Н. А. Солодовников, Сохраняющие край отображения многообразия с перемежающимися бассейнами компонент аттрактора, один из которых открыт, *Тр. ММО*, 2014, том 75, выпуск 1, 15–24

Труды Московского математического общества *Том 75, вып. 1, 2014 г.*

Сохраняющие край отображения многообразия с перемежающимися бассейнами компонент аттрактора, один из которых открыт

Н. А. Солодовников

В работе построено открытое множество сохраняющих край некоторого многообразия C^2-диффеоморфизмов со следующим свойством: у каждого отображения бассейн притяжения одной из компонент аттрактора открыт и всюду плотен, а бассейн притяжения второй компоненты нигде не плотен, но его мера положительна.

Библиография: 14 названий. *УДК*: 517.938.5. *MSC2010*: 37E99. *Ключевые слова и фразы*: аттрактор, перемежаемость бассейнов, диффеоморфизм Иттаи Кана.

1. Введение

1.1. Предпосылки и результат. Одним из главных вопросов теории динамических систем является исследование аттракторов. Существует несколько по-разному определённых аттракторов, но все известные случаи несовпадения аттракторов нетипичны. Наиболее распространённая гипотеза о свойствах аттракторов метрически типичных динамических систем принадлежит Палису ([8, sec. 2.7]).

Определение аттрактора, данное в [8], содержит много требований, и не у всякого диффеоморфизма есть аттрактор, удовлетворяющий им. Ниже приводится определение аттрактора Милнора, который существует для любого гомеомофризма на себя или в себя метрического пространства с мерой.

Определение 1. *Аттрактором Милнора* гомеоморфизма метрического пространства с мерой называют наименьшее по вложению замкнутое множество, которое содержит ω-предельные множества почти всех точек.

Компонентой аттрактора Милнора называется замкнутое инвариантное подмножество аттрактора, которое неразложимо (то есть содержит плотную орбиту) и не имеет других точек аттрактора в некоторой своей окрестности.

Квазикомпонентой аттрактора Милнора называется замкнутое инвариантное неразложимое подмножество аттрактора, непредставимое в виде объединения замкнутых неразложимых инвариантных подмножеств.

Бассейном притяжения компоненты (квазикомпоненты) аттрактора называют множество точек, ω-предельные множества которых принадлежат этой компоненте (квазикомпоненте).

В работе Иттаи Кана [6] построен пример эндоморфизма с перемежающимися бассейнами притяжения компонент аттрактора Милнора; оба бассейна метрически плотны, то есть пересекают любой шар по множеству положительной меры.

В работах [12] и [5] построено открытое множество C^2-гладких диффеоморфизмов с тем же свойством бассейнов.

Цель данной работы — доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *В классе сохраняющих край C^2-диффеоморфизмов $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ существует открытое множество отображений, у которых связные компоненты края многообразия — квазикомпоненты аттрактора Милнора, при этом бассейн квазикомпоненты $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$ открыт и всюду плотен, а бассейн квазикомпоненты $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ — положительной меры.*

Отображение с указанными свойствами впервые было замечено как обратное к одному из отображений, рассматриваемых при построении аттрактора Милнора положительной лебеговской меры в работе [3].

1.2. Схема доказательства. Во всей работе рассматриваются сохраняющие край C^2-диффеоморфизмы произведения $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ двумерного тора на отрезок.

Определение 2. Диффеоморфизм

$$F\colon B \times M \to B \times M, \quad (b,x) \mapsto (Ab, f(b,x))$$

называется *косым произведением*. Множество B — *база*, а M — *слой* косого произведения. Отображение A — диффеоморфизм базы B в себя, а семейство «послойных» отображений $f(b,\cdot)\colon M \to M$ зависит от точки b базы B. Иногда для удобства записи будем обозначать отображение f над точкой базы b через f_b.

В разделе 2.1 мы построим пример косого произведения с базой $\mathbb{T}^2$ и слоем $[0,1]$, для которого верны утверждения теоремы 1 о бассейнах.

В разделе 3 мы покажем, что любой диффеоморфизм, полученный из построенного достаточно малым возмущением (в классе C^2-гладких диффеоморфизмов), обладает нужными свойствами. Техника доказательства основана на свойствах частичной гиперболичности (Хирш — Пью — Шуб [2]), а именно на том, что при малых возмущениях косого произведения в классе диффеоморфизмов компактные центральные слои «выживают».

Теорема 2. *Пусть косое произведение F над аносовским диффеоморфизмом тора A удовлетворяет условию* доминантного расщепления, *то есть*

$$\max_b \operatorname{Lip} f_b < \mu, \quad \max_b \operatorname{Lip} f_b^{-1} < \frac{1}{\lambda},$$

где $\lambda < 1 < \mu$ — константы сжатия и растяжения A.

Тогда любое его малое в C^1 возмущение полусопряжено отображению в базе: существует проекция $p\colon X \to B = \mathbb{T}^2$ такая, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p"] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "A"] & B \end{tikzcd}$$

коммутативна, а слои $M_b = p^{-1}(b)$ *непрерывно зависят от* b *и* C^1*-гладкие.*

Семейство $\{M_b \mid b \in B\}$ образует «центральное слоение», каждый слой которого — график функции $\beta_b : M \to B$. Теорема 2 утверждает только непрерывную зависимость β_b от b.

Теорема 3 (А. Городецкий [11]). *В условиях теоремы* 2 *функция* β_b *гёльдерова по* b.

Теорема 4 (Ильяшенко — Негут [4]). *Показатель Гёльдера в теореме* 3 *стремится к* 1, *когда* C^1*-норма возмущения косого произведения* F *стремится к нулю.*

Обзор гёльдеровых слоений есть, например, в [9].

Наиболее содержательно в разделе 3 доказательство положительности меры притягивающихся к $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ точек. Мы интегрируем по базе дли́ны отрезков «кривых» слоёв, точки которых притянутся к указанной компоненте границы, при этом положительность меры множества нужных точек базы следует из леммы Фальконера [1], теоремы 4 ([4]) и специальной эргодической теоремы [14], а возможность «повторно интегрировать» длины отрезков «кривого» слоения — из теорем Аносова и Песина [13]. Теорема Песина опирается на существование центрально-устойчивого слоения. Формулировки соответствующих теорем даны в части 3.

2. Пример косого произведения

2.1. Хорошие косые произведения. Будем рассматривать сохраняющее край C^2-гладкое косое произведение $\mathscr{F}$ над диффеоморфизмом Аносова A на двумерном торе. Слой — единичный отрезок. Пусть $X = \mathbb{T}^2 \times [0, 1]$,

$$\mathscr{F} : X \to X, \quad (b, x) \mapsto (Ab, f_b(x)).$$

Такое косое произведение назовём *хорошим*, если выполнены следующие условия.

1. У A существует точка a периода m, такая что
   (а) композиция послойных отображений вдоль её орбиты сдвигает все точки интервала $(0, 1)$ вверх:
   $$f_{A^{m-1}a} \circ \ldots \circ f_a(x) > x \quad \forall\, x \in (0, 1); \tag{1}$$
   (б) точка 0 — отталкивающая для этой композиции:
   $$(f_{A^{m-1}a})'(0) \cdot \ldots \cdot (f_a)'(0) > 1. \tag{2}$$

2. Все послойные отображения на интервале $(1/2, 1)$ *сдвигают точки вверх*:

$$\forall\, b \in \mathbb{T}^2 \quad \forall\, x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right): \; f_b(x) > x \;\text{ и }\; (f_b)'(1) < 1. \tag{3}$$

Последнее условие гарантирует, что при малом возмущении F окрестность $\mathbb{T}^2 \times (1/2, 1]$ по-прежнему притягивается к верхней компоненте границы $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$.

3. Компонента границы $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ в среднем притягивает:

$$\int\limits_{\mathbb{T}^2} \ln(f_b)'(0)\, db < 0. \tag{4}$$

4. Для любого b послойное отображение близко к тождественному в следующем смысле:

$$\|(f_b)' - 1\|_C < \frac{1}{4}, \tag{5}$$

и коэффициенты сжатия и растяжения A достаточно далеки от 1, чтобы $\mathscr{F}$ как косое произведение над A удовлетворяло условию доминантного расщепления.

Описание хорошего косого произведения закончено.

Обозначим через B_0 и B_1 множества точек, которые стремятся при $n \to \infty$ к компонентам края $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ и $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$ соответственно.

Теорема 5. *У хорошего косого произведения множество B_1 открыто и всюду плотно, а мера Лебега множества B_0 положительна.*

Другими словами, граница $\mathbb{T}^2 \times \{0, 1\}$ принадлежит аттрактору Милнора (так как отображение в базе транзитивно) и бассейн верхней компоненты открыт и всюду плотен.

Замечание. Хорошие косые произведения образуют открытое множество в классе сохраняющих край гладких косых произведений.

Докажем по очереди три утверждения теоремы 5.

2.2. Бассейн B_1 открыт. Точка принадлежит бассейну верхней компоненты края, если принадлежит некоторому прообразу поглощающей области $\mathbb{T}^2 \times (1/2, 1]$.

$$B_1 = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathscr{F}^{-n}\{\mathbb{T}^2 \times (1/2, 1]\},$$

поэтому B_1 открыт как счётное объединение открытых множеств.

2.3. Бассейн B_1 всюду плотен. Построим всюду плотное подмножество бассейна B_1. Рассмотрим в базе $\mathbb{T}^2$ устойчивое для действия A многообразие $w^s(a)$ периодической точки a и его насыщение слоями $\{b \times [0, 1] \mid b \in w^s(a)\}$. Рассмотрим действие $\mathscr{F}^m$. Начиная с достаточно большого числа итераций образ любого слоя из данного множества принадлежит малой окрестности неподвижного для $\mathscr{F}^m$ слоя $a \times [0, 1]$. Ограничение $\mathscr{F}^m$ на неподвижный слой (по свойствам 1 и 2) далеко в C^1-топологии от отображений с неподвижными точками во внутренности отрезка, поэтому ограничения $\mathscr{F}^m$ и на достаточно близкие к неподвижному слою слои сдвигают точки отрезка вверх. Поэтому точки внутренности любого слоя из построенного множества после достаточного числа итераций $\mathscr{F}^m$ окажутся в малой окрестности верхней компоненты границы. По свойству 2 эта окрестность принадлежит множеству B_1.

Итак, бассейн B_1 открыт и всюду плотен, поэтому любое подмножество его дополнения нигде не плотно. Следовательно, множество B_0 нигде не плотно.

2.4. Мера множества B_0 положительна. Вначале построим множество положительной меры, а затем покажем, что оно принадлежит бассейну нижней компоненты края. Выберем $\delta > 0$ такое, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}^2} \ln \max_{0 \leqslant x \leqslant \delta} (f_b)'(x)\, db < 0.$$

Такое $\delta > 0$ существует из-за гладкости $\mathscr{F}$: интеграл в левой части неравенства непрерывно зависит от δ и (по условию (4)) отрицателен при $\delta = 0$. Обозначим $g(b) = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant \delta} (f_b)'(x)$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{T}^2} \ln g(b)\, db < 0 \tag{6}$$

По свойству 4 функция $\ln g$ измерима, значит, по эргодической теореме для почти всех b временные средние $\ln g$ близки к пространственным, а именно: для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$, такой что для любого $n \geqslant N(\varepsilon)$

$$\left| \frac{1}{n}\big(\ln g(b) + \ln g(Ab) + \ldots + \ln g(A^{n-1}b)\big) - \int\limits_{\mathbb{T}^2} \ln g(b)\, db \right| < \varepsilon. \tag{7}$$

Выберем

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left| \int\limits_{\mathbb{T}^2} \ln g(b)\, db \right|$$

и разобьём почти все точки базы на счётное число классов: в k-м классе лежат точки, для которых $N(\varepsilon) = k$. Над точками k-го класса рассмотрим в слое столь малый отрезок $[0, \delta_k]$, что $(\max_{\mathbb{T}^2} g(b))^k \cdot \delta_k < \delta$.

Итак, возьмём в слое над каждой точкой k-го класса отрезок $[0, \delta_k]$ и рассмотрим объединение таких отрезков по точкам всех классов. Мера построенного множества положительна, так как мера хотя бы одного из классов положительна — в противном случае мы разбили почти все точки базы на счётное число множеств нулевой меры. Покажем, что построенное множество лежит в B_0.

При $x \leqslant \delta$ по теореме Лагранжа о конечных приращениях $f_b(x) \leqslant g(b)x$. Поэтому до тех пор, пока x-координата образа точки ни разу не превысила δ,

$$f_{A^{n-1}b} \circ \ldots \circ f_b(x) \leqslant g(A^{n-1}b) \cdot \ldots \cdot g(b)x. \tag{8}$$

Утверждение. *Для точек* (b,x), *где* b *из* k*-го класса, а* $x \leqslant \delta_k$, *оценка* (8) *верна для всех* n.

Доказательство индукцией по n. База индукции: при $n \leqslant k$ оценка верна по выбору δ_k. Шаг: если оценка верна для некоторого $n \geqslant k$, то она верна и для $n+1$. Для доказательства применим $f_{A^n b}$ к обеим частям неравенства:

$$f_{A^n b} \circ f_{A^{n-1} b} \circ \ldots \circ f_b(x) \leqslant f_{A^n b} \circ g(A^{n-1}b) \cdot \ldots \cdot g(b)x.$$

Осталось применить теорему Лагранжа к правой части, а для этого нужно показать, что аргумент $f_{A_n b}$ в правой части последнего неравенства не превосходит δ. Для любого $n \geqslant k$ по определению k-го класса:

$$\frac{1}{n}\big(\ln g(b) + \ln g(Ab) + \ldots + \ln g(A^{n-1}b)\big) < \int\limits_{\mathbb{T}^2} \ln g(b)\,db + \varepsilon.$$

Из (6) и выбора ε следует, что правая часть неравенства отрицательна. Итак, для точки базы b из k-го класса при любом $n \geqslant k$ верно

$$\ln\big((A^{n-1}b) \cdot \ldots \cdot g(b)x\big) = \\ = \ln g(b) + \ln g(Ab) + \ldots + \ln g(A^{n-1}b) + \ln x < -cn + \ln x < \ln x.$$

Осталось заметить, что $x \leqslant \delta_k < \delta$. Утверждение доказано. □

Применим оценку (8): для точек (b,x), где b из k-го класса, а $x \leqslant \delta_k$,

$$\ln x(\mathscr{F}^n(b,x)) = \ln(f_{A^{n-1}b} \circ \ldots \circ f_b(x)) \leqslant \ln\big(g(A^{n-1}b) \cdot \ldots \cdot g(b) \cdot x\big) = \\ = \ln x + \ln g(b) + \ln g(Ab) + \ldots + \ln g(A^{n-1}b) \to -\infty,$$

значит, точка (b,x) притягивается к $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$.

Первая теорема доказана. □

Замечание. Из (7) и доказательства видно, что в слое над точкой b нет точек бассейна B_0, только если верхний предел временных средних функции g уклоняется от пространственного среднего более чем на ε. Для почти всех точек b, принадлежащих одному устойчивому многообразию действия A в базе, верхний предел временных средних в (7) одинаков, так как после достаточно большого числа итераций образы любых двух точек с одного устойчивого многообразия находятся достаточно близко, а сумма начального отрезка ряда временного среднего после деления на n достаточно мала.

3. Возмущение косого произведения

Рассмотрим достаточно близкий к $\mathscr{F}$ C^2-гладкий диффеоморфизм $\mathscr{G}$, сохраняющий край $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$. По теоремам 2, 3 и 4 отображение $\mathscr{G}$ обладает инвариантным слоением $\{p^{-1}b \mid b \in \mathbb{T}^2\}$, причём слои стремятся к вертикальным, когда норма возмущения косого произведения стремится к нулю. Обозначим через $B_0(\mathscr{G})$ бассейн нижней компоненты края для $\mathscr{G}$. Аналогично введём обозначения для верхней компоненты края.

3.1. Бассейн верхней компоненты края. Докажем, что бассейн $B_1(\mathscr{G})$ открыт.

По условию (3) найдётся малая окрестность $\mathbb{T}^2 \times [1-\delta, 1]$ верхней компоненты края, в которой все послойные отображения f_b притягивают точки к 1 быстрее, чем некоторое линейное сжатие. Поэтому для достаточно близких к $\mathscr{F}$ диффеоморфизмов $\mathscr{G}$ вся область $\mathbb{T}^2 \times (1-\delta/2, 1]$ притягивается к верхней компоненте края. Бассейн $B_1(\mathscr{G})$ будет счётным объединением прообразов этой открытой области, а значит, будет открыт.

Докажем, что бассейн $B_1(\mathscr{G})$ всюду плотен.

Из-за грубости аносовских диффеоморфизмов ограничения отображений $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ на границу сопряжены. Напомним, что у ограничения $\mathscr{F}$ на границу есть периодическая точка периода m. Поэтому у ограничения $\mathscr{G}^m$ на верхнюю компоненту границы будет неподвижная точка $\tilde{a}$, близкая к соответствующей неподвижной точке a диффеоморфизма $\mathscr{F}^m$. Рассмотрим в базе окрестность $U_\varepsilon(a)$ и замкнутый цилиндр $C = Cl(U_\varepsilon(a)) \times [0,1]$. Рассмотрим также «кривой цилиндр» $\widetilde{C} = \{p^{-1}(b) \mid b \in U_{\varepsilon/2}(\tilde{a})\}$. Уменьшим норму возмущения настолько, что $\widetilde{C} \subset C$.

При малом ε ограничение $\mathscr{F}$ на C отделено в C^1 от отображений с неподвижными точками во внутренности C. Поэтому при достаточно малой норме возмущения у ограничения $\mathscr{G}$ на внутренность $\widetilde{C}$ также не будет неподвижных точек.

Для доказательства плотности бассейна B_1 осталось заметить, что любая точка из всюду плотного множества $\{p^{-1}b \mid b \in w^s(\tilde{a})\}$ после достаточного числа итераций $\mathscr{G}^m$ окажется в $\left\{p^{-1}b \mid b \in w^s(\tilde{a}) \bigcap U_{\varepsilon/2}(\tilde{a})\right\}$. Из предыдущего абзаца следует, что все точки из внутренности последнего множества в будущем притянутся к верхней компоненте границы. Всюду плотность бассейна B_1 доказана.

3.2. Мера бассейна $B_0(\mathscr{G})$ положительна. Нам понадобится *специальная эргодическая теорема*:

Теорема 6 (П. С. Салтыков, 2011). *Пусть $\varphi \in C(\mathbb{T}^2)$, A — аносовский диффеоморфизм двумерного тора. Пусть $L(b)$ — множество предельных точек последовательности биркгофовских средних φ под действием диффеоморфизма A,*

$$S(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{T}^2} \varphi(b)\, db.$$

Положим

$$K_\varkappa = \{b \mid L(b) \setminus [S-\varkappa, S+\varkappa] \neq \varnothing\}$$

— множество точек тора, над которыми временное среднее уклоняется от пространственного более чем на $\varkappa$.

Тогда $\dim_H K_\varkappa < 2$ для всех $\varkappa > 0$.

Более сильная специальная эргодическая теорема доказана в работе [7].

Определение 3. В разделе 2.4 была определена функция g и был выбран $\varepsilon > 0$. Для $\mathscr{F}$ назовём *плохим* множество точек базы, у которых уклонение $\varkappa$ в теореме 6 для функции g не меньше ε. Для диффеоморфизма $\mathscr{G}$ назовём *плохим* образ плохого множества под действием сопряжения в базе. Дополнение плохого множества в базе назовём *хорошим*.

3.2.1. *Строение плохого множества.* По замечанию в конце раздела 2.4 плохое множество $\mathscr{F}$ содержит в себе все точки базы, в слоях над которыми нет точек бассейна $B_0(\mathscr{F})$. Кроме того, вместе с каждой своей точкой плохое множество $\mathscr{F}$ содержит и всё её устойчивое многообразие. Сопряжение ограничений $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ на границу переводит друг в друга плохие множества и устойчивые слоения отображений в базе.

Утверждение. *В любом слое над хорошим множеством $\mathscr{G}$ есть точки множества $B_0(\mathscr{G})$.*

Доказательство утверждения повторяет рассуждения из раздела 2.4, только теперь вместо f_b надо рассматривать отображения, действующие из «кривого» слоя в «кривой». Послойные отображения в искривлённых слоях близки к исходным, поэтому соответствующие временные средние над точками хорошего множества не сильно отклонятся от пространственного.

По аналогии с доказательством из раздела 2.4, для доказательства положительности меры бассейна $B_0(\mathscr{G})$ достаточно проинтегрировать по теореме Фубини длины отрезков слоёв, которые растут из хороших точек нижней компоненты края $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ и принадлежат $B_0(\mathscr{G})$. Однако, во-первых, сопряжение могло перевести плохие точки в множество полной меры. Во-вторых, центрально-устойчивое слоение должно быть абсолютно непрерывным, чтобы можно было применить теорему Фубини. Чтобы преодолеть первую трудность, то есть доказать, что мера плохого множества $\mathscr{G}$ равна нулю, оценим его хаусдорфову размерность и покажем, что она меньше полной.

3.2.2. *Хаусдорфова размерность плохого множества.*

Теорема 7 (лемма Фальконера [1]). *Пусть $h\colon X \to Y$ — гёльдерово с показателем α и хаусдорфова размерность множества $D \subset X$ равна d. Тогда*

$$\dim_H hD \leqslant \frac{d}{\alpha}.$$

Из теоремы Салтыкова и замечания из раздела 2.4 следует, что хаусдорфова размерность плохого множества $\mathscr{F}$ меньше полной. Из леммы Фальконера и теоремы 4 следует, что когда C^1-норма возмущения стремится к нулю, размерность плохого множества $\mathscr{G}$ стремится к размерности плохого множества $\mathscr{F}$. Поэтому при достаточно малой норме возмущения хаусдорфова размерность плохого множества $\mathscr{G}$ меньше полной. В частности, мера плохого множества $\mathscr{G}$ нулевая.

3.2.3. *Положительная мера бассейна* $B_0(\mathscr{G})$. Итак, в «кривом» слое над каждой точкой хорошего множества $\mathscr{G}$ есть точки множества $B_0(\mathscr{G})$. Хорошее множество, как и плохое, есть объединение устойчивых многообразий отображения в базе.

В работе [10] в § 5 введено понятие абсолютной непрерывности слоений: слоение абсолютно непрерывно, если отображение голономии вдоль слоения переводит множества нулевой меры в множества нулевой меры. В той же работе доказана следующая теорема.

Теорема 8 (Аносов). *Слоение на устойчивые многообразия для действия гиперболического C^2-диффеоморфизма абсолютно непрерывно.*

Рассмотрим действие ограничения $\mathscr{G}$ на базу. Возьмём в базе произвольную кривую γ, трансверсальную устойчивому слоению ограничения $\mathscr{G}$ на базу. Почти все точки кривой γ хорошие — в противном случае абсолютно непрерывное устойчивое слоение, проходящее через положительную меру плохих точек кривой, образует (по теоремам Аносова и Песина) подмножество положительной меры плохого множества $\mathscr{G}$.

Из каждой хорошей точки кривой γ выпустим дугу устойчивого слоения для действия ограничения $\mathscr{G}$ на базу. Все точки построенных дуг хорошие (см. раздел 3.2.1). Из каждой точки хорошего множества базы выпустим дугу центрального слоя для действия $\mathscr{G}$ на X. Дуги устойчивых многообразий в базе вместе с дугами «кривых» слоёв над ними образуют подмножество центрально-устойчивого слоения для действия $\mathscr{G}$, так как для $\mathscr{F}$ выполнено условие доминантного расщепления.

Теорема 9 (Песин [13, гл. 7]). *Центрально-устойчивое слоение для действия C^2-диффеоморфизма абсолютно непрерывно.*

Меру бассейна $B_0(\mathscr{G})$ можно теперь оценить снизу. Построенное подмножество бассейна состоит из двумерных областей абсолютно непрерывного центрально-устойчивого слоения, которое проходит через почти все точки одномерной кривой γ. Поэтому по приведённой выше теореме Песина и по теореме Фубини мера построенного подмножества положительна. Третья теорема доказана. □

Список литературы

[1] *Falconer K.* Fractal Geometry. John Wiley, 1990.

[2] *Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M.* Invariant manifolds // Lecture Notes in Mathematics. 1977. Vol. 583.

[3] *Ilyashenko Yu.* Thick attractors of boundary preserving diffeomorphisms // Indag. Math. (N. S.) 2011. Vol. 22, № 3–4. P. 257–314.

[4] *Ilyashenko Yu., Negut A.* Hölder properties of perturbed skew products and Fubini regained // Nonlinearity. 2012. Vol. 25, № 8. P. 2377–2399. ArXiv: 1005.0173v1.

[5] *Ilyashenko Yu., Kleptsyn V., Saltykov P.* Openness of the set of boundary preserving maps of an annulus with intermingled attracting basins // J. Fixed Point Theory and Appl. 2008. Vol. 3, № 2. P. 449–463.

[6] *Kan I.* Open sets of diffeomorphisms having two attractors, each with an everywhere dense basin // Bull. AMS. (N. S.) 1994. Vol. 31. P. 68–74.
[7] *Kleptsyn V.*, *Minkov S.*, *Ryzhov S.* Special ergodic theorems and dynamical large deviations // Nonlinearity. 2012. Vol. 25, № 11. P. 3189–3196.
[8] *Palis J.* A global perspective for non-conservative dynamics // Annales Inst. Poincaré. 2005. Vol. 22. P. 485–507.
[9] *Pugh C.*, *Shub M.*, *Wilkinson A.* Hölder foliations, revisited. ArXiv: 1112.2646.
[10] *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 90. С. 3–210.
[11] *Городецкий А. С.* Регулярность центральных слоёв частично гиперболических множеств и приложения // Изв. РАН. Сер. матем. 2006. Т. 70, № 6. С. 19–44.
[12] *Клепцын В. А.*, *Салтыков П. С.* О C^2-устойчивых проявлениях перемежаемости аттракторов в классах сохраняющих границу отображений // Тр. ММО. 2011. Т. 72, № 2. С. 249–280.
[13] *Песин Я. Б.* Лекции по теории частичной гиперболичности и устойчивой эргодичности. М.: МЦНМО, 2006.
[14] *Салтыков П. С.* Специальная эргодическая теорема для диффеоморфизмов Аносова на двумерном торе // Функц. анализ и его прил. 2011. Т. 45, № 1. С. 69–78.

Никита Алексеевич Солодовников
Москва, НИУ ВШЭ
E-mail: proba-f@va.ru

Представлено в редакцию 30.04.2013