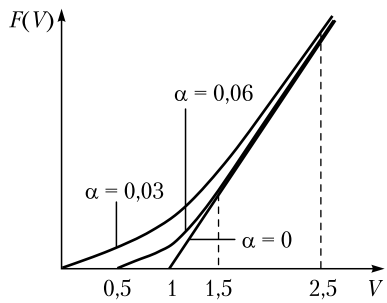


Рис. 7.1

В каждом случае точка касания $F(V)$ прямой $V - I$ есть критическое значение $V^* = (\rho I)/(\rho - \alpha)$.

Заметим, что $F(V)$ растет с ростом α, как и V^*. Рост V увеличивает ценность ожидания и ценность инвестиционной возможности. Если $V \geqslant V^*$, то следует инвестировать немедленно (рис. 7.2), а если $V < V^*$ — ждать (рис. 7.3).

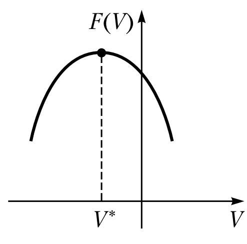


Рис. 7.2

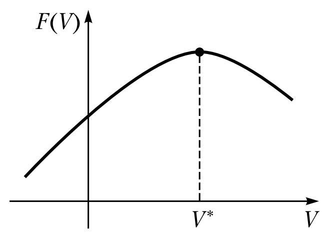


Рис. 7.3

Стохастический случай. Вернемся теперь к общему случаю, когда $\sigma > 0$. Так как V развивается стохастически, нельзя определить время T, как это делалось в детерминистском случае. Вместо этого наше инвестиционное правило примет форму критической ценности V^*, такой что оптимально инвестировать, когда $V \geqslant V^*$.

Предположим, что стохастические изменения в V должны реплицироваться (т.е. копироваться, воспроизводиться, англоязычный аналог — *spanned*) существующими активами в экономике. Это значит, что на рынке капитала должны найтись такие финансовые активы, из которых можно было бы составить такой динамический портфель (т.е. портфель, содержимое которого непрерывно меняется в соответствии с изменением цены актива), цена которого полностью коррелировала бы (т.е. имела бы коэффициент корреляции, равный 1) со случайным процессом V. Другими словами, рынок капитала должен быть достаточно полным, для того чтобы можно было найти актив или построить динамический портфель активов, цена которого полностью коррелировала бы с V.

Данное предположение должно выполняться для большей части товаров, которые торгуются на спот- и фьючерсных рынках. Таким образом, предполагается, что неопределенность будущих значений V может быть реплицирована существующими активами.

С этим предположением можно определить инвестиционное правило, которое максимизирует рыночную ценность фирмы без каких-либо предположений относительно предпочтений, связанных с риском, или ставки дисконтирования.

Пусть x — цена некоторого актива или динамического портфеля активов, полностью коррелированная с V, и обозначим через ρ_{xm} коэффициент корреляции x с рыночным портфелем. Так как x полностью коррелирована с V, то $\rho_{xm} = \rho_{xV}$. Будем предполагать, что данный актив или портфель не приносит дивидендов, таким образом, его полная доходность состоит из увеличения (прироста) капитала (*capital gains*). Тогда x развивается в соответствии с дифференциальным уравнением

$$dx = \mu x dt + \sigma x dW,$$

где μ — темп роста (снос) — это ожидаемая норма доходности от владения этим активом или портфелем активов.

В соответствии с моделью оценки цены финансовых активов *CAPM* (см. гл. 6), μ должна отражать систематический (недиверсифицируемый) риск данного актива. Из условия равновесия *CAPM*

$$\mu = r + \varphi \sigma_x \rho_{xm},$$

где r — безрисковая норма доходности; φ — рыночная плата за риск; ρ_{xm} — коэффициент корреляции между доходностью частного актива x и всего рыночного портфеля m.

Таким образом, μ есть скорректированная на риск ожидаемая норма доходности, которую инвесторы потребовали бы, если бы они обладали этим проектом (т.е. $\varphi = (r_m - r)/\sigma_m$, где r_m — ожидаемая доходность рынка; σ_m — стандартное отклонение этой доходности; если взять индекс Нью-Йоркской фондовой биржи в качестве рыночного индекса, то $r_m - r \approx 0{,}08$, $\sigma_m \approx 0{,}2$; так что $\varphi \approx 0{,}4$).

Будем предполагать, что α — ожидаемый процентный темп изменения V — меньше, чем скорректированная на риск доходность μ (как мы увидим, фирма никогда не стала бы инвестировать, если бы это не было так; независимо от текущего уровня V фирме тогда было бы всегда лучше ждать и просто держать опцион инвестирования).

Обозначим разность между μ и α через δ: $\delta = \mu - \alpha$.

Проведем аналогию с финансовым колл-опционом. Если бы V была ценой акции, δ была бы ставкой дивидендов этой акции, общая ожидаемая доходность этой акции равнялась бы $\mu = \delta + \alpha$, т.е. ставка дивидендов плюс ожидаемая норма увеличения капитала. Если бы δ была равна нулю, колл-опцион всегда бы держали до срока исполнения и никогда бы не исполняли раньше. Причина состоит в том, что в этом случае полная доходность акции содержится в движении ее цены, так что отсутствуют издержки сохранения опциона. Однако если ставка дивидендов положительна, существуют альтернативные издержки держания опциона по сравнению с тем, чтобы его исполнить. Эти альтернативные издержки состоят в потоке дивидендов, от которого держатель опциона отказывается, владея опционом вместо акции. Так как δ — пропорциональная ставка дивидендов, то чем выше цена акции, тем больше поток дивидендов. При некоторой достаточно высокой цене альтернативные издержки, состоящие в отказе от дивидендов, становятся настолько высокими, что целесообразно исполнить опцион.

В данной инвестиционной задаче μ — ожидаемая норма доходности от владения проектом в целом. Это равновесная норма, которая устанавливается с помощью рынка капитала и включает в себя премию за риск. Если $\delta > 0$, то ожидаемый темп прироста капитала (*rate of capital gain*) проекта меньше, чем μ. Следовательно, δ — альтернативные издержки отсрочки принятия проекта и сохранения опциона инвестирования. Если бы δ была равна нулю, отсутствовали бы альтернативные издержки сохранения опциона, и никто бы никогда не делал инвестиций, как бы высока не была *NPV* проекта. Вот почему предполагается $\delta > 0$. С другой стороны, если δ очень велика, ценность опциона была бы очень мала, так как велики альтернативные издержки ожидания. При δ, стремящейся к ∞, ценность опциона стремится к нулю, и единственный выбор тогда состоит в следующем: «инвестировать сейчас или никогда», т.е. применимо стандартное правило *NPV*.

Параметр δ может интерпретироваться различными способами. Например, он может отражать процесс входа в отрасль и экспансию со стороны конкурентов. Наиболее естественно считать его потоком платежей от проекта. Если проект бесконечно живет, то уравнение (7.11) представляет развитие V во время выполнения проекта, а δV — поток платежей, который порождает данный проект.

Вывод дифференциального уравнения. Итак, $F(V)$ — ценность опциона инвестирования. Рассмотрим следующий портфель: один опцион инвестирования $F(V)$; короткая позиция по $n = F'(V)$ единицам данного проекта (или, что равносильно, актива или портфеля x, который полностью коррелирован с V). Ценность такого портфеля: $\Phi = F - F'(V)V$.

Заметим, что портфель динамический. Когда V меняется, $F'(V)$ также может меняться от одного короткого интервала времени к другому, так что структура портфеля будет меняться. Однако на протяжении каждого короткого интервала длины dt величина n считается постоянной.

Короткая позиция в этом портфеле требует платежа в размере $\delta VF'(V)$ в единицу времени за короткий временной период; в противном случае ни один рациональный инвестор не стал бы входить в длинную позицию данной транзакции.

Инвестор, который держит длинную позицию в данном проекте, будет требовать скорректированный на риск доход μV, который равен приросту капитала dV плюс поток дивидендов δV. Так как короткая позиция включает $F'(V)$ единиц проекта, она будет требовать выплаты $\delta VF'(V)$. Принимая этот платеж во внимание, видим, что полный доход от держания портфеля за короткий временной интервал dt равен

$$d\Phi - \delta VF'(V)dt = dF - F'(V)dV - \delta VF'(V)dt \tag{7.14}$$

(так как $n = F'(V)$ остается постоянным в течение этого короткого интервала dt, член $VdF'(V) = 0$).

Чтобы получить выражение для dF, используем лемму Ито:

$$dF = F'(V)dV + 1/2F''(V)(dV)^2.$$

Подставляя полученное выражение в выражение для полного дохода портфеля, видим, что он равен

$$F'(V)dV + 1/2F''(V)(dV)^2 - F'(V)dV - \delta VF'(V)dt =$$
$$= 1/2F''(V)(dV)^2 - \delta VF'(V)dt.$$

Из формулы (7.11) следует, что $(dV)^2 = \sigma^2 V^2 dt$, поэтому доход портфеля равен

$$1/2\sigma^2 V^2 F''(V)dt - \delta VF'(V)dt.$$

Заметим, что этот доход безрисковый (выбрано $n = F'(V)$, чтобы сделать портфель безрисковым). Следовательно, чтобы исключить арбитражные возможности, полный доход за время dt должен равняться $\Phi rdt = r(F - F'(V)V)dt$, т.е.

$$1/2\sigma^2 V^2 F''(V)dt - \delta VF'(V)dt = r(F - F'(V)V)dt.$$

Деля обе части равенства на dt и переупорядочивая слагаемые, получаем следующую формулу для $F(V)$:

$$1/2\sigma^2 V^2 F''(V) + (r - \delta)VF'(V) - rF = 0. \tag{7.15}$$

Дальнейшие рассуждения этого параграфа проведем в несколько большей общности, используя вместо безрисковой ставки r любой коэффициент дисконтирования ρ (совпадающий в нашей задаче с r).

Получение общего и частного решений. $F(V)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$F(0) = 0; \tag{7.16}$$
$$F(V^*) = V^* - I; \tag{7.17}$$
$$F'(V^*) = 1. \tag{7.18}$$

Условие (7.16) возникает из наблюдения, что если $V = 0$, то она будет оставаться нулем (см. формулу (7.11)). Следовательно, если $V = 0$, то опцион инвестирования не будет иметь никакой ценности.

Условия (7.17)—(7.18) возникают из рассмотрения оптимальных инвестиций. V^* — цена, при которой оптимально инвестировать. Условие (7.17) — это условие непрерывности ценности. При инвестировании фирма получает чистый доход $V^* - I$. Условие (7.18) есть условие гладкости. Если бы

$F(V)$ не была непрерывная и гладкая в критической точке V^*, то лучше было бы осуществить инвестиции в другой точке.

Уравнение (7.17) имеет другую интерпретацию: $V^* - F(V^*) = I$. Когда фирма инвестирует, она получает доход V^*, но теряет возможность, или опцион, инвестирования, ценность которого $F(V)$. Другими словами, ее выигрыш, чистый от альтернативных издержек, равен $V - F(V)$. Критическое значение V^* — это величина, при которой чистый выигрыш равен прямым затратам инвестирования I.

Наконец, можно записать $V^* = F(V^*) + I$, полагая, что ценность проекта равна полным издержкам (прямые затраты плюс альтернативные издержки) наших инвестиций.

Можно заметить, что уравнение (7.15) второго порядка является однородным и линейным относительно зависимой переменной F и ее производных, поэтому его общее решение может быть выражено как линейная комбинация любых двух независимых решений. Если взять функцию AV^{β}, то увидим, что она удовлетворяет уравнению (7.15) при условии, что β есть квадратный корень уравнения

$$1/2\sigma^2\beta(\beta - 1) + (\rho - \delta)\beta - \rho = 0. \qquad (7.19)$$

Найдем корни этого уравнения:

$$\beta_{1,\,2} = \frac{1}{2} - \frac{(\rho - \delta)}{\sigma^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}}.$$

При этом $\beta_1 > 1$, $\beta_2 < 0$, поэтому общее решение уравнения (7.15) может быть записано как

$$F(V) = A_1 V^{\beta_1} + A_2 V^{\beta_2},$$

где A_1, A_2 — константы, которые нужно определить. Из условия (7.16), $A_2 = 0$, поэтому

$$F(V) = A_1 V^{\beta_1}. \qquad (7.20)$$

Подставляя соотношение (7.20) в формулы (7.17) и (7.18), находим

$$\begin{cases} AV^{\beta_1} = V - I, \\ A\beta V^{\beta_1 - 1} = 1; \end{cases}$$

$$A\beta V^{\beta_1} = V;\ AV^{\beta_1} = A\beta V^{\beta_1} - I;\ AV^{\beta_1}(\beta - 1) = I;$$

$$A = \frac{I}{(\beta - 1)V^{\beta_1}};\ \frac{IV^{\beta_1}}{(\beta - 1)V^{\beta_1}} = V - I;\ V^* = \frac{I + \beta I - I}{\beta - 1} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I;$$

$$A = \frac{I(\beta_1 - 1)^{\beta_1}}{(\beta_1 - 1)\beta_1^{\beta_1} I^{\beta_1}} = \frac{(\beta_1 - 1)^{\beta_1 - 1}}{\beta^{\beta_1}} I^{1 - \beta_1};$$

$$V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I; \qquad (7.21)$$

$$A = \frac{V^* - I}{(V^*)^{\beta_1}} = \frac{(\beta_1 - 1)^{\beta_1 - 1}}{\beta_1^{\beta_1} I^{\beta - 1}}. \qquad (7.22)$$

Уравнения (7.20)—(7.22) дают ценность инвестиционной возможности и оптимальное инвестиционное правило. Фирма должна инвестировать в рассматриваемый проект если и только если ценность этого проекта V превосходит величину затрат не менее, чем в $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ раз:

$$V \geqslant V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I.$$

Так как $\beta_1 > 1$, то $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} > 1$ и $V^{* > I}$, таким образом, простое правило NPV является некорректным. Неопределенность и необратимость приводят к наличию клина между критическими значениями V^* и I. Размер этого клина — множитель $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$, поэтому важно изучить его величину для реальных значений параметров и изменение величины этого множителя в ответ на изменения этих параметров.

Исследование решения. Обозначим левую часть уравнения (7.19) через Q. Таким образом, Q — функция β.

Коэффициент при β^2 положителен, поэтому парабола имеет такой вид, как на рис. 7.4. $Q(1) = -\delta < 0$, $Q(0) = -\rho < 0$ т.е. график пересекает горизонтальную ось справа от 1 и слева от 0. Один корень, назовем его β_1, больше 1, а другой, назовем его β_2, отрицательный.

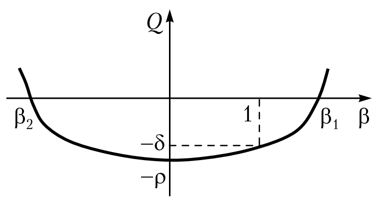


Рис. 7.4

Рассмотрим поведение β_1 при изменении σ^2:

$$\frac{dQ}{d\sigma} = \frac{\partial Q}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \equiv 0.$$

С другой стороны, непосредственно $\frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \sigma\beta(\beta - 1)$ при $\beta = \beta_1 > 1$.

Из графика рис. 7.4 очевидно, что $\frac{\partial Q}{\partial \beta} > 0$ при $\beta = \beta_1$.

Следовательно, $\frac{\partial \beta_1}{\partial \sigma} < 0$. Другими словами, с ростом σ значение β_1 уменьшается и, следовательно, отношение $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ увеличивается. Чем больше неопределенность относительно будущего значения V, тем больше клин между V^* и I, т.е. тем большую избыточную доходность фирма будет требовать, прежде чем она захочет сделать необратимые инвестиции.

Легко проверить, что:

• β_1 возрастает, когда δ возрастает, т.е. более высокая δ означает меньший клин $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$;

• β_1 уменьшается, когда ρ возрастает, т.е. более высокое ρ ведет к увеличению клина.

Если $\sigma \to \infty$, имеем $\beta_1 \to 1$ и $V^* \to \infty$, т.е. фирма никогда не будет инвестировать, если σ бесконечна.

Теперь рассмотрим, что произойдет, если $\sigma \to 0$:

• если $\alpha > 0$, то $\beta_1 \to \frac{\rho}{\rho - \delta}$ и $V^* \to \frac{\rho}{\delta} I$;

• если $\alpha \leqslant 0$, то $\beta_1 \to \infty$ и $V^* \to I$.

Таким образом, эти результаты совпадают с детерминистским случаем.

Рассмотрим поведение β_1 при стремлении σ к 0 и к $+\infty$. Так как

$$\beta_1 = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 - (\rho - \delta) + \sqrt{\left(\rho - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 + 2\rho\sigma^2}}{\sigma^2},$$

то очевидно, что $\lim\limits_{\sigma \to +\infty} \beta_1 = 1$.

Поскольку $\delta = \rho - \alpha$; $\alpha = \rho - \delta$, имеем:

• если $\alpha \leqslant 0$, то $\delta \geqslant \rho$ и $\lim\limits_{\sigma \to 0} \beta_1 = +\infty$;

• если $\alpha > 0$, то $\delta < \rho$, тогда вычислим $\lim\limits_{\sigma \to 0} \beta_1$ по правилу Лопиталя:

$$\lim_{\sigma \to 0} \beta_1 = \lim_{\sigma \to 0} \frac{\sigma}{2\sigma} + \frac{\frac{1}{2}\left[2\left(\rho - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(-\sigma) + 4\rho\sigma\right]}{2\sigma\sqrt{\left(\rho - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 + 2\rho\sigma^2}} =$$

$$= \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{2} + \frac{2\rho - \left(\rho - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{2\sqrt{\left(\rho - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 + 2\rho\sigma^2}} = \frac{\rho - \delta + 2\rho - \rho + \delta}{2(\rho - \delta)} = \frac{\rho}{\rho - \delta}$$

и $\lim\limits_{\sigma \to 0} V^* = \lim\limits_{\sigma \to 0} \frac{\beta_1 I}{\beta_1 - 1} = \frac{\rho I}{\rho - \rho + \delta} = \frac{\rho}{\delta} I$.

Проверим, что $\beta_1 > 1$, исходя из условия $0 < \alpha < \rho$:

$$\sqrt{\left(\frac{\rho - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}} > \frac{\rho - \delta}{\sigma^2} + \frac{1}{2};$$

$$\frac{(\rho - \delta)^2}{\sigma^4} - \frac{\rho - \delta}{\sigma^2} + \frac{1}{4} + \frac{2\rho}{\sigma^2} > \frac{(\rho - \delta)^2}{\sigma^4} + \frac{\rho - \delta}{\sigma^2} + \frac{1}{4};$$

$$\frac{2\rho}{\sigma^2} > \frac{2(\rho - \delta)}{\sigma^2};$$

$$\rho > \rho - \delta;\ \delta = \rho - \alpha;\ \rho > \alpha.$$

Проверим, что $\left.\dfrac{\partial\beta}{\partial\sigma}\right|_{\beta=\beta_1} < 0$:

$$Q(\beta)=\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)+(\rho-\delta)\beta-\rho=0;$$

$$\lim_{\beta\to\pm\infty} Q=+\infty;$$

$$Q(1)=-\delta<0;\ Q(0)=-\rho<0;$$

$$(1)\quad \frac{\partial Q}{\partial\sigma}=\frac{\partial Q}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\sigma}+\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\equiv 0;$$

$$(2)\quad \frac{\partial Q}{\partial\sigma}=\sigma\beta(\beta-1)\Big|_{\beta=\beta_1>1}=\sigma\beta_1(\beta_1-1)>0;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\beta}=\sigma^2\beta-\frac{1}{2}\sigma^2+\rho-\delta\Big|_{\beta=\beta_1};$$

$$(3)\quad \beta_1\sigma^2=\frac{1}{2}\sigma^2-(\rho-\delta)+\sqrt{\left(\rho-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2+2\rho\sigma^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\rho-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2+2\rho\sigma^2}-\left(\rho-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)>0;$$

$$(1),(2),(3)\Rightarrow \left.\frac{\partial\beta}{\partial\sigma}\right|_{\beta=\beta_1}<0.$$

Проверим, что $\left.\dfrac{\partial\beta}{\partial\delta}\right|_{\beta=\beta_1} > 0$:

$$\frac{dQ}{d\delta}=\frac{\partial Q}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\delta}+\frac{\partial Q}{\partial\delta};$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial\beta}\right|_{\beta=\beta_1}>0;\ \frac{\partial Q}{\partial\delta}=-\beta\Big|_{\beta=\beta_1}<0\ \Rightarrow\ \frac{\partial\beta_1}{\partial\delta}>0.$$

Проверим, что $\left.\dfrac{\partial\beta}{\partial\rho}\right|_{\beta=\beta_1} < 0$:

$$\frac{dQ}{d\rho}=\frac{\partial Q}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\rho}+\frac{\partial Q}{\partial\rho};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\beta}(\beta_1)>0;\ \frac{\partial Q}{\partial\rho}=\beta-1\Big|_{\beta=\beta_1}>0\ \Rightarrow\ \frac{\partial\beta_1}{\partial\rho}<0.$$

7.7. Задача об инвестициях с переменной функцией затрат

Рассмотрим более общую ситуацию, когда и затраты на проект (первоначальные вложения) I, и поток платежей, связанный с проектом (релевантный, инкрементальный денежный поток) P являются неопределенными и следуют геометрическому броуновскому движению. Предположим, что неопределенность этих двух случайных процессов коррелирована из-за некоторых общих макроэкономических воздействий. Таким образом, предположим, что

$$dP = \alpha_P P dt + \sigma_P P dW_P; \;\; dI = \alpha_I I dt + \sigma_I I dW_I,$$

причем $dW_P^2 = dt$; $dW_I^2 = dt$; $dW_P dW_I = \rho dt$, где W обозначает винеровский процесс.

Денежный поток инвестиционного проекта P следует геометрическому броуновскому движению: $dP = \alpha P dt + \sigma P dW_P$, и его ожидаемое значение растет с темпом α. Если будущие доходы дисконтируются по ставке μ, то ожидаемая сегодняшняя ценность V проекта, когда текущее значение денежного потока (платеж в настоящий момент) есть P, равняется

$$V = M\left(\int_t^{\infty} P_s e^{-\mu_P(s-t)} ds\right) = \int_t^{\infty} P_t e^{\alpha_P(s-t)} e^{-\mu_P(s-t)} ds = \int_t^{\infty} P_t e^{-\delta_P(s-t)} dt = \frac{P_t}{\delta_P},$$

потому что $M(dP) = \alpha_P M(P) dt$, откуда $M(P) = M(P_0)e^{\alpha_P t}$, и в частности $M(P_s) = M(P_t)e^{\alpha_P(s-t)}$.

Величина P_t/δ есть ожидаемая в момент времени t сегодняшняя стоимость потока платежей $P_s (s \geqslant t)$, когда начальный уровень равен P_t, потому что $M(P_s) = P_t e^{\alpha_P(s-t)}$, а дисконтирование производится по подходящей скорректированной на риск ставке μ.

Модель оценки доходности финансовых активов (*CAPM*) позволяет нам определить скорректированную на риск ставку дисконтирования μ. Для этого нужно, чтобы стохастические флуктуации P реплицировались финансовыми рынками, т.е. чтобы существовал торгуемый на финансовом рынке актив или чтобы можно было построить динамический портфель из торгуемых на финансовом рынке активов, полностью коррелированный с P. Для простоты рассмотрения можно предположить, что выпуск данного проекта непосредственно торгуется. В этом случае ставка дисконтирования μ будет рыночной скорректированной на риск ожидаемой нормой доходности P.

Имеем, как и ранее, $\mu = r + \varphi\sigma\rho_{pm}$, где r — ставка дисконтирования, соответствующая безрисковому денежному потоку; $\varphi = \dfrac{r_m - r}{\sigma_m}$ — рыночная премия за риск; ρ_{pm} — коэффициент корреляции между данным активом, который отслеживает P, и всем рыночным портфелем (r_m — ожидаемая доходность рынка, σ_m – стандартное отклонение этой доходности).

Инвесторы согласятся держать выпуск проекта или актив, полностью коррелированный с P, только если они получают ожидаемую полную норму доходности μ. Отсюда α принимает форму (входит в выражение) как ожидаемое увеличение капитала (*capital gain*). Остаток δ должен представлять собой некоторый род дивиденда. Если, например, выпуск является складируемым товаром (нефть или медь), то δ представляет собой чистую предельную доходность от удобства хранения, т.е. поток выгод за вычетом затрат на хранение, которую производит последняя единица хранения. Эти выгоды могут включать в себя увеличение возможности бесперебойного производства, избежание остановок, облегчение планирования производства и сбыта.

Доходы «от удобства» являются причиной того, что фирмы держат предметы, внесенные в инвентарь, даже если ожидаемый прирост от них ниже скорректированной на риск ставки или даже отрицательный. Обычно ожидают, что для большинства товаров предельная доходность хранения обратно пропорционально зависит от полного количества запаса.

Будем считать δ экзогенно заданным параметром, хотя на практике этот параметр может меняться, и мы также можем учесть это в нашей модели.

Когда некоторые основные параметры меняются, равновесное соотношение $\mu - \alpha = \delta$ по-прежнему должно выполняться, но какие из трех величин изменить для восстановления равновесия, зависит от лежащей в основе технологии. Мы предполагаем, что безрисковая ставка r и рыночная цена риска φ, будучи свойствами всего рынка, являются экзогенными для нашего анализа.

Когда у цены актива, приносящего P, возрастает, μ также должно возрасти. Если у есть фундаментальная рыночная постоянная, тогда α должно меняться в соответствии с изменением μ. Однако если α — фундаментальная рыночная постоянная, то σ должна меняться, например может измениться полное количество запасов. Когда исследуются воздействия изменений δ на инвестиционное решение фирмы, ответ будет зависеть от того, какая из этих точек зрения принимается. Вообще говоря, δ будем рассматривать как основной параметр и допускать изменения α.

Ценность опциона инвестировать зависит от P_t и I. Интуитивно ожидаем, что этот опцион будут держать на руках, когда P_t низкая или I высокие, и будут исполнять, когда P_t становится достаточно высокой для данной I или же I становятся достаточно низкими для данной P_t.

Рисунок 7.5 показывает предполагаемые области на плоскости (I, P), соответствующие ожиданию и принятию инвестиционного проекта, и границу, разделяющую их.

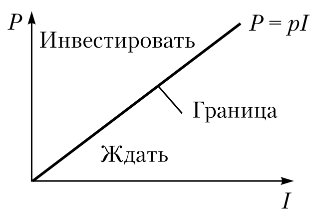


Рис. 7.5

Здесь важно сделать свои интуитивные представления более точными и развить аналитический метод нахождения границы двух областей и тем самым определения оптимального инвестиционного правила.

Дальнейшие шаги должны быть привычными. Пусть $F(P, I)$ — ценность опциона инвестирования. Надо найти уравнение для него. Предполагаем, что и утопленные затраты, и цена выпуска потока платежей покрываются (*spanned*) или реплицируются существующими активами, и поэтому работаем с активами, цены которых равны соответственно P и I. Назовем эти активы для краткости «выпуск» и «капитал». Рассмотрим портфель, состоящий из одной единицы нашего опциона F, короткой позиции относительно m единиц выпуска и короткой же позиции относительно n единиц капитала. Ценность такого портфеля

$$\Phi = F(P, I) - mP - nI.$$

Рассмотрим изменение ценности портфеля за короткий временной интервал dt. С помощью леммы Ито получаем

$$d\Phi = F_P' dP + F_I' dI + \frac{1}{2}(F_{PP}''\sigma_P^2 P^2 + 2F_{PI}''\rho\sigma_P\sigma_I PI + F_{II}''\sigma_I^2 I^2)dt,$$

откуда

$$d(F - mP - nI) =$$
$$= (F_P' - m)dP + (F_I' + n)dI + \frac{1}{2}(F_{PP}''\sigma_P^2 P^2 + 2F_{PI}''\rho\sigma_P\sigma_I PI + F_{II}''\sigma_I^2 I^2)dt.$$

Заметим, что dP и dI в правой части уравнения стохастические, однако, положив $m = F_P$, $n = F_I$, избавимся от этих слагаемых и сделаем наш портфель безрисковым. Тогда держатель портфеля за интервал времени $(t; t + dt)$ будет иметь безрисковое увеличение капитала

$$\frac{1}{2}(F_{PP}''\sigma_P^2 P^2 + 2F_{PI}''\rho\sigma_P\sigma_I PI + F_{II}''\sigma_I^2 I^2)dt.$$

Держатель портфеля также должен выполнить платеж, соответствующий доходности от удобства выпуска и капитала, держателям длинной позиции. Таким образом, доход от портфеля равен

$$\frac{1}{2}(F_{PP}''\sigma_P^2 P^2 + 2F_{PI}''\rho\sigma_P\sigma_I PI + F_{II}''\sigma_I^2 I^2)dt - \delta_P P F_P' dt - \delta_I I F_I' dt.$$

Доход от нашего портфеля по безрисковой ставке за короткий временной промежуток dt равняется $\Phi r dt$.

Из условия отсутствия арбитража следует

$$\frac{1}{2}(F_{PP}''\sigma_P^2 P^2 + 2F_{PI}''\rho\sigma_P\sigma_I PI + F_{II}''\sigma_I^2 I^2)dt - \delta_P P F_P' dt - \delta_I I F_I' dt =$$
$$= r(F - F_P' P - F_I' I)dt,$$

откуда, группируя слагаемые, получаем следующее основное уравнение:

$$\frac{1}{2}(F_{PP}''\sigma_P^2 P^2 + 2F_{PI}''\rho\sigma_P\sigma_I PI + F_{II}''\sigma_I^2 I^2) + (r - \delta_P)PF_P' + (r - \delta_I)IF_I' - rF = 0.$$

Это уравнение в частных производных, так как есть две неизвестные переменные P и I. Оно справедливо в той области плоскости (P, I), где оптимально держать опцион неисполненным. На границе данной области, где опцион немедленно исполняется,

$$F(P, I) = V(P) - I = \frac{P}{\delta_P} - I.$$

Должны также выполняться условия гладкого склеивания (касательные плоскости на границе должны совпадать): $F_P'(P, I) = V'(P) = 1/\delta_P$; $F_I'(P, I) = -1$.

Данное дифференциальное уравнение вместе с граничными условиями должно определить положение самой границы и породить решение для функции F в области ожидания. Тот факт, что граница является неизвестной, делает задачу очень трудной. Теория дифференциальных уравнений в частных производных очень мало что может сказать о задачах со свободной границей. Аналитическое решение существует редко, а численные методы разрабатываются для каждой частной ситуации в отдельности. В принципе ситуация не отличается от этой задачи даже когда только цена является неопределенной; инвестиционный порог P^* неизвестен и является точкой свободной границы, которая отделяет одномерную область значений P, где инвестиции делаются, от области, где они не делаются. К счастью, в рассматриваемом случае естественная однородность задачи позволяет свести ее к одному измерению.

Если текущие значения P и I удвоить, то удвоятся ценность проекта и, таким образом, затраты на инвестирование. Оптимальное решение, следовательно, должно зависеть только от отношения $p = P/I$, и, следовательно, граница на рисунке должна представлять собой луч из начала координат. Соответственно, ценность опциона должна быть однородной степени 1 от (P, I), позволяя записать $F(P, I) = If(P/I) = If(p)$, где f — функция, подлежащая определению. Последовательно дифференцируя, получаем

$$F'_P(P, I) = f'(p);\ F'_I(P, I) = f(p) - pf''(p);$$

$$F''_{PP}(P, I) = \frac{f''(p)}{I};\ F''_{PI}(P, I) = -p\frac{f''(p)}{I};\ F''_{II}(P, I) = p^2\frac{f''(p)}{I}.$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение и группируя слагаемые, получаем

$$\frac{1}{2}(\sigma_P^2 - 2\rho\sigma_P\sigma_I + \sigma_I^2)p^2f''(p) + (\delta_I - \delta_P)pf'(p) - \delta_I f(p) = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение для неизвестной функции $f(p)$ от скалярной независимой переменной p.

Граничные условия принимают вид

$$f(p) = p/\delta_P - 1,\ f'(p) = 1/\delta_P,\ f(p) - pf'(p) = -1.$$

Любое из этих трех условий можно вывести из двух других. Характеристическое уравнение нашего дифференциального уравнения имеет вид

$$Q = \frac{1}{2}(\delta_P^2 - 2\rho\delta_P\delta_I + \delta_I^2)\beta(\beta - 1) + (\delta_I - \delta_P)\beta - \delta_I = 0.$$

Пусть β_1 — больший корень. Если δ_I и δ_P больше нуля (как мы предполагали), то $\beta_1 > 1$. Тогда находим

$$\frac{P^*}{I^*} = p^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\delta_P.$$

Этот луч, проходя через начало координат, разделяет области ожидания и инвестирования в плоскости (P, I). Если δ_P и δ_I увеличиваются, β_1 будет убывать и множитель $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ возрастать. Однако множитель будет убывать, если r возрастает; при сохранении постоянными вариаций P и I чем больше будет ковариация между изменениями в P и I, тем меньше неопределенность в их отношении, и, следовательно, ценность ожидания будет уменьшаться.

7.8. Задача о поглощении

Синергетический эффект слияния/поглощения. Слиянием называют любую форму объединения двух или большего числа существующих фирм в единую фирму. Именно здесь специалисты по теории финансов чаще всего говорят о синергетическом эффекте.

«Синергия — условие, состоящее в том, что общий результат превосходит сумму сложенных эффектов; при синергетическом слиянии стоимость после слияния превосходит сумму отдельных фирм до слияния. Если существует синергия, то целое — это больше, чем сумма его частей. Синергией также называют: 2 плюс 2 равняется 5»[1].

Бригхэм и Гапенски[2] выделяют четыре основных источника синергетического эффекта:

1) операционная экономия, возникающая в результате возрастающей отдачи от масштаба в управлении, маркетинге, производстве и распределении;

2) финансовая экономия, проявляющаяся в снижении издержек по обслуживанию долга, увеличении способности компании по привлечению заемных средств, лучшей подготовке сделок аналитиками;

3) дифференциальная эффективность, означающая, что управление одной из фирм было неэффективным и после слияния ее активы станут более производительными;

4) возросшая рыночная мощь как результат ослабления конкуренции.

Постановка задачи о поглощении. Предположим, что поведение фирмы-поглотителя и фирмы-мишени рационально, обе стороны обладают совершенной информацией и одинаково прогнозируют будущее, и попробуем рассмотреть процесс слияния-поглощения с позиций известного метода реальных опционов[3]. Пусть фирма A собирается поглотить фирму B и V_A — ценность фирмы A, V_B — ценность фирмы B, V_C — ценность объединенной фирмы, $V_D = V_C - V_A$ — ценность для фирмы A проекта поглощения фирмы B, I — плата фирмы A акционерам фирмы B за покупку их фирмы. Таким образом сделка возможна, только если $V_B \leqslant I \leqslant V_D$.

Предположим, что ценность фирмы V_B и ценность инвестиционного проекта V_D, как обычно, представляют собой геометрические броуновские движения:

$$dV_D = \alpha_D V_D dt + \sigma_D V_D dw_D;\ \ dV_B = \alpha_B V_B dt + \sigma_B V_B dw_B,$$

где α и σ — темпы роста и волатильности соответствующих процессов; dw — приращение винеровского случайного процесса.

Анализ проведем в три этапа. Сначала будем считать, что каждая сторона рассматривает цену, которую предлагает другая сторона, как данную. Рассмотрим поведение фирмы B, которая получила предложение о продаже, и установим, какой должна быть предлагаемая цена, чтобы фирма B согласилась на данное предложение. Построим безрисковый портфель Φ, состоящий из одного опциона $F(V_B)$ продать фирму B за общую сумму I и из короткой позиции по $F'(V_B)$ единицам актива, который является репликой V_B. Реплика для V_B — это такой финансовый актив, цена которого реплициру-

---

[1] *Бригхэм Ю.* Энциклопедия финансового менеджера. М. : Экономика, 1998.

[2] *Бригхэм Ю., Гапенски Л.* Финансовый менеджмент. СПб. : Экономическая школа, 2004.

[3] *Dixit A. K., Pindyck R. S.* Investment under uncertainty. Princeton, 1993.

ет, т.е. копирует, воспроизводит стохастические изменения процесса V_B. Другими словами, коэффициент корреляции этих двух случайных процессов (V_B и цены реплицирущего актива) в любой момент времени должен быть равен единице (см. также объяснения в параграфе 7.6).

Ценность такого портфеля: $\Phi = F(V_B) - F'(V_B)V_B$. Держатель длинной позиции будет требовать скорректированной на риск отдачи μV_B от актива V_B, которая равна приросту капитала αV_B плюс поток дивидендов $\delta_B V_B$. Следовательно, за эту короткую позицию, включающую $F'(V_B)$ единиц актива V_B, должны за короткий интервал времени dt заплатить $\delta_B V_B F'(V_B)dt$. Поэтому общая отдача от нашего портфеля за короткий временной промежуток dt равна

$$D\Phi = dF - F'(V_B)dV_B - \delta_B V_B F'(V_B)dt.$$

По лемме Ито $dF = F'(V_B)dV_B + \frac{1}{2}F''(V_B)(dV_B)^2$, поэтому

$$d\Phi = \frac{1}{2}F''(V_B)(dV_B)^2 - \delta_B V_B F'(V_B)dt = \frac{1}{2}F''(V_B)V_B^2\sigma_B^2 dt - \delta_B V_B F'(V_B)dt$$

и можно увидеть, что портфель действительно безрисковый. Так как портфель безрисковый, условие отсутствия арбитража имеет вид $d\Phi = r\Phi dt$, где r — безрисковая ставка процента, и получаем

$$\frac{1}{2}F''(V_B)\sigma_B^2 V_B^2 dt - \delta_B F'(V_B)V_B dt = r(F - F'(V_B)V_B)dt,$$

откуда

$$\frac{1}{2}\sigma_B^2 V_B^2 F''(V_B) + (r - \delta_B)V_B F'(V_B) - rF = 0. \qquad (7.23)$$

Общее решение уравнения (7.23) имеет вид $F(V) = B_1 V_B^{\beta_1} + B_2 V_B^{\beta_2}$, где β_1, β_2 — корни квадратного уравнения $\frac{1}{2}\sigma_B^2\beta(\beta - 1) + (r - \delta_B)\beta - r = 0$, таким образом,

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{r - \delta_B}{\sigma_B^2} \pm \sqrt{\left(\frac{r - \delta_B}{\sigma_B^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma_B^2}},$$

т.е. $\beta_1 > 1$, $\beta_2 < 0$.

Так как $\lim\limits_{V_B \to \infty} F(V_B) = 0$, получаем $B_1 = 0$ и $F(V) = B_2 V_B^{\beta_2}$.

Граничные условия имеют вид $F(V_B^*) = I - V_B^*$, $F'(V_B^*) = -1$, где V_B^* — критическая ценность фирмы B, т.е. такая ценность данной фирмы, что оптимальное правило продажи требует продавать фирму B, если $V_B \leqslant V_B^*$, и отказаться от предложения со стороны фирмы A, если $V_B < V_B^*$.

Тогда получаем

$$B_2(V_B^*)^{\beta_2} = I - V_B^*;\;\; B_2\beta_2(V_B^*)^{\beta_2 - 1} = -1,$$

откуда $\frac{V_B^*}{\beta_2} = V_B^* - I$, т.е. $I = V_B^*\frac{\beta_2 - 1}{\beta_2}$.

Фирме B следует принять предложение фирмы A относительно продажи фирмы B, если

$$I \geqslant V_B \frac{\beta_2 - 1}{\beta_2}, \tag{7.24}$$

и отвергнуть его в противном случае.

Теперь, зная, что цена I, на которую может согласиться фирма B, равна произведению некоторой константы k_B на ценность фирмы B, рассмотрим поведение фирмы A. Очевидно, что, определяя для себя оптимальное правило инвестирования, фирма A рассматривает не только изменение во времени своей собственной ценности и ценности фирмы B, но и изменение во времени цены продажи фирмы B. Точно так же и фирма B при определении своего оптимального инвестиционного правила рассматривает изменение во времени не только своей собственной ценности и ценности фирмы A, но и цены покупки, предлагаемой фирмой A.

Теперь ценность опциона инвестировать является функцией $F(V_D, V_B)$ обеих переменных V_D и V_B и притом однородной первой степени: ясно, что если V_D и V_B увеличить вдвое, то вдвое же увеличится и $F(V_D, V_B)$.

Предполагая, что на рынке существуют реплики для V_D и V_B, построим безрисковый портфель Ф, содержащий один опцион $F(V_D, V_B)$, а также короткую позицию по m единицам V_D и короткую позицию по n единицам V_B. С помощью леммы Ито находим

$$d\Phi = d(F - mV_D - nV_B) =$$
$$= \frac{1}{2}(F''_{DD}\sigma_D^2 V_D^2 + 2F''_{DB}\rho\sigma_D\sigma_B V_D V_B + F''_{BB}\sigma_B^2 V_B^2) + (F'_D - m)dV_D + (F'_B - n)dV_B,$$

где ρ — коэффициент корреляции между V_D и V_B.

Для того чтобы портфель Ф был безрисковым, выберем $m = F'_D$, $n = F'_B$. Держатель короткой позиции должен платить держателю длинной позиции поток дивидендов

$$(m\delta_D V_D + n\delta_B V_B)dt.$$

С другой стороны, доходность портфеля Ф должна равняться безрисковой доходности $r(F - mV_D - nV_B)dt$, и поэтому получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{2}(\sigma_D^2 V_D^2 F''_{DD} + 2\rho\sigma_D\sigma_B V_D V_B F''_{DB} + \sigma_B^2 V_B^2 F''_{BB}) +$$
$$+ (r - \delta_D)V_D F'_D + (r - \delta_B)V_B F'_B - rF = 0. \tag{7.25}$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$F(V_D^*, V_B^*) = V_D^* - I = V_D^* - k_B V_B^*;\ F'_{V_B}(V_D^*, V_B^*) = k_B;\ F'_{V_D}(V_D^*, V_B^*) = 1.$$

Теперь воспользуемся однородностью и сведем дифференциальное уравнение в частных производных (7.25) к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Обозначим $p = V_D/V_B$. Тогда

$$F(V_D, V_B) = V_{BF}(V_D/V_B, 1) = V_B f(p),$$

где $f(p) = F(p, 1)$. Поэтому

$$F'_{V_D} = f'(p);\ F_{V_B} = f(p) - pf'(p);\ F''_{V_DV_D} = f''(p)/V_B;$$

$$F''_{V_DV_B} = -\frac{V_D}{V_B^2} f''(p) = -\frac{p}{V_B} f''(p);$$

$$F''_{V_BV_B} = -\frac{V_D}{V_B} f'(p) + \frac{V_D}{V_B} f'(p) + pf''(p)\frac{V_D}{V_B^2} = \frac{p^2}{V_B} f''(p).$$

Подставляя данные выражения в уравнение (7.25), получаем

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_D^2 V_D^2 \frac{1}{V_B} f'' - 2\rho\sigma_D\sigma_B V_D V_B \frac{p}{V_B} f'' + \sigma_B^2 V_B^2 \frac{p^2}{V_B} f''\right) +$$
$$+ (r - \delta_D)V_D f' + (r - \delta_B)V_B f - (r - \delta_B)V_B pf' - rV_B f = 0,$$

откуда, приводя подобные и деля на V_B, находим

$$\frac{1}{2}(\sigma_D^2 - 2\rho\sigma_D\sigma_B + \sigma_B^2)p^2 f'' + (\delta_B - \delta_D)p^2 f' - \delta_B f = 0. \tag{7.26}$$

Граничные условия принимают вид

$$f(p) = p - k_B; \tag{7.27}$$

$$f'(p) = 1; \tag{7.28}$$

$$f(p) - pf'(p) = -k_B. \tag{7.29}$$

Любое из трех граничных условий (7.27)—(7.29) может быть выведено из двух остальных. Общее решение уравнения (7.26) имеет вид

$$f(p) = A_1 p^{\beta_1} + A_2 p^{\beta_2},$$

где β_1, β_2 — корни квадратного уравнения

$$\frac{1}{2}(\sigma_D^2 - 2\rho\sigma_D\sigma_B + \sigma_B^2)\beta(\beta - 1) + (\delta_B - \delta_D)\beta - \delta_B = 0.$$

Поэтому

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{\delta_B - \delta_D}{\sigma^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_B - \delta_D}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\delta_B}{\sigma^2}}, \tag{7.30}$$

где $\sigma^2 = \sigma_D^2 - 2\rho\sigma_D\sigma_B + \sigma_B^2$. Таким образом $\beta_1 > 1$; $\beta_2 < 0$. Так как $f(0) = 0$, имеем $A_2 = 0$. Воспользуемся граничными условиями:

$$A_1 p^{\beta_1} = p - k_B; \tag{7.31}$$

$$A_1\beta_1 p^{\beta_1 - 1} = 1. \tag{7.32}$$

Разделив уравнение (7.31) на (7.32), видим, что $\dfrac{p^*}{\beta_1} = p^* - k_B$, т.е. $p^*(\beta_1 - 1) = \beta_1 k_B$.

Иными словами, $\dfrac{V_D^*}{V_B^*} = \dfrac{\beta_1}{\beta_1 - 1} k_B$.

Оптимальное инвестиционное правило для фирмы A выглядит следующим образом. Фирма A должна покупать фирму B тогда и только тогда, когда

$$V_D \geqslant \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I, \qquad (7.33)$$

где β_1 определяется выражением (7.30).

Зная теперь, что цена покупки, на которую может согласиться фирма A, равна произведению некоторой константы k_D на ценность V_D для фирмы A проекта покупки фирмы B, рассмотрим поведение фирмы B. Задавшись вопросом, когда же акционерам фирмы B следует продавать свою фирму, мы, очевидно, получим то же самое дифференциальное уравнение (7.26), граничные условия теперь примут вид

$$f(p) = k_D p - 1; \; f'(p) = k_D; \; f(p) - pf'(p) = -1,$$

и мы придем к решению

$$\frac{V_D^*}{V_B^*} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \frac{1}{k_D},$$

где β_1 — положительный корень уравнения (7.30). Таким образом, оптимальное правило продажи для фирмы B выглядит следующим образом. Фирме B следует откликнуться на предложение фирмы A тогда и только тогда, когда

$$V_B \leqslant \frac{\beta_1 - 1}{\beta_1} I. \qquad (7.34)$$

Из формулы (7.33) получаем, что $K_D = \dfrac{\beta_1 - 1}{\beta_1}$, а из формулы (7.34) — что $K_B = \dfrac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$. При этом $I = \sqrt{V_B^* V_D^*}$. Введем в рассмотрение величину $\theta = \dfrac{1}{V_B^*} - 1$. Это та доля рыночной стоимости фирмы B, которую получат ее собственники в качестве премии. Имеем:

$$I = (1 + \theta)V_B^*, \;\; V_D^* = (1 + \theta)I = (1 + \theta)^2 V_B^*,$$

т.е. собственники фирмы B получают θV_B^*, а фирме A достается $\theta I = \theta(1 + \theta)V_B^*$ от суммарного синергетического эффекта слияния $V_D^* - V_B^* = (2\theta + \theta^2)V_B^*$.

Таким образом, если собственники фирмы B немедленно получают кроме рыночной стоимости своей фирмы еще и процент q ее рыночной стоимости в виде премии за продажу, т.е. получают $(1 + \theta)V_B^*$ сегодня же, то собственники фирмы A получают от поглощения фирмы B в течение всей будущей деятельности фирмы A инкрементальный денежный поток, чистая приведенная стоимость которого равна $\theta(1 + \theta)V_B^* = \theta V_B^* + \theta^2 V_B^*$, но сегодня и в ближайшем будущем они скорее всего терпят одни лишь убытки.

7.9. Задачи теоретических основ электротехники, полезные для экономического образования, на решение стохастических дифференциальных уравнений

Рассмотрим последовательный RLC-контур, подключенный к источнику напряжения $E(t)$. Заряд на емкостном элементе в момент времени t удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = E(t),\ \ Q(0) = Q_0,\ Q'(0) = I_0,$$

где L — индуктивность; R — сопротивление; C — емкость; I_0 — ток в начальный момент; $E(t)$ — напряжение источника в момент t.

Предположим, что некоторые коэффициенты – скажем, правая часть уравнения – не являются детерминированными, а имеют вид

$$E(t) = G(t) + «\text{шум}» = G(t) + \alpha W_t,$$

где «шум» представляет собой броуновское движение W_t с постоянным множителем $\alpha = \text{const}$. Дифференциальное уравнение, коэффициенты которого могут быть случайными величинами, называется *стохастическим дифференциальным уравнением*. Введем вектор

$$\mathbf{X} = X(t, \omega) = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_t \\ Q'_t \end{pmatrix}$$

и получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} X_1' = X_2, \\ LX_2' = -RX_2 - \dfrac{1}{C}X_1 + G_t + \alpha W_t, \end{cases}$$

или в матричных обозначениях

$$d\mathbf{X} = d\mathbf{X}(t) = A\mathbf{X}(t)dt + \mathbf{H}(t)dt + \mathbf{K}dW_t, \tag{7.35}$$

где $d\mathbf{X} = \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{CL} & -\dfrac{R}{L} \end{pmatrix}$; $\mathbf{H}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L}G_t \end{pmatrix}$; $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\alpha}{L} \end{pmatrix}$, а W_t — одномерное броуновское движение.

Перепишем полученное двумерное стохастическое дифференциальное уравнение (7.35) в следующем виде:

$$\exp(-At)d\mathbf{X}(t) - \exp(-At)A\mathbf{X}(t)dt = \exp(-At)(\mathbf{H}(t)dt + \mathbf{K}dW_t), \tag{7.36}$$

где для произвольной $(n \times n)$-матрицы F определяем $\exp(F)$ как $(n \times n)$-матрицу, задаваемую рядом $\exp(F) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n}F^n$.

Для решения дифференциального уравнения (7.36) воспользуемся двумерным вариантом формулы Ито (см. теорему 7.3). Применим его к функции g: $[0; \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, задаваемой равенством $g(t, X_1, X_2) = \exp(-At)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$. Получим

$$d(\exp(-At)\mathbf{X}(t)) = (-A)\exp(-At)\mathbf{X}(t)dt + \exp(-At)d\mathbf{X}(t). \tag{7.37}$$

Подстановка выражения (7.37) в формулу (7.36) дает

$$d(\exp(-At)\mathbf{X}(t)) = \exp(-At)(\mathbf{H}(t)dt + \mathbf{K}dW_t),$$

или

$$\exp(-At)\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(0) = \int_0^t \exp(-As)\mathbf{H}(s)ds + \int_0^t \exp(-As)\mathbf{K}dW_s.$$

Интегрируя по частям (теорема 7.2), получаем

$$\mathbf{X}(t) = \exp(At)\left(\mathbf{X}(0) + \exp(-At)\mathbf{K}W_t + \int_0^t \exp(-As)(\mathbf{H}(s) + A\mathbf{K}W_s)ds\right).$$

Мы получили выражение для двумерного процесса $X(t)$, первая компонента которого представляет собой заряд на емкости (на конденсаторе), а вторая компонента — ток в контуре в момент времени t. Как и в детерминистском случае, и заряд, и ток имеют как свободную, определяемую собственными частотами цепи, так и вынужденную составляющую, определяемую входным воздействием. Однако в нашем случае вынужденная составляющая реакции имеет как детерминированную, так и стохастическую составляющие.

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Пусть Z — стандартная нормальная случайная величина. Является ли случайный процесс $X_t = \sqrt{t}Z$ винеровским? (*Указание*. Достаточно проверить свойства 1—3 винеровского процесса из параграфа 7.1.)

7.2. Пусть W_t и $\tilde{W}_t$ — два независимых винеровских процесса, а ρ — константа, по модулю меньшая единицы. Является ли случайный процесс $X_t = \rho W_t + \sqrt{1-\rho^2}\,\tilde{W}_t$ винеровским? (*Указание*. Достаточно проверить свойства 1—3 винеровского процесса из параграфа 7.1).

7.3. Рассмотрим броуновское движение со сносом: $S_t = \sigma W_t + \mu t$. Покажите, что для любых значений σ ($\sigma \neq 0$), μ, T ($T > 0$) существует положительная вероятность того, что $S_T < 0$.

7.4. Рассмотрим *процесс Орнштейна — Уленбека*:

$$dx = \eta(x - \bar{x})dt + \sigma dW_t.$$

Здесь $\bar{x}$ — некоторый «нормальный» уровень x, т.е. тот уровень, к которому x стремится вернуться; η — скорость возвращения. Требуется выразить математическое ожидание процесса x_t как функцию времени, если известно, что в начальный момент уровень x был x_0.

7.5. С помощью леммы Ито вычислите $d2e^{W_t}$, где W_t — винеровский процесс.

7.6. С помощью леммы Ито вычислите $d3e^{W_t - \frac{t}{2}}$, где W_t — винеровский процесс.

7.7. С помощью леммы Ито вычислите $d\frac{1}{7}W_t^7$, где W_t — винеровский процесс.

7.8. С помощью леммы Ито вычислите dW_t^{12}, где W_t — винеровский процесс.

7.9. С помощью леммы Ито вычислите стохастический интеграл $\int_0^t 2W_t dW_t$, где W_t — винеровский процесс.

7.10. Случайный процесс z_t представляет собой броуновское движение со сносом $dz_t = 2dt + 3dW_t$, где W_t — винеровский процесс. Запишите выражение процесса $F(z_t, t) = tz_t$ в дифференциальной форме.

7.11. Выразите $de^{W_t^2 t}$, где W_t — винеровский процесс, как броуновское движение.

7.12. Вычислите стохастический интеграл $\int_0^t 2W_t^2 dW_t$ как линейную комбинацию случайных процессов или (и) римановских интегралов от случайных процессов.

7.13. Покажите, что если B_t — детерминированный процесс, а X_t — случайный процесс, то $d(B_t X_t) = B_t dX_t + X_t dB_t$.

7.14. Акция одного предприятия котируется 8 января по цене 245 руб. В тот же день можно было продать и купить колл-опцион этой акции со сроком обращения до 15 июня того же года с базисной ценой 260 руб. по цене 6,10 руб. Соответствующая безрисковая годовая ставка процента составила $r_F = 7\%$.

Требуется рассчитать теоретическую цену колл-опциона с помощью модели Блэка — Шоулса при допущении, что моментная волатильность цены акции составляет 2%.

Если бы вам задали вопрос, превышает ли подразумеваемая волатильность[1] 2%, то что бы вы ответили и как бы вы обосновали свой ответ?

7.15. Акция имеет текущую стоимость 100 руб. Страйк колл-опциона равен 102 руб. Период исполнения составляет девять месяцев. Процентная ставка (номинальная годовая при непрерывном начислении) составляет 15%. Риск изменения цены акции (волатильность) составляет 20%. Определите равновесную (теоретическую) цену опциона.

7.16. Предположим, что на некоторый актив, который продается по цене 51,50 долл., имеются опционы со страйками 40, 50 и 60 долл. Цена колл-опциона со страйком 50 долл. равна 4,50 долл.

1. Какова собственная ценность этого опциона?
2. Является ли этот опцион колл-опционом «в деньгах»?
3. Какова спекулятивная премия за этот опцион?
4. Какой процент составляет спекулятивная премия от цены основного актива?
5. Являются ли опционы 40 и 60 долл. опционами «в деньгах»?

Про колл-опцион говорят, что он «в деньгах», если спот-цена основного актива больше, чем сумма страйка и премии. Про пут-опцион говорят, что он «в деньгах», если его страйк больше, чем сумма его премии и спот-цены основного актива.

7.17. Ходят слухи, что корпорация ВГ будет поглощена корпорацией АБ. Текущая цена акций компании ВГ равна 300 руб. Вам удалось подслушать, что совет директоров АБ примет окончательное решение в течение ближайших двух недель. Если поглощение произойдет, цена акций ВГ возрастет до 400 руб., если нет, то упадет до 200 руб. Предложите опционную стратегию, использующую эту новость.

7.18. Предположим, что инвестор имеет фондовый портфель, который он не имеет права продавать в течение шести месяцев. Объясните, почему использование опционов может показаться привлекательным, и как опционы могут быть использованы.

7.19. Предположим, что инвестор имеет американский колл-опцион со страйком 50 фунтов стерлингов, который истекает в конце года. Что надо предпринять, если текущая цена основного актива равна 53,47 фунтов стерлингов?

7.20. Параллельный *RLC*-контур подключается к источнику тока $I(t) + \beta W_t$, $\beta = \text{const}$, W_t — одномерный броуновский процесс. Найдите потокосцепление $\Psi(t)$ на индуктивном элементе как функцию времени, если $\Psi(0) = \Psi_0$, $\Psi'_0 = U_0$.

---

[1] Подразумеваемой волатильностью называется такое значение моментной волатильности, для которого теоретическая модель оценки дает цену колл-опциона, в точности соответствующую фактически наблюдаемой цене.

Глава 8
МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В результате изучения главы 8 студент должен:

знать

- основные традиционные модели макроэкономики;
- теорию эндогенного роста;

уметь

- решать задачи оптимального управления;
- выписывать лагранжиан и гамильтониан;

владеть

- принципом максимума Понтрягина.

8.1. Традиционные модели макроэкономики

8.1.1. Неоклассическая макроэкономическая модель

Описание модели. Простейшая неоклассическая модель отражает взгляды на макроэкономические проблемы экономистов-неоклассиков до выделения макроэкономики в отдельную отрасль экономической науки. Эти взгляды можно представить следующим образом.

Экономика функционирует по законам совершенной конкуренции. Экономические агенты формируют свои планы независимо друг от друга, ориентируясь только на цены. Координация этих планов осуществляется через естественный механизм ценообразования: если на рынке некоторого продукта или фактора спрос превышает предложение, то цена на данный продукт или фактор растет, если предложение превышает спрос — падает. Под состоянием равновесия на рынке понимается такое состояние, при котором спрос совпадает с предложением.

В случае когда в экономике достигается состояние равновесия на всех рынках, говорят о состоянии общего экономического равновесия. Оно рассматривается как оптимальное состояние для общества в целом. При этом предполагается, что все цены являются гибкими, что способствует быстрому переходу экономики из любого начального состояния в состояние общего экономического равновесия, отклонения от которого возможны, но носят кратковременный характер.

Важную роль играет предположение о том, что действует так называемый закон Сэя, который в самой общей формулировке утверждает, что предложение порождает спрос, поскольку увеличение выпуска товаров означает рост доходов, который, в свою очередь, ведет к увеличению спроса.

Что касается денег, то в первом приближении предполагается действие количественной теории денег, которая в своей простейшей формулировке сводится к утверждению о том, что экзогенное увеличение денежной массы приводит к пропорциональному изменению уровня цен. Деньги предполагаются нейтральными в том смысле, что изменение денежной массы не влияет на реальные переменные.

Вывод, который естественно вытекает из неоклассической модели, состоит в том, что экономический порядок должен гарантировать экономическую свободу, а вмешательство государства в экономическую жизнь следует свести к минимуму.

В модели в явном виде присутствуют четыре рынка: рынок труда, рынок единственного условного продукта (рынок товаров и услуг), рынок капитала, рынок денег. Репрезентативными участниками являются производитель, потребитель, государство.

Производитель задается производственной функцией $F(L)$, удовлетворяющей стандартным предположениям. Он решает задачу

$$PY - WL \to \max,\ Y \leqslant F(L), \text{ или } PF(L) - WL \to \max. \qquad (8.1)$$

Здесь P — цена единственного продукта (индекс цен); W — номинальная заработная плата; L — затраты труда; Y — выпуск единственного продукта в реальном исчислении.

В результате решения задачи (8.1) производитель предъявляет спрос на рабочую силу в размере $L^d = L^d(w)$ и формирует предложение продукта в количестве $Y^s = Y^s(w)$. Здесь $w = W/P$ — реальная заработная плата.

Подчеркнем, что L^d и Y^s зависят именно от реальной заработной платы. Действительно, задачу (8.1) можно переписать в виде $F(L) - wL \to \max$. Тем самым при каждом заданном w спрос на рабочую силу L^d представляет собой решение уравнения $F'(L) = w$, т.е. $L^d(w) = F'^{-1}(w)$. Соответственно, $Y^s(w) = F(L^d(w)) = F(F'^{-1}(w))$. На рис. 8.1 изображен график $F'(L)$ (здесь L рассматривается в качестве независимой переменной). Если же в качестве независимой переменной рассматривать w, то та же самая кривая представляет собой график обратной к $F'(w)$ функции, т.е. график функции спроса на рабочую силу F^d.

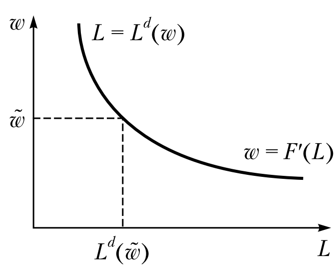


Рис. 8.1

Также в данной модели предполагается, что производитель еще и инвестирует. Точнее, он планирует осуществить капиталовложения и поэтому предъявляет инвестиционный спрос на единственный продукт в объеме $I = I(r)$ (этот спрос задается инвестиционной функцией от ставки процента r).

Следующий участник рынка, *государство*, задает размер взимаемых налогов $T = \overline{T}$, объем государственных закупок $G = \overline{G}$ (и то и другое — в реальном исчислении), а также объем денежной массы (предложения денег) $M = \overline{M}$. Предположим, что объем выпуска задан на некотором уровне Y.

Репрезентативный *потребитель* получает весь доход от производства. Вспоминая, что национальный продукт равен совокупному доходу, заключаем, что доход потребителя (в реальном исчислении) равен той же величине Y. Из него он платит налог в размере $T = \overline{T}$. После этого в его распоряжении остается располагаемый доход $Y_d = Y - \overline{T}$, который делится на потребительские расходы $C = C(Y_d)$ (функция потребления удовлетворяет стандартным предположениям) и частные сбережения

$$S_p = Y_d - C = Y - \overline{T} - C(Y - \overline{T}).$$

Потребитель является также источником предложения рабочей силы $L^s = L^s(\underset{+}{w})$ (оно предполагается неубывающей функцией реальной заработной платы, это обозначено символом «+» под буквой «w»).

Равновесие. Равновесная реальная заработная плата w^* является решением уравнения $L^d(w) = L^s(w)$, задающего равновесие на *рынке труда* (рис. 8.2). Соответственно, равновесный уровень занятости равен $L^* = L^d(w^*) = L^s(w^*)$.

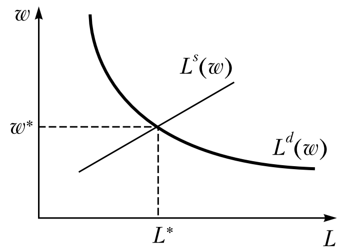


Рис. 8.2

На *рынке товаров и услуг* предложение продукта уже описано, а что касается спроса Y^d, то он представляет собой сумму планируемого частного потребления

$$C = C(Y^s - \overline{T}) \tag{8.2}$$

инвестиционного спроса $I(r)$ и планируемого государственного потребления $G = \overline{G}$. Заметим, что в формуле (8.2) располагаемый доход определяется исходя из предположения, что выполняется закон Сэя. Итак, спрос на продукт равен $Y^d = C(Y^s - \overline{T}) + I(r)\overline{G}$. Условие равновесия на рынке товаров и услуг имеет вид $Y^s = Y^{d.}$

На рынке капитала предложение S представляет собой сумму частных сбережений S_p и государственных сбережений $S_g = (\overline{T} - \overline{G})$ т.е. $S = S_p + S_g$. Здесь не предполагается равенства $\overline{T} = \overline{G}$ и вполне допустимо, что $\overline{T} < \overline{G}$, т. е. $S_g < 0$. В этом случае будет иметь место первичный дефицит государственного бюджета, который будет покрываться за счет выпуска государственных облигаций. Спрос на рынке капиталов — это инвестиционный спрос, он равен величине $I = I(r)$. Условие равновесия на рынке капиталов имеет вид $S = I$. Его можно переписать как $(\overline{T} - \overline{G}) + S_p = I(r)$ или, иначе,

$$S_p - (\overline{G} - \overline{T}) = I(r). \tag{8.3}$$

Содержательно это уравнение означает, что частные сбережения можно делать посредством инвестирования или посредством приобретения государственных облигаций. Его решение r^* (при заданном S_p) представляет собой равновесную ставку процента.

Заметим, что условие равновесия на рынке товаров и услуг эквивалентно условию равновесия на рынке капиталов. Действительно, условие равновесия на рынке товаров и услуг представляет собой равенство

$$Y^s = C(Y^s - \overline{T}) + I(r) + \overline{G},$$

которое может быть переписано в виде

$$S_p + \overline{T} = Y^s - C(Y^s - \overline{T}) = I(r) + \overline{G},$$

эквивалентном выражению (8.3).

Что касается рынка денег, то спрос на реальные денежные остатки в экономике в целом определяется как $(M/P)^s = Y^s/V$, т. е. он пропорционален национальному продукту в реальном исчислении. Здесь $V > 0$ — постоянная скорость обращения денег. Количество денег, т.е. объем денежной массы, задается государством на некотором уровне $\overline{M}$, а предложение реальных запасов денежных средств $(M/P)^s$ определяется равенством $(M/P)^s = \overline{M}/P$. Уравнение равновесия на денежном рынке имеет вид $(M/P)^s = (M/P)^d$.

Итак, можно определить равновесие в данной модели как набор $(w^*, r^*, W^*, P^*, L^*, Y^*, C^*, I^*, S_p^*)$, задаваемый следующим образом: w^* — это решение уравнения $L^d(w) = L^s(w)$; $L^* = L^d(w^*) = Ls(w^*)$; $Y^*(w) = F(L^*)$; $C^* = C(Y^* - \overline{T})$; r^* — это решение уравнения $Y^* = C(Y^* - \overline{T}) + I(r) + \overline{G}$; $I^* = I(r^*)$; $S_p^* = I(r^*) + (\overline{G} - \overline{T}) = Y^* - \overline{T} - C^*$; $P^* = \overline{M}V/Y^*$; $W^* = P^*w^*$.

Несложно показать, что при некоторых естественных предположениях состояние равновесия существует и единственно.

Неравновесие на рынке труда. Ключевую роль в модели играет рынок труда. Равновесие на этом рынке определяет равновесие в модели в целом. Для понимания духа модели следует уяснить, как в ее рамках может возникать ситуация, при которой занятость и выпуск оказываются ниже равновесного уровня. Такая ситуация будет вызвана отсутствием равновесия на рынке труда.

Если уровень $\overline{w}$ реальной заработной платы оказался ниже равновесного значения w^*, то предложение рабочей силы $L^s(w)$ окажется меньше как спроса $L^d(w)$, так и равновесного уровня занятости L^* (рис. 8.3). В этом случае наблюдается избыточный спрос на рабочую силу в размере $L^d(\overline{w}) - L^s(\overline{w})$, уровень занятости L определяется предложением рабочей силы, т. е. выполняется равенство $L = L^s(\overline{w})$, а уровень выпуска Y определяется занятостью, $Y = F(L)$, причем выпуск будет тоже ниже равновесного, $Y < Y^*$. Такая ситуация хотя и представляется возможной, скорее всего будет недолговечной, поскольку те производители, которые испытывают недостаток в рабо-

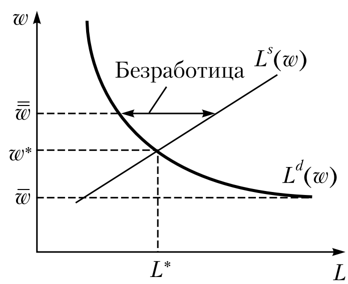


Рис. 8.3

чей силе, поднимут уровень реальной заработной платы. В результате избыточный спрос на рабочую силу вскоре исчезнет.

Если же, наоборот, реальная заработная плата устанавливается на уровне $\bar{\bar{w}}$, превышающем равновесный, т. е. выполняется неравенство $\bar{\bar{w}} > w^*$, то возникает избыточное предложение рабочей силы (безработица) в размере $L^s(\bar{\bar{w}}) - L^d(\bar{\bar{w}})$. Уровень занятости L будет определяться спросом на рабочую силу, $L = L^d(\bar{\bar{w}})$, уровень выпуска — занятостью $Y = F(L)$, причем, как и в предыдущем случае, $Y < Y^*$. Что касается ответа на вопрос о том, как быстро безработица уменьшится и исчезнет, то он зависит от предположений о степени гибкости реальной заработной платы в сторону уменьшения. Если она является достаточно гибкой, то безработица вскоре исчезнет. В противном случае, если, например, профсоюзы не позволяют понизить реальную заработную плату, безработица может оказаться долговечной.

8.1.2. Простейшая кейнсианская модель

Описание модели. В период между двумя мировыми войнами функционирование экономики Запада было далеким от неоклассического идеала. Доверие к саморегулирующей способности рынка было подорвано. Пришло разочарование в неоклассическом взгляде на макроэкономические проблемы. Это разочарование привело к появлению кейнсианской теории, созданной английским ученым и публицистом Джоном Мейнардом Кейнсом (1883—1946).

В основе кейнсианской макроэкономической теории лежит отказ от гипотезы о действии закона Сэя. В этом случае логика рассуждений примерно следующая. Цены не могут определять того количества продукции, которое будет произведено; даже если уровень цен и заработной платы таков, что выгодно поддерживать высокий уровень выпуска и занятости, все равно нет гарантии, что весь планируемый выпуск найдет своего покупателя. Скорее всего, реально произведенной будет только та продукция, на которую гарантирован спрос. Даже если объем расходов, которые желают осуществить экономические агенты, достаточно большой, может случиться так, что их эффективный (платежеспособный) спрос в каждый момент окажется существенно меньшим. Тем самым уровень производства и занятости определяется эффективным спросом, а не «чистыми желаниями». Спрос порождает предложение, а не наоборот. Главный вывод, который следует из кейнсианских моделей, состоит в следующем: если совокупный эффективный спрос в экономике слишком мал, чтобы обеспечить полную занятость, государство должно проводить активную экономическую политику, направленную на стимулирование совокупного спроса.

Основные качественные отличия кейнсианских моделей от неоклассической состоят в следующем. В неоклассической модели ключевую роль играет рынок труда, уровень выпуска определяется равновесной занятостью. В кейнсианских моделях состояние равновесия не предполагает полной занятости, выпуск продукта определяется спросом на него, а занятость определяется уровнем выпуска. Все эти предположения явно или неявно отражают тот факт, что кейнсианские модели — модели краткосрочные, когда уровень цен и номинальной заработной платы в коротком промежутке не меняется.

Участники в простейшей кейнсианской модели те же, что и в неоклассической. Что же касается рынков, то их два: рынок товаров и услуг и рынок капитала.

Спрос на продукцию Y^d зависит от планируемого выпуска Y и представляет собой сумму планируемого потребления, инвестиционного спроса $I = \overline{I}$ и планируемых государственных закупок $G = \overline{G}$, т.е.

$$Y^d = Y^d(Y) = C(Y - \overline{T}) + \overline{I} + \overline{G}.$$

Предполагается, что инвестиционный спрос задан экзогенно и не зависит от ставки процента.

В рамках этой модели, как и в рамках кейнсианского подхода в целом, выпуск определяется спросом. Условие равновесия на рынке товаров и услуг имеет вид $Y^d(Y) = Y$. Напомним, что в неоклассической модели спрос на продукцию в состоянии равновесия был равен предложению, вытекающему из решения производителем задачи о максимизации прибыли. Здесь же со спросом уравнивается планируемый выпуск. Точнее, планируемый выпуск определяется спросом, и он никак не связан с предложением в неоклассическом смысле. Тем самым равновесный уровень выпуска Y^* представляет собой (рис. 8.4) решение уравнения

$$Y = C(Y - \overline{T}) + \overline{I} + \overline{G}. \tag{8.4}$$

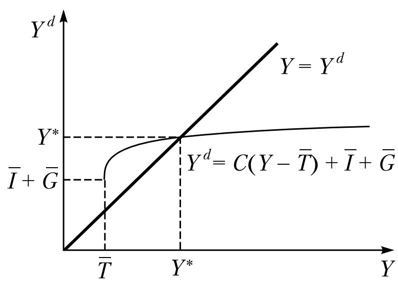


Рис. 8.4

Что касается рынка капитала, то уровень частных сбережений S_p рассматривается как функция от планируемого выпуска,

$$S_p(Y) = Y - \overline{Y} - C(Y - \overline{T}).$$

Совокупные сбережения (предложение капитала) S равны сумме частных сбережений $S_p(Y)$ и государственных сбережений $(\overline{T} - \overline{G})$,

$$S = S(Y) = S_p(Y) + (\overline{T} - \overline{G}).$$

Условие равновесия имеет вид $S = \overline{I}$, или, иначе, $S_p(Y) + (\overline{T} - \overline{G}) = \overline{I}$. Решением последнего уравнения является то же значение Y^*, которое является решением уравнения (8.4), задающего равновесие на рынке товаров и услуг. Тем самым равновесие на рынке товаров и услуг влечет за собой равновесие на рынке капитала, и наоборот.

Итак, можно определить равновесие в данной модели как набор Y^*, C^*, S_p^*, определяемый следующим образом: Y^* — это решение уравнения

$$Y = C(Y - \overline{T}) + \overline{I} + \overline{G};\ C^* = C(Y^* - \overline{T});\ S_p^* = Y^* - \overline{T} - C^*.$$

Рынок труда. Очевидно, что в простейшей кейнсианской модели равновесный уровень выпуска определяет некоторый уровень занятости, который совсем необязательно является равновесным в неоклассическом смысле. Но он тоже может быть интерпретирован как в некотором смысле рановесный. Предположим, что репрезентативный производитель не максимизирует прибыль, а просто готов производить ровно столько продукта, сколько требуется, т.е. полностью удовлетворить спрос, который равен некоторой фиксированной величине $\overline{Y}^d$ (сразу же заметим, что для нас важен случай, когда Y — это равновесный уровень выпуска в кейнсианской модели). В этом случае его спрос на рабочую силу тоже будет фиксирован на уровне $\overline{L}^d = F^{-1}(\overline{Y}^d)$. Если считать, что предложение труда эластично, т. е. функция $L^s(w)$ — строго монотонно возрастающая, имеет смысл рассмотреть уравнение

$$L^s(w) = \overline{L}^d, \tag{8.5}$$

а его решение можно назвать равновесной реальной заработной платой.

Можно объединить неоклассический подход к определению равновесной заработной платы с кейнсианским. Для этого предположим, что репрезентативный производитель решает задачу

$$PY - wL \to \max, \;\; Y \leqslant F(L), \;\; Y \leqslant \overline{Y}^d.$$

Здесь неравенство $Y \leqslant \overline{Y}^d$ означает, что у производителя при выборе уровня производства кроме технологических ограничений, представленных равенством $Y \leqslant F(L)$, имеются еще и ограничения, обусловленные величиной спроса. Спрос на рабочую силу, который определяется из решения этой задачи, называется эффективным спросом и обозначается $L^d_{eff}(w)$. На рис. 8.5 он обозначен сплошной вертикальной линией и определяется равенством $L^d_{eff}(w) = \min\{\overline{L}^d, L^d(w)\}$, где $L^d(w) = F'^{-1}(w)$ — неоклассический спрос на рабочую силу.

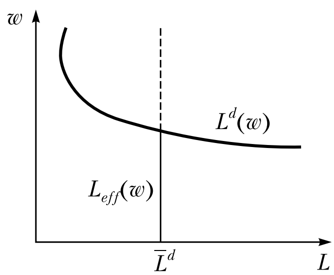


Рис. 8.5

Пусть w^* — решение уравнения $L^d_{eff}(w) = L^s(w)$, а L^* определяется равенством $L^* = L^d_{eff}(w^*) = L^s(w^*)$. Тогда пару (w^*, L^*) можно назвать эффективным равновесием на рынке труда. Для того чтобы узнать, как оно устроено, достаточно сравнить $\overline{L}^d$ с равновесным уровнем занятости в неоклассическом смысле, которое обозначим через L^{**}, а именно: если $\overline{L}^d < L^{**}$, то $L^* = \overline{L}^d$, а w^* — это решение уравнения (8.5) (рис. 8.6). Если же $L^{**} \leqslant \overline{L}^d$, то $L^* = L^{**}$, а $w^* = w^{**}$, где w^{**} — это равновесная реальная заработная плата в неоклассическом смысле (рис. 8.7). Здесь следует подчеркнуть, что если $\overline{L}^d = L^*$, то спрос на продукцию равен равновесному уровню выпуска в кейнсиан-

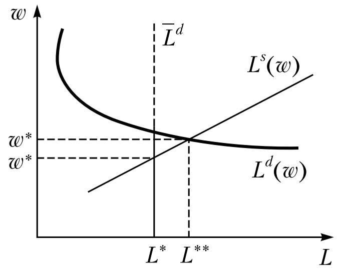


Рис. 8.6

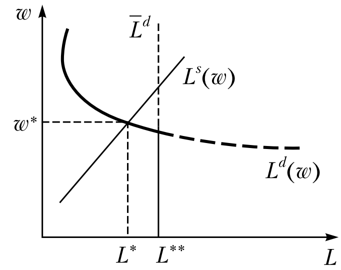


Рис. 8.7

ской модели, а равенство $Y^* = F(L^*)$ имеет место только в первом случае. Именно этот случай и представляет наибольший интерес. Он характеризуется тем, что хотя занятость при нем и меньше, чем в состоянии неоклассического равновесия, т. е. $L^* < L^{**}$, безработицы как бы нет. Если все же рассматривать величину $L^{**} - L^*$ как безработицу, то она является добровольной, а не вынужденной.

Теперь предположим, что реальная заработная плата жестко задана на некотором уровне $\overline{w}$, который выше w^*, но ниже w^{**}, т. е. $w^* < \overline{w} < w^{**}$. В соответствии с неоклассической логикой это не должно было привести к безработице. Однако здесь естественно считать, что занятость будет на уровне L^*, который меньше предложения рабочей силы $L^s(\overline{w})$ Поэтому будет иметь место вынужденная безработица в размере $L^d(\overline{w}) - L^*$. В данном случае ответственность за безработицу несет не «слишком» высокий уровень реальной заработной платы, а низкий уровень спроса на продукцию, который влечет за собой и низкий эффективный спрос на рабочую силу.

8.1.3. Модель *IS-LM*

Количественная теория денег основывалась на том, что спрос на деньги или на реальные денежные остатки проистекает из трансакционного мотива: люди держат деньги для совершения сделок. В основе кейнсианского взгляда на деньги лежит теория предпочтения ликвидности, которая учитывает еще и тот факт, что деньги являются не только средством обращения, но и средством сбережения. Поэтому спрос на реальные денежные остатки считается зависимым от ставки процента, что позволяет углубить анализ, развитый в простейшей кейнсианской модели, включив в рассмотрение деньги.

Модель *IS-LM* является развитием простейшей кейнсианской модели. В ней предполагается, что инвестиционный спрос не является экзогенно заданной величиной, а, как и в неоклассической модели, задается инвестиционной функцией $I(r)$. Кроме того, в явном виде присутствует рынок денег, причем он играет здесь гораздо более важную роль, чем в неоклассической модели. Как и в простейшей кейнсианской модели, равновесия на рынке труда здесь не предполагается.

Кривая *IS*. Предположив, что инвестиционный спрос является невозрастающей функцией от ставки процента r, можем переписать уравнение (8.4), задающее равновесие на рынке товаров и услуг, в следующем виде:

$$Y = C(Y - \overline{T}) + I(r) + \overline{G}.$$

Это уравнение задает неявную функцию $Y(r)$, график которой называется кривой *IS* (*investment savings*). Несложно заметить, что $dY/dr \leqslant 0$ (рис. 8.8). Действительно, решение Y^* уравнения $Y = C(Y - \overline{T}) + I + \overline{G}$ (относительно Y) представляет собой монотонно возрастающую функцию от I. В свою очередь I монотонно не возрастает в зависимости от r.

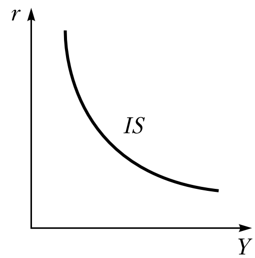


Рис. 8.8

Кривая *LM*. Как и в неоклассической модели, здесь предполагается, что предложение денег является экзогенно заданной величиной, определяемой государством, $M^s = \overline{M}$. Соответственно, предложение реальных денежных остатков равно $(M/P)^s = \overline{M}/\overline{P}$. Что касается спроса, то он устроен несколько сложнее. Напомним, что в неоклассической модели спрос $m^d = (M/P)^d$ на реальные денежные остатки определяется простейшим уравнением количественной теории денег, т.е. $m^d = (M/P)^d = Y/V$, где V — постоянная скорость обращения денег. В модели *IS-LM* предполагается, что спрос на реальные денежные остатки зависит не только от выпуска, но и от ставки процента, $m^d = m(\underset{+}{Y}, \underset{-}{r})$. Например, можно считать, что скорость обращения денег является возрастающей функцией от r, т.е. $V = V(\underset{+}{r})$. (Значки «+» или «–» под буквами в формуле символически обозначают возрастание или убывание функции по соответствующим аргументам). В этом случае $m^d = Y/V(r)$.

Зависимость от r предполагается монотонно убывающей, потому что с увеличением ставки процента потери, связанные с хранением денег «в чулке», возрастают (точнее, не потери, а упущенные возможности). Предположим, например, что у обобщенного потребителя имеются только две возможные формы хранения своих сбережений: 1) в виде наличных и текущего счета в банке, не приносящего никакого дохода; 2) в виде облигаций (частных и государственных), приносящих доход тем больший, чем выше ставка процента. В любом случае какая-то часть сбережений будет храниться в виде наличных или на текущих счетах. В то же время с ростом ставки процента потребитель будет стремиться как можно бóльшую часть своих сбережений хранить в виде облигаций, уменьшая долю денежных остатков.

До сих пор не делалось различия между реальной ставкой процента и номинальной. Очевидно, что в данном случае было бы правильнее считать, что спрос на реальные денежные остатки зависит от номинальной ставки (равной реальной ставке + темп инфляции). Для проводимого модельного анализа достаточно использовать реальную ставку процента, так как темп инфляции в этом разделе неявно предполагается фиксированным.

Итак, вспомнив, что цена единственного продукта предполагается фиксированной на некотором уровне $\overline{P}$, получаем уравнение $m(Y, r) = \dfrac{\overline{M}}{\overline{P}}$, зада-

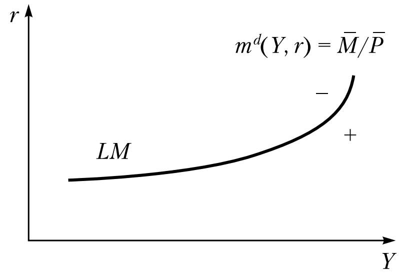


Рис. 8.9

ющее равновесие на рынке денег. Это уравнение дает возможность рассматривать r как неявную функцию от Y и записать $r = r(Y)$. График этой функции называется кривой *LM* (*liquidity — money*) (рис. 8.9). Для удобства работы с кривой *LM* следует обратить внимание на то, что она представляет собой линию уровня функции $m(Y, r)$, соответствующую значению $\overline{M}/\overline{P}$.

Состояние равновесия в модели *IS-LM* — это такой набор $(Y^*, r^*, C^*, S_p^*, I^*)$, который определяется следующим образом: пара (Y^*, r^*) представляет собой решение системы уравнений $Y = C(Y - \overline{T}) + I(r) + \overline{G}$; $m^d(Y, r) = \dfrac{\overline{M}}{\overline{P}}$; $C^* = C(Y^* - \overline{T})$; $S^* = Y^* - \overline{T} - C^*$; $I^* = I(r^*)$. По существу, состояние равновесия задается здесь парой (Y^*, r^*), т. е. пересечением кривых *IS* и *LM* (рис. 8.10). Поэтому далее будем называть равновесием именно эту пару.

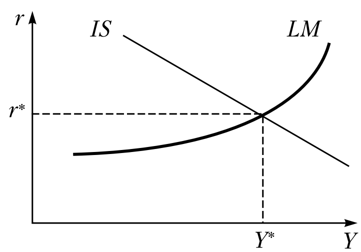


Рис. 8.10

Устойчивость. Для исследования устойчивости равновесия в модели *IS-LM* необходимо рассмотреть естественное уравнение

$$\dot{Y} = a_1(C(Y - \overline{T}) + I(r) + \overline{G} - Y).$$

Оно показывает, что если экономика находится в состоянии (Y, r), лежащем справа от кривой *IS*, то $\dot{Y} < 0$, т.е. уровень выпуска будет уменьшаться. Если же точка (Y, r) находится слева от кривой *IS*, то $\dot{Y} > 0$.

Теперь нужно добавить уравнение, описывающее поведение ставки процента r. Это поведение определяется состоянием рынка денег. А именно, если спрос на реальные денежные остатки $m(Y, r)$ превышает $\overline{M}/\overline{P}$, т.е. если точка (Y, r) лежит ниже кривой *LM* (представляющей собой линию уровня функции $m(Y, r)$, соответствующую значению $\overline{M}/\overline{P}$), то ставка процента растет. Если, наоборот, $m(Y, r) < \overline{M}/\overline{P}$, тогда ставка процента падает. Такое поведение будем описывать с помощью уравнения

$$\dot{r} = a_2(m(Y, r) - \overline{M}/\overline{P}).$$

Направление движения в зависимости от положения точки (Y, r) по отношению к кривым IS и LM примерно можно проследить по рис. 8.11, легко предположив, что движение будет спиралеобразным вокруг положения равновесия. Однако из рисунка нельзя понять, будет ли это спиралеобразное движение сходящимся или расходящимся. В данном случае, оказывается, можно гарантировать асимптотическую устойчивость. Для этого нужно только проверить, что у матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1(C'(Y-\overline{T})-1) & a_1 I'(r) \\ a_2 \dfrac{\partial m}{\partial Y}(Y,r) & a_2 \dfrac{\partial m}{\partial r}(Y,r) \end{pmatrix}$$

определитель больше нуля, а след — меньше нуля. Это действительно так, поскольку $C'(Y-\overline{T}) - 1 < 0$; $\dfrac{\partial m}{\partial r}(Y, r) < 0$; $I'(r) < 0$; $\dfrac{\partial m}{\partial Y}(Y, r) > 0$.

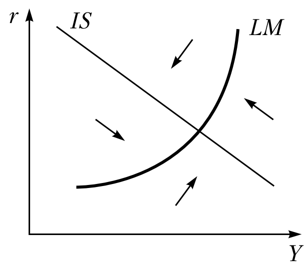


Рис. 8.11

8.2. Принцип максимума Понтрягина

8.2.1. Задача оптимального управления

В XX в. возник ряд новых направлений вариационного исчисления, связанных с интенсивным развитием техники, смежных вопросов математики и, особенно, экономики. Направление получило название оптимального управления, или принципа максимума. В основе решения задач оптимального управления лежит общий прием, который носит название *принципа максимума Понтрягина*[1]. При этом все основные результаты классического вариационного исчисления выводятся из принципа максимума Понтрягина. Данный принцип применяется к задачам оптимального управления в самой общей постановке.

Рассмотрим постановку задачи, наиболее часто встречающуюся в различных экономических исследованиях.

Требуется максимизировать функционал

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)dt$$

[1] Лев Семенович Понтрягин (1908—1988) — советский математик, один из крупнейших математиков XX в., академик АН СССР, Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской, Сталинской и Государственной премии СССР. Несмотря на то что в возрасте 14 лет он полностью ослеп, Л. С. Понтрягин внес значительный вклад в алгебраическую и дифференциальную топологию, теорию колебаний, вариационное исчисление, теорию управления.

на бесконечном горизонте, где $\mathbf{x}(t)$ — вектор-функция ($\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$), называемая фазовым вектором, ее координаты называются фазовыми переменными. Состояние экономического объекта, или динамической системы, описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{8.6}$$

и зависит от внешних воздействий, задаваемых с помощью вектор-функции $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^r$, которая называется вектором управления, а ее переменные — управляющими переменными, или управлениями. Управления должны принадлежать некоторому фиксированному множеству управлений $U \subseteq \mathbb{R}^r$, а фазовые координаты — удовлетворять начальным условиям $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, где $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Функции f и I предполагаются непрерывно дифференцируемыми.

Действуя в соответствии с принципом максимума Понтрягина, вводят вектор $\mathbf{y}(t)$ новых переменных — по одной переменной для каждого из ограничений. Эти новые переменные называются сопряженными, или двойственными, переменными.

Функция Гамильтона, или гамильтониан, определяется как сумма подынтегральной функции целевого функционала и скалярного произведения вектора сопряженных переменных и вектора функций, указывающих скорость изменения фазовых координат:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, t) = I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{y}f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t).$$

Функция Лагранжа, или лагранжиан, определяется как сумма подынтегральной функции целевого функционала и скалярного произведения вектора сопряженных переменных и вектора разности правой и левой частей ограничений (8.6):

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, t) = I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{y}(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) - \dot{\mathbf{x}}).$$

При использовании гамильтониана необходимые условия максимума включают в себя следующие условия:

1) канонические уравнения $\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}$; $-\dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$, где $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}$ и $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$ — градиенты H по $\mathbf{y}$ и по $\mathbf{x}$;

2) условия на управляющие переменные $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0$, где $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}$ — градиент H по $\mathbf{u}$;

3) граничные условия, которые состоят из начальных условий и условий трансверсальности.

Если используется лагранжиан, то необходимые условия максимума включают в себя уравнения Эйлера — Лагранжа для каждой зависимой переменной, входящей в лагранжиан:

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0$$

где z — любая переменная (управляющая, фазовая или сопряженная); $\dot{z}$ — ее производная по времени, и граничные условия.

8.2.2. Применение принципа максимума Понтрягина

Рассмотрим применение принципа максимума Понтрягина на примере задачи оптимального управления, возникающей в моделях эндогенного роста Лукаса — Узавы, экономический смысл которой подробно см. в параграфе 8.3.

Требуется максимизировать следующий функционал:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1-\sigma}(c(t)^{1-\sigma} - 1)N(t)e^{-\rho t}dt,$$

причем фазовые переменные рассматриваемой динамической системы подчинены следующим условиям: $h(0) = h_0$; $K(0) = K_0$;

$$\dot{h} = \delta(1-u)h; \tag{8.7}$$

$$\dot{K} = Y - Nc, \tag{8.8}$$

где $N(t) = e^{\lambda t}$; $Y = AK^{\beta}(uhN)^{1-\beta}h_a^{\gamma}$.

Запишем лагранжиан для данной задачи:

$$L(K, h, \Psi_1, \Psi_2, c, U; \sigma, \beta, \gamma, \delta, \{N(t), h_a(t): t \geqslant 0\}) =$$

$$= \frac{1}{1-\sigma}(c(t)^{1-\sigma} - 1)N(t)e^{-\rho t} - \Psi_1(\dot{K} - Y - Nc) - \Psi_2(\dot{h} - \delta(1-u)h), \tag{8.9}$$

где Ψ_1 и Ψ_2 — двойственные переменные для ограничений соответственно (8.7) и (8.8); σ, β, γ, δ — параметры модели; $N(t)$ и $h_a(t)$ предполагаются экзогенно заданными и поэтому не влияют на процесс оптимизации.

Сделаем замену двойственных переменных Ψ_1, Ψ_2, положив

$$\theta_1 = \Psi_1 e^{\rho t}; \; \theta_2 = \Psi_2 e^{\rho t}.$$

Тогда лагранжиан (8.9) принимает вид

$$L(K, h, \theta_1, \theta_2, c, U; \sigma, \beta, \gamma, \delta, \{N(t), h_a(t): t \geqslant 0\}) =$$

$$= \frac{1}{1-\sigma}(c(t)^{1-\sigma} - 1)N(t)e^{-\rho t} - \theta_1 e^{-\rho t}(\dot{K} - Y - Nc) - \theta_2 e^{-\rho t}(\dot{h} - \delta(1-u)h).$$

Выписывая уравнения Эйлера — Лагранжа по всем шести переменным (K, h, θ_1, θ_2, u, c), сокращая, где это возможно на $e^{-\rho t}$ и на N и перенося члены $\rho\theta_1$ или $\rho\theta_2$ в правую часть, получим следующие шесть условий:

• по K:

$$\dot{\theta}_1 = \rho\theta_1 - \theta_1\beta AK^{\beta-1}(uhN)^{1-\beta}h_a^{\gamma};$$

• по h:

$$\dot{\theta}_2 = \rho\theta_2 - \theta_1(1-\beta)AK^{\beta}(uN)^{1-\beta}h^{-\beta}h_a^{\gamma} - \theta_2\delta(1-u);$$

• по u:

$$-\theta_1(1-\beta)AK^{\beta}(uhN)^{-\beta}Nhh_a^{\gamma} + \theta_2\delta h = 0;$$

• по c:

$$c^{-\sigma} - \theta_1 = 0;$$

• по θ_1:

$$\dot{K} - Y - Nc = 0;$$

• по θ_2:

$$\dot{h} - \delta(1-u)h = 0.$$

Кроме того, должны быть удовлетворены начальные условия $h(0) = h_0$; $K(0) = K_0$ и условия трансверсальности, которые в данном случае имеют вид

$$K\Psi_1 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0;\ h\Psi_2 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

или, что то же самое,

$$\theta_1 K e^{-\rho t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0;\ \theta_2 h e^{-\rho t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

8.3. Модели эндогенного роста Лукаса — Узавы[1]

8.3.1. Описание моделей

В качестве примера современных, интенсивно развивающихся направлений экономических исследований рассмотрим теорию роста.

Модели эндогенного роста занимают важное место в современной экономической теории. Их цель — объяснить многообразие экономической динамики в разных странах мира (быстрый или умеренный рост, застой, спад, циклы), выработать рекомендации по проведению экономической политики, направленные на ускорение экономического роста. В моделях эндогенного роста большое значение уделяется учету не только таких традиционно рассматриваемых факторов производства, как труд и капитал, но и факторов, непосредственно определяющих уровень развития технологий, в частности человеческого капитала. Особое внимание в последние десятилетия привлекает исследуемая на основе принципа максимума Понтрягина модель оптимального распределения времени на производственную деятельность и обучение (исследовательскую, опытно-конструкторскую деятельность, накопление знаний). Ранняя версия этой модели была предложена Узавой, а более поздняя — Лукасом.

Рассмотрим динамическую систему, характеризуемую четырьмя переменными состояния $K(t)$, $h(t)$, $h_a(t)$, $N(t)$ и двумя управляющими переменными $u(t)$, $c(t)$, которые удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\dot{N} = \lambda N(t); \tag{8.10}$$

$$\dot{h} = \delta(1 - u(t))h(t); \tag{8.11}$$

$$\dot{K} = Y(t) - N(t)c(t) \tag{8.12}$$

и неравенствам

$$N(t) \geqslant 0, h(t) \geqslant 0, h_a(t) \geqslant 0, c(t) \geqslant 0, K(t) \geqslant 0; \tag{8.13}$$

$$0 < u(t) \leqslant 1, \tag{8.14}$$

где

$$Y(t) = AK^{\beta}(uhN)^{1-\beta}h_a^{\gamma}, \tag{8.15}$$

$\lambda, \delta, A, \beta, \gamma$ — постоянные ($\delta > 0, \lambda > 0, A > 0, 0 < \beta < 1, \gamma > 0, N(0) = 1$).

---

[1] Доказательство всех утверждений, лемм и теорем данного раздела можно посмотреть в статье: *Королев А. В., Матвеенко В. Д.* О структуре нестационарных траекторий в модели эндогенного роста Лукаса // Автоматика и телемеханика. 2006. № 4. С. 126—136, за исключением леммы 8.4, доказательство которой приведено в статье Ксая (см. ниже).

Определение 8.1. *Темпом прироста* величины $X(t)$ называется величина

$$g_X = \frac{\dot{X}(t)}{X(t)}.$$

Под *сбалансированной траекторией* будем понимать набор функций $\{h(t), K(t), c(t), u(t)\}$, удовлетворяющий условиям (8.10)—(8.15), если темпы прироста переменных $h(t), K(t), c(t)$ постоянны.

Пусть задан целевой функционал

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1-\sigma}(c(t)^{1-\sigma} - 1)N(t)e^{-\rho t}dt, \qquad (8.16)$$

где σ, ρ — постоянные ($\sigma > 0, \rho > 0$). Считая функцию $h_a(t)$ экзогенно заданной, можно найти набор функций

$$\{h(t, h_a(t)), K(t, h_a(t)), c(t, h_a(t)), u(t, h_a(t))\}, \qquad (8.17)$$

максимизирующий функционал (8.16) при условиях (8.10)—(8.15). Если при этом $h = h_a$, то набор (8.17) называется равновесной траекторией.

Другими словами, рассматривается экономика с идентичными рациональными работниками, число которых $N(t)$ растет с постоянным темпом роста $\lambda(1)$. Под *человеческим капиталом* понимается уровень знаний и умения работника.

Пусть $h(t)$ — уровень человеческого капитала репрезентативного работника, $u(t)$ — доля его рабочего времени, посвященная производству благ, $1 - u(t)$ — доля рабочего времени, посвященная обучению (накоплению человеческого капитала). Предполагается, что рост человеческого капитала принимает простую форму (8.11).

Выпуск $Y(t)$ в этой экономике зависит от запаса физического капитала $K(t)$, эффективной рабочей силы $u(t)h(t)N(t)$ и среднего уровня мастерства работников $h_a(t)$. При этом уровень технологии A, эластичность выпуска по внешнему действию человеческого капитала γ, эластичность выпуска по физическому капиталу β считаются постоянными. Накопление физического капитала имеет естественную форму (8.12), где $c(t)$ — поток реального потребления единственного блага на душу населения. Предпочтения определяются нормой дисконтирования с и коэффициентом относительной несклонности к риску σ, т.е. если $U(c)$ — функция полезности, зависящая от потребления на душу населения, то $\frac{cU''(c)}{U'(c)} = -\sigma$ при начальных условиях $U(1) = 0$, $U'(1) = 1$. Решение данного дифференциального уравнения дает $U(c) = \frac{1}{1-\sigma}(c^{1-\sigma} - 1)$, таким образом, предпочтения над потоком реального потребления (на душу населения) в рассматриваемой экономике задаются функционалом (8.16).

Принята гипотеза атомарности, состоящая в том, что при принятии решения (т.е. при максимизации функционала (8.16) при условиях (8.10)—(8.15) работник считает переменным собственный человеческий капитал $h(t)$, но не средний для экономики человеческий капитал $h_a(t)$, который он полагает экзогенно заданным. Средний для экономики уровень человеческого капитала $h_a(t)$ вносит свой вклад в производительность всех работников, а его влияние на производительность каждого индивидуума является внешним эффектом человеческого капитала.

Внимание к моделям эндогенного роста связано прежде всего с проблемой конвергенции/дивергенции, в частности с необходимостью выяснения условий, при которых страны, обладающие одинаковыми технологическими возможностями, развиваются разными темпами или достигают на большом промежутке времени различных уровней физического и человеческого капитала. Основной вопрос, который возникает в этой связи, может быть сформулирован следующим образом: может ли страна, первоначально менее богатая физическим и человеческим капиталом, опередить с течением времени по этим показателям более богатую страну?

8.3.2. Сбалансированные траектории

Из формулы (8.11) непосредственно следует, что необходимым условием сбалансированности является равенство $u(t) = u = \mathrm{const}$, и темп роста переменной $h(t)$ (т.е. величина $\dot{h} = h$) на сбалансированной траектории равен $v = \delta(1 - u)$.

Утверждение 8.1. Пусть выполняются равенства (8.10)—(8.12), (8.15) и $h(t) = h_a(t)$ при всех t. Тогда на сбалансированной траектории темп роста величины $c(t)$ (душевого потребления) равен $k = \dfrac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}$, а темп роста величины $K(t)$ (физического капитала) равен $k + 1$.

Следствие 8.1. Если имеются сбалансированные траектории с различными управлениями u, то при условии, что $h(t) = h_a(t)$, темпы роста величин $h(t)$, $K(t)$, $c(t)$ являются убывающими функциями u.

Таким образом, темпы роста на сбалансированной траектории тем выше, чем бóльшая доля времени затрачивается на накопление человеческого капитала.

Если зафиксировано некоторое управление $\bar{u}$ и соответствующие темпы роста равны $\bar{k}$, $\bar{v}$, $\bar{k} + \lambda$, удобно перейти к вспомогательным переменным

$$Z_1(t) = e^{-(\bar{k}+\lambda)t}K(t);\ \ Z_2(t) = e^{-\bar{v}t}h(t). \tag{8.18}$$

Очевидно, что для сбалансированной траектории с управлением u имеют место тождества $Z_1(t) \equiv K_0$, $Z_2(t) \equiv h_0$.

Лемма 8.1. Пусть последовательности $h(t)$, $u(t)$ удовлетворяют равенству (8.11); $Z_2(t) = e^{-\bar{v}t}h(t)$, $\bar{v} = \delta(1 - \bar{u})$; $0 < \bar{u} \leqslant 1$. Тогда

$$\frac{\dot{Z}_2}{Z_2} = \delta(\bar{u} - u). \tag{8.19}$$

8.3.3. Равновесные траектории

Считая функцию $h_a(t)$ экзогенно заданной и применяя к задаче (8.10)—(8.16) принцип максимума Понтрягина, получим следующие уравнения:

$$c^{-\sigma} = \theta_1;$$

$$\theta_1(1-\beta)AK^{\beta}(uhN)^{-\beta}Nhh_a^{\gamma} = \theta_2\delta h;$$

$$\dot{\theta}_1 = \rho\theta_1 - \theta_1\beta AK^{\beta-1}(uhN)^{1-\beta}h_a^{\gamma};$$

$$\dot{\theta}_2 = \rho\theta_2 - \theta_1(1-\beta)AK^{\beta}(uN)^{1-\beta}h^{-\beta}h_a^{\gamma} - \theta_2\delta(1-u);$$
$$\dot{K} = AK^{\beta}(uNh)^{1-\beta}h_a^{\gamma} - Nc;$$
$$\dot{h} = \delta(1-u)h,$$

где θ_1, θ_2 — двойственные переменные для переменных состояния $K(t)$ и $h(t)$ соответственно.

Граничные условия включают в себя начальные условия $K(0) = K_0$, $h(0) = h_0$ и условия трансверсальности

$$\theta_1 K e^{-\rho t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0;\ \theta_2 h e^{-\rho t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0. \tag{8.20}$$

Используя равенство $h_a = h$, получаем условия для равновесной траектории, из которых следует:

1) на равновесной траектории $\dfrac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \rho - \delta$;

2) сбалансированные равновесные траектории с управлением u удовлетворяют уравнению $\beta AN(0)^{1-\beta}\overline{u}^{1-\beta}Z_1^{\beta-1}Z_2^{1-\beta\gamma} = \rho + \sigma K$, или, что то же самое,

$$Z_1 = B(\overline{u})Z_2^{\alpha}, \tag{8.21}$$

где B — возрастающая функция; α — постоянная.

Это уравнение при $\gamma > 0$ описывает выпуклую кривую на плоскости (Z_1, Z_2). Таким образом, каждая сбалансированная равновесная траектория с управлением u представляется в координатах Z_1, Z_2 в виде точки на кривой (8.21). Пусть $k(t)$ — физический капитал на душу населения. Оказывается, что сбалансированная траектория в координатах $k(t)$, $h(t)$ проходит по той же кривой.

Утверждение 8.2. Для сбалансированной равновесной траектории с управлением u выполняется равенство $k(t) = B(\overline{u})h(t)^{\alpha}$ при всех t.

8.3.4. Случай $\sigma = \beta$

Для частного случая $\sigma = \beta$ для равновесных траекторий Д. Ксаем было получено дифференциальное уравнение

$$\dot{u} = \frac{u}{\beta}[\lambda + (1+\gamma-\beta)\delta - \rho] - \frac{(\gamma-\beta)\delta}{\beta}u^2, \tag{8.22}$$

при этом рассматривался лишь случай $\gamma \neq \beta$. При таких условиях стационарным, очевидно, является значение

$$u^* = \frac{\lambda + (1+\gamma-\beta)\delta - \rho}{(\gamma-\beta)\delta}, \tag{8.23}$$

и уравнение (8.22) принимает вид

$$\dot{u} = \frac{\gamma-\beta}{\beta}\delta u(u^* - u). \tag{8.24}$$

Решением уравнения (8.24) является функция

$$u(t) = \frac{u_0 u^* e^{u^*[(\gamma-\beta)\delta/\beta]t}}{u^* - u_0 + u_0 e^{u^*[(\gamma-\beta)\delta/\beta]t}}. \tag{8.25}$$

Следующие утверждения (леммы) описывают динамику управляющей функции $u(t)$ в зависимости от начального значения u_0.

Лемма 8.2. Пусть $u(t)$, $\tilde{u}(t)$ — управления для некоторых равновесных траекторий, $u_0 < \tilde{u}_0$. Тогда $u(t) < \tilde{u}(t)$ при всех $t > 0$.

Решения существенно различаются в случаях $\gamma > \beta$ и $\gamma < \beta$.

Лемма 8.3. Пусть $\gamma > \beta$ ($\gamma < \beta$). Тогда, если для равновесной траектории $u_0 < u^*$, то $u(t)$ возрастает (убывает) по t; если $u_0 > u^*$, то $u(t)$ убывает (возрастает) по t; если $u_0 = u^*$, то $u(t) \equiv u^*$. Если $\gamma < \beta$, то $\lim u(t) = 0$ при $t \to +\infty$. При этом в случае $\gamma < \beta$, $u_0 > u^*$ функция $u(t)$ выходит за границы допустимой области и даже терпит разрыв второго рода.

Имеет место также следующее утверждение.

***Лемма 8.4* (*Ксай*[1]).** На равновесной траектории совокупное потребление пропорционально физическому капиталу:

$$N(t)c(t) = \left(\frac{\rho}{\beta} - \lambda\right)K(t).$$

Лемма 8.5. Пусть $\gamma = \beta$; $\{K(t), h(t)\}$ — равновесная траектория; $u(i)$ — ее управляющая функция; $0 \leqslant \bar{u} < 1$ — произвольное; $\bar{v} = \delta(1 - \bar{u})$; $\bar{k} = \dfrac{1 - \beta + \gamma}{1 - \beta}\bar{v}$; $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ определены согласно формуле (8.18). Тогда

$$\frac{\dot{Z}_1}{Z_1} = AZ_1^{\beta-1}Z_2^{1+\gamma-\beta}u^{1-\beta}N(0) - \left(\bar{k} + \frac{\rho}{\beta}\right). \tag{8.26}$$

Рассмотрим случаи $\gamma > \beta$, $\gamma < \beta$ и $\gamma = \beta$ в отдельности.

1. Случай $\gamma > \beta$.

В этом случае, как ясно из формулы (8.23), для выполнения неравенства $0 < u^* < 1$ необходимо выполнение условия $\delta \leqslant \rho - \lambda < \delta(1 + \gamma - \beta)$. Как показано Ксаем, для каждого начального состояния (K_0, h_0) существует континуум равновесных траекторий, различающихся начальными значениями u_0. Для любого начального $u_0 \in (0; 1]$ имеет место сходимость $u(t) \to u^*$ при $t \to +\infty$. Для уравнения (8.19) при $\gamma = \beta$, $\gamma > \beta$ получено явное решение

$$Z_2(t) = \frac{h_0}{u_0^{\beta}}u(t)^{\beta/(\gamma-\beta)}.$$

На равновесной траектории функция $u(t)$ определена равенством (8.25). Таким образом, траектория $Z_2(t)$ (а значит, и $h(t)$) определена однозначно начальным значением человеческого капитала h_0 и начальным управлением u_0 и не зависит от начального значения физического капитала K_0. Это означает, что прямые $Z_2 = \text{const}$ в фазовой плоскости (Z_1, Z_2) являются линиями уровня в следующем смысле: равновесные траектории, имеющие один и тот же начальный уровень человеческого капитала h_0 и одно и то же начальное управление u_0, в любой момент времени t находятся на одной и той же линии $Z_2 = Z_2(t)$.

---

[1] *Xie D.* Divergence in economic performance: transitional dynamics with multiple equilibria // Journal of Economic Theory. 1994. Vol. 63. № 1. P. 97—112.

Лемма 8.6. 1. Пусть $h_0 = \tilde{h}_0$, $u_0 > \tilde{u}_0$. Тогда $Z_2(t) < \tilde{Z}_2(t)$ при всех t.

2. Если $u_0 < u^*$, то $Z_2(t)$ возрастает по t; если $u_0 > u^*$, то $Z_2(t)$ убывает по t; если $u_0 = u^*$, то $Z_2(t) \equiv h_0$.

Траектории с меньшим начальным значением u_0 всегда опережают со временем траектории с бóльшим u_0 по уровням человеческого и физического капиталов.

Равновесная траектория $(Z_1(t), Z_2(t))$ с начальным уровнем человеческого капитала h_0 и начальным управлением u_0 сходится к стационарному состоянию

$$Z_1^*(h_0, u_0) = \left(\frac{A h_0^{1+\gamma-\beta} (u^*)^{\gamma/(\gamma-\beta)}}{[(\kappa+\rho)/\beta] u_0^{(\beta/(\gamma-\beta))(1+\gamma-\beta)}} \right)^{1/(1-\beta)};$$

$$Z_2^*(h_0, u_0) = h_0 \left(\frac{u^*}{u_0} \right)^{\beta/(\gamma-\beta)},$$

которое зависит от h_0, u_0 и не зависит от K_0. Стационарные состояния лежат на кривой (8.21), где $\bar{u} = u^*$.

Отсюда следует, что даже если $h_0 > \tilde{h}_0$, можно подобрать значение $\tilde{u}_0$, а именно:

$$\tilde{u}_0 < \left(\frac{\tilde{h}_0}{h_0} \right)^{\frac{\gamma-\beta}{\beta}} u_0,$$

так что $Z_2^*(\tilde{h}_0, \tilde{u}_0) > Z_2^*(h_0, u_0)$ и $Z_1^*(\tilde{h}_0, \tilde{u}_0) > Z_1^*(h_0, u_0)$.

2. Случай $\gamma < \beta$.

В этом случае неравенство $0 < u^* \leqslant 1$, очевидно, эквивалентно следующему неравенству:

$$\delta(1 + \gamma - \beta) < \rho - \lambda \leqslant \delta. \tag{8.27}$$

Теорема 8.1. *Пусть выполняется неравенство* (8.27). *Тогда для каждого начального состояния* (K_0, h_0) *существует единственная равновесная траектория; три этом*

$$u(t) \equiv u^0 = u^*;\ Z_2(t) \equiv Z_2(0) = h_0,$$

$$Z_1(t) = \left[\left(K_0^{1-\beta} - \frac{A h_0^{1+\gamma-\beta} u_0^{1-\beta}}{k + \frac{\rho}{\beta}} \right) e^{-(1-\beta)\left(k+\frac{\rho}{\beta}\right)t} + \frac{A h_0^{1+\gamma-\beta} u_0^{1-\beta}}{k + \frac{\rho}{\beta}} \right]^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Соответствующая равновесной траектории последовательность точек $(Z_1(t), Z_2(t) \equiv h_0)$ сходится к стационару $(Z_1^*(h_0), h_0)$, лежащему на кривой (8.21); функция $Z_1^*(h_0)$ возрастает.

3. Случай $\sigma = \beta = \gamma$.

Уравнение (8.22) при $\gamma = \beta$ принимает вид

$$\dot{u} = u \frac{\lambda + \delta - \rho}{\beta}. \tag{8.28}$$

Его решением является функция $u(t) = u_0 e^{\frac{\lambda+\delta-\rho}{\beta}t}$.

В случае $\lambda + \delta - \rho \geqslant 0$ управление $u(t)$ при достаточно больших t выходит за пределы допустимой области $(0; 1]$. В случае $\lambda + \delta - \rho < 0$ имеет место $u(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, и тогда из формулы (8.11) и условия, что на равновесной траектории $\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \rho - \delta$, следует, что при этом

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} + \frac{\dot{h}}{h} \to \rho,$$

т.е. величина $\theta_2 h$ имеет асимптотический темп роста, равный ρ, что противоречит условию трансверсальности (8.20).

Таким образом, чтобы равновесные траектории существовали, следует наряду с $\sigma = \beta = \gamma$ предположить, что $\lambda + \delta - \rho < 0$. Тогда решением уравнения (8.28) является произвольное постоянное управление u. Следовательно, имеем при $\gamma = \beta$; $\rho = \lambda + \delta$ континуум равновесных траекторий, заиндексованных величиной $u \in (0; 1]$.

Зафиксируем некоторое управление $\bar{u}$. Решением уравнения (8.11) является функция

$$h(t) = h_0 e^{v(\bar{u})t},$$

где $v(\bar{u}) = \delta(1 - \bar{u})$. Определим фазовые переменные $Z_1(t)$, $Z_2(t)$ согласно формуле (8.18). Очевидно, что $Z_2(t) \equiv h_0$. Согласно формуле (8.26)

$$\frac{\dot{Z}_1}{Z_1^{\beta}} = AZ_1^{\beta-1} h_0 \bar{u}^{1-\beta} - \left(\bar{k}(\bar{u}) + \frac{\rho}{\beta}\right),$$

и приходим к уравнению Бернулли

$$\frac{\dot{Z}_1}{Z_1^{\beta}} + \left(k(\bar{u}) + \frac{\rho}{\beta}\right) Z_1^{\beta-1} = Ah_0 \bar{u}^{1-\beta},$$

общим решением которого является функция

$$Z_1(t) = \left(Ce^{-(1-\beta)(k(\bar{u}) + \rho/\beta)t} + \frac{Ah_0 \bar{u}^{1-\beta}}{k(\bar{u}) + \rho/\beta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Таким образом, имеет место сходимость

$$Z_1(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} Z_1^*(h_0, \bar{u}) = \bar{u}\left(\frac{Ah_0}{k(\bar{u}) + \rho/\beta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Это означает, что траектория $(Z_1(t), Z_2(t))$ сходится к точке на кривой (8.21); в данном случае

$$B(\bar{u}) = \left(\frac{A}{k(\bar{u}) + \rho/\beta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}; \ \alpha = \frac{1}{1-\beta}.$$

Укажем частное решение, соответствующее конкретному K_0. Полагая $t = 0$, находим $C = K_0^{1-\beta} - Z_1^*(h_0, \bar{u}))^{1-\beta}$. Таким образом,

$$Z_1(t) = \{[K_0^{1-\beta} - Z_1^*(h_0, \bar{u}))^{1-\beta}]e^{-(1-\beta)(k(\bar{u}) + \rho/\beta)t} + Z_1^*(h_0, \bar{u})^{1-\beta}\}^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Иными словами,

$$Z_1(t)^{1-\beta} - (Z_1^*(h_0, \overline{u}))^{1-\beta} = [K_0^{1-\beta} - (Z_1^*(h_0, \overline{u}))^{1-\beta}]e^{-(1-\beta)(k(\overline{u})+\rho/\beta)t}. \quad (8.29)$$

т.е. отклонение величины $Z_1(t)$ от стационарного значения монотонно сходится к нулю. Как стационарное значение, так и скорость экспоненциальной сходимости возрастают с увеличением $\overline{u}$. Наоборот, темп роста человеческого капитала $v(\overline{u})$ и асимптотический темп роста физического капитала $k(\overline{u}) + \lambda$ убывают по $\overline{u}$.

Таким образом, для каждого начального состояния (K_0, h_0) существует континуум равновесных траекторий, обладающих различными темпами роста. При этом, хотя последовательности темпов роста физического и человеческого капиталов при уменьшении $\overline{u}$ ограничены сверху (их пределы при $u \to 0$ равны, соответственно, $\delta/(1-\beta) + \lambda$ и δ), верхние границы не достигаются.

8.3.5. Экономический смысл результатов

В зависимости от соотношения параметров возможны три принципиально различных случая. Если $\gamma < \beta$, т.е. эластичность выпуска по физическому капиталу превосходит эластичность выпуска по внешнему действию человеческого капитала, то существует единственная равновесная траектория для любого начального состояния. На этой траектории допустимо единственное управление $u(t) = u^* = \text{const}$, и страна, менее богатая человеческим капиталом, каким бы большим физическим капиталом она ни располагала, будет на большом промежутке времени отставать по обоим видам капитала от страны, изначально более богатой человеческим капиталом.

Если $\gamma > \beta$, т.е. эластичность выпуска по внешнему действию человеческого капитала превосходит эластичность выпуска по физическому капиталу, то имеет место неоднозначность: в любом начальном состоянии могут быть применены различные начальные управления u_0, и чем меньше u_0 (т.е. чем больше времени используется для обучения), тем более высокого уровня достигнет данная страна. Это означает, что если страна A имеет начальные запасы человеческого и физического капиталов (h_A, K_A) бóльшие, чем страна B (h_B, K_B), и движется по равновесной траектории с начальным управлением u_{0A}, то у страны B всегда есть возможность опередить страну A по обоим видам капитала, затрачивая достаточно много времени на обучение. Точнее говоря, это произойдет с течением времени, если и только если страна B будет двигаться по равновесной траектории с начальным управлением u_{0B}, удовлетворяющим условию

$$u_{0B} < \left(\frac{h_{0B}}{h_{0A}}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}} u_{0A}.$$

В обоих случаях долговременные темпы роста одинаковы на всех траекториях, т.е. все различия возможны только в достигнутых уровнях. Граничный случай $\gamma = \beta$ обладает чертами обоих случаев, отмеченных ранее: в любом начальном состоянии можно применить различные начальные управления u_0, и на равновесной траектории имеет место равенство $u(t) \equiv u_0$. Темп роста человеческого капитала и долгосрочный темп роста физического капитала являются возрастающими функциями используемой для обучения доли времени $1 - u_0$. Это означает, что в данном случае страну A, движущуюся по любой равновесной траектории с долей u_{0A} несвободного времени, посвященного производству благ, может опередить страна B из любого начального состояния, если она посвящает обучению долю несвободного времени, бóльшую, чем $1 - u_{0A}$, т.е. если $u_{0B} < u_{0A}$. При этом сходимость к стационарным состояниям с более высокими темпами роста физического капитала происходит медленнее. В случае $\gamma = \beta$ опережение имеет место не только в уровнях капитала, но и в темпах роста человеческого и физического капиталов.

8.4. Примеры решения задач по макроэкономике

Рассмотрим примеры типовых макроэкономических задач.

Пример 8.1. Спрос домашних хозяйств на отечественные потребительские блага выражается функцией $C = 0{,}4Y$, на импортные — $Z = 0{,}2Y$, а на деньги — $M = 0{,}04Y + P(60 - r)$. Инвестиционный спрос предпринимателей задан функцией $I = 98{,}2 - 4{,}8r$. Спрос государства на рынке благ равен 35, а заграницы — 45. Действующая ставка подоходного налога $T_Y = 0{,}25$. Требуется определить, на какое расстояние, измеренное по оси абсцисс, сдвинутся линия IS и кривая совокупного спроса, если государственные расходы возрастут на 20 ед.

Решение. Определим предельную склонность домашних хозяйств к сбережению:

$$S_Y = 1 - C_Y - T_Y - Z_Y = 1 - 0{,}4 - 0{,}25 - 0{,}2 = 0{,}15.$$

Из условия равновесия на рынке благ выведем уравнение линии IS:

$$0{,}6Y = 98{,}2 - 4{,}8r + 35 + 45 = 178{,}2 - 4{,}8r,$$

откуда получаем $Y = 297 - 8r$. После увеличения государственных расходов уравнение линии IS примет вид

$$0{,}6Y = 198{,}2 - 4{,}8r,$$

откуда находим $Y = 330{,}3 - 8r$. Следовательно, расстояние сдвига линии IS равно

$$330{,}3 - 297 = 33{,}3.$$

Для получения функции совокупного спроса определим уравнение линии LM:

$$\frac{60}{P} = 0{,}04Y + 60 - r.$$

Выразим r из уравнения линии IS:

$$r = 37{,}125 - 0{,}125Y$$

и подставим его в уравнение линии LM:

$$\frac{60}{P} = 0{,}04Y + 60 - 37{,}125 + 0{,}125Y,$$

откуда получаем

$$Y_0 = \frac{363{,}6}{P} - 138{,}6.$$

Соответственно, после увеличения государственных расходов имеем

$$IS_1\colon r = 41{,}288 - 0{,}125Y;\ \ LM_1\colon \frac{60}{P} = 0{,}04Y + 60 - 41{,}288 + 0{,}125Y.$$

Получаем

$$Y_1 = \frac{363{,}6}{P} - 113{,}3.$$

Следовательно, сдвиг кривой совокупного спроса равен

$$138{,}6 - 113{,}3 = 25{,}3.$$

Пример 8.2. Количество находящихся в обращении денег равно 24 ед., а спрос на деньги выражается формулой $M = 1{,}5Y - 100r$. Кроме того, известны функция потребления $C = 0{,}8Y$ и функция инвестиций $I = 4 - 40r$.

1. Составим уравнение функции совокупного спроса.

2. Определим, как изменятся объем совокупного спроса и реальная ставка процента при повышении уровня цен с 1 до 2.

Решение. 1. Для определения функции совокупного спроса решим уравнение *IS* относительно r:

$$4 - 40r = 0{,}2Y,$$

поэтому

$$r = 0{,}1 - 0{,}005Y,$$

и подставим найденное выражение в уравнение линии *LM*:

$$\frac{24}{P} = 1{,}5Y - 100(0{,}1 - 0{,}005Y),$$

следовательно,

$$Y = \frac{12}{P} + 5.$$

2. При $P = 1$ совокупный спрос равен $12 + 5 = 17$; при $P = 2$, соответственно, $6 + 5 = 11$. Следовательно, совокупный спрос снизится на 6 ед.

Найдем ставку процента при $P = 1$ из системы уравнений линий *IS* и *LM*:

$$\begin{cases} 24 = 1{,}5Y - 100r, \\ Y = 20 - 200r. \end{cases}$$

Имеем $r = 0{,}015$. Соответственно, при $P = 2$ имеем систему

$$\begin{cases} 12 = 1{,}5Y - 100r, \\ Y = 20 - 200r. \end{cases}$$

поэтому $r = 0{,}045$. Следовательно, ставка процента увеличилась на 0,03.

Задачи для самостоятельного решения

8.1. Выведите неоклассическую и кейнсианскую функции спроса на труд при использовании 16 ед. капитала и технологии, представленной производственной функцией $Y = \sqrt{LK}$.

8.2. Предприниматели планируют использовать 9 ед. капитала при технологии производства, представленной производственной функцией $Y = 8\sqrt{LK}$.

1. Определите функцию совокупного предложения, если функция предложения труда имеет вид: а) $L^S = 1{,}6W$; б) $L^S = 1{,}6w$.

2. Укажите, к какой из концепций принадлежит каждая из найденных функций совокупного предложения.

8.3. Номинальное количество денег, находящихся в обращении, равно 81 ед.; скорость их обращения равна 10. Спрос на деньги как имущество характеризуется формулой

$$M_{\text{им}} = \frac{96}{i - 1}.$$

Объем сбережений равен 40% реального дохода, а объем инвестиций определяется по формуле

$$I = 20 + \frac{12}{r}.$$

1. Какой уровень цен обеспечивает совместное равновесие на рынках благ и денег, если величина эффективного спроса равна 60?

2. Как изменится уровень цен, если: а) скорость обращения денег удвоится; б) количество находящихся в обращении денег уменьшится вдвое?

8.4. Потребительский спрос характеризуется функцией $C = 50 + 0{,}5Y$, а инвестиционный спрос — функцией $I = 200 - 25r$. Функция спроса на деньги имеет вид $M = 0{,}1Y + 24 - 2r$. Представьте в виде функции зависимость количества находящихся в обращении денег от реальной величины эффективного спроса, если уровень цен постоянно должен быть равен 1,5.

8.5. Домашние хозяйства 80% текущего располагаемого дохода используют на покупку благ. Инвестиционный спрос предпринимателей характеризуется формулой $I = 900 - 50r$. Спрос на реальные кассовые остатки определяется формулой $M = 0{,}25Y - 62{,}5r$, а их предложение равно 500 ед.

1. Какую ставку подоходного налога должно установить правительство, чтобы при планируемых государственных расходах в размере 800 ед. эффективный спрос равнялся 3500 ед.?

2. Как должно было бы действовать государство, если бы намеченной величины национального дохода можно было достичь при сбалансированном бюджете?

8.6. Докажите, что если величина $X(t)$ имеет темп прироста $g(t)$, то угловой коэффициент кривой $\ln x(t)$ равен $g(t)$.

8.7. Учитывая, что темп прироста переменной равен производной по времени ее логарифма, докажите следующие утверждения.

а) Темп роста произведения двух переменных равен сумме темпов прироста этих переменных: если $Z(t) = X(t)Y(t)$, то

$$\dot{Z}(t)/Z(t) = [\dot{X}(t)/X(t)] + [\dot{Y}(t)/Y(t)].$$

б) Темп прироста отношения двух переменныхравен разности темпов прироста этих переменных: если $Z(t) = X(t)/Y(t)$, то

$$\dot{Z}(t)/Z(t) = [\dot{X}(t)/X(t)] - [\dot{Y}(t)/Y(t)].$$

в) Если $Z(t) = (X(t))^{\alpha}$, то

$$\dot{Z}(t)/Z(t) = \alpha\dot{X}(t)/X(t)].$$

8.8. Предположим, что темп прироста некоторой величины X постоянен и равен $\alpha > 0$ на интервале от 0 до t_1, падает до 0 в момент t_1, плавно возрастает с 0 до α на интервале от t_1 до t_2 и остается на уровне а после t_2.

1. Постройте график темпа прироста X как функции времени.

2. Постройте график $\ln X$ как функции времени.

8.9. Докажите следующие свойства:

а) темп прироста постоянной величины равен нулю;

б) темп прироста величины $ax(t)$, где a — постоянная, равен темпу прироста величины $x(t)$.

8.10. В работе нобелевского лауреата Р. Лукаса «О механике экономического развития»[1] возникает следующее равенство:

$$\beta AK(t)^{\beta-1(u}(t)h(t)N(t))^{1-\beta}h(t)^{\gamma} = \rho + \sigma\kappa,$$

где величины A, β, γ, ρ, σ, κ — постоянные. Для сбалансированной траектории, предполагая, что $g_K = \kappa + \lambda$, $g_h = \nu$, выразите величину κ через другие постоянные.

8.11. Рассмотрим производственную функцию Кобба — Дугласа

$$F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

где K — затраты капитала; L — затраты труда, $A > 0$, $0 < \alpha < 1$. Для такой производственной функции предельный продукт капитала составляет

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha},$$

а предельный продукт труда

$$\frac{\partial F}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}.$$

Требуется показать, что эластичность выпуска по капиталу равна α, а эластичность выпуска по труду равна $1 - \alpha$ (число а называют *долей капитала*, а число $1 - \alpha$ — *долей труда*).

8.12. Предположим, что фирма описывается производственной функцией Кобба — Дугласа. Покажите, что предельный продукт труда зависит только от капиталовооруженности:

$$k = \frac{L}{L}.$$

8.13. Выведите уравнение кривой спроса на труд, если фирма описывается производственной функцией Кобба — Дугласа.

8.14. Для производственной функции Кобба — Дугласа, считая, что в равновесии предельный продукт труда равен реальной ставке заработной платы, а предельный продукт капитала — процентной ставке, найдите зависимость между реальной ставкой заработной платы и процентной ставкой. Постройте график этой зависимости.

8.15. Предположим, что фирма описывается производственной функцией Кобба — Дугласа, причем доля капитала в доходе равна 0,3, а доля труда — 0,7. Что произойдет с выпуском, если капитал увеличится на 5%, а затраты труда уменьшатся на 4%?

---

[1] *Lucas, R. E.* On the mechanics of economic development // Journal of Monetary Economics. 1988. Vol. 22. № l. P. 3—42.

Глава 9
МИКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МЕНЕДЖМЕНТА

В результате изучения главы 9 студент должен:

знать

• метод ветвей и границ;

• метод динамического программирования;

уметь

• применять метод ветвей и границ и метод динамического программирования для решения различных оптимизационных задач;

владеть

• основами теории массового обслуживания.

9.1. Задачи динамического программирования

Модели линейного программирования в большинстве случаев используются в промышленности для принятия крупномасштабных плановых решений в сложных ситуациях. Модели динамического программирования обычно применяются для решения задач значительно меньшего масштаба. Перечислим лишь некоторые типичные области применения моделей динамического программирования при принятии решений.

1. Разработка правил управления запасами, устанавливающих момент пополнения запасов и размер пополняющего заказа.

2. Разработка принципов календарного планирования производства и выравнивания занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию.

3. Определение необходимого объема запасных частей, гарантирующего эффективное использование дорогостоящего оборудования.

4. Распределение дефицитных капитальных вложений между возможными новыми направлениями их использования.

5. Выбор методов проведения рекламной кампании.

6. Систематизация методов поиска ценного вида ресурсов.

7. Составление календарных планов текущего и капитального ремонтов сложного оборудования.

8. Разработка долгосрочных правил замены выбывающих из эксплуатации основных фондов.

Во многих реально функционирующих системах еженедельно требуется принимать тысячи таких решений. В связи с этим модели динамического программирования ценны именно тем, что они позволяют принимать миллионы решений на основе стандартного подхода, часто с использованием компьютеров, при минимальном вмешательстве человека. Многим фирмам, воспользовавшимся моделями динамического программирования, удалось добиться сокращения затрат или же уровня запасов на 25% и более.

Происхождение названия «динамическое программирование» связано с использованием методов динамического программирования в задачах принятия решений через фиксированные промежутки времени, например в задачах управления запасами. Однако методы динамического программирования успешно применяются также для решения задач, в которых фактор времени не учитывается, поэтому более удачным, по мнению Х. Тахи[1], является термин «многоэтапное программирование», отражающий пошаговый характер процесса решения задачи. С другой стороны, многие понимают слово «динамическое» буквально, объясняя подход к решению оптимизационных задач с позиций динамического программирования как времену́ю «возможность принять ряд последовательных решений, обеспечивающих оптимальность развития процесса в целом»[2].

Фундаментальным принципом, положенным в основу теории динамического программирования, является принцип оптимальности, который определяет порядок поэтапного решения допускающей декомпозицию задачи с помощью рекуррентных вычислительных процедур.

Таким образом, динамическое программирование представляет собой математический аппарат, разработанный с целью повышения эффективности вычислений при решении некоторого класса задач математического программирования с помощью их разложения (декомпозиции) на относительно небольшие и менее сложные задачи. Для динамического программирования характерен подход к решению задачи по этапам, с каждым из которых связана одна управляющая переменная. Набор рекуррентных процедур, связующих различные этапы, обеспечивает получение допустимого оптимального решения задачи в целом при достижении последнего этапа.

Основная идея динамического программирования состоит в следующем. Задачу, которая нас интересует, погружаем в целый класс задач и, решив задачи этого класса, получим и решение интересующей нас задачи. Другая идея, положенная в основу динамического программирования, — в случаях, когда требуется принять много решений, свести дело к последовательному принятию частных решений.

Впервые идея динамического программирования была предложена Р. Беллманом для непрерывного класса задач и затем перенесена на дискретные задачи. Задачи дискретного программирования весьма разнообразны, и никаких общих методов решения здесь нет. Однако существуют некие общие идеи, которые называют «методами», но в данном случае речь идет не о конкретных алгоритмах, а лишь о неких направляющих вехах. Таких общих идей две: метод ветвей и границ и метод динамического программирования.

Метод ветвей и границ является более общим, чем метод динамического программирования. Идею метода М. К. Гавурин объяснял[3] на таком простом примере. Рассмотрим задачу дискретного программирования, решае-

---

[1] См.: *Таха Х.* Введение в исследование операций. М. : Мир, 2007.

[2] См.: *Глухов В. В., Медников М. Д., Коробко С. Б.* Математические методы и модели для менеджмента. СПб. : Лань, 2007.

[3] Эти объяснения он давал на лекциях курса «Экстремальные задач» на математико-механическом факультете Ленинградского государственного университета. См.: *Гавурин М. К., Малоземов В. Н.* Экстремальные задачи с линейными ограничениями : учеб. пособие. Л. : Изд-во ЛГУ, 1984.

мую методом полного перебора. Пусть для определенности у нас задача на минимум:

$$\begin{cases} f(x) \to \min, \\ x \in \Omega, \end{cases}$$

множество Ω предполагается многочисленным в том смысле, что даже взять и подержать в руках каждый его элемент, ничего с ним не делая, — задача трудная. Нужно найти такие части множества Ω, для которых вычислять $f(x)$ не стоит. Предполагается наличие функции g, такой что аргументами ее являются не отдельные элементы из Ω, а целые подмножества $\omega \subset \Omega$, причем если $x \in \omega \subset \Omega$, то $f(x) \geqslant g(\mathrm{w})$. Если мы такую оценку снизу умеем строить, то можем применять метод ветвей и границ.

Пусть Θ — это класс множеств $\omega \subset \Omega$, подлежащих рассмотрению, *rec* — переменная, которая хранит найденное на данный момент наименьшее значение функции, *argrec* — то значение аргумента $x \in \Omega$, на котором достигнуто значение *rec*. Сначала $\Theta = \{\Omega\}$, *rec* $= +\infty$. Схему метода можно описать следующим образом.

1. Берем какое-либо ω из Θ, удаляем ω из множества Θ, вычисляем $g(\omega)$.

2. Если $g(\omega) <$ *rec*, то переходим к п. 3, в противном случае переходим к п. 4.

3. Если ω — одноточечное множество, $\omega = \{\xi\}$, присваиваем переменной *rec* значение $f(\xi)$, а переменной *argrec* — значение ξ и переходим к п. 4. Если же ω — не одноточечное множество, то переходим к п. 5.

4. Если множество Θ пусто, то алгоритм свою работу заканчивает. Если же Θ непусто, переходим к п. 1.

5. Разбиваем множество w на подмножества, присоединяем их к множеству Θ в качестве новых элементов и переходим к п. 1.

Очень трудно дать какое-либо конкретное описание *метода динамического программирования.*

М. К. Гавурин объяснял идею динамического программирования следующим образом. Есть такие недалекие люди, которые стараются из каждой ситуации извлечь максимум личной пользы, — итог их жизни обычно бывает весьма и весьма плачевным. Задачи же *динамического программирования* охватывают те ситуации, когда применение этой близорукой стратегии максимизации сиюминутной выгоды приводит в конечном итоге к достижению глобального оптимума.

Динамическое программирование, как уже отмечалось, — это название целого класса методов или конкретных алгоритмов решения (главным образом дискретных) оптимизационных задач. При решении каждой конкретной задачи дискретного программирования, т.е. при разработке каждого конкретного алгоритма, основным моментом является вывод рекуррентного соотношения для целевой функции, называемого *функциональным уравнением Беллмана* (поскольку неизвестной в этом уравнении является целевая функция, которая с помощью данного соотношения Беллмана рекурсивно выражается через эту же целевую функцию, но для задач меньшей размерности).

Общей особенностью моделей динамического программирования, как уже упоминалось, является сведение задачи принятия решений к получению рекуррентных соотношений. Постараемся объяснить эту общую идею динамического программирования на одном простом примере.

Предположим, что имеются некоторые ресурсы, которые распределяются на два предприятия: первому достается y, а второму — $x - y$. Пусть в течение определенного периода, например года, количество y приносит доход $g(y)$, а количество $x - y$ — доход $h(x - y)$. Обозначим через $F1(x)$ наибольший доход, который могут принести ресурсы x при оптимальном распределении их между предприятиями. Тогда

$$F_1(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} (g(y) + h(x - y)).$$

Рассмотрим теперь двухшаговый процесс, состоящий из двух периодов (этапов). Так как доход получается вследствие выпуска и реализации продукции, что связано с определенными издержками, то к началу второго периода первоначальная величина y уменьшится до величины ay $(0 \leqslant a \leqslant 1)$, а величина $x - y$ — до величины $b(x - y)$ $(0 \leqslant b \leqslant 1)$. Наибольший доход, который можно получить от суммарного остатка $ay + b(x - y)$ в течение второго этапа, равен $F_1[ay + b(x - y)]$. Обозначим через $F_2(x)$ наибольший доход, который может быть получен от суммы x за оба периода. Этот доход равен максимальному значению суммы доходов первого и второго периодов, при условии что начальные для каждого периода ресурсы распределялись наилучшим образом, т.е.

$$F_2(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} \{(g(y) + h(x - y) + F_1[ay + b(x - y)])\}.$$

Рассматривая n-шаговый процесс, приходим к основному функциональному уравнению Беллмана, которое устанавливает связь между F_n и F_{n-1}:

$$F_n(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} \{(g(y) + h(x - y) + F_{n-1}[ay + b(x - y)])\}.$$

По приведенным равенствам последовательно находим $F_1(x)$, затем $F_2(x)$, $F_3(x)$ и т.д. Значение $F_n(x)$ является доходом, полученным за n шагов.

В каждом отдельном случае функциональное уравнение Беллмана представляет собой математическую формулировку принципа динамического программирования.

Во всех тех случаях, когда возможно применение методов динамического программирования, оптимальное поведение обладает следующим свойством: каковы бы ни были первоначальное состояние и решение на первом шаге, решения на следующих шагах должны составлять оптимальное поведение относительно решения, полученного на предыдущих шагах.

Применительно к рассмотренному примеру это означает, что максимальный доход от n-шагового процесса равен сумме доходов от 1-го и $(n - 1)$ последующих шагов при условии оптимального распределения в последующих шагах ресурсов, оставшихся после 1-го шага.

Далее перейдем к более осмысленным задачам. Принцип динамического программирования (применение функционального уравнения Беллмана) рассмотрим на примере двух весьма популярных микроэкономических задач менеджмента: задачи управления запасами и планирования продаж (задачи многопериодного планирования).

9.2. Задача управления запасами

Постановка задачи. Фирма встречается со спросом d_t в начале каждого из T периодов. Издержки на приобретение x_t ресурсов в начале периода t есть $C_t(x_t)$. Издержки хранения в течение периода t составляют $h_t(i_{t+1})$, где i_{t+1} есть запас, переходящий на $(t + 1)$-й период.

Сформулируем задачу определения фирмой оптимального расписания закупки запасов как задачу динамического программирования (предполагается, что начальный запас $i_1 = 0$).

Покажем, что если функции $C_t(x_t)$ и $h_t(i_{t+1})$ вогнуты (выпуклы вверх), то сформулированная задача может быть решена с помощью прямого алгоритма. Проиллюстрируем теорему о горизонте планирования (см. ниже) в том случае, когда $T = 6$, $d_t = 2$, $h_t(i_{t+1}) = 3i_{t+1}$ и

$$C_t(x_t) = \begin{cases} 0 \text{ при } x_t = 0, \\ 8 + 2x_t \text{ при } x_t = 1, 2, 3, \dots . \end{cases}$$

Решение. Выберем функцию Беллмана: $f_n(i)$ = (минимальные затраты на n оставшихся периодах при начальном уровне запасов I), $f_0(0) = 0$.

Функциональное уравнение Беллмана:

$$f_n(i) = \min_x (C_{T-n+1}(x) + h_{T-n+1}(i + x - d_{T-n+1}) + f_{n-1}(i + x - d_{T-n+1})),$$

$$d_{T-n+1} - i \leqslant x \leqslant d_{T-n+1} + d_{T-n+2} + \dots + d_T - i,$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, d_{T-n+1} + d_{T-n+2} + \dots + d_T.$$

Требуется найти $f_T(0)$, т.е. используется обратная прогонка.

В случае когда затраты на приобретение и затраты на хранение запасов являются вогнутыми функциями (это соответствует случаю постоянных или убывающих предельных издержек на соответствующем участке кривой затрат), можно доказать следующие утверждения.

1. При заданном исходном уровне запаса $i_1 = 0$ на любом этапе N-этапной модели оптимальным является положительное значение x_t^* или положительный исходный запас i_t^*; их произведение должно быть равно нулю, т.е. $x_t^* i_t^* = 0$.

2. Размер заказа x_t на любом этапе t оптимален только тогда, когда он равен нулю или в точности соответствует спросу одного этапа или нескольких последующих этапов. Эти последующие этапы таковы, что если спрос на этапе $t + m$ ($< N$) удовлетворяется за счет x_t^*, то спрос на этапах $t, t + 1, \dots, t + m - 1$ также удовлетворяется за счет x_t^*.

В случае вогнутых функций затрат справедлива также следующая теорема[1].

Теорема 9.1 (о горизонте планирования). *Если на этапе t^* достигается минимум затрат таким образом, что спрос на этапе t^* удовлетворяется за счет размещения заказа на предыдущем этапе $t^{**} < t^*$, то для всех последующих этапов $t > t^*$ достаточно определить оптимальную программу, основанную на размещении заказов только на этапах $t^{**}, t^{**} + 1, \dots, t$. В частности, если оптимальная стратегия требует размещения заказа на этапе t^**

[1] См.: *Таха Х.* Указ. соч. или *Вагнер Г.* Основы исследования операций. В 3 т. / Г. Вагнер. М. : Мир, 1973.

для удовлетворения спроса того же этапа t^* (т.е. $t^{**} = t^*$), *то для любого последующего этапа* $t > t^*$ *всегда оптимально размещать заказ на этапе* t^*, *не учитывая спроса в будущем* (*в этом случае говорят, что* t^* — *начало горизонта планирования*).

Из данной теоремы вытекают два важных *следствия*.

1. Вычислительный процесс можно прервать, не рассматривая элементы, относящиеся к этапам $k < t^{**}$, что обеспечит сокращение объема вычислений.

2. В частном случае, когда $t^{**} = t^*$, помимо сокращения объема вычислений на этапе t^* последующие этапы, начиная с t^*, можно рассматривать совершенно независимо от всех предыдущих. Более того, всегда оптимально размещать заказ на этапе t^* вне зависимости от будущего спроса.

Таким образом, если функции $C_t(x_t)$ и $h_t(i_t)$ являются вогнутыми, можно использовать следующий алгоритм.

Пусть f_t — минимальные затраты периодов с 1-го по t-й при нулевом запасе в конце периода t. Тогда $f_0 = 0, f_t = \min\limits_{k=0,1,\ldots,t-1} \{f_k + c_{kt}\}$, где

$$c_{kt} = \begin{cases} C_{k+1}(d_{k+1}) \text{ при } t = k+1, \\ C_{k+1}(d_{k+1} + d_{k+2} + \ldots + d_t) + h_{k+1}(d_{k+2} + \ldots + d_t) + h_{t-1}(d_t) \text{ при } t > k+1. \end{cases}$$

Требуется найти f_T.

Ищем $\min \sum\limits_{t=1}^{T} (C_t(x_t) + h_t(i_{t+1}))$ при условии $i_t + x_t = D_t + i_{t+1}$, т.е.

$$d_t \leqslant x_t + i_t \leqslant d_t + d_{t+1} + \ldots + d_T;$$
$$0 \leqslant x - d_t \leqslant d_{t+1} + \ldots + d_T.$$

Сначала вычисляем c_{ij}:
$c_{01} = C_1(2) = 12;$
$c_{02} = C_1(2 + 2) + h_1(2) = 16 + 6 + 22;$
$c_{03} = C_1(2 + 2 + 2) + h_1(2 + 2) + h_2(2) = 20 + 12 + 6 = 38;$
$c_{04} = C_1(2\cdot 4) + h_1(2\cdot 3) + h_2(2\cdot 2) + h_3(2) = 24 + 36 = 60;$
$c_{05} = C_1(2\cdot 5) + h_1(2\cdot 4) + h_2(2\cdot 3) + h_3(2\cdot 2) + h_4(2) = 28 + 60 = 88;$
$c_{06} = C_1(2\cdot 6) + h_1(2\cdot 5) + h_2(2\cdot 4) + h_3(2\cdot 3) + h_4(2\cdot 2) + h_5(2) = 30 + 84 = 114;$
$c_{12} = C_2(2) = 12;$
$c_{13} = C_2(2 + 2) + h_2(2) = 16 + 6 = 22;$
$c_{14} = C_2(2\cdot 3) + h_2(2\cdot 2) + h_3(2) = 38;$
$c_{15} = C_2(2\cdot 4) + h_2(2\cdot 3) + h_3(2\cdot 2) + h_4(2) = 60;$
$c_{16} = C_2(2\cdot 5) + h_2(2\cdot 4) + h_3(2\cdot 3) + h_4(2\cdot 2) + h_5(2) = 88;$
$c_{23} = C_3(2) = 12;$
$c_{24} = C_3(2 + 2) + h_3(2) = 22;$
$c_{25} = C_3(2\cdot 3) + h_3(2\cdot 2) + h_4(2) = 38;$
$c_{26} = C_3(2\cdot 4) + h_3(2\cdot 3) + h_4(2\cdot 2) + h_5(2) = 60;$
$c_{34} = 12; c_{35} = 22; c_{36} = 38; c_{45} = 12; c_{46} = 22; c_{56} = 12.$
Обозначим k_n — это то k, при котором сумма $f_k + c_{kn}$ достигает минимума).
Теперь применим рекуррентные соотношения для f_t:
$f_0 = 0;$
$f_1 = f_0 + c_{01} = 12; k_1 = 0;$
$f_2 = \min\{f_0 + c_{02}, f_1 + c_{12}\} = \min\{22, 12 + 12\} = 22; k_2 = 0;$

$f_3 = \min\{f_0 + c_{03}, f_1 + c_{13}, f_2 + c_{23}\} = \min\{0 + 38, 12 + 22, 22 + 12\} = 34$; $k_3 = 1$ или 2 (лучше 2);

$f_4 = \min\{f_2 + c_{24}, f_3 + c_{34}\} = \min\{22 + 22, 34 + 12\} = 44$; $k_4 = 2$;

$f_5 = \min\{f_2 + c_{25}, f_3 + c_{35}, f_4 + c_{45}\} = \min\{22 + 38, 34 + 22, 44 + 12\} = 56$; $k_5 = 3$ или 4 (лучше 4);

$f_6 = \min\{f_4 + c_{46}, f_5 + c_{56}\} = \min\{44 + 22, 56 + 12\} = 66$; $k_6 = 4$.

Таким образом, оптимальной программой будет $x_1 = 4$; $x_2 = 0$; $x_3 = 4$; $x_4 = 0$; $x_5 = 4$; $x_6 = 0$, а минимальными затратами $f_6 = 66$.

Поскольку $k_3 = 2$, то программа, полученная при рассмотрении периодов 1-го и 2-го в качестве отдельного планового периода, всегда является оптимальной. Поэтому при вычислении f_n начиная с $n = 4$ можно рассматривать выражения вида $f_k + c_{kn}$ только от $k = 2$.

Точно так же из теоремы о горизонте планирования следует, что поскольку $k_5 = 4$, программа, полученная при рассмотрении периодов 1-го, 2-го, 3-го, 4-го в качестве отдельного планового периода, всегда будет оптимальной. Начиная с вычисления k_6 можно брать минимум по суммам $f_k + c_{kn}$ при $k \geqslant 4$.

Правильная процедура построения оптимальной программы состоит в выделении периодов 1-го и 2-го, а также 3-го и 4-го в качестве отдельных подзадач. При удлинении планового периода, вне зависимости от спроса, при $t \geqslant 5$ оптимальные значения x_1, x_2, x_3, x_4 не меняются.

9.3. Задача планирования продаж

Постановка задачи. Пастух в начале горизонта планирования, состоящего из T периодов, имеет отару, состоящую из s_1 овец. В начале каждого периода он может продать часть или всех своих овец. Оставшаяся часть стада удваивается к концу периода. Предположим, что спот-цена[1] овцы в период t равна p_t и что пастух продает овец со скидкой (множителем дисконтирования), равной β.

Определим оптимальную политику продаж для пастуха, используя обратные рекуррентные соотношения.

Решение. Пусть x_t — количество оставленных к периоду $t + 1$ овец; y_t — количество овец, проданных в t-м периоде; z_t — количество имеющихся к началу периода t овец; $z_t = x_t + y_t$, $z_t = 2x_t - 1$; $f(z_t)$ — максимальная прибыль, получаемая в периодах $t, t + 1, ..., T$; $g_t(x_t)$ — максимальная прибыль, получаемая в периодах $1, 2, ..., t$.

Алгоритм прямой прогонки следующий.

$x_1 = s_1$;

$$g_1(x_1) = \max_{y_1 = 2s_1 - x_1} \{\beta p_1 y_1\};$$

$$g_t(x_t) = \max_{y_t = 2^t s_1 - x_t} \left\{p_t y_t \beta^t + g_{t-1}\left(\frac{y_t + x_t}{2}\right)\right\}, t = 2, 3, ..., T, \ \frac{x_t + y_t}{2} \text{ — целое.}$$

В замене $x_{t-1} = \dfrac{x_t + y_t}{2}$ подразумевается целочисленность правой части. В случае прямой прогонки значения y_t и x_t, связанные неравенством

[1] Спот-цена — цена при сделке, когда поставка товара и его оплата производятся немедленно.

$y_t \leqslant 2^t s_1 - x_t$, должны дополнительно удовлетворять условию целочисленности их полусуммы, что создает трудности вычислительного характера.

Алгоритм обратной прогонки следующий.

$f_t(z_t) = \max\limits_{y_t \geqslant z_t \geqslant 2^t s_1} \{\beta^t p_t y_t + f_{t+1}[2(z_t - y_t)]\}, j = 1, 2, ..., T-1;$

$f_T(z_T) = \max\limits_{y_T \geqslant z_T \geqslant 2^T s_1} \{\beta^T p_T y_T\}.$

Имеем:

$$f_T(z_T) = \beta^T p_T z_T.$$

$$\begin{aligned} f_{T-1}(z_{T-1}) &= \max_{y_{T-1} \leqslant z_{T-1}} \{\beta^{T-1} p_{T-1} y_{T-1} + f_T[2(z_{T-1} - y_{T-1})]\} = \\ &= \max_{y_{T-1} \leqslant z_{T-1}} \{\beta^{T-1} p_{T-1} y_{T-1} + \beta^T 2 p_T (z_{T-1} - y_{T-1})\} = \\ &= \max_{y_{T-1} \leqslant z_{T-1}} \{2 p_T z_{T-1} \beta^T + (p_{T-1}\beta^{T-1} - 2 p_T \beta^T) y_{T-1}\} = \\ &= \begin{cases} p_{T-1}\beta^{T-1} z_{T-1}, \text{если } p_{T-1} > 2 p_T \beta, \\ 2 p_T z_{T-1} \beta^T, \text{ если } p_{T-1} < 2 p_T \beta; \end{cases} \\ f_{T-2}(z_{T-2}) &= \max_{y_{T-2} \leqslant z_{T-2}} \{\beta^{T-2} p_{T-2} y_{T-2} + 2 p_T 2(z_{T-2} - y_{T-2})\beta^T\} = \\ &= \max_{y_{T-2} \leqslant z_{T-2}} \{4 p_T \beta^T z_{T-2} + (\beta^{T-2} p_{T-2} - 4 p_T \beta^T) y_{T-2}\} = \\ &= \begin{cases} \beta^{T-2} p_{T-1} z_{T-2}, \text{если } p_{T-2} > 4 p_T \beta^2, \\ 4 p_T z_{T-2} \beta^T, \text{ если } p_{T-2} < 4 p_T \beta^2. \end{cases} \end{aligned}$$

И т.д. Ясно, что если в период $T - k$ оказалось, что $\dfrac{p_{T-k}}{p_T} < 2^k\beta^k$, то всех овец надо оставить, а если $\dfrac{p_{T-k}}{p_T} > 2^k\beta^k$, то в периоде $T - k$ все стадо следует продать. В случае $\dfrac{p_{T-k}}{p_T} = 2^k\beta^k$ в данном периоде можно продать любую часть стада.

9.4. Примеры использования теории массового обслуживания[1]

9.4.1. Основные понятия теории массового обслуживания

Основы теории массового обслуживания были заложены трудами датского ученого А. К. Эрланга (1878—1929) в области проектирования телефонных станций. Чтобы описать систему массового обслуживания, нужно задать следующие компоненты: входной поток требований и механизм обслуживания.

Частота наступления событий входного потока подчинена закону Пуассона, т.е. вероятность того, что за время t поступит n требований на обслуживание, равна

---

[1] Для подробного знакомства с теорией массового обслуживания предлагаем учебники Х. Тахи (указ. соч.), Г. Вагнера (указ соч.), см. также: *Фомин Г. П.* Системы и модели массового обслуживания в коммерческой деятельности. М. : Финансы и статистика, 2000.

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

(положив t равным единице и заметив, что математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону Пуассона с параметром λ, равно λ, мы можем сделать вывод, что λ — не что иное, как среднее количество заявок на обслуживание, поступающих в систему массового обслуживания в единицу времени, т.е. *частота* поступления заявок). Пусть T — интервал времени, прошедшего после поступления последней заявки на обслуживание. Параметр λ называется *интенсивностью* входного потока. Тогда $P_0(T)$ — вероятность того, что в течение времени T не пришло ни одной заявки, или что время t, прошедшее после поступления последней из наблюдавшихся заявок, не меньше T. Пусть $f(t)$ есть плотность вероятности того, что длина интервала между двумя последовательными поступлениями заявок в систему равняется t ($t \geqslant 0$), а $F(t)$ — функция распределения t. Имеем

$$1 - F(t) = \int_T^{+\infty} f(t)dt = P_0(t) = e^{-\lambda t},$$

т.е. интервалы времени между последовательными поступлениями заявок в систему распределены экспоненциально с параметром λ. Таким образом, математическое ожидание случайной величины T равняется $M(T) = 1/\lambda$ (ед. времени).

Стохастические процессы такого рода, когда требования на обслуживание лишь поступают в систему, называются процессами *чистого рождения*. Процесс на выходе системы массового обслуживания рассматривается в предположении, что данная система начинает функционировать при наличии в ней N клиентов, которые после завершения их обслуживания выбывают из системы, также повинуясь пуассоновскому закону, с интенсивностью μ. Процессы такого рода называют процессами *чистой гибели*. Процессы чистого рождения наблюдаются, например, в родильных домах, к процессам чистой гибели относится, например, процесс изъятия товаров со склада.

Рассмотрим системы массового обслуживания, в которых имеются как входной поток, так и поток обслуженных клиентов. Неустановившийся (переходный) режим функционирования системы массового обслуживания имеет место тогда, когда поведение системы продолжает оставаться функцией времени. Процессы чистого рождения и чистой гибели всегда относятся к категории неустановившихся стохастических процессов. В системах массового обслуживания, в которых, с одной стороны, происходит поступление заявок на обслуживание, а с другой — обслуженные клиенты выбывают из системы, в начальный период функционирования наблюдается неустановившийся режим, а по истечении достаточно большого интервала времени достигается стационарный режим, когда поведение системы уже не зависит от времени, если интенсивность поступления требований λ меньше интенсивности выходного потока μ.

При выполнении условий стационарности нас будут интересовать следующие характеристики системы массового обслуживания:

p_n — вероятность того, что в системе находится n заявок на обслуживание;

L_s — среднее число находящихся в системе клиентов (заявок на обслуживание);

L_q — среднее число клиентов в очереди на обслуживание;

W_s — средняя продолжительность пребывания клиента в системе;

W_q — средняя продолжительность пребывания клиента в очереди.

Выведем уравнения А. Н. Колмогорова для числа заявок, находящихся в момент времени t в системе массового обслуживания. Мы исходим из того, что для достаточно малого значения длительности временнóго промежутка h вероятность реализации в данном интервале одновременно двух и более событий можно положить равной нулю. Заметим, что для достаточно малого, но не равного нулю промежутка времени h имеют место следующие приближенные соотношения:

• вероятность того, что число поступлений заявок в интервале h равно нулю, $e^{-\lambda h} \approx 1 - \lambda h$;

• вероятность того, что в интервале h произошло одно поступление заявки, $1 - e^{-\lambda h} \approx \lambda h$;

• вероятность того, что число выбытий в интервале h равно нулю, $e^{-\mu h} \approx \approx 1 - \mu h$;

• вероятность того, что в интервале h произошло одно выбытие, $1 - e^{-\mu h} \approx \approx \mu h$.

Итак, вероятность нахождения в системе массового обслуживания n требований в момент времени $t + h$ (обозначим эту вероятность через $P_n(t + h)$) складывается из следующих вероятностей:

1) вероятность того, что в конце временнóго интервала t в системе находилось n требований, а в течение интервала h не произошло ни поступлений, ни выбытий;

2) вероятность того, что в конце временнóго интервала t в системе находилось $n - 1$ требование, а в течение интервала h произошло одно поступление, но не произошло выбытий;

3) вероятность того, что в конце временнóго интервала t в системе находилось $n + 1$ требование, а в течение интервала h не произошло ни одного поступления, но произошло одно выбытие.

Таким образом, имеем уравнение

$$P_n(t + h) = P_n(t)(1 - \lambda h)(1 - \mu h) +$$
$$+ P_{n-1}(t)(\lambda h)(1 - \mu h) + P_{n+1}(t)(1 - \lambda h)(\mu h).$$

Для $n = 0$ вероятность того, что в интервале h не произойдет ни одного выбытия, естественно, равна единице. Следовательно,

$$P_0(t + h) = P_0(t)(1 - \lambda h)1 + P_1(t)(1 - \lambda h)(\mu h).$$

Перенесем теперь P_n (соответственно, P_0) в левую часть, разделим левую и правую части полученных в результате уравнений на величину h и перейдем к пределу при $h \to 0$. Получим следующие дифференциальные уравнения А. Н. Колмогорова:

$$\begin{cases} P_n'(t) = \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) - (\lambda + \mu)P_n(t) \text{ при } n > 0, \\ P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \text{ при } n = 0. \end{cases}$$

Можно доказать, что стационарное решение существует при $t \to \infty$, если $\lambda < \mu$. В предположении, что условие $\lambda < \mu$ действительно выполняется, получаем

$$\begin{cases} \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} - (\lambda + \mu)P_n = 0 \text{ при } n > 0, \\ -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \text{ при } n = 0. \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n, \; n = 0, 1, 2, ...,$$

где величина $\rho = \lambda/\mu < 1$ носит название *траффик-эффективности.*

Выражение для L_s получается теперь путем элементарных преобразований:

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n = (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Между L_s и W_s, как и между L_q и W_q, существует строгая взаимосвязь:

$$L_s = \lambda W_s, \;\; L_q = \lambda W_q.$$

Если средняя скорость обслуживания равняется μ и, следовательно, средняя продолжительность обслуживания равняется $1/\mu$, то справедливо соотношение

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

Умножая обе части этого соотношения на λ, получаем

$$L_s = L_q + \rho.$$

Таким образом, получаем

$$L_q = L_s - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho},$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}, \;\; W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}.$$

9.4.2. Статистическая модель оборачиваемости

Предположим, что в начале отчетного периода внеоборотные средства предприятия равнялись величине $ВОА_0$ и в течение рассматриваемого периода не менялись, дебиторская задолженность в начале периода составляла $ДЗ_0$ и также не изменялась, а денежные средства в начале периода составляли $ДС_0$. Собственный капитал предприятия в начале отчетного периода составлял $СК_0$, а долгосрочный долг — $ДД_0$, который в течение периода не менялся. Товары поступают на счет равными партиями ценой a со средней интенсивностью λ, т.е. в среднем λ поступлений в единицу времени, и могут быть реализованы со средней интенсивностью μ точно такими же партиями в порядке *FIFO* (*first in — first out*, т.е. «первым пришел — первым ушел»), но по цене A ($A > a$). Следуя принятой в экономических исследованиях идеологии сравнительной статики, предположим, что $\mu > \lambda$, таким образом, рассматриваемая система находится в статистическом равновесии и стандартная система дифференциальных уравнений для определения закона распределения числа порций товаров на складе предприятия

$$\begin{cases} \dfrac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + \mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t), \\ \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \end{cases}$$

имеет очевидное установившееся решение $P_n = (1 - \rho)\rho^n$, где $\rho = \lambda/\mu$ — траффик-интенсивность. Математическое ожидание числа партий товара на складе тогда, очевидно, равняется

$$M(n) = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

Таким образом, среднее количество запасов на складе $\overline{З} = З_0 = a\dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}$.

Рассмотрим закон распределения времени пребывания одной партии товара на складе. Обозначим искомую функцию распределения $F(t)$. Если некоторая партия товара провела на складе время t, то вероятность того, что после ее реализации на складе осталось ровно n партий, совпадает с вероятностью поступления на склад ровно n партий за время t ее пребывания на данном счете, т.е. с величиной $e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$, так как применяется дисциплина *FIFO*. Вероятность же того, что данная партия была реализована в момент времени t от ее поступления на счет, равняется $f(t)dt$, где dt — малый промежуток времени, $f(t) = F'(t)$ — плотность распределения времени нахождения одной партии товара на складе. Таким образом, вероятность того, что в момент t от своего поступления на склад данная партия товара была реализована и за время ее пребывания на данном счете на него поступило еще n новых партий товара, равняется

$$e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}f(t)dt.$$

Интегрированием по возможному времени пребывания партии товара на складе находим вероятность P_n того, что после ее реализации на складе осталось ровно n партий:

$$P_n = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}f(t)dt.$$

Найдем производящую функцию[1] $P(s)$ для распределения P_n:

$$P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \rho)\rho^n s^n = \frac{1 - \rho}{1 - \rho s}.$$

---

[1] О производящих функциях см., например: Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк [и др.]. М. : Наука, 1985.

Поэтому

$$\frac{1-\rho}{1-\rho s} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda t)^n s^n}{n!} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{s\lambda t} f(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t(1-s)} f(t)dt = L[f](\lambda(1-s)).$$

Здесь $L[f]$ — изображение по Лапласу функции $f(t)$.

Обозначим $\lambda(1 - s) = u$. Тогда $s = \frac{\lambda - u}{\lambda}$. Таким образом,

$$L[f](u) = \frac{1-\rho}{1-\frac{\lambda-u}{\lambda}\rho} = \frac{\mu-\lambda}{u+(\mu-\lambda)}.$$

Поэтому

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{\mu-\lambda}{u+(\mu-\lambda)}\right\} = (\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}$$

и, следовательно, $F(t) = 1 - e^{(\mu-\lambda)t}$. Тогда математическое ожидание времени пребывания партии товара на складе равняется $\frac{1}{\mu-\lambda}$, а математическое ожидание величины процентов, начисленных за время пребывания порции товара на данном счете, при условии их непрерывного начисления с силой роста r на единицу долга составит

$$\int_0^\infty (\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}e^{rt}dt - 1 = \frac{\mu-\lambda}{r-(\mu-\lambda)} e^{r-(\mu-\lambda)t}\Big|_0^\infty - 1 =$$

$$= \frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda-r} - 1 = \frac{r}{\mu-\lambda-r},$$

откуда, в частности, следует, что необходимо предположить $r < \mu - \lambda$.

Таким образом, ожидаемая величина краткосрочной кредиторской задолженности $\overline{\text{КД}} = \text{КД}_0 = \frac{\lambda a}{\mu-\lambda-r}$, так же как и в начале отчетного года (используется вариант отражения в учете процентов по мере их начисления). Считаем, что $\mu > \lambda$, $r < \mu - \lambda$, $A > a$. Ожидаемая величина доходов за период времени T, очевидно, составит λTA, ожидаемая величина расходов за тот же период равна

$$\lambda Ta \frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda-r},$$

ожидаемая величина прибыли за рассматриваемый промежуток времени

$$\lambda T\left(A - \frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda-r}a\right).$$

Построенная модель обладает следующим замечательным свойством: если мы будем изменять оборачиваемость, меняя параметры μ и λ на одинаковую процентную величину, т.е. не изменяя величину траффик-эффективности, то останемся в том же самом состоянии статистического равновесия и с той же самой величиной среднеожидаемого остатка на складе. Положим $T = 360$ и определим коэффициенты покрытия и левериджа на конец отчетного периода, а также рентабельность собственного капитала за рассматриваемый период.

Ожидаемая величина коэффициента покрытия на конец отчетного года составляет

$$K_{\text{тл}} = \frac{\text{ДС}_0 + \text{ДЗ}_0 + a\dfrac{\lambda}{\mu-\lambda} + \lambda T\left(A - \dfrac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda-r}\right)}{\dfrac{\lambda a}{\mu-\lambda-r}}.$$

Ожидаемое значение коэффициента соотношения собственных и заемных средств на конец отчетного года

$$K_{\text{л}} = \frac{\text{СК}_0 + \lambda T\left(A - \dfrac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda-r}a\right)}{\text{ДД}_0 + a\dfrac{\lambda}{\mu-\lambda-r}}.$$

Ожидаемое значение рентабельности собственного капитала за отчетный год

$$R = \frac{\lambda T\left(A - \dfrac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda-r}a\right)}{\text{СК}_0}.$$

В то же время ожидаемое значение коэффициента оборачиваемости за рассматриваемый период

$$K_{\text{об}} = \frac{\lambda T A}{a\dfrac{\lambda}{\mu-\lambda}} = \frac{A}{a}(\mu-\lambda)T.$$

Для удобства рассмотрения введем следующие коэффициенты:

$$\alpha = \frac{a}{A}\frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda-r},\ \ \beta = \frac{1}{a}\frac{\mu-\lambda-r}{\lambda}.$$

Условимся считать, что в рассматриваемой модели коэффициент оборачиваемости меняется только в результате одновременного изменения интенсивностей λ и μ на одинаковую процентную величину; при этом влиянием величины r будем пренебрегать, считая его малым, если коммерческий кредит вообще применяется. Таким образом, $\alpha(K_{\text{об}}) = \text{const}$, $\beta(K_{\text{об}}) = \text{const}$.

С учетом сделанных допущений выражения для коэффициентов покрытия, левериджа и рентабельности принимают следующий простой вид:

$$K_{\text{тл}} = 1 + \beta(\text{ДС}_0 + \text{ДЗ}_0) + (1-\alpha)K_{\text{об}};$$

$$K_{\text{л}} = \frac{\beta\text{СК}_0 + (1-\alpha)K_{\text{об}}}{1 + \beta\text{ДД}_0};\ \ R = \frac{(1-\alpha)K_{\text{об}}}{\beta\text{СК}_0}.$$

Логарифмирование данных выражений дает:

$$\ln(K_{\text{тл}}) = \ln[1 + \beta(\text{ДС}_0 + \text{ДЗ}_0) + (1 - \alpha)\exp(\ln(K_{\text{об}}))];$$
$$\ln(K_{\text{л}}) = \ln[\beta\text{СК}_0 + (1 - \alpha)\exp(\ln(K_{\text{об}}))] - \ln(1 + \beta\text{ДД}_0);$$
$$\ln(R) = \ln(K_{\text{об}}) + \ln(1 - \alpha) - \ln(\beta\text{СК}_0).$$

Из приведенных формул непосредственно ясно, что выражения для эластичностей коэффициента текущей ликвидности, коэффициента соотношения собственных и заемных средств и коэффициента рентабельности собственного капитала по коэффициенту оборачиваемости равны соответственно

$$E_{\text{т лоб}} = \frac{(1 - \alpha)K_{\text{об}}}{1 + \beta(\text{ДС}_0 + \text{ДЗ}_0) + (1 - \alpha)K_{\text{об}}};$$

$$E_{\text{л об}} = \frac{(1 - \alpha)K_{\text{об}}}{\beta\text{СК}_0 + (1 - \alpha)K_{\text{об}}}; \; E_{R\text{об}} = 1.$$

Пример 9.1 (числовой пример). Пусть товары поступают на склад со средней интенсивностью $\lambda = 4{,}5$ партии в неделю и реализуются со средней интенсивностью $\mu = 5$ партий в неделю. Каждая партия состоит из 20 бутылок домашнего вина, розлитого в бутылки из-под кагора № 32 одного из совхозов Анапы, причем покупная цена каждой бутылки равняется 200 руб. Фирма продает данные бутылки магазинам розничной торговли ровно такими же партиями по 20 шт. по цене реализации 400 руб. за бутылку.

Допустим, что в течение года на склад (счет 41.01) поступало количество партий бутылок по неделям, отраженное во втором столбце табл. 8.1. В третьем столбце табл. 8.1 указаны возможности реализации данных партий (также по неделям), а в четвертом столбце указана их фактическая реализация с учетом фактически имевшегося количества. В пятом столбце приведены остатки партий на счете (также по неделям). В начале года на счете было девять партий.

Таблица 8.1

Деятельность фирмы в течение года				
Номер недели	Поступление	Возможность реализации	Реализация	Остаток на счете 41
0	—	—	—	9
1	7	5	5	11
2	8	6	6	13
3	5	4	4	14
4	4	7	7	11
5	2	3	3	10
6	3	4	4	9
7	6	8	8	7
8	5	7	7	5
9	10	5	5	10
10	8	4	4	14
11	2	4	4	12
12	4	5	5	11
13	3	4	4	10

Деятельность фирмы в течение года				
Номер недели	Поступление	Возможность реализации	Реализация	Остаток на счете 41
14	4	6	6	8
15	5	5	5	8
16	3	6	6	5
17	5	5	5	5
18	6	4	4	7
19	9	8	8	8
20	5	2	2	11
21	3	5	5	9
22	3	10	10	2
23	1	9	3	0
24	2	8	2	0
25	1	8	1	0
26	1	7	1	0
27	6	6	6	0
28	2	3	2	0
29	4	4	4	0
30	3	1	1	2
31	6	2	2	6
32	2	3	3	5
33	8	1	1	12
34	6	6	6	12
35	7	6	6	13
36	3	7	7	9
37	6	6	6	9
38	3	5	5	7
39	5	5	5	7
40	5	1	1	11
41	4	5	5	10
42	5	2	2	13
43	4	3	3	14
44	5	5	5	14
45	7	4	4	17
46	5	4	4	18
47	4	5	5	17
48	6	5	5	18
49	3	6	6	15
50	2	2	2	15
51	4	4	4	15
52	4	10	10	9

С помощью критерия χ^2 легко проверяется, что как поступление, так и реализация партий бутылок происходят в соответствии с распределением Пуассона, причем средняя интенсивность поступления бутылок составляет 4,5 партии в неделю, а средняя интенсивность реализации — 5 партий в неделю. Предполагая, что фирма находится в состоянии статистического равновесия, определим ожидаемые значения всех рассмотренных показателей. В рассматриваемом примере $a = 4000$, $A = 8000$, $T = 52$. Средняя величина запасов на счете 41 равняется $\overline{З} = 9$ партий = 36 000 руб., и такую же величину составляет средняя кредиторская задолженность. Каждая порция товаров пребывает на счете в среднем две недели, ожидаемая величина расходов за год составляет $4{,}5 \cdot 52 \cdot 4000 =$ $= 936\,000$ руб., ожидаемая величина доходов — $4{,}5 \cdot 52 \cdot 8000 = 1\,872\,000$ руб., и ожидаемая прибыль составит 936 000 руб.

Коэффициент оборачиваемости в нашем примере $K_{об} = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 52 = 52$.

Коэффициенты α и β равны соответственно

$$\alpha = 0{,}5;\ \beta = \frac{1}{4000} \cdot \frac{0{,}5}{0{,}5} = 0{,}00002777.$$

Предположим, что денежные средства данной фирмы на начало года составляли 50 000 руб. и дебиторская задолженность равнялась также 50 000 руб. Ожидаемый коэффициент текущей ликвидности в конце года

$$K_{тл} = \frac{100\,000 + 36\,000 + 936\,000}{36\,000} = 27{,}778.$$

Предположим, что величина собственного капитала фирмы в начале года равнялась 100 000 руб., а величина долгосрочного долга составляет 50 000 руб. Тогда ожидаемый на конец года коэффициент левериджа

$$K_{л} = \frac{100\,000 + 936\,000}{50\,000 + 36\,000} = 12{,}05.$$

Ожидаемое значение величины рентабельности собственного капитала за данный год

$$R = \frac{936\,000}{100\,000} = 9{,}36.$$

Тогда эластичности данных показателей по оборачиваемости равны

$$E_{т\,лоб} = \frac{26}{29{,}777} = 0{,}873;\ E_{лоб} = \frac{26}{28{,}777} = 0{,}9035;\ E_{Rоб} = 1.$$

Пусть теперь величины λ и μ изменились на 10% своего значения так, что и $K_{об}$ изменился на 10%, став равным $52 \cdot 1{,}1 = 57{,}2$. Посмотрим, как изменятся тогда величины анализируемых показателей. Как ясно из выражений для ожидаемой величины запасов и кредиторской задолженности, ни средняя величина запасов, ни средняя величина задолженности от этого не изменятся, изменится только ожидаемый финансовый результат, причем ровно на те же 10% своей величины, став равным $936\,000 \cdot 1{,}1 = 1\,029\,600$ руб. Поэтому значения анализируемых показателей станут равными

$$K_{тл} = \frac{100\,000 + 36\,000 + 1\,029\,000}{36\,000} = 32{,}378 \text{ (увеличение на 8,73\%)};$$

$$K_{л} = \frac{100\,000 + 1\,029\,000}{50\,000 + 36\,000} = 13{,}135 \text{ (увеличение на 9,036\%)};$$

$$R = \frac{1\,029\,000}{100\,000} = 10{,}296 \text{ (увеличение на 10\%)}.$$

Выводы. Рассмотрим период, в течение которого происходит переход из одного состояния статистического равновесия в другое в результате непропорционального изменения величин λ и μ. Поскольку этот переход всегда можно свести к пропорциональному изменению λ и μ и к изменению λ до некоторой величины λ_1 (большей или меньшей λ) при неизменном μ, получим, что оборачиваемость в течение этого периода изменяется от величины $\frac{A}{a}(\mu - \lambda)T$ до величины $\frac{A}{a}(\mu - \lambda_1)T$ на модельном уровне, или от $\frac{\text{Р}}{C_0}$ до $\frac{\text{П}}{C_к}$ в терминах реального учета. Здесь П и Р — соответственно величина поступления и величина реализации товаров за отчетный период, а C_0 и $C_к$ — соответственно, начальное и конечное сальдо счета 41. Какая из двух указанных величин представляет собой левую, а какая — правую границу интервала изменения оборачиваемости за рассматриваемый переходный период, определяется соотношением величин λ и λ_1.

Пусть, например конечное сальдо $C_к$ счета 41, больше начального сальдо C_0 на величину ΔC. Это означает, что величина поступления за отчетный период превосходит величину реализации на ΔC. Считая, что в период, предшествовавший отчетному, предприятие находилось в состоянии статистического равновесия с параметрами λ и μ, а в период, следующий за отчетным, будет находиться в состоянии статистического равновесия с параметрами λ_1 и μ, где $\lambda_1 > \lambda$, получим, что C_0 — это есть ожидаемая величина запасов в старом состоянии статистического равновесия, т.е. в том, в котором предприятие находилось в период, предшествовавший отчетному, в то время как $C_к$ — это есть ожидаемая величина запасов в новом состоянии статистического равновесия, т.е. в том, в котором оно окажется в период, следующий за отчетным. Следовательно, имеем

$$C_0 = \frac{a\lambda}{\mu - \lambda} \text{ и } C_к = \frac{a\lambda_1}{\mu - \lambda_1}.$$

Поскольку в состоянии статистического равновесия ожидаемая величина поступления товаров на склад в течение периода равна ожидаемой величине реализации, то ожидаемая величина поступления товаров в старом состоянии равновесия равна λTA, где параметр λ оцениваем как $\text{Р}/TA$, а ожидаемая величина поступления товаров в новом состоянии равновесия равна, в свою очередь, $\lambda_1 TA$, где параметр λ_1 оцениваем как $\text{Р}/TA$.

Рассматривая отчетный период как переходный между двумя состояниями статистического равновесия, утверждаем, что в указанных предположениях (относительно пребывания системы в статистическом равновесии до и после отчетного периода) величина оборачиваемости за отчетный период уменьшается от величины $\frac{A}{a}(\mu - \lambda)T$, равной $\frac{\text{Р}}{C_0}$, до величины $\frac{A}{a}(\mu - \lambda_1)T$, равной $\frac{\text{П}}{C_к}$, и поэтому единственное, что можно сказать об оборачиваемости товаров в рассматриваемый период, — это что ее величина лежит в интервале $\left[\frac{\text{П}}{C_к}; \frac{\text{Р}}{C_0}\right]$. Таким образом, по крайней мере в рамках рассматриваемой модели с ее, быть может, слишком ограничительными предположениями, полностью подтверждается точка зрения А. П. Рудановского[1].

Если же, наоборот, конечное сальдо счета 41 меньше начального сальдо и, следовательно, величина реализации за отчетный период больше величины поступления на некоторую величину ΔC, то полностью аналогично предыдущему случаю получим, что за рассматриваемый отчетный период величина оборачиваемости увеличится от величины $\frac{A}{a}(\mu - \lambda)T$, равной $\frac{\text{Р}}{C_0}$, до величины $\frac{A}{a}(\mu - \lambda_1)T$, равной $\frac{\text{П}}{C_\text{к}}$; в этом случае $\lambda_1 < \lambda$. Таким образом, единственное, что можно сказать о величине оборачиваемости товаров в рассматриваемом периоде, — это то, что она лежит в интервале $\left[\frac{\text{Р}}{C_0}; \frac{\text{П}}{C_\text{к}}\right]$.

Вернемся к рассматриваемому примеру. Пусть $C_0 = 500$, П = 2000, Р = = 1000, $C_\text{к} = 1500$ и пусть отчетный период состоит из 50 недель. Следуя нашему подходу, получим, что величина оборачиваемости товаров в отчетном периоде лежит в интервале $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$. В данном примере приходится предположить, что в течение рассматриваемого периода сначала параметры λ и μ пропорционально увеличились от своих исходных значений 2 и 2,04 (которые легко находим исходя из значений C_0 и П: $\lambda = \frac{1000}{500} = 2$; следовательно, $50 = \frac{2}{\mu - 2}$; поэтому $\mu = 2{,}04$) до значений $\lambda' = 3{,}9477122$ и $\mu' = 4{,}0266667$ соответственно, а потом значение параметра λ уменьшилось до величины $\lambda_1 = 4$, что не повлияло на конечный результат. Конечные значения λ_1 и μ_1 находим исходя из значений Р и $C_\text{к}$: $\lambda_1 = \frac{2000}{500} = 4$; тогда $150 = \frac{4}{\mu_1 - 4}$; откуда получим $\mu_1 = 4{,}0266667$. После этого, положив $\mu' = \mu_1$, находим пропорциональное ему промежуточное значение $\lambda' = \frac{4{,}0266667}{2{,}04} \cdot 2 = 3{,}9477122$. Теперь можно получить границы интервала оборачиваемости непосредственно из параметров модели: $(\mu - \lambda)T = (2{,}04 - 2) \cdot 50 = 2$; $(\mu_1 - \lambda_1)T = (4{,}0266667 - 4) \cdot 50 = = 1{,}3333333$.

Очевидно, что результаты не зависят от порядка изменения параметров.

9.4.3. Модель работы торгового предприятия

Нас интересует влияние оборачиваемости в переговорах по купле-продаже компании на переговорную силу той и другой сторон. Мы хотим привести микрооснования для используемых в опционном подходе статисти-

[1] Замечательный русский ученый, теоретик бухгалтерского учета Анатолий Павлович Рудановский (1863—1934) утверждал, что истинное значение величины оборачиваемости лежит в промежутке $\left[\frac{\text{Р}}{C_0}; \frac{\text{П}}{C_\text{к}}\right]$ или $\left[\frac{\text{П}}{C_\text{к}}; \frac{\text{Р}}{C_0}\right]$ (см.: *Рудановский А. П.* Общая теория учета и оценка Московского городского счетоводства с точки рения счетной теории и счетной практики в их современном развитии. М., 1912).

ческих параметров компании или проекта — темпа роста α и волатильности σ ее стоимости и параметра, характеризующего альтернативные издержки δ отказа от владения компанией или проектом, обычно рассматриваемые как параметр потока дивидендов.

Строится статистическая модель работы предприятия торговли, которая является развитием модели из подпараграфа 9.4.2. Товары поступают на счет равными партиями ценой a со средней интенсивностью λ, т.е. в среднем λ поступлений в единицу времени, и могут быть реализованы со средней интенсивностью μ точно такими же партиями в порядке *FIFO*, но по цене A ($A > a$). Погашение дебиторской задолженности осуществляется со средней интенсивностью $\nu_д$, а оплата кредиторской задолженности — со средней интенсивностью $\nu_к$. Следуя принятой в экономических исследованиях идеологии сравнительной статики, предположим, что $\mu > \lambda$, $\nu_д > \lambda$ и $\nu_к > \lambda$. Таким образом, рассматриваемая система находится в статистическом равновесии и система уравнений Колмогорова в нашем случае (для определения закона распределения числа партий товаров на счете 41):

$$\begin{cases} \dfrac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda+\mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t), \\ \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \end{cases} \tag{9.1}$$

имеет очевидное установившееся решение $P_n = (1-\rho)\rho^n$, где $\rho = \lambda/\mu$ — траффик-интенсивность. Математическое ожидание числа партий товара на складе тогда равняется $M(n) = \dfrac{\rho}{1-\rho} = \dfrac{\lambda}{\mu-\lambda}$. Таким образом, среднее количество запасов на счете 41 $\overline{З} = З_0 = a\dfrac{\lambda}{\mu-\lambda}$.

Используя установившееся решение системы (9.1), выпишем уравнения Колмогорова для нахождения закона распределения числа партий товара, отгруженных за время t:

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_n(t)}{dt} = \lambda Q_{n-1}(t) - \lambda Q_n(t), \\ \dfrac{dQ_0(t)}{dt} = -\lambda Q_0(t). \end{cases} \tag{9.2}$$

Решение системы (9.2) имеет вид $Q_n = \dfrac{1}{n!}(\lambda t)^n e^{-\lambda t}$. Таким образом, математическое ожидание и дисперсия числа партий товара, отгруженных за время t, так же как и математическое ожидание и дисперсия числа партий, поступивших на склад за время t, равны λt. Период оборачиваемости запасов, очевидно, равен $T_з = \dfrac{1}{\mu-\lambda}$, а коэффициент оборачиваемости запасов $K_{об}(З) = (\mu-\lambda)$, где t — продолжительность отчетного периода.

Аналогично средней величине запасов на складе определяются средние величины дебиторской и кредиторской задолженностей, а также их периоды оборачиваемости и длительность операционного и финансового циклов:

$$\overline{\text{ДЗ}} = A\frac{\lambda}{\nu_{\text{д}} - \lambda},\ \overline{\text{КЗ}} = a\frac{\lambda}{\nu_{\text{л}} - \lambda},\ T_{\text{д}} = \frac{1}{\nu_{\text{д}} - \lambda},\ T_{\text{к}} = \frac{1}{\nu_{\text{к}} - \lambda},$$

$$K_{\text{об}}(\text{ДЗ}) = (\nu_{\text{д}} - \lambda)t,\ K_{\text{об}}(\text{КЗ}) = (\nu_{\text{к}} - \lambda)t,$$

$$T_{\text{оц}} = \frac{1}{\mu - \lambda} + \frac{1}{\nu_{\text{д}} - \lambda},\ T_{\text{фц}} = \frac{1}{\mu - \lambda} + \frac{1}{\nu_{\text{д}} - \lambda} - \frac{1}{\nu_{\text{к}} - \lambda}.$$

Предположим для простоты, что $\nu_{\text{д}} = \nu_{\text{к}} = \nu$, тогда целевые остатки на денежных счетах и коэффициент оборачиваемости денежных средств равны соответственно $\overline{\text{ДС}} = a\dfrac{1}{\mu - \lambda}$ и $K_{\text{об}}(\text{ДС}) = (\mu - \lambda)t$, где t — длина отчетного периода.

В подпараграфе 9.4.2 были определены закон распределения времени пребывания одной партии товара на складе, математическое ожидание времени пребывания партии товара на складе, ожидаемая величина процентов на единицу долга (начисленных за время пребывания партии товара на складе при условии их непрерывного начисления с темпом роста r) и ожидаемая величина процентов, начисленных за рассматриваемый период t. Проведя полностью аналогичные выкладки для рассматриваемой модели, получим, что ожидаемая величина процентов к уплате за время t составит $\lambda ta\dfrac{r}{\nu - \lambda - r}$, а процентов к получению $\lambda tA\dfrac{r}{\nu - \lambda - r}$, где r — темп роста непрерывно начисляемых процентов, причем $r < \nu - \lambda$.

Примем далее естественные предположения, что затраты фирмы на маркетинг в единицу времени пропорциональны с некоторым коэффициентом пропорциональности в средней интенсивности μ, с которой данная фирма может реализовывать свои товары, в то время как затраты на обслуживание склада в единицу времени пропорциональны ожидаемой величине запасов с некоторым коэффициентом пропорциональности γ. Постоянные затраты фирмы в единицу времени обозначим через F. Таким образом, ожидаемая величина прибыли за время t равна

$$\pi = \lambda t(A - a) - \lambda ta\frac{r}{\nu - \lambda - r} + \lambda tA\frac{r}{\nu - \lambda - r} - \beta ta\mu - \gamma ta\frac{\lambda}{\mu - \lambda} - Ft. \qquad (9.3)$$

Предположим, что некоторая часть, например 10% прибыли, выплачивается в виде дивидендов, а остальная часть, 90% прибыли, реинвестируется, увеличивая на эту величину стоимость компании. Расширение производства будем отражать увеличением a, A и F. Тогда равенство (9.3) останется справедливым лишь для первого года работы предприятия, в то время как прибыль любого года определяется уравнением

$$\frac{\pi}{V} = \lambda t\frac{A - a}{V_0} - \lambda t\frac{a}{V_0}\frac{r}{\nu - \lambda - r} + \lambda t\frac{A}{V_0}\frac{r}{\nu - \lambda - r} -$$

$$- \beta t\frac{a}{V_0}\mu - \gamma t\frac{a}{V_0}\frac{\lambda}{\mu - \lambda} - \frac{F}{V_0}t. \qquad (9.4)$$

где V — ценность фирмы; V_0 — начальное значение V. Обозначим рентабельность всего авансированного капитала в отчетном году через R_1. Если одна десятая часть заработанной в течение года прибыли была выплачена в виде дивидендов, остальная часть реинвестирована:

$$\alpha_1 = \frac{9}{10}R_1 = \frac{9}{10}\cdot\frac{\pi}{V}, \ \delta_1 = \frac{1}{10}R, \ \delta_1 = \frac{\alpha_1}{9},$$

то, переходя к непрерывному темпу роста стоимости компании и параметру непрерывного потока дивидендов, получим

$$\alpha = \ln(1+\alpha_1)^{-1} \text{ год}^{-1}, \ \delta = \frac{\alpha}{9} \text{ год}^{-1,}$$

что ничуть не противоречит предыдущим соотношениям, так как в этом случае величина дивидендов за год составит

$$divid = \int_0^1 \delta V dt = \int_0^1 \delta V_0 e^{\alpha t} dt = \frac{\delta}{\alpha}V_0(e^{\alpha}-1) = \frac{\delta}{\alpha}V_0\alpha_1 = \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{10}R_1V_0 = \delta_1 V_0 = \frac{\pi}{10}.$$

Изменение общей стоимости материальных активов компании в результате того, что она зарабатывает прибыль, при нашем микроописании происходит скачкообразно, хотя скачки мелкие и частые (вместе с тем даже изменение стоимости в течение только одного месяца уже хорошо аппроксимируется нормальным распределением). В то же время рыночную ценность компании, находящейся в более или менее стабильных условиях, принято описывать с помощью непрерывных стохастических процессов, чаще всего с помощью геометрического броуновского движения, если и добавляя пуассоновскую составляющую, то лишь для описания относительно редких, но значительных изменений. В нашей микромодели кроме колебаний цен и различия между рыночной и исторической стоимостями активов (от этого в стабильной экономической ситуации легко тем или иным способом абстрагироваться) не учтена еще самая существенная часть рыночной ценности компании — стоимость того, что вся сумма ее материальных активов работает как единое целое и приносит прибыль. По-видимому, именно это слагаемое ценности фирмы, называемое обычно *гудвиллом*, или деловой репутацией, и обеспечивает стохастическую непрерывность всего процесса изменения стоимости во времени.

Очевидно, что оценка предприятия как действующего, т.е. дисконтированная сумма всех будущих ожидаемых доходов, всегда должна совпадать с рыночной оценкой всех активов данного предприятия — «материальных (реальных и финансовых) и нематериальных, независимо от того, как они отражены (и отражены ли вообще, что касается нематериальных активов) в бухгалтерском балансе предприятия»[1]. Действительно, если V_t — стоимость предприятия в смысле рыночной оценки всех его активов, то

$$dV_t = \alpha V_t dt + \sigma V_t dw,$$

а $RV_t dt$ — увеличение богатства акционеров за короткий промежуток времени dt, складывающееся из увеличения стоимости предприятия (*capital gain*)

[1] *Валдайцев С. В.* Оценка бизнеса. Управление стоимостью предприятия. М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. С. 22.

$\alpha V_t dt$ и потока дивидендов $\delta V_t dt$ так, что $R = \alpha + \delta$, где R — рентабельность всего авансированного капитала, точнее говоря, непрерывный и притом статический аналог этой величины[1] в предположении, что предприятие обеспечивает требуемую акционерами с учетом риска ожидаемую доходность. Таким образом, если взвешенная стоимость капитала компании (*WACC*) в точности равна R, то стоимость предприятия как дисконтированная сумма ожидаемых доходов в момент t

$$PV_t = \int_t^{+\infty} \delta V_t e^{\alpha(\tau - t)} e^{-R(\tau - t)} d\tau = \frac{\delta V_t}{R - \alpha} = V_t.$$

Дискретный вариант рассмотрения, очевидно, еще проще:

$$PV_n = \frac{\delta_1 V_n (1 + \alpha_1)}{1 + R_1} + \frac{\delta_1 V_1 (1 + \alpha_1)^2}{(1 + R_1)^2} + \ldots = \frac{\delta_1 V_n (1 + R_1)}{\delta_1} = V_{n+1},$$

где через R_1 обозначен также статический параметр рентабельности.

В моделях из параграфов 7.6—7.8 под ценностью фирмы V понималась ее рыночная стоимость как действующего предприятия. В модели данного подпараграфа под V, очевидно, следует понимать только сумму рыночных стоимостей ее материальных активов, отраженных в балансе, которую, не строго следуя С. В. Валдайцеву, будем называть имущественной стоимостью компании, либо валюту баланса. Поскольку решено абстрагироваться от влияния инфляции и колебаний уровня цен, в данной модели не очень существенно, рассматривается ли статическая или динамическая структура баланса[2]. Но для этого случая чрезвычайно важно следующее обстоятельство. При использовании статического баланса в условиях эффективного рынка капитала оценка активов компании обязательно должна включать и гудвилл, т.е. строка «гудвилл» обязательно должна быть заполнена («оцененный гудвилл», иначе баланс не сойдется) и, таким образом, деловая репутация фирмы в любой момент оказывается определенной с помощью балансового метода. При использовании динамического баланса, напротив, строка «гудвилл» остается свободной, потому что в момент создания предприятия у него еще не могло быть никакой деловой репутации.

В данной модели в качестве единственного нематериального актива рассматривается деловая репутация, которая при использовании динамической структуры баланса не отражается в балансе действующего предприятия. В этом случае строка «деловая репутация организации» заполняется уже фирмой-покупателем и, кроме того, содержит гудвилл купленной фирмы, увеличенный на ту часть синергетического эффекта от слияния, которую получили собственники проданной фирмы (а если фирма-покупатель учитывает активы купленной фирмы по исторической стоимости, то увеличенную еще и на величину разности между рыночной и исторической стоимостями купленных активов). Однако аналитики работающей фирмы, которые легко могут оценить ее рыночную стоимость, могут также легко определить и стоимость деловой репутации фирмы.

---

[1] Иными словами, аналог понятия рентабельности для случая использования статического баланса в непрерывном варианте рассмотрения (см.: *Ковалев В. В.* Финансовый менеджмент: теория и практика. М. : Проспект, 2007).

[2] См.: *Ковалев В. В.* Указ. соч.

Будем предполагать известной величину отношения рыночной стоимости фирмы V к величине ее имущественной стоимости $\tilde{V}$ (либо к валюте баланса) на любом коротком промежутке времени и обозначать его т. Тогда параметры потока дивидендов и волатильности для рыночной и имущественной стоимостей, очевидно, связаны следующим образом: $\delta = \dfrac{\tilde{\delta}}{\varsigma}$, $\sigma = \tilde{\sigma}$. Тем самым, используя для оценки параметров микроэкономическую модель, которая работает с имущественной стоимостью компании, будем вводить, где это необходимо, корректирующий множитель ς.

Следующая очередная цель — оценить волатильность стоимости компании. Найдем дисперсию отношения прибыли за год к стоимости компании в начале года. В выражении (9.4) три последних слагаемых представляют собой условно-постоянные расходы и не зависят от конкретных значений наших случайных величин, а случайным изменением слагаемых, учитывающих проценты к уплате и проценты к получению, пренебрежем. Таким образом, получим: $D\left[\dfrac{\pi}{V}\right] = \lambda t\dfrac{(A-a)^2}{V_0^2}$. Однако нас интересует волатильность ценности фирмы при ее непрерывном описании. Поскольку не вся прибыль, а только ее доля $\upsilon = \dfrac{\alpha_1}{R}$ непрерывно реинвестируется, а ценность компании V в начале текущего периода известна и выносится из-под знака условного математического ожидания, имеем

$$\sigma(dV) = \sqrt{\lambda t}(A-a)\frac{V}{V_0}\upsilon\sqrt{dt}.$$

Данная микроэкономическая модель обладает следующим замечательным свойством: если будем изменять оборачиваемость запасов, меняя параметры μ и λ на одинаковую процентную величину, т.е. не изменяя величину траффик-эффективности $\rho = \lambda/\mu$, то останемся в том же самом состоянии статистического равновесия и с той же самой величиной среднеожидаемого остатка на складе. То же самое остается справедливым и для оборачиваемости дебиторской и кредиторской задолженностей, а также денежных средств. Это дает возможность воочию увидеть влияние величины оборачиваемости краткосрочных активов и пассивов как на все основные показатели деятельности предприятия, так и на участие данного предприятия в процессах слияния-поглощения. Проиллюстрируем это на конкретном примере.

Пример 9.2 (продолжение примера 9.1). Предполагая, что рассматриваемая фирма находится в состоянии статистического равновесия, мы определили ожидаемые значения всех интересующих нас величин. В рассматриваемом примере $a = 400$, $A = 800$, $t = 52$, $F = 63{,}2$. Средняя величина запасов на складе равняется $\overline{З}$ = 9 партий = 36 000 руб.; средняя величина кредиторской задолженности составляет $\overline{КЗ}$ = 18 партий = 72 000 руб.; средняя величина дебиторской задолженности $\overline{ДЗ}$ = 18 партий = 144 000 руб.; а целевой остаток денежных средств $\overline{ДС}$ = 36 000 руб. Коэффициенты оборачиваемости равны соответственно $K_{об}(З) = K_{об}(ДС) = 26$, $K_{об}(ДЗ) = K_{об}(КЗ) = 13$. Таким образом, оборотные активы нашей компании составляют ОА = 216 000 руб., а краткосрочный долг КД = 7200 руб. Предположим, что величина долгосрочного долга составляет ДД = 124 000 руб., стоимость собственного капитала в начале года равнялась

СК = 120 000 руб., а внеоборотных активов ВОА = 100 000 руб. Таким образом, стоимость компании на начало года составила V_0 = 316 000 руб. Коэффициенты текущей ликвидности и левериджа на начало года равны соответственно $K_{тл} = \frac{ОА}{КД} = 3$, $K_л = \frac{СК}{ЗК} = 61{,}22\%$. Предположим, что процентная ставка по краткосрочному долгу равна 0,3% в неделю с непрерывным начислением, т.е. 16,88% годовых, а платежами по долгосрочному долгу пренебрежем. Тогда ожидаемая в течение года величина процентов к уплате составит 11 368,4 руб., а процентов к получению — 22 736,75 руб. Величина расходов на маркетинг и рекламу, как нетрудно проверить, составит 20 800 руб., расходы на содержание и обслуживание склада — 18 720 руб., а постоянные затраты — 32 864 руб. Ожидаемый валовой доход равен 1 872 000 – 936 000 = 936 000 руб., а ожидаемая за год величина чистой прибыли — 874 990 руб. Таким образом, ожидаемая величина рентабельности всего авансированного капитала за отчетный год

$$R = \frac{874\,990}{316\,000} = 2{,}769.$$

Пусть к нашей фирме обратилась с дружественным предложением о слиянии-поглощении другая фирма. Оценим параметры, необходимые для определения величины порогового значения цены, ниже которого собственникам нашей фирмы нет смысла соглашаться на выкуп их акций другой фирмой. По-прежнему предполагая, что наша фирма выплачивает лишь десятую часть прибыли акционерам в виде дивидендов, получим

$$\alpha_1 = 0{,}9R = 2{,}492;\ \ \alpha = \ln(1 + \alpha_1) = 1{,}250;\ \ \upsilon = 0{,}9;$$

$$\delta = \frac{1}{9}\alpha = 0{,}139;\ \delta_1 = 0{,}1R = 0{,}2769;$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda t}\,\frac{A-a}{V_0}\upsilon = \sqrt{4{,}5\cdot 52}\cdot\frac{8000-4000}{316\,000}\cdot 0{,}9 = 0{,}174.$$

Допустим, что рыночная ценность нашей фирмы в начале отчетного года согласно данным аналитического отдела превосходит ее балансовую стоимость в $\varsigma = 1{,}2$ раза. Предположим также, что по оценкам экспертов для фирмы, производящей утварь, волатильность ценности проекта покупки нашей фирмы примерно равна волатильности ценности нашей фирмы, параметр альтернативных издержек неисполнения проекта покупки приблизительно равен параметру потока дивидендов нашей фирмы, а связь колебаний ценности проекта и ценности нашей фирмы оценена как очень слабая: $\rho = 0{,}1$, $\sigma_D = \sigma_B = \sigma$, $\delta_D = \delta_B = \delta$, таким образом уравнение (7.30) в этом случае примет простой вид

$$\beta_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\delta}{\sigma^2(1-\rho)\varsigma}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{0.139}{0{,}174^2\cdot 0{,}9\cdot 1{,}2}} = 2{,}63,$$

и, следовательно, величина «клина»

$$K = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} = \frac{2{,}63}{2{,}63 - 1} = 1{,}61,$$

т.е. собственникам нашей фирмы следует принять предложение о дружественном поглощении, если цена I, предлагаемая поглощающей компанией, превосходит рыночную стоимость нашей фирмы не менее чем в 1,61 раза, и отказаться — в противном случае. Точно так же поглощающей фирме имеет смысл купить нашу фирму, если чистая приведенная стоимость денежных потоков от этого поглощения превосходит цену сделки не менее чем в 1,61 раза, и отказаться от покупки в противном случае.

Предположим теперь, что ситуация в городе N, где работают обе рассматриваемые фирмы, немного изменилась, средние интенсивности прибытия товаров, продаж, погашения задолженностей увеличились примерно на 10% и стали соответственно: $\lambda' = 4{,}95$ нед.$^{-1}$, $\mu' = 5{,}5$ нед.$^{-1}$, $\nu' = 5{,}225$ нед.$^{-1}$, в результате чего также на 10% увеличились коэффициенты оборачиваемости запасов, дебиторской и кредиторской задолженностей и денежных средств, составив $K'_{об}$(З) = $= K'_{об}$(ДС) = 28,6, $K'_{об}$(ДЗ) = $K'_{об}$(КЗ) = 14,3. Ожидаемая величина валового дохода стала равна 2 059 200 – 1 029 600 = 1 029 600 руб.; ожидаемая величина процентов к уплате — 11 355,9 руб., ожидаемая величина процентов к получению — 22 711,8 руб.; расходы на маркетинг и рекламу составили 22 880 руб., на содержание и обслуживание склада — 18 720 руб., постоянные издержки — 32 864 руб. Таким образом, ожидаемая чистая прибыль стала 966 492 руб., величина рентабельности

$$R = \frac{966\,492}{316\,000} = 3{,}0585.$$

Совершенно естественно, что руководство фирмы в новых более благоприятных условиях будет выплачивать все ту же величину дивидендов, которая выплачивалась бы при обычной величине оборачиваемости краткосрочных активов и пассивов, а все увеличение прибыли будет реинвестировать. Получим $\delta_1 = 0{,}2769$; $\alpha_1 = R - \delta_1 = 3{,}0585 - 0{,}2769 = 2{,}7816$; $\upsilon = \dfrac{\alpha_1}{R} = \dfrac{2{,}7816}{3{,}0585} = 0{,}9095$; $\alpha = \ln(1 + \alpha_1) = 1{,}330$; $\delta = \alpha\dfrac{\delta_1}{\alpha_1} = 0{,}132$, следовательно,

$$\sigma = \sqrt{\lambda t}\,\frac{A-a}{V_0}\upsilon = \sqrt{4,.95 \cdot 52} \cdot \frac{400}{31\,600} \cdot 0{,}9095 = 0{,}1847.$$

Тогда

$$\beta_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\delta}{\sigma^2(1-\rho)\varsigma}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{0{,}132}{0{,}185^2 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}2}} = 2{,}46,$$

и поэтому величина порога стала равна $K' = \dfrac{2{,}46}{1{,}46} = 1{,}68$, т.е. она увеличилась на $\dfrac{K' - K}{K} = 0{,}043 = 4{,}3\%$. При этом величина премии, которую собственники нашей фирмы требуют от фирмы-покупательницы сверх рыночной стоимости своей фирмы, увеличилась с 61% ее стоимости до 68%, т.е. возросла на 11,5%. Иными словами, в нашем примере эластичность переговорной силы фирмы-мишени по оборачиваемости ее краткосрочных активов и пассивов составляет приблизительно 1,15%, что, как нетрудно заметить, представляет собой весомую стоимостную величину.

9.4.4. Задача о механической мастерской

Рассмотрим следующую задачу. Механическая мастерская использует два станка, каждый из которых ломается в среднем один раз в день. Для починки сломанной машины нужен один механик, и в среднем на ее ремонт уходит также один день.

Предположим, что для каждого станка вероятностное распределение времени его безаварийной работы определяется экспоненциальным законом со средним «один день». Время ремонта также определяется по экспоненциальному закону со средним «один день». Требуется определить стационарную вероятность того, что обе машины не работают, если в мастерской имеются, соответственно, *i* — один механик, *ii* — два механика.

Требуется также сравнить полученные результаты со случаем, когда процесс ремонта разделен на две отдельные стадии, первая из которых составляет собственно ремонт, а вторая — перенастройку станка. Продолжительности этих стадий независимы друг от друга и распределены по экспоненциальному закону со средним, равным половине дня.

1. Сначала рассмотрим ситуацию с *однопериодным ремонтом* и *двумя механиками.* Остальные варианты будут рассмотрены по аналогии. Возможны четыре состояния системы в момент t (момент, когда стационарность системы уже имеет место):

1) машина A работает, B работает (событие AB, вероятность p_{AB});

2) *1* машина A не работает, B работает ($\bar{A}B$, вероятность $p_{\bar{A}B}$);

3) машина A работает, B не работает (событие $A\bar{B}$, вероятность $p_{A\bar{B}}$);

4) машина A не работает, B не работает ($\bar{A}\bar{B}$, вероятность $p_{\bar{A}\bar{B}}$).

За малый промежуток времени Δt из состояния 4 в принципе возможен переход в состояния 1—4 со следующими вероятностями (приведены вероятности состояния в момент $t - \Delta t$:

• в состояние 1: $p_{\bar{A}\bar{B}}(1 - e^{-\Delta t})^2$ (каждый из двух механиков справился с ремонтом за время, не большее Δt); имеем $p_{\bar{A}\bar{B}}(1 - e^{-\Delta t})^2 = o(\Delta t)$, $\Delta t \to 0$;

• в состояние 2: $p_{\bar{A}\bar{B}}(1 - e^{-\Delta t})e^{-\Delta t}$ (один справился с ремонтом, другой — нет);

• в состояние 3: $p_{\bar{A}\bar{B}}(1 - e^{-\Delta t})e^{-\Delta t}$ (один справился с ремонтом, другой — нет);

• в состояние 4: $p_{\bar{A}\bar{B}}e^{-2\Delta t}$ (оба не справились).

Записав все вероятности подобным образом с учетов членов не более первого порядка малости относительно Δt, используя стационарность, т.е. неизменность вероятностей при переходе от Δt к $t + \Delta t$, получим:

$$p_{AB} = p_{AB}e^{-2\Delta t} + p_{\bar{A}B}e^{-\Delta t}(1-e^{-\Delta t}) + p_{A\bar{B}}(1-e^{-\Delta t})e^{-\Delta t} + o(\Delta t);$$
$$p_{\bar{A}B} = p_{AB}e^{-\Delta t}(1-e^{-\Delta t}) + p_{\bar{A}B}e^{-2\Delta t} + p_{\bar{A}\bar{B}}e^{-\Delta t}(1-e^{-\Delta t}) + o(\Delta t);$$
$$p_{A\bar{B}} = p_{AB}e^{-\Delta t}(1-e^{-\Delta t}) + p_{A\bar{B}}e^{-2\Delta t} + p_{\bar{A}\bar{B}}e^{-\Delta t}(1-e^{-\Delta t}) + o(\Delta t);$$
$$p_{\bar{A}\bar{B}} = p_{\bar{A}B}e^{-\Delta t}(1-e^{-\Delta t}) + p_{A\bar{B}}(1-e^{-\Delta t})e^{-\Delta t} + p_{\bar{A}\bar{B}}e^{-2\Delta t} + o(\Delta t),$$

или, после очевидных преобразований, деления на Δt и предельного перехода при $\Delta t \to 0$, в матричной форме:

$$2\begin{pmatrix} p_{AB} \\ p_{\bar{A}B} \\ p_{A\bar{B}} \\ p_{\bar{A}\bar{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{AB} \\ p_{\bar{A}B} \\ p_{A\bar{B}} \\ p_{\bar{A}\bar{B}} \end{pmatrix}. \qquad (9.5)$$

Из соотношения (9.5) с учетом равенства $p_{AB} + p_{\bar{A}B} + p_{A\bar{B}} + p_{\bar{A}\bar{B}} = 1$ получим, что стационарная вероятность *при двух механиках* в *однопериодной ситуации* ремонта $p_{\bar{A}\bar{B}} = 0{,}25$.

2. Ремонт *однопериодный*, но *механик один.* Не умаляя общности, считаем, что в ситуации $\bar{A}\bar{B}$ единственный механик всегда работает над машиной A, пока ее не исправит, а ремонтом B занят только, если A в рабочем состоя-

нии. Таким образом, переход из $\overline{A}\,\overline{B}$ в $\overline{A}B$ за период Δt возможен, только если за это время:

- механик успел исправить A;
- A снова успела сломаться;
- механик успел исправить B,

т.е. с вероятностью, равной $o(\Delta t)$, $\Delta t \to 0$.

В остальном рассуждения аналогичны ситуации 1, причем если предполагать, что двое механиков ремонтируют машину не быстрее, чем один, остальные вероятности неизменны с точностью до $o(\Delta t)$, $\Delta t \to 0$. Это означает, что лишь машина A не успела быть отремонтированной, а B так и осталась нерабочей, в отличие от того, что обе были не отремонтированы за период Δt в ситуации 1.

Окончательно имеем

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{AB} \\ p_{\overline{A}B} \\ p_{A\overline{B}} \\ p_{\overline{A}\overline{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{AB} \\ p_{\overline{A}B} \\ p_{A\overline{B}} \\ p_{\overline{A}\overline{B}} \end{pmatrix}.$$

С учетом равенства $p_{AB} + p_{\overline{A}B} + p_{A\overline{B}} + p_{\overline{A}\overline{B}} = 1$ получим, что при *однопериодном ремонте* и *одном механике* стационарная вероятность $p_{\overline{A}\overline{B}} = 0{,}4$.

3. Случаи двухпериодных ремонтов силами одного механика или двух механиков рассматриваются аналогично, с учетом того что приходится вместо состояний $\overline{A}B$, $\overline{A}B$, $\overline{A}\,\overline{B}$ рассматривать состояния $\overline{A}_1B$, $\overline{A}_2B$, $A\overline{B}_1$, $A\overline{B}_2$, $\overline{A}_1\overline{B}_1$, $\overline{A}_2\overline{B}_1$, $\overline{A}_1\overline{B}_2$, $\overline{A}_2\overline{B}_2$ (A_1 означает, что первая машина не работает, находясь на первой стадии ремонта). После нахождения вероятностей (стационарных) последних четырех из перечисленных состояний их следует сложить для получения вероятности того, что обе машины не работают.

Приведем системы уравнений для случаев одно и двух механиков ситуации 3.

В случае двух механиков имеем:

$$2p_{AB} = 1/2\,p_{\overline{A}_2B} + 1/2\,p_{A\overline{B}_2};\ 3/2\,p_{\overline{A}_1B} = p_{AB} + 1/2\,p_{\overline{A}_1\overline{B}_2};$$
$$3/2\,p_{\overline{A}_2B} = 1/2\,p_{\overline{A}_1B} + 1/2\,p_{\overline{A}_2\overline{B}_2};\ 3/2\,p_{A\overline{B}_1} = p_{AB} + 1/2\,p_{\overline{A}_2\overline{B}_1};$$
$$p_{\overline{A}_1\overline{B}_1} = p_{\overline{A}_1B} + p_{A\overline{B}_1};\ p_{\overline{A}_2\overline{B}_1} = p_{\overline{A}_2B} + 1/2\,p_{\overline{A}_1\overline{B}_1};$$
$$3/2\,p_{A\overline{B}_2} = 1/2\,p_{A\overline{B}_1} + 1/2\,p_{\overline{A}_2\overline{B}_2};$$
$$p_{\overline{A}_1\overline{B}_2} = 1/2\,p_{\overline{A}_1\overline{B}_1} + p_{A\overline{B}_2};\ p_{\overline{A}_2\overline{B}_2} = 1/2\,p_{\overline{A}_2\overline{B}_1} + 1/2\,p_{\overline{A}_1\overline{B}_2}.$$

В случае одного механика:

$$2p_{AB} = 1/2\,p_{\overline{A}_2B} + 1/2\,p_{A\overline{B}_2};\ 3/2\,p_{\overline{A}_1B} = p_{AB};$$
$$3/2\,p_{\overline{A}_2B} = 1/2\,p_{\overline{A}_1B};\ 3/2\,p_{A\overline{B}_1} = p_{AB} + 1/2\,p_{\overline{A}_2\overline{B}_1};$$
$$1/2\,p_{\overline{A}_1\overline{B}_1} = p_{\overline{A}_1B} + p_{A\overline{B}_1};\ 1/2\,p_{\overline{A}_2\overline{B}_1} = p_{\overline{A}_2B} + p_{\overline{A}_1\overline{B}_1};$$
$$3/2\,p_{A\overline{B}_2} = 1/2\,p_{A\overline{B}_1} + 1/2\,p_{\overline{A}_2\overline{B}_2};$$
$$p_{\overline{A}_1\overline{B}_2} = p_{A\overline{B}_2};\ 1/2\,p_{\overline{A}_2\overline{B}_2} = 1/2\,p_{\overline{A}_1\overline{B}_2}.$$

В обоих случаях выполняется равенство

$$p_{AB}+p_{\bar{A}_1B}+p_{\bar{A}_2B}+p_{A\bar{B}_1}+p_{\bar{A}_1\bar{B}_1}+p_{\bar{A}_2\bar{B}_1}+p_{A\bar{B}_2}+p_{\bar{A}_1\bar{B}_2}+p_{\bar{A}_2\bar{B}_2}=1.$$

Получим, что в случае *двухпериодного ремонта* стационарная вероятность того, что обе машины неисправны, равна

$$p_{\bar{A}\bar{B}}=\begin{cases}\dfrac{14}{25}=0{,}56, \text{ при двух механиках,}\\ \dfrac{60}{77}=0{,}7792, \text{ при одном механике.}\end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 9.1—9.5 дается следующее задание. Перед компанией открыты инвестиционные возможности в пределах 7 млн руб., представленные в таблице. Методом ветвей и границ или с помощью динамического программирования требуется определить оптимальную инвестиционную программу.

9.1.

Инвестиционные возможности компании					
Номер инвестиционного проекта	1	2	3	4	5
Инвестиции I, млн руб.	1	1	2	2	3
NPV, млн руб.	2	3	4	5	6

9.2.

Инвестиционные возможности компании					
Номер инвестиционного проекта	1	2	3	4	5
Инвестиции *I*, млн руб.	1	2	1	2	2
NPV, млн руб.	3	3	4	5	7

9.3.

Инвестиционные возможности компании					
Номер инвестиционного проекта	1	2	3	4	5
Инвестиции *I*, млн руб.	1	1	2	2	3
NPV, млн руб.	2	3	4	5	8

9.4.

Инвестиционные возможности компании					
Номер инвестиционного проекта	1	2	3	4	5
Инвестиции *I*, млн руб.	2	2	2	1	3
NPV, млн руб.	4	7	4	5	9

9.5.

Инвестиционные возможности компании					
Номер инвестиционного проекта	1	2	3	4	5
Инвестиции *I*, млн руб.	1	2	2	1	4
NPV, млн руб.	2	7	4	5	10

9.6. Пусть интенсивность спроса (в единицу времени) составляет β. Наивысшего уровня запас достигает в момент поставки заказа размером y. Уровень запаса достигает нуля спустя y/β единиц времени после получения заказа размером y. Пусть K — затраты на оформление заказа; h — затраты на хранение единицы запаса в единицу времени. Тогда суммарные затраты в единицу времени на оформление заказа и хранение запасов равны

$$T(y)=\frac{K}{y/\beta}+h\frac{y}{2}$$

(так как продолжительность цикла y/β, средний уровень запаса $y/2$). Легко убедиться, что минимум величине $T(y)$ доставляет размер заказа y^*, вычисляемый по формуле

$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}.$$

Эта формула называется *формулой экономического размера заказа Уилсона*. Таким образом, оптимальная стратегия модели предусматривает заказ y^* единиц продукции через каждые $t_0^* = y^*/\beta$ единиц времени. Оптимальные (минимальные) затраты в единицу времени $T(y^*)$, получаемые путем непосредственной подстановки, составляют $\sqrt{2K\beta h}$.

В каждом из следующих случаев пополнение запаса происходит мгновенно и дефицит не допускается. Найдите экономический размер заказа, соответствующие суммарные затраты и интервал времени между двумя заказами:

а) K = 10 000 руб., h = 5 руб., β = 30 ед/день;

б) K = 5000 руб., h = 5 руб., β = 30 ед/день;

в) K = 10 000 руб., h = 1 руб., β = 40 ед/день;

г) K = 10 000 руб., h = 4 руб., β = 20 ед/день.

9.7. Фирма пополняет запас некоторого изделия, заказывая его в количестве, достаточном для покрытия одномесячного спроса. Годовой спрос на изделие равен 1500 ед. Каждое размещение заказа оценивается затратами в 20 долл. Затраты на хранение одного изделия в течение месяца составляют 2 долл., задолженность не допускается.

1. Определите оптимальный размер заказа и интервал времени между моментами размещения заказов.

2. Определите различие в годовых затратах на хранение при оптимальной и применяемой стратегиях. Применяемая стратегия предусматривает размещение заказов в размере месячной потребности ежемесячно в течение года.

9.8. Фирма хранит изделие, потребляемое с интенсивностью 50 ед. в день. Она несет расходы в 25 долл. при размещении каждого заказа. Хранение одного изделия в течение одной недели обходится в 70 долл. Определите оптимальное число заказов (округленное до ближайшего целого числа), которое фирма должна размещать ежегодно, предполагая, что фирма придерживается стратегии, не допускающей дефицита.

9.9. В задаче 9.6 для каждого случая определите точку возобновления заказа[1], предполагая, что срок выполнения заказа равен: а) 14 дням; б) 40 дням.

9.10. Запас может пополняться мгновенно после размещения заказа. Спрос имеет постоянную интенсивность 50 ед. в каждую единицу времени. Размещение каждого заказа обходится в 4000 руб. Хотя дефицит и допускается, его величина в соответствии со стратегией фирмы не должна превышать 20 ед. В то же время вследствие бюджетных ограничений единовременно можно заказать не более 200 ед. Определите взаимозависимость между предполагаемыми затратами на хранение и потерями от дефицита на единицу продукции при использовании оптимальной стратегии.

9.11. Клиенты поступают в обслуживающую систему в соответствии с пуассоновским распределением вероятностей со средней частотой, равной двум клиентам в час. Требуется вычислить:

а) среднее число клиентов, прибывающих в обслуживающую систему в течение 8 ч;

б) вероятность того, что в течение 1 ч в обслуживающую систему поступит по крайней мере один клиент.

---

[1] См.: *Таха Х.* Указ. соч. Подпараграф 13.3.1.

9.12. Посетители прибывают в ресторан в соответствии с пуассоновским распределением со средней частотой 20 посетителей в час. Ресторан открывается в $11^{\underline{00}}$. Требуется вычислить:

а) вероятность того, что в $11^{\underline{12}}$ в ресторане окажется 20 посетителей, при условии что в $11^{\underline{07}}$ в ресторане было 18 посетителей;

б) вероятность того, что новый посетитель прибудет в ресторан в интервале между $11^{\underline{28}}$ и $11^{\underline{30}}$, если известно, что предыдущий посетитель прибыл в ресторан в $11^{\underline{25}}$.

9.13. Заказанные университетской библиотекой книги поступают в соответствии с пуассоновским распределением вероятностей со средней частотой 25 книг в день. На каждой полке можно разместить 100 книг. Требуется вычислить:

а) среднее число полок, которые окажутся заставленными книгами ежемесячно;

б) вероятность того, что ежемесячно для размещения поступающих книг потребуется более 10 секций, если известно, что каждая секция состоит из пяти полок.

9.14. Официанты N_1 и N_2 в ожидании посетителей заняты следующей игрой: если в течение одной минуты в ресторан не приходит ни один посетитель, то N_1 платит 100 руб. N_2; в противном случае N_2 платит 100 руб. N_1. Требуется вычислить средний выигрыш официанта N_1 на восьмичасовом интервале времени в предположении, что поток посетителей является пуассоновским со средней частотой, равной одному прибытию в минуту.

9.15. В кафетерии имеется возможность обеспечения местами не более 50 человек. Посетители прибывают в соответствии с пуассоновским распределением вероятностей со средней частотой 10 чел/ч. Средняя скорость обслуживания равняется 12 чел/ч. Какова вероятность того, что очередной посетитель не сможет пообедать в данном кафетерии по причине отсутствия свободных мест?

Список рекомендуемой литературы

1. *Акопов, А. С.* Имитационное моделирование : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. С. Акопов. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

2. *Алипрандис, К.* Существование и оптимальность конкурентного равновесия / К. Алипрандис, Д. Браун, О. Бёркеншо. — М. : Мир, 1995.

3. *Ашманов, С. А.* Математические модели и методы в экономике / С. А. Ашманов. — М. : Изд-во МГУ, 1980.

4. *Баум, К. Ф.* Эконометрика. Применение пакета Stata : учебник и практикум для вузов / К. Ф. Баум. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

5. *Борисов, К. Ю.* Математические модели макроэкономики / К. Ю. Борисов. — СПб. : Европейский Дом, 1997.

6. *Брейли, Р.* Принципы корпоративных финансов / Р. Брейли, С. Майерс. — М. : Олимп-Бизнес, 2004.

7. *Вагнер, Г.* Основы исследования операций. В 3 т. / Г. Вагнер. — М. : Мир, 1973.

8. *Гармаш, А. Н.* Экономико-математические методы и прикладные модели : учебник для бакалавриата и магистратуры / А. Н. Гармаш, И. В. Орлова, В. В. Федосеев. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

9. *Дубина, И. Н.* Основы математического моделирования социально-экономических процессов : учебник и практикум для академического бакалавриата / И. Н. Дубина. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

10. *Интрилигатор, М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор. — М. : Прогресс. 1975.

11. *Катышев, П. К.* Сборник задач к начальному курсу эконометрики / П. К. Катышев, Я. Р. Магнус, А. А. Пересецкий. — М. : Дело, 2002.

12. *Ковалев, В. В.* Финансовый менеджмент: теория и практика / В. В. Ковалев. — М. : Проспект, 2007.

13. *Крушвиц, Л.* Финансирование и инвестиции / Л. Крушвиц, Д. Шеффер, М. Шваке. — СПб. : Питер, 2001.

14. *Магнус, Я. Р.* Эконометрика / Я. Р. Магнус, П. К. Катышев, А. А. Пересецкий. — М. : Дело, 2008.

15. *Мардас, А. Н.* Эконометрика : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. Н. Мардас. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

16. *Михайлов, М. В.* Имитационное моделирование : учебник и практикум для академического бакалавриата / Л. Ф. Вьюненко, М. В. Михайлов, Т. Н. Первозванская ; под ред. Л. Ф. Вьюненко. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

17. *Оксендаль, Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения / Б. Оксендаль. — М. : Мир, 2003.

18. *Печерский, С. Л.* Теория игр для экономистов. Вводный курс / С. Л. Печерский, А. А. Беляева. — СПб. : Изд-во Европейского университета, 2001.

19. *Смирнов, А. Д.* Лекции по макроэкономическому моделированию / А. Д. Смирнов. — М. : ГУ ВШЭ, 2000.

20. *Сотников, В. Н.* Экономико-математические методы и модели : учебник для прикладного бакалавриата / А. М. Попов, В. Н. Сотников ; под общ. ред. А. М. Попова. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

21. *Таха, Х.* Введение в исследование операций / Х. Таха. — М. : Мир, 2007.

22. *Фомин, Г. П.* Экономико-математические методы и модели в коммерческой деятельности : учебник для бакалавров / Г. П. Фомин. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

23. Эконометрика : учебник для бакалавриата и магистратуры / И. И. Елисеева [и др.] ; под ред. И. И. Елисеевой. М.: Издательство Юрайт, 2016.

24. *Dixit, A. K.* Investment under uncertainty / A. K. Dixit, R. S. Pindyck. — Princeton, 1993.

25. *Lucas, R. E.* On the mechanics of economic development / R. E. Lucas // Journal of Monetary Economics. — 1988. — Vol. 22. — № l. — P. 3—42.

Новинки Издательства Юрайт по рассматриваемой тематике

1. *Акопов, А. С.* Имитационное моделирование : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. С. Акопов. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

2. *Баум, К. Ф.* Эконометрика. Применение пакета Stata : учебник и практикум для вузов / К. Ф. Баум. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

3. *Гармаш, А. Н.* Экономико-математические методы и прикладные модели : учебник для бакалавриата и магистратуры / А. Н. Гармаш, И. В. Орлова, В. В. Федосеев. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

4. *Дубина, И. Н.* Основы математического моделирования социально-экономических процессов : учебник и практикум для академического бакалавриата / И. Н. Дубина. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

5. *Мардас, А. Н.* Эконометрика : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. Н. Мардас. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

6. *Михайлов, М. В.* Имитационное моделирование : учебник и практикум для академического бакалавриата / Л. Ф. Вьюненко, М. В. Михайлов, Т. Н. Первозванская ; под ред. Л. Ф. Вьюненко. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

7. *Сотников, В. Н.* Экономико-математические методы и модели : учебник для прикладного бакалавриата / А. М. Попов, В. Н. Сотников ; под общ. ред. А. М. Попова. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

Учебное издание

Королев Алексей Васильевич

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры

Формат 70×100 1/16.
Гарнитура «PetersburgC». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 00,00. Заказ №

ООО «Издательство Юрайт»
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru