**файл СтатьяИСпоМарковицу.doc**

**Савватеев В.В. (Москва)**

**Формирование оптимального портфеля ценных бумаг по методу Г. Марковица**

**с помощью изучения отображения границы области дележей**

**на плоскость «доходность – риск»**

*Рассматриваются особенности компьютерной реализации метода Г. Марковица для использова­ния в учебном процессе. Ключевые слова: МЕТОД МАРКОВИЦА, ОТОБРАЖЕНИЯ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ.*

Метод Гарри Марковица, предложенный им в 1952 году [ 1 ], подразумевает оптимизацию портфеля ценных бумаг (например, акций нескольких фирм, регулярно выплачивающих дивиденды) в два этапа. Сна­ча­ла обрабатывается информация о реально выплаченных дивидендах фирм, акции которых мы собира­емся включить в портфель, и на ее основе выделяется множество неулучшаемых портфелей. (По современной терминологии [ 2 ], на плоскости «доходность – риск» выделяются Парето-оптимальные точки). На втором этапе конкретный инвестор с учетом своих индивидуальных предпочтений и особенностей из Парето-оптимальных точек (которые лежат на правой нижней части множества достижимых портфелей плоскости «доходность – риск») выбирает наиболее подходящий для него портфель. Несмотря на ясный логический смысл показателей, использованных Марковицем, и математическую прозрачность процедуры выделения неулучшаемых портфелей, ее конкретное выполнение является технически сложным (за исключением портфелей простейшего типа, сформированных всего из двух акций – см. [ 3 ], [ 4 ]). Даже оптимизация портфеля на основе акций трех фирм приводит к объемистым расчетам , для удобного проведения которых требуется разработка специальной информационной системы (ИС) – например, подготовка специфической вычислительной среды на основе пакета электронных таблиц Excel. Отдельного внимания заслуживает проблема обучения специалистов методу Марковица, так как зачастую простая, в общем, суть метода тонет среди необъятных вычислений. В данной статье предлагается метод построения множества достижимых портфелей на плоскости «доходность – риск», который во многих случаях (но не всегда) позволяет отсечь многие заведомо неподходящие способы формирования портфеля.

Напомним понятие «дележа», широко используемое в экономике ([ 4 ], рис. 2.25). Дележом данной суммы денег S на n частей называется разбиение единицы на n неотрицательных слагаемых x1 , x2 , x3, … , xn, называемых «долями дележа». Например, если инвестор выделил для покупки акций фирм А, В, С сумму S = 100 млн. руб., и затем купил на 10 млн. акции фирмы А, на 70 млн. акции фирмы В и на 20 млн. акции С, то n=3, x1=0,1, x2=0,7и x3= 0,2. Выбор разбиения является, таким образом, выбором структуры портфеля. Для обзора всех возмож­ных разбиений будем использовать геометрический язык. Так, разбиение на два слагаемых изображается точками отрезка, на три – точками треугольника, на четыре – точками тетраэдра. Как отмечено в [ 3 ] (стр.59), для хорошей диверсификации портфеля рекомендуется включать в него 30 – 40 акций различных фирм. Поэтому в общем случае разбиение изображается внутренними и граничными точ­ками n-мерного симплекса. Они отвечают уравнению x1 + x2 + x3 + … + xn+1 = 1, рассматриваемому в первом ортанте (n+1)- мерного пространства. Если точка попадает на границу симплекса, то одно или несколько слагаемых в этом уравнении равно нулю, то есть портфель формируется не из акций n различных фирм, а из меньшего их количес­тва. Центру симплекса соответствует равное выделение сумм для покупки акций всех n фирм.

В методе Марковица процент доходности по акциям данной фирмы считается случайной величи­ной, подчиняющейся нормальному закону распределения. Считается, что мы знаем (или можем достоверно оценить по опубликованным данным) математическое ожидание М и среднее квадратичное отклонение σ (обозначаемое **с.к.о.**) этой случайной величины. Кроме этого, для акций, из которых формируется порт­фель, считается известной матрица взаимных ковариаций cov(i,j) и матрица взаимных корреляций rij (при этом, как известно, cov(i,j) = **rij σi σj** (где i – номер фирмы, акции которой попали в портфель)).

В первоначальном варианте статьи Марковица предлагалось изучать неулучшаемые способы дележа непосредственно в точках симплекса дележей, изображая там поверхности уровня риска (в виде замкнутых поверхностей типа эллипсоида) и доходности (в виде плоской поверхности). Позже было признано более удобным перебирать достаточно большое количество точек дележа и для каждой из них изобразить соответствующие значения М и **с.к.о.** на плоскости «доходность – риск» [ 3 ]. Для простых случаев (портфель из трех или четырех акций) перебор всех точек в симплексе дележа с достаточно мелким шагом является легко выполнимым делом (естественно, с использованием компьютера и пакета типа Excel). Например, при n=3 симплекс дележа является правильным треугольником со стороной 1, и если точки его перебирать с шагом 1/20, то количество вычисляемых точек равно 1 + 2 + 3 + … +21 = 231. Для n=4 сим­плекс дележа – это тетраэдр с единичной длиной каждого ребра. Для перебора способов дележа с тем же шагом, что и раньше, придется иметь дело с количествами точек (по слоям тетраэдра) 1, 3,6 и так далее до 231. Точек будет на порядок больше, и располагать их придется не на одном листе Excel, а, скорее, на двадцати одном. Количество точек возрастет на полтора-два порядка при переходе к портфелю из пяти акций. Основная идея, предлагаемая в настоящей статье, заключается в том, что следует изучать точки только на границе симплекса и рассматривать образы граничных симплексов на плоскости «доходность – риск». В топологии такая конструкция называется «сингулярный симплекс». Так, в случае треугольника можно представлять себе перемещение тонкого треугольного платка, который, искривляясь и сжимаясь, в итоге укладывается на плоскость «доходность – риск» с образованием складок, сборок и т.п., вплоть до того, что геометрически образом треугольника может оказаться одна точка. К сожалению, образ границы сим­плекса не всегда позволяет представить себе, как выглядит образ внутренних точек симплекса. Например, образ центра симплекса может лежать за пределами контура, являющегося образом границы. Никаких общих рекомендаций и классификаций тут дать нельзя, так как имеется масса нетривиальных возможно­стей. Так, ребро на границе симплекса может сначала образовать замкнутый узел, а затем этот узел будет уложен на плоскость «доходность – риск». Тем не менее, опыт изучения таких отображений привел автора к выводу, что во многих практически важных случаях легко представить себе наглядно суть получившегося отображения (например, в портфеле из трех фирм часто получается образ в виде криволинейного треуголь­ника, имеющего одну складку, положение которой легко уточнить). После уточнения складки часто обнару­живается, что складка находится в области, далекой от нижнего правого угла образа (где находятся Парето-оптимальные решения). Поэтому данный подход имеет эвристическую ценность, а конкретный успех его применения сильно зависит от пространственного (именно пространственного, а не экономического) воо­бра­жения того, кто его применяет.

Ниже будет рассмотрено несколько конкретных примеров применения данного метода.

ПРИМЕР 1.

В начале этого примера обсудим вопрос о компьютерной генерации «правдоподобных» стати­сти­ческих данных, к которым далее будет применен метод Марковица. Речь должна идти о генерации большого количества нормально распределенных случайных чисел, под которыми подразумеваются выплаты диви­ден­дов (d) по акциям фирм, включаемых в портфель. Часть этих случайных чисел независимы, остальные зависимы. С точки зрения статистики, данных желательно иметь не менее ста; но вряд ли удастся собрать достоверные данные о дивидендах котирующихся на рынке акций за последние сто периодов времени, даже если считать, что дивиденды выплачиваются ежеквартально. Поэтому автором был выбран компромиссный вариант: генерировать три случайных величины А, В, С по 50 значений каждой из них. При этом А и В были задуманы как независимые (равно как А и С), а величина С была выбрана жестко зависимой от В по формуле С = – В\*В\*0,7 +13. Благодаря этому между В и С наблюдалась большая отрицательная корреля­ция. Слагаемое «13» было продиктовано желанием, чтобы процент выплачиваемого дивиденда фирмы С лежал в диапазоне от 10 до 15 процентов, как это часто бывает на практике. В качестве датчика независи­мых случайных чисел использовался простейший датчик, имеющийся в пакете Excel, а именно: СЛЧИС(). Он дает числа, равномерно распределенные на интервале (0, 1) и независимые между собой. При желании из него можно получить и числа, распределенные почти по нормальному закону (например, взяв сумму 15-и таких чисел с нужным коэффициентом), но числовые эксперименты показали, что такое усложнение проце­дуры генерации слабо меняет окончательный результат (то есть конфигурацию сингулярного симплекса на плоскости «доходность–риск»), а сама применяемая методика остается той же. Поэтому в статье за основу берется именно датчик указанного выше типа. Конкретно,

d(А) = СЛЧИС()\*3+11,5 (1)

d(В) = СЛЧИС()\*3,5+11 (2)

d(С) = –СЛЧИС()\*СЛЧИС()\*0,7+13 (3)

При этом случайные числа в (1) и (2) генерировались независимо, а в (3) использовались именно те случайные значения, которые были зафиксированы в (2). Буква d означает процент дивиденда, который был выплачен по акциям каждой из фирм А, В, С за предыдущие 50 периодов времени. Получившиеся значения см. на рис.1. Отрицательная корреляция между (2) и (3) видна непосредственно. По формуле (1) получаются числа из диапазона (11,5; 14,5), а по формуле (2) – из диапазона (11; 14,5). Так как они распределены равномерно, их математические ожидания должны равняться полусумме крайних точек диапазонов, то есть 13 и 12,75 соответственно.



 **Рис.1. Визуальный контроль сгенерированных случайных чисел**

Приступим к формированию портфеля из акций трех фирм методом Марковица. Находя среднее арифметическое, получаем оценку математических ожиданий доходности акций каждой фирмы:

М(А) = 13,07 , М(В) = 12,79 , М(С) = 12,77 .

Значения М(А) и М(В) немного отличаются от теоретических значений (13 и 12,75), так как объем выборки невелик (50 элементов из генеральной совокупности). Вычисляя с.к.о. по формуле СТАНДОТКЛОН, входящей в пакет Excel, получаем

σ(А) = 0,96 , σ(В) = 0,89 и σ(С) = 0,2 .

Попарные корреляции вычисляем по формуле КОРРЕЛ:

r(A,B) = 0,0116 ; r(B,C) = – 0,9709 ; r(C,A) = –0,0379 .

Теоретически говоря, первое и последнее число должны были бы равняться нулю, а второе так и было «задумано», как большое по модулю отрицательное число. Начиная с этого момента, мы должны работать только с девятью полученными числами, забыв об их происхождении (то есть забыв о том, что первое и третье число были «задуманы» как нулевые). Обозначим искомую структуру портфеля акций долями x1 , x2 , x3 , сумма которых равна 1. Ожидаемая доходность портфеля равна

**М = x1 М(А) + x2 М(B) + x3 М(C)** (4)

а ожидаемое **с.к.о.** портфеля, возведенное в квадрат, равно [ 1, стр.81 ]:

**V = (x1 σ(А))2 + (x2 σ(B))2 + (x3 σ(C))2 + 2x1 x2 r12 σ1 σ2 + 2x2 x3 r23σ2 σ3 + 2x1 x3 r13 σ1 σ3**  (5) (здесь **σ1 = σ(А)** , и так далее). Для дальнейшего удобно отдельно посчитать по формуле cov(i, j) = **rij σi σj**

cov(1,2) = 0,009911 ; cov(2,3) = –0,1728 ; cov(3,1) = –0,00728 (6)



**Табл.1. «Треугольник дележей» в левой верхней части квадрата 21х21. По вертикали: х1 . По горизонтали: х2 . Вычислены значения доходностей различных портфелей на основе фирм А, В, С.**

При проведении расчетов в Excel удобно располагать информацию следующим образом (Табл.1). В первом столбце занесены значения **х1** от нуля до единицы с шагом 0,05. В первой строке аналогичным обра­зом занесены значения **х2** . Значения **х3** не приведены, но подразумевается, что х3 = 1 – х1 – х2 . В табл.1 вычислены значения доходностей всех портфелей по формуле (4). Побочная диагональ квадрата 21х21 выделена жирным шрифтом (в этих точках х3 = 0, а под диагональю х3 < 0). Поэтому под диагональю вычисления по формуле (4), хотя и допустимые математически, будут недопустимы экономически. Однако пакет Excel устроен так, что для рисования графика функции двух переменных ее значения должны распола­гаться на всем прямоугольнике, а не только на его левой верхней части. Можно было бы под диагональю занести нули, но разумнее занести там одинаковые числа, близкие к диагональным значениям (в данном случае – число 13). В итоге график поверхности (которая в данном случае является плоскостью) будет лучше виден, а скачок в месте перехода его в горизонтальную плоскость высоты 13 будет менее заметен. Сказанное подтверждается рисунком 2.



 **Рис.2. График доходности портфеля (наклонная плоскость)**

Приступим к построению графика (в виде поверхности) **с.к.о.** для всех видов портфелей на «тре­угольнике дележей». Для этого в формулу (5) подставим значения из формулы (6), а х3 выразим через х1 и х2 . Наконец, надо извлечь корень из получившегося выражения. Полученная формула заносится в левый верхний угол таблицы 21х21, подготовленной таким же образом, как это было сделано для табл.1. Затем она копируется слева направо до побочной диагонали включительно. Для удобства восприятия графика этой поверхности под диагональю занесены постоянные числа, равные единице (табл.2). Поверхность риска представлена на рис.3 (вид снизу). (На горизонтальный участок и на идущую вниз вертикальную плоскость, сопрягающую искривленную поверхность с горизонтальной, не обращать внимания). На искривленной поверхности видна точка наименьшего риска (равного 0,0445). В углах «треугольника дележей» **с.к.о.** равно 0,2 (портфель только из акций фирмы С), 0,89 (только из акций В) и 0,96 (из акций А), как и должно быть.



 **Табл.2. «Треугольник дележей» в левой верхней части квадрата 21х21. По вертикали: х1 . По горизонтали: х2 . Вычислены значения рисков различных портфелей на основе фирм А, В, С.**



 **Рис.3. Поверхность рисков на основе табл.2 (вид снизу).**

Теперь опишем информационную систему, позволяющую отобразить «треугольник дележей» на плоскость «доходность– риск» (то есть получим сингулярный симплекс с тремя вершинами). Отображение сначала будет выполнено для границы треугольника, а затем будет уточнено и в некоторых внутренних точках (обозначенных красным шрифтом в табл. 1 и 2), чтобы изобразить границу возникающей складки.

Выбирая из данных табл.1 и 2 поочередно точки левой границы «треугольника дележей», точки его правой границы и точки диагональной границы (где х3 = 0), и располагая их в двух первых столбцах элект­ронной таблицы (слева – М, справа – **σ**), а также отделяя данные отдельных частей границы пустой строкой (как этого требуют правила построения графиков в Excel), мы получаем графическое изображение границы сингулярного треугольника (рис.4).



 **Рис.4. Сингулярный образ границ «треугольника дележей»**

Расшифровка рис.4 показывает, что на нем имеется три излома (как раз в тех точках, которые соответствуют портфелю из акций одной фирмы). Если выбирать между этими тремя портфелями, то левая верхняя точка сразу отпадает, так как в ней и риск велик, и доходность мала. Выбор же между остальными двумя точками не так очевиден и зависит от индивидуальной склонности инвестора к риску. Затем, кроме трех изломов, на рис.4 имеется точка минимума (в которой излома нет). Поэтому становится ясным, что при отображении «треугольника дележей» на плоскости «доходность – риск» возникла складка, и надо уточнить положение ее нижней границы. Для этого добавим к данному чертежу еще и образ вертикалей, обозначен­ных красным шрифтом на табл.1 и табл.2, а именно: х2 = 0,05; х2 = 0,10; х2 = 0,15 (чтобы не спутать, где на­хо­дится образ границы, образы этих трех вертикалей немного не доведены до конца). См. рис.5.



**Рис.5. Уточнение правой нижней части границы сингулярного треугольника**

Из чертежа на рис.5 становится ясным, что образ третьей вертикали почти точно проходит по правой нижней границе сингулярного треугольника. Среди этих точек и надо искать оптимальный портфель. Например, если инвестор считает для себя приемлемым уровень риска не более 0,4% , то он выберет на этой высоте самую правую точку, лежащую на образе «треугольника дележей» (ожидаемая доходность, достигнутая им, будет равна 12,9%). Реальная доходность, грубо говоря, будет находиться в интервале от 12,5% до 13,3%. Если бы закон распределения был нормален (но в данном примере это не так!), достовер­ность попадания в этот интервал можно было бы уточнить по «правилу одного сигма».

ПРИМЕР 2.

Небольшое видоизменение расчетов, описанных в примере 1, позволяет изучить особенности формирования портфеля из акций трех фирм, дивиденды которых выплачиваются *независимо* друг от друга. Для этого надо только в формулу (5) подставить нулевые коэффициенты корреляции.

ПРИМЕР 3.

Ниже будет сформулирована простая задача на формирование оптимального портфеля (настолько простая, что ее можно решить и без метода Марковица, но опираясь на высказанные им сообра­жения). При освоении метода Марковица на учебных занятиях задача предлагалась слушателям в качестве одного из тестов усвоения метода. Ниже приведены четыре разных ответа для этой задачи, но только один из них правильный (это – последний ответ). В неправильных ответах часть утверждений тоже правильна.

*Задача.* Имеется 300 000 руб., которые надо потратить на приобретение акций фирм А, В, С. Пусть ожидаемые доходности от выплаты дивидендов этих фирм равны 14%, 14% и 12% соответственно. Пусть также известен риск потери суммы, вложенной в акции данной фирмы, в виде с.к.о. реальных доходностей от указанных выше ожидаемых значений (эти с.к.о. равны 5%, 5% и 9% соответ­ствен­но). Найти неотрицательные числа х1, х2 и х3 (сумма которых равна 1), показывающие, в какой пропорции надо приобретать акции фирм А, В, С. Известно, что корреляция(А, В) = –0,99; корре­ляция А и С, а также В и С равны нулю. Варианты ответов для этой задачи:

 **А.** Сумму 300 000 руб. надо поделить на части, пропорциональные числам 14, 14 и 12 (проценты ожидаемой доходности). Затем ту же сумму надо поделить на части, пропорциональные 5, 5, 9 (с.к.о. процентных значений риска). Затем найти среднее арифметическое значений, полученных первым и вторым способом.

 **Б.** Надо покупать на всю эту сумму только акции фирмы А, потому что фирма С явно невыгодна: у нее и ожидаемая доходность меньше, и риск больше, чем у фирм А и В. Невыгодна также и фирма В, потому что она будет мешать фирме А получать высокий доход, т.к. корреляция В с А почти равна минус единице.

 **В.** Надо про фирму С забыть, а акции фирм А и В купить в пропорции 99 к 1 (а если бы корреляция А и В была в точности равна (-1), то про фирму В тоже надо было бы забыть.

 **Г.** Фирму С надо отбросить как явно невыгодную, а акции фирм А и В купить в равной пропорции. От этого риск портфеля уменьшится почти до нуля (а если бы корреляция была равна точно (-1), то портфель бы оказался совсем безрисковым). При этом при любой пропорции покупки А и В ожида­емая доходность составляет 14%.

Так как ответ **Г** правильный, то оптимальный ответ находится не во внутренней точке треуголь­ника дележей, а на его границе. Поэтому метод расчета, указанный выше, сводится к нахождению просто образа периметра треугольника дележей. В данном случае этот образ имеет вид двух отрезков кривых, сов­падающих друг с другом, причем две вершины этих кривых совпадают друг с другом, а оставшиеся две вершины замыкаются вершинами третьей стороны треугольника, сложенной пополам и отобразившейся в вертикальный отрезок, у которого нижняя точка находится на почти нулевой высоте. В этой точке и находится оптимальный портфель из пар акций (А,В), (В,С), (С,А). То, что пары (В,С) и (С,А) заведомо не являются Парето-оптимальными, очевидно без вычислений. Но, конечно, и вычисления это подтверждают.

Литература:

1. H. Markowitz, Portfolio Selection. Journal of Finance, vol. VII, No.1, March 1952.
2. Пиндайк Р., Рубинфельд Д. Микроэкономика. – М.: Дело, 2000 – 808 с. (стр. 652)
3. Бригхем Ю., Гапенски Л. Финансовый менеджмент: Полный курс, том 1. – СПб: Эконом. школа, 1997. – 497 с. (Гл. 2).
4. Савватеев В.В. Микроэкономический анализ /Под общей редакцией проф. Ветрова А.А. – М.: «МИНХАУДИТ», 1993. – 272 с. (стр. 239).