УДК 517.518.24+515.124

Математический сборник, Том 189, № 5 (1998), с. 153–176.

English translation: Sbornik: Mathematics, **189**, No. 5 (1998), 797–819.

К теории многозначных отображений ограниченной вариации одной вещественной переменной *

В. В. Чистяков

Аннотация. В работе изучаются (многозначные) отображения ограниченной вариации в смысле Жордана, определенные на подмножестве вещественной прямой со значениями в метрических или линейных нормированных пространствах. Устанавливается теорема о структуре таких отображений (более общая, чем разложение Жордана), приводятся свойства непрерывности и формулы для скачков, а также доказывается аналог принципа выбора Хелли. Показано, что компактное многозначное отображение со значениями в банаховом пространстве, являющееся отображением ограниченной вариации (липшицевым, абсолютно непрерывным отображением), имеет однозначную селекцию ограниченной вариации (соответственно липшицеву, абсолютно непрерывную селекцию).

1 Введение

В настоящей работе доказываются новые теоремы о селекциях многозначных отображений ограниченной вариации на вещественной прямой со значениями в метрических или нормированных пространствах. Для этого проведено более детальное изучение отображений $f : E \to X$, где E — непустое подмножество вещественной прямой $\mathbb{R}$ и X — метрическое пространство. Понятие полной вариации (по Жордану) такого отображения вводится почти без изменений по сравнению с классической ситуацией, когда $X = \mathbb{R}$ (см. § 2). Если $X = \mathbb{R}$, любую функцию ограниченной вариации можно представить в виде разности двух неубывающих ограниченных функций на E (разложение Жордана), что неприменимо в случае, когда X — метрическое пространство. Тем не менее, в самой общей ситуации мы устанавливаем критерий

*Работа частично поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, грант 96-01-00278.

(теорема 3.1) о том, что $f : E \to X$ есть отображение ограниченной вариации тогда и только тогда, когда оно представимо в виде композиции $f = g \circ \varphi$, где $\varphi : E \to \mathbb{R}$ — неубывающая ограниченная функция, а g — отображение, удовлетворяющее условию Липшица с константой Липшица $\leqslant 1$ и действующее из образа φ в пространство X.

Кроме многочисленных следствий, наше разложение отображений ограниченной вариации позволяет доказать аналог классического принципа выбора Хелли из теории функций вещественной переменной [1, Гл. VIII, § 4]: бесконечное семейство отображений на отрезке прямой равномерно ограниченной вариации со значениями в фиксированном компактном подмножестве банахова пространства содержит поточечно сходящуюся последовательность, предел которой является отображением ограниченной вариации.

Возможность выбора селекций с заданными свойствами у многозначных отображений является трудной задачей. Приведенный критерий для отображений ограниченной вариации и принцип выбора Хелли позволяют выделить селекцию ограниченной вариации у компактного многозначного отображения на отрезке прямой со значениями в банаховом пространстве, если это отображение само имеет ограниченную вариацию относительно метрики Хаусдорфа. Параллельно показано, что непрерывные по Липшицу и абсолютно непрерывные относительно метрики Хаусдорфа компактные многозначные отображения обладают селекциями с теми же свойствами. Отмеченные результаты о селекциях являются в определенном смысле неулучшаемыми (подробнее см. замечание после теоремы 6.1).

План работы — следующий. В § 2 приводятся основные свойства отображений ограниченной вариации. В § 3 доказывается теорема о структуре отображений ограниченной вариации. В § 4 изучаются свойства непрерывности и приводятся формулы скачков для таких отображений, а в § 5 устанавливается аналог принцип выбора Хелли. Наконец, в § 6 доказывается теорема о существовании селекций для многозначных отображений ограниченной вариации.

Благодарности. Я признателен С. А. Вахрамееву за предложения, способствовавшие улучшению первоначального варианта текста, а также приношу благодарность М. И. Сумину и О. Е. Галкину за интересные обсуждения.

2 Основные свойства вариации

В этой статье будут использоваться следующие обозначения: $E \subset \mathbb{R}$ — непустое множество; $E_t^- = \{\, s \in E \mid s \leqslant t \,\}$ и $E_t^+ = \{\, s \in E \mid t \leqslant s \,\}$ для $t \in E$; $E_a^b = \{\, s \in E \mid a \leqslant s \leqslant b \,\}$ для $a, b \in E$, $a \leqslant b$; X — метрическое пространство с метрикой $d = d(\,\cdot, \cdot)$; X^E — множество всех отображений $f : E \to X$ из E в X. Если $f \in X^E$, обозначим через $\omega(f, E) = \sup\{\, d(f(t), f(s)) \mid t, s \in E \,\}$ — диаметр образа $f(E)$ или колебание f на множестве E. Для двух отображений $f : E \to X$ и $\varphi : E_1 \to E$ их композиция $f \circ \varphi : E_1 \to X$ определяется обычным образом: $(f \circ \varphi)(\tau) = f(\varphi(\tau))$ для всех $\tau \in E_1$. Запись $P := Q$ или $Q =: P$ означает, что выражение P определено посредством выражения Q.

Обозначим через

$$\mathcal{T}(E) = \{\, T = \{t_i\}_{i=0}^m \subset E \mid m \in \mathbb{N},\ t_{i-1} \leqslant t_i,\ i = 1, \ldots, m \,\}$$

множество всех разбиений E конечными упорядоченными наборами точек из E. Для отображения $f : E \to X$ и разбиения $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(E)$ положим

$$V(f, T) = \sum_{i=1}^{m} d(f(t_i), f(t_{i-1})) \tag{2.1}$$

и продолжим эту величину на все множество E по правилу:

$$V(f, E) = \sup\{\, V(f, T) \mid T \in \mathcal{T}(E) \,\}. \tag{2.2}$$

Величина $V(f, E) \in [0, \infty]$ называется *полной вариацией* (*по Жордану*) отображения f на множестве E. Если она конечна, f называется *отображением ограниченной вариации на* E (будем также говорить, что f имеет ограниченную вариацию на E). Если A есть непустое подмножество E, мы полагаем $V(f, A) = V(f|_A, A)$, где $f|_A$ есть сужение f на множество A. По определению считаем, что $\mathcal{T}(\varnothing) = \varnothing$ и $V(f, \varnothing) = 0$, где $\varnothing$ есть пустое множество. Функционал $V : X^E \times 2^E \to [0, \infty]$ называется *функционалом вариации* (или просто *вариацией*).

Приведенное определение $V(f, E)$ — классическое, и принадлежит К. Жордану (см., например, [2, Гл. 4, § 9]). Отметим, что оно пригодно для отображений, определенных на любом линейно упорядоченном множестве E. Многие результаты настоящей работы справедливы и в случае, когда $\leqslant$ есть линейное упорядочивание на множестве E.

Если выражение под знаком суммы в (2.1) возвести в степень $p > 1$, то равенство (2.2) даст определение вариации отображения f на множестве E в смысле Винера [3]. Свойства вариации по Винеру недавно подробно изучались в работе [4]. Во многом они не схожи со свойствами вариации по Жордану (формально при $p = 1$). Если же определить величину в (2.1) как $\sum_{i=1}^m \Phi\big(d(f(t_i), f(t_{i-1}))\big)$, где $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ есть возрастающая непрерывная функция, $\Phi(0) = 0$, то из (2.2) получим понятие вариации отображения f в смысле Янга [5]. Понятие вариации по Янгу предполагается изучить в последующих работах.

В данной работе мы представляем результаты с одной стороны усиливающие и дополняющие некоторые результаты работы [6], а с другой — справедливые для отображений ограниченной вариации по Жордану, но не имеющие аналогов для отображений ограниченной вариации по Винеру и Янгу. Приводимые ниже свойства вариации $V(\,\cdot, \cdot\,)$ являются почти “аксиоматическими” (см. также [7, § 2.10] и [6]):

Предложение 2.1 *Пусть $f : E \to X$ — произвольное отображение. Имеем:*

(V1) *если $t, s \in E$, то $d(f(t), f(s)) \leqslant \omega(f, E) \leqslant V(f, E)$ (минимальность);*

(V2) *если $A \subset B \subset E$, то $\mathcal{T}(A) \subset \mathcal{T}(B)$ и $V(f, A) \leqslant V(f, B)$ (монотонность);*

(V3) *если* $t \in E$, *то* $V(f,E) = V(f,E_t^-) + V(f,E_t^+)$ (*аддитивность*);

(V4) *если* $E_1 \subset \mathbb{R}$ *и* $\varphi : E_1 \to E$ — (*не обязательно строго*) *монотонная функция, то* $V(f,\varphi(E_1)) = V(f\circ\varphi, E_1)$ (*замена переменной в вариации*);

(V5) $V(f,E) = \sup\{\, V(f,E_a^b) \mid a,\, b \in E,\ a \leqslant b \,\}$ (*регулярность*);

($\mathrm{V6}_1$) *если* $s = \sup E \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ *и* $s \notin E$, *то* $V(f,E) = \lim_{E\ni t\to s} V(f,E_t^-)$;

($\mathrm{V6}_2$) *если* $i = \inf E \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ *и* $i \notin E$, *то* $V(f,E) = \lim_{E\ni t\to i} V(f,E_t^+)$;

(V7) *если последовательность отображений* $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^E$ *поточечно в метрике* d *сходится к отображению* $f \in X^E$ *при* $n \to \infty$, *то справедливо неравенство*: $V(f,E) \leqslant \liminf_{n\to\infty} V(f_n,E)$ (*полунепрерывность снизу*).

Доказательство. Свойства (V1) и (V2) вытекают непосредственно из определений.

(V3): Пусть $\mathcal{T}_t(E)$ — множество тех разбиений из $\mathcal{T}(E)$, которые содержат точку t. Любое разбиение $T \in \mathcal{T}_t(E)$ однозначно представимо в виде $T = T^- \cup T^+$, где $T^- \in \mathcal{T}_t(E_t^-)$ и $T^+ \in \mathcal{T}_t(E_t^+)$, и наоборот. При этом в силу (2.1) имеем:

$$V(f,T) = V(f,T^-) + V(f,T^+),$$

откуда получаем равенство множеств:

$$\{\, V(f,T) \mid T \in \mathcal{T}_t(E) \,\} = \{\, V(f,T^-) \mid T^- \in \mathcal{T}_t(E_t^-) \,\} + \{\, V(f,T^+) \mid T^+ \in \mathcal{T}_t(E_t^+) \,\}.$$

Осталось привлечь равенство $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$, где $A,\, B \subset [0,\infty)$, а затем предложение 2.2, которое приводится ниже.

(V4): Пусть для определенности φ не убывает. Достаточно заметить, что если $T_1 = \{\tau_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(E_1)$, то $T := \{t_i := \varphi(\tau_i)\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(\varphi(E_1))$ в силу монотонности φ, а также, что если $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(\varphi(E_1))$, $t_{i-1} < t_i$, $i = 1,\ldots,m$, так что для некоторых $\tau_i \in E_1$ имеем $t_i = \varphi(\tau_i)$, то опять же в силу монотонности φ множество $T_1 := \{\tau_i\}_{i=0}^m$ образует разбиение множества E_1, причем в обоих случаях

$$\begin{aligned} V(f,T) &= \sum_{i=1}^m d(f(t_i), f(t_{i-1})) = \\ &= \sum_{i=1}^m d\big(f(\varphi(\tau_i)), f(\varphi(\tau_{i-1}))\big) = V(f\circ\varphi, T_1). \end{aligned}$$

(V5): В силу (V2) ясно, что левая часть не меньше, чем правая. С другой стороны, для любого числа $\alpha < V(f,E)$ по определению (2.2) найдется разбиение $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(E)$ такое, что $V(f,T) \geqslant \alpha$, но $T \in \mathcal{T}(E_{t_0}^{t_m})$, откуда $V(f,E_{t_0}^{t_m}) \geqslant V(f,T) \geqslant \alpha$, что и требовалось.

(V6): Установим, например, ($\mathrm{V6}_1$). Т. к. $s \notin E$, то s есть предельная точка множества E. Функция $E \ni t \mapsto V(f,E_t^-) \in [0,\infty]$ не убывает в силу (V2), поэтому написанный предел существует в $[0,\infty]$, и очевидно, что он $\leqslant V(f,E)$. С другой стороны, для любого $\alpha < V(f,E)$ в силу (V5) существуют a, $b \in E$, $a \leqslant b < s$, такие, что $V(f,E_a^b) \geqslant \alpha$, откуда при любом $t \in E \cap [b,s) \neq \varnothing$ получаем, что $V(f,E_t^-) \geqslant V(f,E_a^b) \geqslant \alpha$, и равенство в (V6$_1$) следует.

(V7): Пусть число $\alpha < V(f,E)$. В силу (2.2) для $\alpha < \beta < V(f,E)$ найдется разбиение $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(E)$ такое, что $V(f,E) \geqslant \beta$. В силу поточечной сходимости f_n к f существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что

$$d(f_n(t),f(t)) \leqslant \delta := (\beta-\alpha)/2m \qquad \forall\, n \geqslant n_0, \qquad \forall\, t \in T,$$

откуда вытекает, что при всех $n \geqslant n_0$

$$\begin{aligned}\beta &\leqslant V(f,T) = \sum_{i=1}^m d(f(t_i),f(t_{i-1})) \leqslant \sum_{i=1}^m d(f(t_i),f_n(t_i)) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^m d(f_n(t_i),f_n(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^m d(f_n(t_{i-1}),f(t_{i-1})) \leqslant \\ &\leqslant m\delta + V(f_n,E) + m\delta = V(f_n,E) + (\beta-\alpha).\end{aligned}$$

Следовательно, $\inf_{n\geqslant n_0} V(f_n,E) \geqslant \alpha$, и тем более, $\liminf_{n\to\infty} V(f_n,E) \geqslant \alpha$. Остается устремить α к $V(f,E)$. $\square$

Предложение 2.2 *Для отображения $f : E \to X$ величина $V(f,E)$ из (2.2) не изменится, если при вычислении в ней супремума вместо всех разбиений $\mathcal{T}(E)$ ограничиться рассмотрением только тех из них $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(E)$, у которых среди точек $\{t_i\}_{i=0}^m$ имеется конечное число заранее фиксированных. Иными словами, если разбиение $T_0 \in \mathcal{T}(E)$ фиксировано и $\mathcal{T}_{T_0}(E) = \{\, T = T_0 \cup T_1 \mid T_1 \in \mathcal{T}(E)\,\}$, то*

$$V(f,E) = \sup\{\, V(f,T) \mid T \in \mathcal{T}_{T_0}(E)\,\}.$$

Доказательство. Т.к. $\mathcal{T}_{T_0} \subset \mathcal{T}(E)$, то левая часть в последнем равенстве не меньше, чем правая. С другой стороны, если $T_1 \in \mathcal{T}(E)$ произвольно, то $T_1 \subset T_0 \cup T_1 \in \mathcal{T}_{T_0}(E)$, поэтому $V(f,T_1) \leqslant V(f,T_0 \cup T_1) \leqslant \sup\{\, V(f,T) \mid T \in \mathcal{T}_{T_0}(E)\,\}$; значит, левая часть не больше, чем правая, и равенство установлено. $\square$

В частности, если $E = [a,b]$ есть отрезок, $f : [a,b] \to X$ и

$$\mathcal{T}_a^b = \{\, T = \{t_i\}_{i=0}^m \subset [a,b] \mid m \in \mathbb{N},\ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m = b\,\},$$

то в силу предложения 2.2 имеем:

$$V_a^b(f) := \sup\{\, V(f,T) \mid T \in \mathcal{T}_a^b\,\} = V(f,[a,b]).$$

3 Структурная теорема

Определение. Отображение $f : E \to X$ называется *липшицевым*, если найдется постоянная $C \geqslant 0$ такая, что $d(f(t), f(s)) \leqslant C|t - s|$ для всех t, $s \in E$. Наименьшее число C, удовлетворяющее указанному неравенству, называется *константой Липшица* отображения f и обозначается через $\mathrm{Lip}(f)$.

Отображение $g : E \to X$ называется *натуральным*, если $V(g, E_a^b) = b - a$ для всех a, $b \in E$, $a \leqslant b$. Натуральное отображение $g : E \to X$ является липшицевым с константой Липшица $\mathrm{Lip}(g) \leqslant 1$, поскольку в силу (V1) имеем:

$$d(g(t), g(s)) \leqslant V(g, E_t^s) = s - t, \qquad t, s \in E, \ t \leqslant s.$$

Отображение $f : [a, b] \to X$ называется *абсолютно непрерывным*, если существует (произвольная) функция $\delta : (0, \infty) \to (0, \infty)$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого конечного набора $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^N$ непересекающихся подинтервалов в $[a, b]$ из условия $\sum_{n=1}^N (b_n - a_n) \leqslant \delta(\varepsilon)$ вытекает, что $\sum_{n=1}^N d(f(b_n), f(a_n)) \leqslant \varepsilon$. Такие отображения f мы будем также называть *$\delta(\,\cdot\,)$-абсолютно непрерывными.*

Ясно, что липшицево отображение $f : [a, b] \to X$ является $\delta(\,\cdot\,)$-абсолютно непрерывным (например, при $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / \mathrm{Lip}(f)$, $\varepsilon > 0$), а $\delta(\,\cdot\,)$-абсолютно непрерывное отображение имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$ (доказательство последнего утверждения — стандартное).

Главный результат настоящего параграфа — следующая

Теорема 3.1 *Отображение $f : E \to X$ имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда найдутся неубывающая ограниченная функция $\varphi : E \to \mathbb{R}$ и натуральное отображение $g : \varphi(E) \to X$ (и, значит, g — липшицево с константой $\mathrm{Lip}(g) \leqslant 1$) такие, что $f = g \circ \varphi$ на E.*

Более того, если f — липшицево и E — компактное множество (соотв. $E = [a, b]$ и f — абсолютно непрерывно), то φ также липшицева (соотв. абсолютно непрерывна).

Доказательство этой теоремы содержится в следующих двух леммах. Первая из них (достаточность) дает множество типичных примеров отображений ограниченной вариации.

Лемма 3.2 *Пусть $\varphi : E \to \mathbb{R}$ — некоторая функция, $g : \varphi(E) \to X$ — липшицево отображение и $f = g \circ \varphi$. Тогда*

(a) *если φ — монотонна и ограничена, то f имеет ограниченную вариацию на E, причем $V(f, E) \leqslant \mathrm{Lip}(g) \cdot \omega(\varphi, E)$;*

(b) *если φ липшицева функция, то f — липшицево отображение на E, причем $\mathrm{Lip}(f) \leqslant \mathrm{Lip}(g) \cdot \mathrm{Lip}(\varphi)$;*

(c) *если $E = [a, b]$ и φ — абсолютно непрерывна, то f — абсолютно непрерывное отображение на $[a, b]$.*

Доказательство. (a) Предположим для определенности, что φ — неубывающая. Поскольку

$$\varphi(E\cap[a,b])=\varphi(E)\cap[\varphi(a),\varphi(b)],\qquad a,\,b\in E,\ a\leqslant b, \tag{3.1}$$

то в силу (V4) имеем:

$$V(f,E_a^b)=V(g\circ\varphi,E_a^b)=V(g,\varphi(E_a^b))=V(g,\varphi(E)_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}).$$

Если $T=\{t_i\}_{i=0}^m$ есть разбиение множества в (3.1), то

$$V(g,T)\leqslant \mathrm{Lip}(g)\cdot\sum_{i=1}^m(t_i-t_{i-1})\leqslant \mathrm{Lip}(g)\cdot\bigl(\varphi(b)-\varphi(a)\bigr),$$

откуда

$$V(f,E_a^b)\leqslant \mathrm{Lip}(g)\cdot\bigl(\varphi(b)-\varphi(a)\bigr)\qquad\forall\,a,\,b\in E,\ a\leqslant b.$$

Из свойства (V5), монотонности и ограниченности φ получаем:

$$V(f,E)\leqslant \mathrm{Lip}(g)\cdot\Bigl(\sup_{t\in E}\varphi(t)-\inf_{t\in E}\varphi(t)\Bigr)=\mathrm{Lip}(g)\cdot\omega(\varphi,E)<\infty.$$

Для невозрастающей функции φ доказательство аналогично.

(b) Для $t,\,s\in E$ имеем:

$$\begin{aligned}d(f(t),f(s))\ &=\ d\bigl(g(\varphi(t)),g(\varphi(s))\bigr)\leqslant \mathrm{Lip}(g)\cdot|\varphi(t)-\varphi(s)|\leqslant\\ &\leqslant\ \mathrm{Lip}(g)\cdot\mathrm{Lip}(\varphi)\cdot|t-s|.\end{aligned}$$

(c) Если $a\leqslant a_1<b_1\leqslant\ldots\leqslant a_N<b_N\leqslant b$, то

$$\sum_{n=1}^N d(f(b_n),f(a_n))=\sum_{n=1}^N d\bigl(g(\varphi(b_n)),g(\varphi(a_n))\bigr)\leqslant \mathrm{Lip}(g)\cdot\sum_{n=1}^N|\varphi(b_n)-\varphi(a_n)|. \tag{3.2}$$

Если φ — $\delta(\,\cdot\,)$-абсолютно непрерывная функция, то положим

$$\delta_1(\varepsilon)=\delta(\varepsilon/\max\{1,\,\mathrm{Lip}(g)\}),\qquad\varepsilon>0.$$

Тогда для $\varepsilon>0$ из условия $\sum_{n=1}^N(b_n-a_n)\leqslant\delta_1(\varepsilon)$ и неравенства (3.2) вытекает, что $\sum_{n=1}^N d(f(b_n),f(a_n))\leqslant\varepsilon$, т. е. f есть $\delta_1(\,\cdot\,)$-абсолютно непрерывное отображение на $[a,b]$. $\square$

Замечания. 1) Если в лемме 3.2(a) отображение g — натурально, то имеем: $V(f,E_a^b)=|\varphi(b)-\varphi(a)|$ для $a,b\in E$, $a\leqslant b$, а потому $V(f,E)=\omega(\varphi,E)$. В частности, если $f:E\to\mathbb{R}$ — монотонная ограниченная функция, то, полагая в лемме 3.2(a) $X=\mathbb{R}$, $\varphi=f$ и $g(s)=s$ для $s\in f(E)$, найдем, что $V(f,E)=\omega(f,E)<\infty$.

2) Если $f:E\to X$ — липшицево отображение и $E\subset\mathbb{R}$ — ограниченне множество, то

$$V(f,E)\leqslant \mathrm{Lip}(f)\cdot(\sup E-\inf E). \tag{3.3}$$

Чтобы увидеть это, в лемме 3.2(a) достаточно положить $\varphi(t) = t$ для $t \in E$ и $g = f$. $\square$

Вторая лемма (необходимость) представляет каноническое разложение отображения ограниченной вариации.

Лемма 3.3 *Пусть $f : E \to X$ — отображение ограниченной вариации. Тогда найдется неубывающая ограниченная (неотрицательная) функция $\varphi : E \to \mathbb{R}$ и натуральное отображение $g : E_1 = \varphi(E) \to X$ такие, что*

(a) $f = g \circ \varphi$ *на* E;

(b) $g(E_1) = f(E)$ *в* X;

(c) $V(g, E_1) = V(f, E)$.

Если, в дополнение, f — липшицево отображение и E — компактно, то φ можно выбрать липшицевой с константой $\mathrm{Lip}(\varphi) \leqslant \mathrm{Lip}(f)$, а если $E = [a, b]$ и f — $\delta(\,\cdot\,)$-абсолютно непрерывное отображение, то φ можно выбрать $\delta(\,\cdot\,)$-абсолютно непрерывной.

Доказательство. 1. Функция $\varphi : E \to \mathbb{R}$, заданная формулой $\varphi(t) = V(f, E_t^-)$ для $t \in E$, корректно определена, неотрицательна, ограничена ($\varphi(t) \leqslant V(f, E)$) и не убывает на E благодаря (V2). Для $\tau \in E_1$ обозначим через $\varphi^{-1}(\tau) = \{\, t \in E \mid \varphi(t) = \tau \,\}$ обратный прообраз одноточечного множества $\{\tau\}$ при отображении φ. Теперь определим искомое отображение $g : E_1 \to X$ следующим образом: если $\tau \in E_1$, положим

$$g(\tau) = f(t) \qquad \text{для любой точки } t \in \varphi^{-1}(\tau). \tag{3.4}$$

Это корректно, т. е. $f(t)$ — один и тот же элемент из X для всех $t \in \varphi^{-1}(\tau)$, поскольку ввиду (V1) и ($V3$) имеем:

$$d(f(s), f(t)) \leqslant V(f, E_t^s) = \varphi(s) - \varphi(t), \qquad t \in E,\ s \in E_t^+; \tag{3.5}$$

таким образом, если t, $s \in \varphi^{-1}(\tau)$, $t \leqslant s$, то $\varphi(t) = \tau = \varphi(s)$, а потому $f(t) = f(s)$.

Представление f из (a) теперь вытекает из (3.4), т. к. если $t \in E$, то $\tau := \varphi(t) \in E_1$ и $t \in \varphi^{-1}(\tau)$, поэтому в силу (3.4) $f(t) = g(\tau) = g(\varphi(t)) = (g \circ \varphi)(t)$. Утверждения (b) и (c) являются следствиями (a) и (V4).

Осталось проверить, что g — натуральное отображение. Подобно (3.1) имеем:

$$(E_1)_\tau^- = \varphi(E_t^-) \qquad \text{для любых } \tau \in E_1 \text{ и } t \in \varphi^{-1}(\tau),$$

поэтому ввиду (V4) находим, что

$$V(g, (E_1)_\tau^-) = V(g, \varphi(E_t^-)) = V(g \circ \varphi, E_t^-) = V(f, E_t^-) = \varphi(t) = \tau.$$

Следовательно, если α, $\beta \in E_1$, $\alpha \leqslant \beta$, то в силу (V3) заключаем, что

$$V(g, (E_1)_\alpha^\beta) = V(g, (E_1)_\beta^-) - V(g, (E_1)_\alpha^-) = \beta - \alpha.$$

2. Покажем, что если $f : E \to X$ — липшицево, то функция φ, определенная в шаге 1, также липшицева. Для $t,\, s \in E$, $s \leqslant t$, в силу (V3) получаем:

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| = V(f, E_t^-) - V(f, E_s^-) = V(f, E_s^t) \leqslant \operatorname{Lip}(f) \cdot (t - s).$$

Последнее неравенство вытекает из того, что для любого $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(E_s^t)$ имеем:

$$V(f, T) = \sum_{i=1}^{m} d(f(t_i), f(t_{i-1})) \leqslant \operatorname{Lip}(f) \cdot (t_m - t_0) \leqslant \operatorname{Lip}(f) \cdot (t - s).$$

3. Пусть теперь $f : [a, b] \to X$ — $\delta(\,\cdot\,)$-абсолютно непрерывное отображение и $\varphi(t) = V_a^t(f)$, $t \in [a, b]$. Покажем, что φ — также $\delta(\,\cdot\,)$-абсолютно непрерывна.

Пусть $\varepsilon > 0$. По условию для любого набора точек $a \leqslant t_{11} < t_{12} \leqslant \ldots \leqslant t_{N1} < t_{N2} \leqslant b$ таких, что $\sum_{n=1}^N (t_{n2} - t_{n1}) \leqslant \delta(\varepsilon)$ вытекает, что $\sum_{n=1}^N d(f(t_{n2}), f(t_{n1})) \leqslant \varepsilon$. Зафиксируем такой набор точек $a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant \ldots \leqslant a_N < b_N \leqslant b$, что $\sum_{n=1}^N (b_n - a_n) \leqslant \delta(\varepsilon)$. Для каждого $n = 1, \ldots, N$ и $k \in \mathbb{N}$ пусть $T_n = \{t_{n,i}\}_{i=0}^{m_n}$ есть разбиение отрезка $[a_n, b_n]$ такое, что

$$V_{a_n}^{b_n}(f) \leqslant V(f, T_n) + (\varepsilon/Nk).$$

Поскольку $\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{m_n} (t_{n,i} - t_{n,i-1}) = \sum_{n=1}^N (b_n - a_n) \leqslant \delta(\varepsilon)$, то имеем:

$$\sum_{n=1}^{N} |\varphi(b_n) - \varphi(a_n)| = \sum_{n=1}^{N} V_{a_n}^{b_n}(f) \leqslant \sum_{n=1}^{N} V(f, T_n) + (\varepsilon/k) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{m_n} d(f(t_{n,i}), f(t_{n,i-1})) + (\varepsilon/k) \leqslant \varepsilon + (\varepsilon/k).$$

В силу произвольности $k \in \mathbb{N}$ из последнего неравенства заключаем, что из неравенства $\sum_{n=1}^N (b_n - a_n) \leqslant \delta(\varepsilon)$ вытекает неравенство $\sum_{n=1}^N |\varphi(b_n) - \varphi(a_n)| \leqslant \varepsilon$. $\square$

Замечания. 1) Отметим, что отображение g из доказательства леммы 3.3 обладает свойством: если $\alpha,\, \beta \in E_1$ и $t \in \varphi^{-1}(\alpha)$, $s \in \varphi^{-1}(\beta)$, то $d(g(\alpha), g(\beta)) = d(f(t), f(s))$.

2) В случае, когда функция $\varphi : E \to E_1$ строго возрастает, она является биекцией, так что равенство $f = g \circ \varphi$ на E эквивалентно равенству $g = f \circ \varphi^{-1}$ на E_1, где $\varphi^{-1} : E_1 \to E$ — обратная функция к φ.

3) Для вещественнозначных функций $f : E \to \mathbb{R}$ имеет место также *разложение Жордана*: функция f имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда она представляется в виде разности двух неубывающих ограниченных функций на E. Достаточность вытекает из того, что монотонная ограниченная функция имеет ограниченную вариацию (см. замечание 1 после леммы 3.2) и разность двух таких функций — снова функция ограниченной вариации. Необходимость вытекает из равенства $f = \varphi - (\varphi - f)$, где $\varphi(t) = V(f, E_t^-)$, $t \in E$, и неравенства (3.5), т. к. если $t,\, s \in E$, $t \leqslant s$, то $f(s) - f(t) \leqslant \varphi(s) - \varphi(t)$ или $(\varphi - f)(t) \leqslant (\varphi - f)(s)$. Таким образом, разложение Жордана — это весьма специфическая особенность вещественнозначных функций. $\square$

Ниже мы вкратце остановимся на алгебраическом аспекте конструкции натурального отображения g из леммы 3.3. Его построение восходит к понятию *факторизации отображения*. Отображение $\varphi : E \to E_1$ индуцирует отношение эквивалентности на E: $t \sim s$ в $E \iff \varphi(t) = \varphi(s)$ в E_1. Обозначим через $\overline{t} = \{\, s \in E \mid s \sim t \,\}$ класс эквивалентности элемента $t \in E$ в фактор-множестве $E/\varphi := E/\sim$ по этому отношению эквивалентности, и пусть $\pi : E \to E/\varphi$ — каноническая сюрьекция, определенная равенством $\pi(t) = \overline{t}$ для $t \in E$. Тогда $\overline{t} = \varphi^{-1}(\tau)$, где $\tau := \varphi(t) \in \varphi(E)$, и если мы положим $\overline{\varphi}(\overline{t}) = \varphi(s)$ для $s \in \overline{t}$, или, что то же, $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$, то отображение $\overline{\varphi} : E/\varphi \to E_1$ корректно определено и называется *факторизацией* φ. Другими словами, мы полагаем $\overline{\varphi}(\varphi^{-1}(\tau)) = \tau$ для $\tau \in \varphi(E)$, так что φ (всегда) инъективно. Вообще говоря, $\overline{\varphi}$ не сюрьективно, но если сюрьективна φ, как в лемме 3.3, то этим же свойством обладает и $\overline{\varphi}$, а значит, биекция $\overline{\varphi}$ имеет обратное отображение $\overline{\varphi}^{-1} : E_1 \to E/\varphi$, которое задается равенством $\overline{\varphi}^{-1}(\tau) = \varphi^{-1}(\tau)$ для $\tau \in E_1 = \varphi(E)$.

Если задано еще одно отображение $f : E \to X$ (нарисуйте диаграмму), определим $\widehat{f} : E/\varphi \to X$ равенством $\widehat{f}(\overline{t}) = f(s)$ для $\overline{t} \in E/\varphi$ и $s \in \overline{t}$, так что $\widehat{f} \circ \pi = f$. Отображение $\widehat{f}$ определено корректно, только если из $t, s \in E$ и $t \sim s$ вытекает $f(t) = f(s)$ в X, что выполнено в лемме 3.3 благодаря неравенству (3.5). Если теперь $g := \widehat{f} \circ \overline{\varphi}^{-1} : E_1 \to X$, то $\widehat{f} = g \circ \overline{\varphi}$, и мы получаем "характеристическое" представление из леммы 3.3(a):

$$f = \widehat{f} \circ \pi = (g \circ \overline{\varphi}) \circ \pi = g \circ (\overline{\varphi} \circ \pi) = g \circ \varphi.$$

Различие отображений f и g теперь хорошо видно из их разложений:

$$f = \widehat{f} \circ \pi = \widehat{f} \circ \overline{\varphi}^{-1} \circ \varphi \qquad \text{и} \qquad g = \widehat{f} \circ \overline{\varphi}^{-1}. \tag{3.6}$$

Отметим, что если $\varphi : E \to E_1$ строго возрастает, то φ — биекция, а потому, $E/\varphi = E$, $\overline{\varphi} = \varphi$, $\widehat{f} = f$ и $g = f \circ \varphi^{-1}$.

Рассмотрим еще один аспект конструкции натурального отображения g с точки зрения непрерывности входящих в разложения (3.6) отображений. Начнем с общих замечаний. Если E — некоторое топологическое пространство, $\sim$ есть некоторое отношение эквивалентности на E, $E/\!\sim$ — фактор-множество E по этому отношению эквивалентности и $\pi : E \to E/\!\sim$ — каноническая сюрьекция, то в $E/\!\sim$ можно ввести (*фактор-*) *топологию* следующим образом: множество $U \subset E/\!\sim$ называется *открытым*, если его прообраз $\pi^{-1}(U) \subset E$ открыт. Множество $E/\!\sim$ с введенной в нем фактор-топологией называется *фактор-пространством* пространства E. По самому определению топологии в $E/\!\sim$ отображение $\pi : E \to E/\!\sim$ является непрерывным. Имеет место следующее (общее) утверждение: если G — топологическое пространство, то отображение $\gamma : E/\!\sim\, \to G$ непрерывно тогда и только тогда, когда композиция $\gamma \circ \pi : E \to G$ непрерывна. (Вообще говоря, из непрерывности композиции двух отображений, одно из которых непрерывно, не всегда следует непрерывность второго отображения.) Действительно, пусть $\gamma \circ \pi$ непрерывна и $W \subset G$ открыто, тогда множество $\pi^{-1}(\gamma^{-1}(W)) = (\gamma \circ \pi)^{-1}(W)$ открыто в E в силу непрерывности $\gamma \circ \pi$, а потому $\gamma^{-1}(W)$ открыто в $E/\!\sim$ в силу определения фактор-топологии.

Обратное утверждение очевидно, т. к. композиция двух непрерывных отображений всегда непрерывна.

Пусть теперь $f : E \to X$ — непрерывное отображение. Из теоремы 4.3(a) следует, что тогда и $\varphi : E \to E_1$ непрерывна. Следовательно, отображения $\overline{\varphi} : E/\varphi \to E_1$ и $\widehat{f} : E/\varphi \to X$ непрерывны, т. к. непрерывны отображения $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$ и $f = \widehat{f} \circ \pi$. Однако, факторизация $\overline{\varphi}$ отображения φ, являясь инъективным (биективным в лемме 3.3) и непрерывным отображением, не всегда является гомеоморфизмом, т. е. обладает непрерывным обратным $\overline{\varphi}^{-1} : E_1 \to E/\varphi$. Тем не менее, в лемме 3.3 отображение $g : E_1 \to X$ непрерывно (и даже липшицево). Если E — отрезок и $\varphi : E \to E_1$ — гомеоморфизм (т. е. φ строго возрастает), то $E/\varphi = E$ и $\overline{\varphi} = \varphi$, так что $\overline{\varphi}$ — гомеоморфизм; если же φ не является гомеоморфизмом (когда φ не возрастает строго), то $\overline{\varphi}^{-1}$ может не быть непрерывным, и основные "искажения" в g по сравнению с f проистекает в результате действия именно этого отображения.

4 Свойства непрерывности и формулы скачков

В этом параграфе мы предполагаем, что X — метрическое пространство с метрикой d, $f : E \to X$ — фиксированное отображение ограниченной вариации, а функция $\varphi : E \to \mathbb{R}$ задана равенством $\varphi(t) = V(f, E_t^-)$ для $t \in E$. Мы установим свойства непрерывности отображения ограниченной вариации f, а также формулы, связывающие скачки f со скачками ее функции вариации φ.

Множество всех предельных точек для множества $E \subset \mathbb{R}$ будем обозначать через E'. Для $t \in E$ мы полагаем $E_t^{-\prime} = (E_t^-)'$ и $E_t^{+\prime} = (E_t^+)'$.

Лемма 4.1 *Пусть $t \in E$.*

(a) *Если $t \in E_t^{\pm\prime}$, то $d(f(t), f(s))$ имеет предел в $[0, \infty)$ при $E \ni s \to t \pm 0$. Более того, если X — полное, то при $E \ni s \to t \pm 0$ отображение $f(s)$ имеет односторонний предел в X, обозначаемый через $f(t\pm)$, и величина $d(f(s), f(t))$ стремится к $d(f(t\pm), f(t))$.*

(b) *Если $t \in E_t^{-\prime} \cap E_t^{+\prime}$, то при $E \ni a \to t - 0$, $E \ni b \to t + 0$ величина $d(f(b), f(a))$ имеет предел в $[0, \infty)$, а если, к тому же, X — полное, то $d(f(b), f(a))$ стремится к $d(f(t+), f(t-))$.*

Доказательство. (a) Пусть $t \in E$ — предельная точка E_t^-. Если s_1, $s_2 \in E$, $s_1 \leqslant s_2 < t$, то в силу (V1) и (V3) имеем:

$$\begin{aligned} |d(f(t), f(s_1)) - d(f(t), f(s_2))| &\leqslant d(f(s_1), f(s_2)) \leqslant V(f, E_{s_1}^{s_2}) = \\ &= V(f, E_{s_2}^-) - V(f, E_{s_1}^-) = \varphi(s_2) - \varphi(s_1). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Так как функция φ неубывающая и ограниченная, то предел $\varphi(t-) := \lim\limits_{E \ni s \to t-0} \varphi(s)$ существует в $[0, \infty)$ и равен $\sup\{\, \varphi(s) \mid s \in E_t^-,\ s \neq t \,\}$. Теперь существование предела $d(f(t), f(s))$ при $E \ni s \to t - 0$ вытекает из (4.1) и критерия Коши в $\mathbb{R}$.

Пусть теперь X — полное. Как и в (4.1), для $s_1,\ s_2 \in E$, $s_1 \leqslant s_2 < t$, имеем: $d(f(s_1), f(s_2)) \leqslant \varphi(s_2) - \varphi(s_1)$, так что существование предела слева $f(t-) \in X$ вытекает из критерия Коши в полном метрическом пространстве X. Остается заметить, что

$$|d(f(t), f(t-)) - d(f(t), f(s))| \leqslant d(f(t-), f(s)) \to 0 \quad \text{при} \quad E \ni s \to t-0.$$

Если $t \in E$ — предельная точка E_t^+, рассуждения вполне аналогичны.

(b) Устанавливается аналогично (a), если учесть, что для $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \in E$, $a_1 \leqslant a_2 < t < b_1 \leqslant b_2$:

$$\begin{aligned} |d(f(b_1), f(a_1)) - d(f(b_2), f(a_2))| &\leqslant d(f(b_1), f(b_2)) + d(f(a_1), f(a_2)) \leqslant \\ &\leqslant \varphi(b_2) - \varphi(b_1) + \varphi(a_2) - \varphi(a_1), \end{aligned}$$

а также, что (в случае, когда X — полное метрическое пространство)

$$|d(f(t+), f(t-)) - d(f(b), f(a))| \leqslant d(f(t+), f(b)) + d(f(t-), f(a)) \to 0$$

при $E \ni a \to t-0$, $E \ni b \to t+0$. $\square$

Лемма 4.2 *Для $t \in E$ имеют место следующие равенства:*

(a) *если $t \in E_t^{-\prime}$, то $\varphi(t) - \varphi(t-) = \lim_{E\ni s\to t-0} d(f(t), f(s))$;*

(b) *если $t \in E_t^{+\prime}$, то $\varphi(t+) - \varphi(t) = \lim_{E\ni s\to t+0} d(f(s), f(t))$;*

(c) *если $t \in E_t^{-\prime} \cap E_t^{+\prime}$, то $\lim_{\substack{E\ni a\to t-0 \\ E\ni b\to t+0}} V(f, E_a^b \setminus t) = \lim_{\substack{E\ni a\to t-0 \\ E\ni b\to t+0}} d(f(b), f(a))$.*

Доказательство. Для определенности мы установим (b) и (c), поскольку (a) доказывается аналогично и несколько проще, чем (b).

(b) Переходя в неравенстве (3.5) к пределу при $E \ni s \to t+0$ и учитывая лемму 4.1(a), получим: $\lim_{E\ni s\to t+0} d(f(s), f(t)) \leqslant \varphi(t+) - \varphi(t)$. Чтобы доказать обратное неравенство, достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $t_0 = t_0(\varepsilon) \in E$, $t_0 > t$, такое, что

$$\varphi(s) - \varphi(t) \leqslant d(f(s), f(t)) + \varepsilon \qquad \forall\, s \in E_t^{t_0}. \tag{4.2}$$

Действительно, переходя к пределу при $E \ni s \to t+0$ в (4.2), найдем, что

$$\varphi(t+) - \varphi(t) \leqslant \lim_{E\ni s\to t+0} d(f(s), f(t)) + \varepsilon,$$

и остается учесть произвольность $\varepsilon > 0$.

Докажем (4.2). Поскольку $V(f, E_t^+) \leqslant V(f, E) < \infty$ в силу (V2), для $\varepsilon > 0$ найдется разбиение $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(E_t^+)$, где $t < t_0$, такое, что

$$V(f, E_t^+) \leqslant d(f(t_0), f(t)) + V(f, T) + \varepsilon.$$

Замечая, что в действительности $T \in \mathcal{T}(E_{t_0}^+)$ и применяя (V1) и (V3), для всех $s \in E_t^{t_0}$ имеем:

$$\begin{aligned} V(f, E_t^+) &\leqslant d(f(t_0), f(s)) + d(f(s), f(t)) + V(f, E_{t_0}^+) + \varepsilon \leqslant \\ &\leqslant V(f, E_s^{t_0}) + d(f(s), f(t)) + V(f, E_{t_0}^+) + \varepsilon = \\ &= V(f, E_s^+) + d(f(s), f(t)) + \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда, снова применяя (V3), найдем, что

$$V(f, E_s^-) - V(f, E_t^-) = V(f, E_t^+) - V(f, E_s^+) \leqslant d(f(s), f(t)) + \varepsilon,$$

а последнее неравенство и есть (4.2).

(c) 1. Здесь мы покажем, что, во-первых,

$$d(f(b), f(a)) \leqslant V(f, E_a^b \setminus t) \qquad \forall\, a \in E_t^-,\ \forall\, b \in E_t^+,\ a < t < b, \tag{4.3}$$

и во-вторых, что

$$\begin{gathered} \text{для любого } \varepsilon > 0 \text{ найдутся } a_0 = a_0(\varepsilon),\ b_0 = b_0(\varepsilon) \in E,\ a_0 < t < b_0, \text{ такие, что} \\ V(f, E_a^b \setminus t) \leqslant d(f(b), f(a)) + \varepsilon \qquad \forall\, a \in E_{a_0}^t \setminus t, \quad \forall\, b \in E_t^{b_0} \setminus t. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Неравенство (4.3) сразу вытекает из (V1). Чтобы доказать (4.4), зафиксируем $\varepsilon > 0$, и по определению вариации $V(f, E \setminus t)$, которая $\leqslant V(f, E) < \infty$, рассмотрим разбиение $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(E \setminus t)$ такое, что

$$t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{k-1} < t < t_k \leqslant \ldots \leqslant t_{m-1} \leqslant t_m \text{ для некоторого } 1 \leqslant k \leqslant m$$

и

$$V(f, E \setminus t) \leqslant V(f, T) + \varepsilon = \sum_{i=1}^m d(f(t_i), f(t_{i-1})) + \varepsilon.$$

Полагая $T_1 = \{t_i\}_{i=0}^{k-1}$, $T_2 = \{t_i\}_{i=k}^m$, $a_0 = t_{k-1}$, $b_0 = t_k$, и замечая, что $T_1 \cup \{a\} \in \mathcal{T}(E_a^-)$ и $T_2 \cup \{b\} \in \mathcal{T}(E_b^+)$ для $a, b \in E$, $a_0 \leqslant a < t < b \leqslant b_0$, получим:

$$\begin{aligned} V(f, E \setminus t) &\leqslant V(f, T_1) + d(f(t_k), f(t_{k-1})) + V(f, T_2) + \varepsilon \leqslant \\ &\leqslant V(f, T_1) + d(f(a), f(t_{k-1})) + d(f(b), f(a)) + \\ &\quad + d(f(t_k), f(b)) + V(f, T_2) + \varepsilon \leqslant \\ &\leqslant V(f, E_a^-) + d(f(b), f(a)) + V(f, E_b^-) + \varepsilon. \end{aligned}$$

В силу (V3) находим, что

$$V(f, E \setminus t) = V(f, E_a^-) + V(f, E_a^b \setminus t) + V(f, E_b^+), \tag{4.5}$$

и это равенство вместе с последними выкладками дает (4.4).

2. Теперь заметим, что предел слева в (c) существует, поскольку в пределе при $E \ni a \to t-0$, $E \ni b \to t+0$, имеем:

$$V(f, E_a^b \setminus t) \to \inf\{\, V(f, E_a^b \setminus t) \mid a \in E_t^-,\ b \in E_t^+,\ a < t < b \,\} \in [0, \infty). \tag{4.6}$$

Устремляя в неравенствах (4.3) и (4.4) $E \ni a \to t-0$, $E \ni b \to t+0$, и учитывая лемму 4.1(b), приходим к неравенствам:

$$\lim_{\substack{E \ni a \to t-0 \\ E \ni b \to t+0}} d(f(b), f(a)) \leqslant \lim_{\substack{E \ni a \to t-0 \\ E \ni b \to t+0}} V(f, E_a^b \setminus t) \leqslant \lim_{\substack{E \ni a \to t-0 \\ E \ni b \to t+0}} d(f(b), f(a)) + \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то (c) доказано. $\square$

Теорема 4.3 (a) *Отображение ограниченной вариации f непрерывно справа в точке $t \in E \setminus \{\sup E\}$ (соотв. слева в точке $t \in E \setminus \{\inf E\}$) тогда и только тогда, когда его функция вариации φ обладает этим же свойством в точке t.*

(b) *Отображение ограниченной вариации f непрерывно на E за исключением, быть может, не более чем счетного множества точек из E.*

Доказательство. (a) Если t — изолированная (т. е. не предельная) точка множества E, то утверждение очевидно. Если $t \in E'$, то $t \in E_t^{-\prime}$ или $t \in E_t^{+\prime}$; в этом случае утверждение (a) вытекает из леммы 4.2(a), (b).

(b) Неубывающая ограниченная функция φ имеет на E не более чем счетное множество точек разрыва, а в силу (a) множества точек разрыва отображения f и функции φ совпадают. $\square$

Лемма 4.4 *Пусть $t \in E$. Имеем:*

(a) *если $t \in E_t^{-\prime}$, то $V(f, E_t^-) - V(f, E_t^- \setminus t) = \varphi(t) - \varphi(t-) = \lim_{E \ni s \to t-0} V(f, E_s^t)$;*

(b) *если $t \in E_t^{+\prime}$, то $V(f, E_t^+) - V(f, E_t^+ \setminus t) = \varphi(t+) - \varphi(t) = \lim_{E \ni s \to t+0} V(f, E_t^s)$;*

(c) *f непрерывно слева в точке $t \in E_t^{-\prime}$ (соотв. справа в точке $t \in E_t^{+\prime}$) тогда и только тогда, когда $V(f, E_t^-) = V(f, E_t^- \setminus t)$ (соотв. $V(f, E_t^+) = V(f, E_t^+ \setminus t)$);*

здесь $\varphi(t\pm) = \lim_{E \ni s \to t \pm 0} \varphi(s) \in [0, \infty)$.

Доказательство. (a) Из свойства ($\mathrm{V6}_1$), где E заменено на $E_t^- \setminus t$, находим, что

$$V(f, E_t^- \setminus t) = \lim_{E \ni s \to t-0} V(f, (E_t^- \setminus t)_s^-) = \lim_{E \ni s \to t-0} V(f, E_s^-) = \varphi(t-),$$

поэтому из (V3) получаем:

$$\varphi(t) - \varphi(t-) = \lim_{E \ni s \to t-0} \bigl(V(f, E_t^-) - V(f, E_s^-)\bigr) = \lim_{E \ni s \to t-0} V(f, E_s^t).$$

(b) Из свойства ($\mathrm{V6}_2$), где E заменено на $E_t^+ \setminus t$, и свойства (V3) находим, что

$$\begin{aligned} V(f, E_t^+ \setminus t) &= \lim_{E \ni s \to t+0} V(f, (E_t^+ \setminus t)_s^+) = \lim_{E \ni s \to t+0} V(f, E_s^+) = \\ &= V(f, E) - \lim_{E \ni s \to t+0} V(f, E_s^-) = V(f, E_t^+) + \varphi(t) - \varphi(t+). \end{aligned}$$

Снова применяя (V3), получаем:

$$\varphi(t+) - \varphi(t) = \lim_{E\ni s\to t+0}\bigl(V(f,E_t^+) - V(f,E_s^+)\bigr) = \lim_{E\ni s\to t+0} V(f,E_t^s).$$

(c) вытекает из (a), (b) и теоремы 4.3(a). $\square$

Лемма 4.5 *Пусть точка $t \in E$ такая, что $t \in E_t^{-\prime} \cap E_t^{+\prime}$. Тогда*

(a) $V(f,E) = V(f,E_t^- \setminus t) + V(f,E_t^+ \setminus t) + \bigl(\varphi(t+) - \varphi(t-)\bigr)$, *причем f непрерывно в точке t тогда и только тогда, когда $V(f,E) = V(f,E_t^- \setminus t) + V(f,E_t^+ \setminus t)$;*

(b) $V(f,E) = V(f,E\setminus t) + \bigl(\varphi(t+) - \varphi(t-)\bigr) - \lim_{\substack{E\ni a\to t-0\\ E\ni b\to t+0}} V(f,E_a^b \setminus t)$, *причем если f непрерывно в точке t, то $V(f,E) = V(f,E\setminus t)$; обратное к последнему утверждение, вообще говоря, неверно.*

Доказательство. (a) Равенство в (a) получается сложением равенств (a) и (b) из леммы 4.4 и последующим применением (V3), а утверждение в (a) следует из леммы 4.4(c), равенства в (a) и неравенств $\varphi(t-) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(t+)$.

(b) Докажем вначале равенство в (b). Принимая во внимание (V3) и (4.5), для $a, b \in E$ таких, что $a < t < b$, имеем:

$$\begin{aligned} V(f,E) - V(f,E\setminus t) &= V(f,E_a^-) + V(f,E_a^b) + V(f,E_b^+) - \\ &\quad - \bigl(V(f,E_a^-) + V(f,E_a^b\setminus t) + V(f,E_b^+)\bigr) = \\ &= \varphi(b) - \varphi(a) - V(f,E_a^b\setminus t). \end{aligned}$$

Осталось учесть, что при $E \ni a \to t-0$, $E \ni b \to t+0$ имеет место (4.6) и

$$\varphi(b) - \varphi(a) \to \varphi(t+) - \varphi(t-) = \bigl(\varphi(t) - \varphi(t-)\bigr) + \bigl(\varphi(t+) - \varphi(t)\bigr). \tag{4.7}$$

Если f непрерывно в t, то предел (4.7) равен нулю в силу леммы 4.2(a), (b), а предел (4.6) равен нулю в силу леммы 4.2(c), откуда и следует первая часть утверждения в (b). Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: пусть, например, $E = [-1,1]$, $f : E \to \mathbb{R}$, $f = -1$ на $[-1,0)$, $f(0) = 0$, $f = 1$ на $(0,1]$ и $t = 0$ (см. формулу (4.9) ниже). $\square$

Из приведенных выше рассуждений сразу вытекает следующая

Теорема 4.6 *Пусть $f : E \to X$ — отображение ограниченной вариации. Тогда:*

(a) *если $t \in E_t^{-\prime}$, то* $V(f,E_t^-) = V(f,E_t^- \setminus t) + \lim_{E\ni s\to t-0} d(f(t),f(s))$;

(b) *если $t \in E_t^{+\prime}$, то* $V(f,E_t^+) = V(f,E_t^+ \setminus t) + \lim_{E\ni s\to t+0} d(f(s),f(t))$;

(c) *если же $t \in E_t^{-\prime} \cap E_t^{+\prime}$, то*

$$V(f,E) = V(f,E_t^- \setminus t) + V(f,E_t^+ \setminus t) + \lim_{E\ni s\to t-0} d(f(t),f(s)) + \lim_{E\ni s\to t+0} d(f(s),f(t)),$$

$$V(f,E) = V(f,E\setminus t) + \lim_{E\ni s\to t-0} d(f(t),f(s)) + \lim_{E\ni s\to t+0} d(f(s),f(t)) - \lim_{\substack{E\ni a\to t-0\\ E\ni b\to t+0}} d(f(b),f(a)),$$

$$V(f,E\setminus t) = V(f,E_t^- \setminus t) + V(f,E_t^+ \setminus t) + \lim_{\substack{E\ni a\to t-0\\ E\ni b\to t+0}} d(f(b),f(a)). \tag{4.8}$$

Замечание. Если X — полное метрическое пространство, то, с учетом леммы 4.1, формулы из теоремы 4.6 видоизменяются естественным образом: нужно знак предела "втащить" под знак метрики; так, например, равенство (4.8) примет следующий более приятный вид:

$$V(f,E) = V(f,E\setminus t) + d(f(t),f(t-)) + d(f(t+),f(t)) - d(f(t+),f(t-)). \tag{4.9}$$

Последнее равенство, а также и другие равенства из теоремы 4.6, представляют собой своего рода "предельные формы" более элементарных равенств. Если, например, $T \subset E$ есть множество из $(m+2)$-х точек

$$t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k \leqslant \ldots \leqslant t_{m-1} \leqslant t_m,$$

то, очевидно, что

$$V(f,T) = V(f,T\setminus t) + d(f(t),f(t_{k-1})) + d(f(t_k),f(t)) - d(f(t_k),f(t_{k-1})).$$

Это последнее равенство имеет "предел" в виде равенства (4.9).

Формулы из теоремы 4.6 интересны даже в случае отрезка $E=[a,b]$:

Следствие 4.7 *Пусть X — полное метрическое пространство и $f : E \to X$ — отображение ограниченной вариации. Тогда имеем:*

(a) $V(f,[a,t)) = V_a^t(f) - d(f(t),f(t-))$, $t\in(a,b]$;

(b) $V(f,(t,b]) = V_t^b(f) - d(f(t+),f(t))$, $t\in[a,b)$;

(c) $V_a^b(f) = V(f,[a,t)) + V(f,(t,b]) + d(f(t),f(t-)) + d(f(t+),f(t))$, $t\in(a,b)$;

(d) $V(f,[a,b]\setminus t) = V_a^b(f) - d(f(t),f(t-)) - d(f(t+),f(t)) + d(f(t+),f(t-))$, $t\in(a,b)$;

(e) $V(f,[a,b]\setminus t) = V(f,[a,t)) + V(f,(t,b]) + d(f(t+),f(t-))$, $t\in(a,b)$;

(f) $V(f,(a,b)) = V_a^b(f) - d(f(a+),f(a)) - d(f(b),f(b-))$. $\square$

Замечание. Эти же самые формулы из следствия 4.7 получены также в работе [6] из несколько других соображений. Они не имеют аналогов для вариации в смысле Винера [4], называемой также p-вариацией, если $p>1$.

5 Принцип выбора Хелли

Основной результат этого параграфа — это теорема о компактности для отображений ограниченной вариации, которая является обобщением на метрически- и банахово-значные отображения классического принципа выбора Хелли (см., например, [1, Гл. 8, § 4, теорема Хелли]).

Теорема 5.1 *Пусть K — компактное подмножество метрического пространства X и $\mathcal{F} \subset C([a,b];K)$ — бесконечное семейство непрерывных отображений из отрезка $[a,b]$ в K равномерно ограниченной вариации, т. е. $\sup_{f\in\mathcal{F}} V_a^b(f) < \infty$. Тогда найдется последовательность отображений $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$, которая поточечно на $[a,b]$ сходится к некоторому отображению $f : [a,b] \to K$ ограниченной вариации, такому, что $V_a^b(f) \leqslant \sup_{f_1\in\mathcal{F}} V_a^b(f_1)$.*

Более того, если X — банахово пространство (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), то условие непрерывности отображений из семейства $\mathcal{F}$ излишне.

Доказательство. *Шаг 1* (*общая часть*). По теореме 3.1 любое отображение $f \in \mathcal{F}$ может быть представлено в виде $f = g_f \circ \varphi_f$ на $[a,b]$, где $\varphi_f(t) = V_a^t(f)$, $t \in [a,b]$, и $g_f : E_{1f} = \varphi_f([a,b]) \to K$ — липшицево отображение с константой $\mathrm{Lip}(g_f) \leqslant 1$. Заметим, что φ_f — неубывающая, неотрицательная и $\varphi_f(a) = 0$. Семейство неубывающих функций $\{\,\varphi_f \mid f \in \mathcal{F}\,\}$ бесконечно и равномерно ограничено на $[a,b]$ (поскольку $\omega(\varphi_f,[a,b]) = \varphi_f(b) = V_a^b(f)$), поэтому в силу известного факта из [1, Гл. 8, § 4, Лемма 2] это семейство содержит последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, отвечающую разложению $f_n = g_n \circ \varphi_n$ (т. е. $\varphi_n = \varphi_{f_n}$ и $g_n = g_{f_n}$) для всех $n \in \mathbb{N}$, которая поточечно на $[a,b]$ сходится к некоторой неубывающей (и ограниченной) функции $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Положим $\ell = V_a^b(\varphi) = \varphi(b)$, так что $0 \leqslant \ell < \infty$, причем если $\ell_n = V_a^b(f_n) = V_a^b(\varphi_n) = \varphi_n(b)$, то $\ell_n \to \ell$ при $n \to \infty$.

Шаг 2. Пусть выполнены условия первой части теоремы. Т. к. $f_n \in \mathcal{F}$ непрерывно, то и φ_n также непрерывно на $[a,b]$ (теорема 4.3(a)), а потому липшицево отображение g_n определено на отрезке $E_{1n} = \varphi_n([a,b]) = [0,\ell_n]$. Если $\ell_n \geqslant \ell$, то мы будем рассматривать g_n только на отрезке $[0,\ell]$, а если $\ell_n < \ell$, то продолжим g_n на $(\ell_n,\ell]$ следующим образом: $g_n(\tau) = g_n(\ell_n)$ для $\tau \in (\ell_n,\ell]$. По теореме Арцела-Асколи последовательность липшицевых отображений $g_n : [0,\ell] \to K$ с константами $\mathrm{Lip}(g_n) \leqslant 1$ предкомпактна в $C([0,\ell];K)$, поэтому она содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{g_{n_k}\}_{k=1}^\infty$. Если $g : [0,\ell] \to K$ есть равномерный предел $\{g_{n_k}\}$, то ясно, что g — липшицево с константой $\mathrm{Lip}(g) \leqslant 1$, так что в силу леммы 3.2 композиция $f = g \circ \varphi : [a,b] \to X$ есть отображение ограниченной вариации. Если теперь $t \in [a,b]$, то имеем:

$$\begin{aligned} d(f_{n_k}(t), f(t)) &= d\big((g_{n_k} \circ \varphi_{n_k})(t), (g \circ \varphi)(t)\big) \leqslant \\ &\leqslant d\big(g_{n_k}(\varphi_{n_k}(t)), g_{n_k}(\varphi(t))\big) + d\big(g_{n_k}(\varphi(t)), g(\varphi(t))\big) \leqslant \\ &\leqslant |\varphi_{n_k}(t) - \varphi(t)| + d\big(g_{n_k}(\varphi(t)), g(\varphi(t))\big). \end{aligned}$$

Слагаемые последней суммы стремятся к нулю при $k \to \infty$, поэтому последовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ поточечно на $[a,b]$ сходится к f. Неравенство в теореме вытекает из свойства (V7).

Шаг 3. Пусть X — банахово пространство. Прежде чем доказывать, что предположение о непрерывности семейства $\mathcal{F}$ можно опустить, покажем, что если $g : E \to X$ — липшицево отображение, то его можно продолжить на $\mathbb{R}$ до липшицева отображения $\widetilde{g} : \mathbb{R} \to X$ такого, что $\mathrm{Lip}(\widetilde{g}) \leqslant \mathrm{Lip}(g)$.

Поскольку отображение g равномерно непрерывно на E, оно допускает продолжение $g_1 : \overline{E} \to X$ на замыкание $\overline{E}$ множества E, так что g_1 — липшицево и $\mathrm{Lip}(g_1) \leqslant \mathrm{Lip}(g)$. Положим $\widetilde{g} = g_1$ на $\overline{E}$. Дополнение $\mathbb{R} \setminus \overline{E}$ множества $\overline{E}$ в $\mathbb{R}$ открыто, и, значит, является не более чем счетным объединением непересекающихся открытых интервалов (a_k, b_k). На ограниченных интервалах (a_k, b_k) определим $\widetilde{g}$ следующим образом:

$$\widetilde{g}(t) = g_1(a_k) + \mu_k(t - a_k), \quad \mu_k := \frac{g_1(b_k) - g_1(a_k)}{b_k - a_k}, \quad t \in (a_k, b_k).$$

Если $a_k = -\infty$, то полагаем $\widetilde{g}(t) = g_1(b_k)$ для всех $t \in (-\infty, b_k]$, а если $b_k = \infty$, то полагаем $\widetilde{g}(t) = g_1(a_k)$ для всех $t \in [a_k, \infty)$.

Если $\|\cdot\|$ обозначает норму в X, то $\|\mu_k\| \leqslant \mathrm{Lip}(g_1) \leqslant \mathrm{Lip}(g)$, поэтому в случае, когда $b_k - a_k < \infty$, для всех t, $s \in [a_k, b_k]$ имеем:

$$\|\widetilde{g}(t) - \widetilde{g}(s)\| = \|\mu_k\| \cdot |(t - a_k) - (s - a_k)| \leqslant \mathrm{Lip}(g) \cdot |t - s|.$$

Заметим, что если $a_k = -\infty$ (или $b_k = \infty$), то $\widetilde{g}$ есть постоянное отображение на $(-\infty, b_k]$ (или на $[a_k, \infty)$).

Осталось проверить, что $\widetilde{g}$ — липшицево отображение на $\mathbb{R}$. Возможны три случая: 1) $t \in \overline{E}$, $s \in \overline{E}$; 2) $t \in \overline{E}$, $s \notin \overline{E}$; и 3) $t \notin \overline{E}$, $s \notin \overline{E}$. Случай 1) ясен из сказанного выше. В случае 2) предположим, что $s \in (a_k, b_k)$ и $b_k \leqslant t$. Тогда в силу неравенства треугольника получаем:

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{g}(t) - \widetilde{g}(s)\| &\leqslant \|g_1(t) - g_1(b_k)\| + \|g_1(b_k) - \widetilde{g}(s)\| \leqslant \\
&\leqslant \mathrm{Lip}(g) \cdot \big((t - b_k) - (b_k - s)\big) = \\
&= \mathrm{Lip}(g) \cdot |t - s|.
\end{aligned}$$

В случае 3) предположим, что $t \in (a_m, b_m)$, $s \in (a_k, b_k)$ и $b_k \leqslant a_m$. Снова в силу неравенства треугольника находим, что

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{g}(t) - \widetilde{g}(s)\| &\leqslant \|\widetilde{g}(t) - g_1(a_m)\| + \|g_1(a_m) - g_1(b_k)\| + \|g_1(b_k) - \widetilde{g}(s)\| \leqslant \\
&\leqslant \mathrm{Lip}(g) \cdot \big((t - a_m) + (a_m - b_k) + (b_k - s)\big) = \\
&= \mathrm{Lip}(g) \cdot |t - s|.
\end{aligned}$$

Шаг 4. Пусть X — банахово пространство и $\mathcal{F}$ — бесконечное семейство отображений из $[a, b]$ в K равномерно ограниченной вариации. Вначале мы рассуждаем как в шаге 1. Заметим, что в нашем случае $E_{1n} = \varphi_n([a, b]) \subset [0, \ell_n]$. К тому же, если $L = \sup_{n \in \mathbb{N}} \ell_n$, то $0 \leqslant L < \infty$ и $\ell = \lim_{n \to \infty} \ell_n \leqslant L$. Обозначим через $\overline{g_n}$ сужение на $[0, L]$ отображения $\widetilde{g_n}$ из шага 3. По теореме Арцела-Асколи последовательность липшицевых отображений $\overline{g_n} : [0, L] \to K$ с константами Липшица $\mathrm{Lip}(\overline{g_n}) \leqslant 1$ имеет равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{\overline{g_{n_k}}\}_{k=1}^{\infty}$, равномерный предел которой мы обозначим через $\overline{g}$. Ясно, что $\overline{g} : [0, L] \to K$ — липшицево отображение с константой $\mathrm{Lip}(\overline{g}) \leqslant 1$. Положим $E_1 = \varphi([a, b])$ и обозначим через g — сужение $\overline{g}$ на E_1. В силу леммы 3.2 отображение $f = g \circ \varphi : [a, b] \to K$ имеет ограниченную вариацию. Если теперь $t \in [a, b]$, то также, как в шаге 2, имеем:

$$\begin{aligned} d(f_{n_k}(t), f(t)) &= d\big(\overline{g_{n_k}}(\varphi_{n_k}(t)), \overline{g}(\varphi(t))\big) \leqslant \\ &\leqslant |\varphi_{n_k}(t) - \varphi(t)| + d\big(\overline{g_{n_k}}(\varphi(t)), \overline{g}(\varphi(t))\big), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство. □

Замечания. 1) Остается открытым вопрос о том, можно ли условие “$\mathcal{F} \subset K^{[a,b]}$, где $K \subset X$ компактно” в теореме 5.1 заменить на более слабое условие: “при любом $t \in [a, b]$ сечение $\mathcal{F}(t) = \{ f(t) \in X \mid f \in \mathcal{F} \}$ предкомпактно в X”.

2) Предположение о непрерывности семейства $\mathcal{F}$ еще не означает, что предельное отображение f также непрерывно. Действительно, последовательность $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R}$, определенная правилом

$$f_n(t) = \begin{cases} t^n, & \text{если} \quad t \in [0, 1], \\ (2 - t)^n, & \text{если} \quad t \in [1, 2], \end{cases}$$

сходится при $n \to \infty$ поточечно к разрывной функции f, равной нулю вне точки $t = 1$ и равной 1 в точке $t = 1$.

6 Селекции многозначных отображений

Вначале мы напомним некоторые понятия и факты из теории многозначных отображений (подробнее см. [8, Гл. 2, § 1] и [9, Гл. 1, §§ 1, 5]).

Пусть A, $B \subset X$ — два непустых подмножества метрического пространства (X, d). *Доступом множества A к множеству B* называется величина

$$\mathrm{e}(A, B) = \sup_{x \in A} \mathrm{dist}(x, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y) \in [0, \infty],$$

и *хаусдорфово расстояние D между A и B* определяется равенством:

$$D(A, B) = \max\{ \mathrm{e}(A, B), \ \mathrm{e}(B, A) \}.$$

Если A, B, $C \subset X$ — непустые множества, то: $\mathrm{e}(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда A содержится в замыкании B, и $\mathrm{e}(A, B) \leqslant \mathrm{e}(A, C) + \mathrm{e}(C, B)$. Следовательно, D есть *преводометрика* на множестве всех непустых замкнутых подмножеств X, т. е. D удовлетворяет всем аксиомам метрики и возможно принимает бесконечные значения. Отображение D является *метрикой* на множестве всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств, и, в частности, на множестве всех непустых компактных подмножеств X.

Пусть E и X — два метрических пространства, 2^X — множество всех подмножеств X и $\dot{2}^X = 2^X \setminus \{\varnothing\}$. *Многозначным отображением из E в X* называется отображение $F : E \to 2^X$, которое каждой точке $t \in E$ ставит в соответствие множество $F(t) \subset X$. *Графиком* (или графом) F называется множество $\mathrm{Gr}(F) = \{\,(t,x) \in E \times X \mid x \in F(t)\,\}$, а *областью значений* F — множество $R(F) = \bigcup_{t\in E} F(t)$, так что $R(F) \subset X$.

Многозначное отображение $F : E \to \dot{2}^X$ называется

(a) *непрерывным* (*по Хаусдорфу*) *в точке* $t_0 \in E$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $D(F(t), F(t_0)) \leqslant \varepsilon$ для всех $t \in E$, $d(t, t_0) \leqslant \delta$;

непрерывным (*по Хаусдорфу*) на множестве E, если оно непрерывно в каждой точке $t_0 \in E$;

(b) *непрерывным по Липшицу на* E, если найдется постоянная $L \geqslant 0$ такая, что $D(F(t), F(s)) \leqslant Ld(t,s)$ для всех t, $s \in E$. Наименьшая постоянная L с указанным свойством называется *константой Липшица* F и обозначается через $\mathrm{Lip}(F)$;

(c) *компактнозначным*, если $F(t)$ есть компактное подмножество X при любом $t \in E$;

(d) *компактным*, если его график $\mathrm{Gr}(F)$ является компактом в $E \times X$ (в этом случае, F также компактнозначно, но не наоборот);

(e) *отображением ограниченной вариации на отрезке* $E = [a,b] \subset \mathbb{R}$, если

$$V_a^b(F) := \sup\{\, V_D(F,T) \mid T \in \mathcal{T}_a^b \,\} < \infty,$$

где

$$V_D(F,T) = \sum_{i=1}^{m} D(F(t_i), F(t_{i-1})), \qquad T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}_a^b;$$

(f) $\delta(\,\cdot\,)$-*абсолютно непрерывным отображением на отрезке* $[a,b]$, если для некоторой функции $\delta : (0,\infty) \to (0,\infty)$, любого $\varepsilon > 0$ и любого конечного набора $a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant \ldots \leqslant a_N < b_N \leqslant b$ из условия $\sum_{n=1}^N (b_n - a_n) \leqslant \delta$ вытекает, что $\sum_{n=1}^N D(F(b_n), F(a_n)) \leqslant \varepsilon$.

Будем говорить, что многозначное отображение $F : E \to \dot{2}^X$ имеет (регулярную) *селекцию*, если существует отображение $f : E \to X$ такое, что $f(t) \in F(t)$ для всех $t \in E$.

Известно, что (см. [9, Гл. 1, § 5, Следствие 1]) многозначное компактнозначное отображение $F : E \to \dot{2}^X$ непрерывно (по Хаусдорфу) на E, если и только если оно одновременно полунепрерывно сверху и полунепрерывно снизу в каждой точке $t_0 \in E$.

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что $E = [a,b]$ есть отрезок прямой.

Теорема 6.1 *Пусть X — банахово пространство (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) с нормой $\|\cdot\|$, $F : [a,b] \to \dot{2}^X$ — компактное многозначное отображение, $t_0 \in [a,b]$ и $x_0 \in F(t_0)$. Имеем:*

(a) *если F — непрерывно по Липшицу на $[a,b]$, то существует липшицева селекция $f : [a,b] \to X$, такая, что $\mathrm{Lip}(f) \leqslant \mathrm{Lip}(F)$ и $f(t_0) = x_0$;*

(b) *если F — отображение ограниченной вариации на $[a,b]$, то существует селекция $f : [a,b] \to X$ ограниченной вариации, такая, что $V_a^b(f) \leqslant V_a^b(F)$ и $f(t_0) = x_0$;*

(c) *если в условиях* (b) *F еще и непрерывно, то в дополнение селекцию f можно выбрать непрерывной;*

(d) *если F — $\delta(\cdot)$-абсолютно непрерывно на $[a,b]$, то существует $\delta(\cdot)$-абсолютно непрерывная селекция $f : [a,b] \to X$, удовлетворяющая неравенству в* (b) *и такая, что $f(t_0) = x_0$.*

Доказательство. (a) Разобьем доказательство на два шага.

1. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ пусть $T_n = \{t_i^n\}_{i=0}^n \in \mathcal{T}_a^b$ есть разбиение отрезка $[a,b]$ со свойствами:

1) $t_0 \in T_n$, т. е. $t_0 = t_{k(n)}^n$ для некоторого $k(n) \in \{0, 1, \dots, n\}$;

2) если $\lambda(T_n) := \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(t_i^n - t_{i-1}^n)$, то $\lambda(T_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

По индукции определим элементы $x_i^n \in F(t_i^n)$ следующим образом. Пусть $n \in \mathbb{N}$, и пусть вначале $a < t_0 < b$.

a) Положим $x_{k(n)}^n = x_0$.

b) Если $i \in \{1, \dots, k(n)\}$ и элемент $x_i^n \in F(t_i^n)$ уже определен, выберем элемент $x_{i-1}^n \in F(t_{i-1}^n)$ так, чтобы $\|x_i^n - x_{i-1}^n\| = \mathrm{dist}(x_i^n, F(t_{i-1}^n))$.

c) Если $i \in \{k(n)+1, \dots, n\}$ и элемент $x_{i-1}^n \in F(t_{i-1}^n)$ уже определен, выберем $x_i^n \in F(t_i^n)$ так, чтобы $\|x_{i-1}^n - x_i^n\| = \mathrm{dist}(x_{i-1}^n, F(t_i^n))$.

Если теперь $t_0 = a$, т. е. $k(n) = 0$, то определяем x_i^n согласно a) и c), а если $t_0 = b$, так что $k(n) = n$, то определяем x_i^n, следуя a) и b).

Наконец, определим последовательность отображений $f_n : [a,b] \to X$, $n \in \mathbb{N}$, следующим образом:

$$f_n(t) = x_{i-1}^n + \frac{t - t_{i-1}^n}{t_i^n - t_{i-1}^n}(x_i^n - x_{i-1}^n), \quad t \in [t_{i-1}^n, t_i^n], \quad i = 1, \dots, n. \tag{6.1}$$

Отметим, что $f_n(t_0) = x_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а также, как следует из b) и c) — что:

$$\begin{aligned} \|x_i^n - x_{i-1}^n\| &\leqslant D(F(t_i^n), F(t_{i-1}^n)) \leqslant &(6.2)\\ &\leqslant \mathrm{Lip}(F) \cdot (t_i^n - t_{i-1}^n). &(6.3)\end{aligned}$$

2. Во-первых, заметим, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равностепенно липшицева с константами $\mathrm{Lip}(f_n) \leqslant \mathrm{Lip}(F)$. Действительно, если $t,\ s \in [t_{i-1}^n, t_i^n]$, то в силу (6.1) и (6.3) найдем, что

$$\| f_n(t) - f_n(s) \| \leqslant \frac{\| x_i^n - x_{i-1}^n \|}{t_i^n - t_{i-1}^n} \cdot |t-s| \leqslant \mathrm{Lip}(F) \cdot |t-s|,$$

откуда вытекает, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна на отрезке $[a,b]$.

Во-вторых, при каждом $t \in [a,b]$ последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ предкомпактна в X. Действительно, если $t \in [a,b]$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется номер $i(n) \in \{1, \ldots, n\}$ такой, что $t_{i(n)-1}^n \leqslant t \leqslant t_{i(n)}^n$, поэтому $t_{i(n)-1}^n$ и $t_{i(n)}^n$ стремятся к t при $n \to \infty$ в силу условия 2). Из (6.3) вытекает, что

$$\left\| \frac{t - t_{i(n)-1}^n}{t_{i(n)}^n - t_{i(n)-1}^n} (x_{i(n)}^n - x_{i(n)-1}^n) \right\| \leqslant \mathrm{Lip}(F) \cdot |t - t_{i(n)-1}^n| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поскольку F имеет компактный график и $x_{i(n)-1}^n \in F(t_{i(n)-1}^n)$, то существует подпоследовательность в $(t_{i(n)-1}^n, x_{i(n)-1}^n) \in \mathrm{Gr}(F)$ (за которой мы сохраним прежнее обозначение), которая сходится в $[a,b] \times X$ к некоторой точке $(\tau, x) \in \mathrm{Gr}(F)$. Но $t_{i(n)-1}^n \to t$ при $n \to \infty$, поэтому $\tau = t$, так что $(t,x) \in \mathrm{Gr}(F)$ или $x \in F(t)$. Итак, $f_n(t) \to x$ в X при $n \to \infty$, где $x \in F(t)$, и, значит, $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ предкомпактна в X.

По теореме Арцела-Асколи последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ предкомпактна в пространстве $C([a,b];X)$, поэтому некоторая ее подпоследовательность равномерно на $[a,b]$ сходится к отображению $f : [a,b] \to X$. Ясно, что f — липшицево, $f(t_0) = x_0$, $f(t) \in F(t)$ для всех $t \in [a,b]$ и $\mathrm{Lip}(f) \leqslant \mathrm{Lip}(F)$.

(b) Вначале мы рассуждаем как в шаге 1 доказательства пункта (a) до неравенства (6.2) включительно. Напомним, что если $h : [\alpha, \beta] \to X$ — непрерывно дифференцируемое отображение (а X даже не обязательно полно), то $V_\alpha^\beta(h) = \int_\alpha^\beta \| h'(\tau) \| \, d\tau$ (см., например, [6, теорема 8.7(b)]). Теперь заметим, что отображения $f_n : [a,b] \to X$ непрерывны и сужения f_n на каждый отрезок $[t_{i-1}^n, t_i^n]$ непрерывно дифференцируемы, а в силу (V3) и (6.2) находим, что

$$\begin{aligned}
V_a^b(f_n) &= \sum_{i=1}^n V_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}(f_n) = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \| f_n'(t) \| \, dt = \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \frac{\| x_i^n - x_{i-1}^n \|}{t_i^n - t_{i-1}^n} \, dt = \sum_{i=1}^n \| x_i^n - x_{i-1}^n \| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n D(F(t_i^n), F(t_{i-1}^n)) = V_D(F, T_n) \leqslant \\
&\leqslant V_a^b(F) < \infty \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Образ каждого отображения f_n содержится в замкнутой выпуклой оболочке $\overline{\mathrm{co}} R(F)$ области значений отображения F, но F — компактно, поэтому $R(F)$ тоже компактно в X, а значит (см. лемму 6.2 ниже), и $\overline{\mathrm{co}}R(F)$ — компактно. Применяя принцип выбора Хелли (теорема 5.1), найдем, что существует подпоследовательность в $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (обозначаемая тем же символом), которая поточечно на $[a,b]$ сходится к некоторому отображению $f:[a,b]\to X$ ограниченной вариации. Ясно, что $f(t_0)=x_0$ и что f есть селекция F, и осталось заметить, что в силу (V7) имеем:

$$V_a^b(f)\leqslant\liminf_{n\to\infty}V_a^b(f_n)\leqslant V_a^b(F).$$

(c) По лемме 3.3 мы имеем разложение $F=G\circ\varphi$ на $[a,b]$, где $\varphi(t)=V_a^t(F)$, $t\in[a,b]$, есть ограниченная неубывающая непрерывная функция, а $G:[0,\ell]=\varphi([a,b])\to\dot{2}^X$ — непрерывное по Липшицу многозначное отображение с $\ell=V_a^b(F)$ и $\mathrm{Lip}(G)\leqslant 1$.

Так как F — компактное отображение, то G также компактно. Действительно, рассмотрим последовательность $\{(\tau_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathrm{Gr}(G)$; тогда $\tau_n=\varphi(t_n)$ для некоторого $t_n\in[a,b]$ и $y_n\in G(\varphi(t_n))=F(t_n)$, т. е. $\{(t_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathrm{Gr}(F)$. Из компактности F вытекает, что найдется подпоследовательность в $\{(t_n,y_n)\}$ (за которой сохраним прежнее обозначение) такая, что $t_n\to t$ и $y_n\to y$ при $n\to\infty$, где $y\in F(t)$. Положим $\tau=\varphi(t)$. Так как φ непрерывна, то (τ_n,y_n) сходится к $(\tau,y)\in\mathrm{Gr}(G)$, что и требовалось.

Замечая, что $x_0\in F(t_0)=G(\tau_0)$, где $\tau_0=\varphi(t_0)$, в силу пункта (a) найдем липшицево отображение $g:[0,\ell]\to X$ со свойствами: $g(\tau_0)=x_0$, $g(\tau)\in G(\tau)$ для всех $\tau\in[0,\ell]$ и $\mathrm{Lip}(g)\leqslant\mathrm{Lip}(G)\leqslant 1$.

Положим $f=g\circ\varphi$. По лемме 3.2(a) отображение $f:[a,b]\to X$ имеет ограниченную вариацию и непрерывно, $f(t_0)=x_0$ и $f(t)=g(\varphi(t))\in G(\varphi(t))=F(t)$ для всех t. Наконец, из свойства (V4) и неравенства (3.3) находим, что

$$V_a^b(f)=V_a^b(g\circ\varphi)=V_0^\ell(g)\leqslant\ell\cdot\mathrm{Lip}(g)\leqslant\ell=V_a^b(F). \tag{6.4}$$

(d) Здесь доказательство такое же, как в (c), если принять во внимание следующие изменения. 1) В разложении $F=G\circ\varphi$ в силу леммы 3.3 функция φ является неубывающей и $\delta(\,\cdot\,)$-абсолютно непрерывной. 2) Если положить $f=g\circ\varphi$, то из леммы 3.2(c) (особенно конца доказательства этой леммы) и условия $\mathrm{Lip}(g)\leqslant 1$ заключаем, что f есть $\delta(\,\cdot\,)$-абсолютно непрерывная селекция F, для которой сохраняется неравенство (6.4). $\square$

Замечание. Пункты (a) и (c) теоремы 6.1 обобщают результаты [10] и [11] на бесконечномерный случай банаховых пространств без условия выпуклости отображения F. Пункт (a) установлен другим способом в [12, теорема Д 1.8], где также в предположениях пункта (c) из других соображений показано, что отображение F имеет непрерывную селекцию f. Пункт (c) уточняет последнее наблюдение: а именно, F имеет непрерывную селекцию f ограниченной вариации. Пункт (d) теоремы 6.1 обобщает лемму 1 в [13], которая доказана там в конечномерном случае $X=\mathbb{R}^d$ ($d\in\mathbb{N}$). Пункт (b) и пункт (c) теоремы 6.1, принцип выбора Хелли (теорема 5.1) и теорема 3.1 о структуре являются новыми. Следует отметить, что компактные непрерывные многозначные отображения $F:E\to\dot{2}^{\mathbb{R}^d}$ могут не иметь непрерывных селекций даже в случае, когда E есть отрезок в $\mathbb{R}$ (см. [10], [9, Гл. 1, § 6] и [4, § 8]), а также в случае, когда $E \subset \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ есть компакт и F непрерывно по Липшицу (см. [10] и [14]).

В заключение этого параграфа мы установим вспомогательную лемму, которая использовалась в доказательстве пункта (b) теоремы 6.1.

Лемма 6.2 *Если R — вполне ограниченное подмножество линейного нормированного пространства X, то его выпуклая оболочка* $\mathrm{co}(R)$ *также вполне ограничена.*

Доказательство. 1. Вначале докажем, что выпуклая оболочка $\mathrm{co}(K)$ конечного множества K вполне ограничена.

Пусть $K = \{\, x_1, \ldots, x_n \,\}$. Тогда $\mathrm{co}(K) = \{\, \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A \,\}$, где

$$A = \Big\{\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n. \Big\}$$

Положим $C = 1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\, x_i \,\|^2}$. Покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ для множества $\mathrm{co}(K)$ существует конечная ε-сеть. Множество A компактно, поэтому для него существует конечная (ε/C)-сеть $\{\, \beta_j = (\beta_{j1}, \ldots, \beta_{jn}) \,\}_{j=1}^m \subset \mathbb{R}^n$, а тогда множество $L = \{\, \sum_{i=1}^n \beta_{ji} x_i \,\}_{j=1}^m$ является конечной ε-сетью для $\mathrm{co}(K)$. Действительно, если $x \in \mathrm{co}(K)$, то $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ для некоторого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A$, а потому, в частности, $\sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_{ki}|^2} < \varepsilon/C$ при некотором $1 \leqslant k \leqslant m$. Тогда $y = \sum_{i=1}^n \beta_{ki} x_i \in L$ и

$$\begin{aligned} \|\, x - y \,\| &= \Big\| \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_{ki}) x_i \Big\| \leqslant \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_{ki}| \cdot \|\, x_i \,\| \leqslant \\ &\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_{ki}|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\, x_i \,\|^2} < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Если при любом $\varepsilon > 0$ множество $M \subset X$ имеет вполне ограниченную ε-сеть, то оно вполне ограничено.

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$, P — вполне ограниченная $\varepsilon/2$-сеть для M, и Q — конечная $\varepsilon/2$-сеть для P. Тогда Q есть конечная ε-сеть для M, поскольку для любого $x \in M$ найдется $y \in P$ такое, что $\|\, x - y \,\| < \varepsilon/2$, а для y найдется $z \in Q$ такое, что $\|\, y - z \,\| < \varepsilon/2$, откуда $\|\, x - z \,\| < \varepsilon$.

3. Для доказательства леммы предположим, что $\varepsilon > 0$ и K — конечная ε-сеть для R, и покажем, что $\mathrm{co}(K)$ является ε-сетью для $\mathrm{co}(R)$. Пусть $r \in \mathrm{co}(R)$, тогда $r = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$ для некоторых $\{r_i\}_{i=1}^n \subset R$ и $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A$. Пусть $x_1, \ldots, x_n \in K$ такие точки, что $\|\, r_i - x_i \,\| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $x := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in \mathrm{co}(K)$ и

$$\|\, r - x \,\| = \Big\| \sum_{i=1}^n \alpha_i (r_i - x_i) \Big\| < \Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i \Big) \varepsilon = \varepsilon.$$

Итак, при любом $\varepsilon > 0$ множество $\mathrm{co}(K)$ является ε-сетью для $\mathrm{co}(R)$. Но в силу шага 1 $\mathrm{co}(K)$ вполне ограничено, а тогда в силу шага 2 множество $M = \mathrm{co}(R)$ также вполне ограничено. $\square$

Список литературы

[1] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

[2] Шварц Л. Анализ. Том 1. М.: Мир, 1972.

[3] Wiener N. The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients // Massachusetts J. Math. and Phys. 1924. V. 3. P. 72–94.

[4] Chistyakov V. V., Galkin O. E. On maps of bounded p-variation with $p > 1$ // Positivity 1998. V. 2. No. 1. P. 19–45.

[5] Young L. C. Sur une généralisation de la notion de variation de puissance p-ième bornée au sens de N. Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier // C. R. Acad. Sci., Paris. 1937. V. 204. No. 7. P. 470–472.

[6] Chistyakov V. V. On mappings of bounded variation // J. Dynamical and Control Systems. 1997. V. 3. No. 2. P. 1–30.

[7] Чистяков В. В. Вариация. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.

[8] Castaing C., Valadier M. Convex Analysis and Measurable Multifunctions. Lecture Notes in Math., Vol. **580**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[9] Aubin J.-P., Cellina A. Differential Inclusions: Set-valued Maps and Viability Theory. Grundlehren der math. Wissenschaften, Vol. **264**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1984.

[10] Hermes H. On continuous and measurable selections and the existence of solutions of generalized differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 29. No. 3. P. 535–542.

[11] Kikuchi N., Tomita Y. On the absolute continuity of multifunctions and orientor fields // Funkc. Ekvacioj. 1971. V. 14. No. 3. P. 161–170.

[12] Мордухович Б. Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988.

[13] Zhu Qiji. Single valued representation of absolutely continuous set-valued mappings // Kexue Tongbao. 1986. V. 31. P. 443–446.

[14] Nadler S. B. Multi-valued contraction mappings. Pacific J. Math. 1969. V. 30. P. 475–488.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию 09.09.1997