

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Российская академия наук

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Российский фонд фундаментальных исследований

Федеральная целевая программа

«Научные и научно-педагогические кадры инновационной России»
на 2009–2013 годы

Фонд содействия развитию малых форм предприятий
в научно-технической сфере

ТРУДЫ 53-й НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ МФТИ

Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук

Часть VII Управление и прикладная математика

Том 1



Москва–Долгопрудный
МФТИ
2010

УДК 519.6(06)

ББК 22.1

T78

T78 **Труды 53-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук».** Часть VII. Управление и прикладная математика. Том 1. — М.: МФТИ, 2010. — 149 с.
ISBN 978-5-7417-0399-1

В первом томе представлены материалы по фундаментальной математике и различным направлениям прикладной математики. В частности, математическому моделированию в экономике, экологии и социологии; экспериментальной экономике; прикладной статистике; прикладной оптимизации. В 2010 году на ФУПМе добавилась 15-я секция — «Квазилинейные уравнения и обратные задачи» с международным участием. Председателем секции стал проф. Р.Г. Новиков (CMAP Ecole Polytechnique), который также любезно согласился сделать пленарный факультетский доклад. Работа секции осуществляется в рамках научного сотрудничества ФУПМ МФТИ и CMAP Ecole Polytechnique. Материалы работы этой секции также представлены в данном томе.

УДК 519.6(06)

ББК 22.1

ISBN 978-5-7417-0399-1

© ГОУ ВПО «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2010

Программный комитет

Кудрявцев Н.Н., чл.-корр. РАН, ректор института — **председатель**
Кондранин Т.В., профессор, первый проректор — **зам. председателя**
Стрыгин Л.В., доцент — **учёный секретарь конференции**

Алфимов М.В., академик, директор Центра фотохимии РАН
Андреев А.Ф., академик РАН, директор ИФП РАН
Белыев С.Т., академик РАН, зав. кафедрой МФТИ
Велихов Е.П., академик РАН, президент РНЦ «Курчатовский институт»
Гуляев Ю.В., академик РАН, директор ИРЭ РАН
Дмитриев В.Г., чл.-корр. РАН, зав. кафедрой МФТИ
Иванников В.П., академик РАН, директор ИСП РАН
Коротеев А.С., академик РАН, директор Центра им. М.В. Келдыша
Кузнецов Н.А., академик РАН, зав. кафедрой МФТИ
Макаров В.Л., академик-секретарь Отделения ОН РАН, дир. ЦЭМИ РАН
Петров А.А., академик РАН, заведующий отделом ВЦ РАН
Фортнов В.Е., академик-секретарь Отделения ЭММПУ РАН
Патон Б.Е., академик, президент НАН Украины
Шпак А.П., академик, первый вице-президент НАН Украины
Черепин В.Т., чл.-корр. НАН Украины, директор ФТЦ НАНУ
Жданок С.А., академик-секретарь Отделения ФТН НАН Беларуси

Гаричев С.Н., д.т.н., декан ФРТК
Трунин М.Р., д.ф.-м.н., декан ФОПФ
Негодяев С.С., к.т.н., декан ФАКИ
Грознов И.Н., доцент, декан ФМБФ
Тодуа П.А., профессор, декан ФФКЭ
Вышинский В.В., профессор, декан ФАЛТ
Шананин А.А., профессор, декан ФУПМ
Леонов А.Г., профессор, декан ФПФЭ
Кривцов В.Е., доцент, декан ФИВТ
Ковальчук М.В., чл.-корр. РАН, декан ФНБИК
Деревнина А.Ю., д.т.н., декан ФИВС
Кобзев А.И., профессор, декан ФГН
Алёхин А.П., профессор, зав. кафедрой
Астапенко В.А., д.ф.-м.н., зав. кафедрой
Белоусов Ю.М., профессор, зав. кафедрой
Бугаёв А.С., академик РАН, зав. кафедрой
Щелкунов Н.Н., доцент, зав. кафедрой
Гуз С.А., доцент, зав. кафедрой
Иванов А.П., профессор, зав. кафедрой
Кваченко А.В., к.т.н., зав. кафедрой
Никишикин В.А., к.ф.-м.н., зав. кафедрой
Луккин Д.С., профессор, зав. кафедрой
Максимычев А.В., д.ф.-м.н., зав. кафедрой
Петров И.Б., профессор, зав. кафедрой
Половинкин Е.С., профессор, зав. кафедрой
Сон Э.Е., член-корр. РАН, зав. кафедрой
Тельнова А.А., доцент, зав. кафедрой
Трухан Э.М., профессор, зав. кафедрой
Холодов А.С., чл.-корр. РАН, зав. кафедрой
Энтов Р.М., академик РАН, зав. кафедрой

Пленарное заседание

УДК 517:530.1

Р.Г. Новиков

novikov@map.polytechnique.fr

Ecole Polytechnique, France

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики РАН

Неабелево преобразование Радона и приложения

Неабелево преобразование Радона было впервые рассмотрено в статье [1] в рамках интегрирования $(2+1)$ -мерной редукции автодуальных уравнений Янга–Миллса. В этом докладе мы представляем, в частности, ряд результатов, касающихся этого преобразования, и их приложения в рамках классической рентгеновской томографии, однофотонной эмиссионной томографии и поляризационной томографии. Этот доклад основан на статьях [2]–[6].

Литература

1. *Manakov S.V., Zakharov V.E.* Three-dimensional model of relativistic-invariant field theory, integrable by the Inverse Scattering Transform // Letters in Mathematical Physics — 1981. — V. 5, N. 3. — P. 247–253.
2. *Novikov R.G.* An inversion formula for the attenuated X -ray transformation // Arkiv for Matematik — 2002. — V. 40, N. 1. — P. 145–167.
3. *Novikov R.G.* On the range characterization for the two-dimensional attenuated X -ray transformation // Inverse Problems. — 2002. — V. 18, N. 3. — P. 677–700.
4. *Novikov R.G.* On determination of a gauge field on R^d from its non-abelian radon transform along oriented straight lines // Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu. — 2002. — V. 1, N. 4. — P. 559–629.
5. *Novikov R.G.* On iterative reconstruction in the nonlinearized polarization tomography // Inverse Problems. — 2009. — V. 25, N. 11. — P. 559–629.

6. *Novikov R.G., Sharafutdinov V.* On the problem of polarization tomography: I // *Inverse Problems*. — 2007. — V. 23, N. 3. — P. 1229–1257.

Секция высшей математики

УДК 517.956.225+517.575

Н.А. Антропова, В.В. Карачик

Nataly_a_a_7@mail.ru, karachik@susu.ru

Южно-Уральский государственный университет

Построение полиномиальных решений некоторых задач для уравнения Пуассона

В настоящем докладе известные представления Альманси применяются сначала для построения решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u(x) = Q(x)$, $u|_{|x|=1} = P(x)$, а затем для построения решения третьей краевой задачи для уравнения Пуассона в единичном шаре. Хорошо известна функция Грина $G(x, \xi)$ задачи Дирихле в шаре, а поэтому с теоретической точки зрения построение решения такой задачи не представляет интереса. Однако при полиномиальной правой части $Q(x)$ и полиномиальном граничном значении $P(x)$ решение $u(x)$ задачи Дирихле оказывается полиномиальным, для нахождения которого при $P(x) = 0$ необходимо вычислять сингулярный интеграл вида $u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|<1} G(x, \xi) Q(\xi) d\xi$, где ω_n — площадь единичной сферы в R^n , а $G(x, \xi)$ — функция Грина. С помощью исследования свойств представлений Альманси [1] дается формула, позволяющая легко вычислять полиномиальное решение этой задачи. Кроме этого, получена более общая формула:

$$u(x) = P(x) + \frac{|x|^2 - 1}{2} \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1 - \alpha|x|^2)^s (1 - \alpha)^s}{(2s + 2)!! (2s)!!} \Delta^s (Q - \Delta P)(\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha,$$

для представления полиномиального решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона с полиномиальными $Q(x)$ и $P(x)$. В [2] с помощью формулы Альманси были построены некоторые полиномиальные решения уравнения Пуассона, полигармонического уравнения и уравнения Гельмгольца.

Далее, рассматривается обобщенная третья краевая задача для уравнения Пуассона $\Delta u(x) = f(x), |x| < 1$, когда на границе задается условие $P_m \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) u|_{|x|=1} = \varphi$. Задачи подобного вида впервые были рассмотрены в [3, 4], однако при существенных ограничениях на вид полинома $P_m(t)$. В настоящем докладе получены условия существования и единственности решения этой обобщенной третьей краевой задачи для уравнения Пуассона. Решение задачи существует тогда и только тогда, когда выполнено условие $\lambda \in I \Rightarrow \forall H_\lambda(x), \int_{\partial\Omega} H_\lambda(x)\varphi(x)dx = \int_{\Omega} H_\lambda(x)P_{[m]}^{(\lambda)}(\lambda + 2)f(x)dx$, где $H_\lambda(x)$ — произвольный однородный гармонический полином степени λ , $I = \{k \in \mathbb{N}_0 : P_{[m]}(k) = 0\}$, $P_{[m]}^{(\lambda)}(t) \equiv P_{[m]}(t)/(t - \lambda)$, λ — некоторый корень полинома $P_{[m]}(t)$, который получается из полинома $P_m(t)$ заменой одночленов k -й степени — t^k на факториальные степени этих одночленов — $t^{[k]} \equiv t(t-1)\dots(t-k+1)$. Наконец, с помощью явного представления гармонических функций в формуле Альманси получено полиномиальное решение третьей краевой задачи для уравнения Пуассона с полиномиальной правой частью $Q(x)$ и полиномиальными граничными данными $P(x)$.

Литература

1. Карачик В.В. Об одном разложении типа Альманси // Мат. заметки. — 2008. — Т. 83, вып. 3. — С. 370–380.
2. Карачик В.В., Антропова Н.А. О решении неоднородного полигармонического уравнения и неоднородного уравнения Гельмгольца // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 3. — С. 384–395.
3. Соколовский В.Б. Об одном обобщении задачи Неймана // Дифференциальные уравнения. — 1988. — Т. 24, № 4. — С. 714–716.
4. Бицадзе А.В. К задаче Неймана для гармонических функций // Докл. АН СССР. — 1990. — Т. 311, № 1. — С. 11–13.

УДК 512.54

В.В. Беляев, Д.А. Швед

v.v.belyaev@list.ru, danshved@gmail.com

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Финитарные автоморфизмы конечно порождённых групп

Централизатором автоморфизма φ группы G называется множество всех элементов $g \in G$, таких, что $\varphi(g) = g$. Автоморфизм φ группы G называется финитарным, если его централизатор — подгруппа конечного индекса в G . Множество всех финитарных автоморфизмов произвольной группы G образует нормальную подгруппу в группе всех её автоморфизмов. Эту подгруппу мы называем группой всех финитарных автоморфизмов группы G и обозначаем $FAutG$.

В данной работе мы продолжаем исследование строения группы $FAutG$, начатое в [1], и приводим результаты, полученные в случае конечно порождённой группы G . Для формулировки этих результатов нам потребуются дополнительные понятия.

Определение 1. Объединение всех конечных классов сопряжённых элементов в группе G называется FC-центром группы G .

Определение 2. Группа G называется почти центральной, если её центр $Z(G)$ имеет конечный индекс в G .

Теорема 1. Если группа G абелева и конечно порождена, то группа $FAutG$ конечна.

Теорема 2. Если группа G конечно порождена и её FC-центр конечно порожден, то группа $FAutG$ конечно порождена и почти центральна.

Следствие. Группа всех финитарных автоморфизмов произвольной полициклической группы конечно порождена и почти центральна.

Литература

1. Беляев В.В., Швед Д.А. Финитарные автоморфизмы групп // Труды института математики и механики УРО РАН. — 2009. — Т. 15, № 2. — С. 50–57.

УДК 519.21

*Л.Л. Браницкая*¹, *О.Л. Янушкявичене*^{2,3}

branli@mail.ru, olgjan@zebra.lt

¹ Национальный исследовательский технологический университет
«МИСиС»² Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН³ Московский педагогический государственный университет**К вопросу о сходимости случайных полиномов
второго порядка**

Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные векторы X, X_1, \dots, X_n , принимающие значения в R^∞ , и $X = (X_{0,1}, \dots, X_{0,l}, \dots)$, $X_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,l}, \dots)$. Пусть $EX = 0$; $EX_{0,1}^2 = \sigma_1^2, \dots, EX_{0,l}^2 = \sigma_l^2, \dots$; $E|X_i, X_j|^3 = \beta_3 < \infty$, где $\langle X_i, X_j \rangle = \sum_{l \geq 0} X_{i,l} X_{j,l}$.

Без потери общности предположим, что

$$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_l^2 \geq \dots \geq 0.$$

Рассмотрим статистику: $T = \frac{2}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle X_i, X_j \rangle$.

Легко видеть, что предельным распределением ($n \rightarrow \infty$) этой статистики является

$$T_0 = \sigma_1^2(N_1^2 - 1) + \dots + \sigma_l^2(N_l^2 - 1) + \dots,$$

где N_1, \dots, N_l, \dots — независимые одинаково распределенные стандартные нормальные случайные величины.

В статье Янушкявичене [1] скорость сходимости этой статистики T рассматривалась для одномерных случайных величин. В данной работе мы исследуем случайные векторы при условии, что $\sigma_1 > 0$ и нет информации о $\sigma_i, i \geq 2$. Доказана следующая теорема.

Теорема. Если $\sigma_1 > 0$, то

$$\rho(T, T_0) \leq d \cdot n^{-1/14} + c \sum_{i=1}^d \left| \frac{\sigma_i}{\sigma_1} \right| \cdot n^{-1/4},$$

где ρ — это метрика Колмогорова (равномерная), а d зависит от β_3 и $\sigma_1 \cdot c$ — положительная константа.

Замечание. В одномерном случае, то есть в случае, если мы имеем дополнительную информацию, что $\sigma_2 = \sigma_3 = \dots = 0$, скорость сходимости $O(n^{-1/14})$ в нашей теореме улучшается до $O(n^{-1/4})$, а скорость $O(n^{-1/4})$ является наилучшей возможной (см. Янушкявичене [1]).

Литература

1. *Yanushkevichiene O.* Optimal rates of convergence of second degree polynomials in several metrics // Journal of math. scien. — 2006. — V. 138, N. 1. — P. 5472–5479.

2. *Bentkus V., Götze F.* Optimal bounds in non-Gaussian limit theorems for U-statistics // The Annals of Probability. — 1999. — V. 27, N. 1. — P. 454–521.

3. *Петров В.В.* Предельные теоремы для сумм случайных величин. — М.: Наука, 1987. — 357 с.

УДК 517.958:530.145

А.В. Булинский

bulinski@mail.mipt.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)**О вложении квантовых каналов в квантовые
марковские процессы с непрерывным временем**

Доклад состоит из четырех разделов. В первом описываются классические проблемы вложения, возникающие в теории вероятностей и функциональном анализе.

Упомянем вложение Скорохода и проблему вложения цепи Маркова с дискретным временем в цепь с непрерывным временем, впервые поднятую в 1937 году Элфвингом и далее разрабатывавшуюся Кендаллом, Кингманом, Чжуном, Вильямсом и многими другими. Отметим, в частности, критерий Йохансена [1], привлекающий такие понятия, как безграничная делимость и бесконечная факторизуемость матриц.

В рамках квантовой динамики и квантовой теории информации важную роль играет понятие квантового канала. Во второй части до-

клада для простоты рассматривается конечная d -уровневая квантовая система. Даются необходимые для дальнейшего изложения определения, в частности, указывается аналогия между стохастическими матрицами и вполне положительными сохраняющими след отображениями, отвечающими квантовым каналам. Эволюция квантовой системы может описываться любой из двойственных картин, Шредингера или Гейзенберга, и каналам (отображениям состояний) отвечают отображения наблюдаемых.

Следующий раздел посвящен проблемам квантового вложения. Здесь важную роль играет введенное А.С. Холево понятие безгранично делимого квантового канала, а также понятие инфинитезимально делимого канала, недавно предложенное М. Вольфом и Ж. Сираком. В [2] был получен критерий для вложения конечномерных квантовых каналов в марковскую эволюцию с генератором как не зависящим от времени, так и с зависящим.

Цель данной работы распространить результаты, справедливые для конечномерного случая на бесконечномерный или, более общим образом, на отображения произвольных алгебр фон Неймана и их преобразований пространств.

Наконец, заключительные замечания содержат гипотезы и направления будущих исследований, см. также [3, 4].

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 09-01-00424.

Литература

1. *Johansen S.* A CLT for finite semigroups and its application to the imbedding problem for finite-state Markov chain // *Z. Wahrsch. Verw. Geb.* — 1973. — V. 26. — P. 171–190.
2. *Wolf M.M., Cirac J.I.* Dividing quantum channels // *Commun. Math. Phys.* — 2008. — V. 279. — P. 147–169.
3. *Bulinski A.* Noncommutative dynamical systems, quantum stochastic processes and modeling of quantum channels // *Proc. of the 6th St. Petersburg Workshop on Simulation.* — 2009. — P. 83–87.
4. *Sturmer E.* Separable states and positive maps // *J. Funct. Anal.* — 2008. — V. 254. — P. 2303–2312.

УДК 517.968+517.983

В.Б. Васильев, А.В. Васильев

vbv57@inbox.ru, alexvassel@gmail.com

Брянский государственный университет им. акад. И.Г. Петровского

Быстрые аппроксимации для некоторых сингулярных интегралов

Свертка — весьма распространенный и широко используемый в математике объект [1–4]. В связи с этим возникает настоятельная потребность в исследовании различных структурных свойств сверток и разработке эффективных алгоритмов численного решения сверточных уравнений.

В этой работе мы будем рассматривать два оператора (и соответственно два уравнения) очень похожие на классические свертки, но в то же время таковыми не являющимися. Это преобразование Гильберта:

$$u(x) \mapsto v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y)}{x-y} dy$$

и его многомерный аналог — оператор Кальдерона–Зигмунда (многомерный сингулярный интеграл):

$$u(x) \mapsto v.p. \int_{R^m} K(x-y)u(y)dy.$$

Здесь оба интеграла понимаются в смысле главного значения, и ядро $K(x)$ удовлетворяет стандартному условию нулевого среднего значения и дифференцируемости на сфере S^{m-1} .

Нас интересуют дискретные аналоги уравнений с такими операторами, в частности, уравнение

$$au_h(x_j) + \sum_{y_i \in Z_h^m} K(x_j - y_i)h^m = v_h(x_j), x_j \in Z_h^m, \quad (1)$$

(по определению $K(0) = 0$), где Z_h^m — целочисленная решетка в m -мерном пространстве R^m . Обнаруженное сходство дискретных (1) и континуальных аналогов [5] настолько велико, что позволяет делать заключения об их одновременной разрешимости. Однако урав-

нение (1) представляет собой бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, и для компьютерной реализации необходима конечномерная аппроксимация. В отличие от проекционных методов [2], которые рекомендуют просто усекать бесконечную систему (1), мы рассматриваем другой подход. Вкратце его суть состоит в следующем.

Берется сужение ядра $K(x)$ на Z_h^m , затем его сужение на куб $Q_N = \{x \in Z_h^m : |x| \leq N, |x| = \max |x_K|, k = 1, 2, \dots, m\}$. Это сужение периодически продолжается на Z_h^m , и вместо уравнения (1) рассматривается уравнение с так называемой циклической сверткой [3, 4]. Последнее позволяет применить аппарат быстрого преобразования Фурье и получить существенный выигрыш во времени по сравнению с решением усеченной системы (1).

Проведены некоторые тестовые вычисления.

Литература

1. Гахов. Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. — М.: Наука, 1978.
2. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. — М.: Наука, 1971.
3. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления свертки. — М.: Радио и связь, 1992.
4. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. — М.: Техносфера, 2009.
5. Vasilyev V.B. On certain continual and discrete convolution operators // 6th Vienna Conference on Mathematical Modeling. — Vienna: Vienna University of Technology, 2009. — N. 35. — P. 2616–2618.

УДК 517.9

М.О. Голубев

maksimkane@mail.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

О некоторых свойствах чебышевских множеств в гильбертовом пространстве

Рассматривается связь между выпуклыми и чебышевскими множествами в евклидовом пространстве R^n и гильбертовом пространстве H .

Предлагаются различные подходы к доказательству того, что чебышевское множество является выпуклым. В том числе несколько альтернативных доказательств теоремы Власова о чебышевности выпуклых функций. Одно из них является геометрическим, другое использует аппарат выпуклого анализа.

Приводится пример выпуклого множества в гильбертовом пространстве H , дополнением которого является невыпуклое чебышевское множество. Такое множество называется каверной Кли.

Литература

1. Власов Л.П. Чебышевские множества и некоторые их обобщения // Матем. заметки. — 1968. — Т. 3, № 1. — С. 59–69.
2. Карлов М.И., Царьков И.Г. Выпуклость и связность чебышевских множеств и солнц // Фундаментальная и прикладная математика. — 1997. — Т. 3, № 4. — С. 967–978.
3. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 440 с.
4. Asplund E. Chebyshev sets in Hilbert space // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — N. 144. — P. 235–240.
5. Bronsted A. Milman's theorem for convex functions // Math. Scand. — 1966. — N. 19. — P. 5–10.
6. Borwein J.M. Proximity and Chebyshev sets // Optimization letters. — 2007. — V. 1. — P. 21–32.

УДК 532.51+517.956.6+517.972.5

Н.А. Гусев

n.a.gusev@gmail.com

Московский физико-технический институт
(государственный университет)**О разрешимости линеаризованных уравнений
сжимаемой жидкости**

Линеаризованные уравнения сжимаемой жидкости являются вспомогательным средством при изучении соответствующих нелинейных уравнений, а также представляют самостоятельный научный интерес. (Например, в [1] исследовались спектральные свойства оператора, соответствующего стационарным линеаризованным уравнениям сжимаемой жидкости.)

Вопросы разрешимости линеаризованных уравнений сжимаемой жидкости изучались в [2, 3] для системы

$$u_t + a \nabla p = \mu \Delta u + \nu \nabla \operatorname{div} u + f, \quad p_t + b \operatorname{div} u = g.$$

В [3] рассматривалась начально-краевая задача для этой системы в ограниченной области $\Omega \subset \mathcal{R}^3$. Была получена априорная оценка для величины $\|u\|_{W_r^{2,1}(\Omega \times [0, T])} + \|p\|_{W_r^{1,0}(\Omega \times [0, T])} + \|p_t\|_{W_r^{1,0}(\Omega \times [0, T])}$, $r \geq 2$. В [2] рассматривалась задача Коши в R^3 для приведённой системы и были установлены существование и единственность решений в классе $p \in C([0, +\infty); H^1(R^3)) \cap C^1((0, +\infty); H^1(R^3))$, $u \in C([0, +\infty); \mathcal{L}^2(R^3)) \cap C((0, +\infty); \mathcal{H}^2(R^3)) \cap C^1((0, +\infty); \mathcal{L}^2(R^3))$, где $H^1 = W^{1,2}$ — пространство Соболева. Вопрос о существовании слабых решений в [2, 3] не рассматривался. В то же время слабые решения играют важную роль в случае нелинейных уравнений. Исследованию вопроса существования слабых решений линеаризованных уравнений сжимаемой жидкости и посвящена данная работа.

Задача 1. Найти поля скорости $u = u(x, t)$ и давления $p = p(x, t)$, для которых

$$\begin{aligned} \rho_t + \operatorname{div} u &= 0, & \rho &= 1 + \alpha p, \\ u_t + \nabla p &= \Delta u + \nabla \operatorname{div} u + \rho f, \\ p|_{t=0} &= p_0, & u|_{\partial\Omega} &= 0, & u|_{t=0} &= u_0, \end{aligned}$$

где $\alpha > 0$.

Теорема 1. Пусть $\partial\Omega \in C^\infty$, $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega \times [0, T])$, $T > 0$, $u_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, $p_0 \in \hat{L}^2(\Omega)$. Тогда при каждом $\alpha \in (0, 1)$ существует единственное слабое решение (u, p) задачи 1:

$$u \in \tilde{W}^{1,2}(0, T; \mathcal{H}_0^1(\Omega)), \quad p \in W^{1,2}(0, T; \hat{L}^2(\Omega)).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \hat{L}^2(\Omega) &= \{p | p \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} p(x) dx = 0\}, \\ \tilde{W}^{1,2}(0, T; \mathcal{H}_0^1(\Omega)) &= \\ &= u | u \in \mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{H}_0^1(\Omega)), \\ & i(u) \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H}^{-1}(\Omega)) \}, \end{aligned}$$

где $i : u \mapsto \int_{\Omega} (u, \cdot) dx$, (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в \mathcal{R}^3 .

Литература

1. Прибыль М.А. Спектральный анализ линеаризованных стационарных уравнений вязкой сжимаемой жидкости // Математический сборник. — 2007. — Т. 198, № 10.
2. Matsuyama T., Ikehata R., Kobayashi T. Remark on the L2 Estimates of the Density for the Compressible Navier–Stokes Flow in R^3 // Nonlinear Analysis. — 2001. — V. 47.
3. Zajaczkowski W.M., Mucha P.B. On a Lp-estimate for the linearized compressible Navier–Stokes equations with the Dirichlet boundary conditions // J. Differential Equations. — 2002. — V. 186. — P. 377–393.

УДК 519.6

П.Е. Двуреченский

pavel.dvurechensky@gmail.com

Московский физико-технический институт
(государственный университет)**Программный комплекс для построения оптимальных стратегий в дифференциальных играх**

С середины 2009 года на кафедре высшей математики МФТИ (ГУ) под руководством профессоров Е.С. Половинкина и Г.Е. Иванова силами аспиранта К.В. Чувилина, студента Г.М. Иванова и автора доклада проводятся работы по созданию программного комплекса, позволяющего находить оптимальные стратегии в различных классах дифференциальных игр.

В программном комплексе реализуются три класса линейных антагонистических игр на фиксированном отрезке времени: игра с целевым множеством [1], линейно-квадратичная игра [2] и игра с эллипсоидальными штрафами [3]. Для задачи с целевым множеством текущая реализация программного комплекса является новой версией программы, созданной Р.В. Константиновым для решения игр такого типа. Разработка ведется с использованием свободного программного обеспечения, в частности библиотек Qt. Программный комплекс содержит интерфейс для ввода данных, рассчитывает функцию цены игры и стабильный мост [2], позволяет строить оптимальные стратегии игроков.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

Литература

1. *Половинкин Е.С., Иванов Г.Е., Балашов М.В., Константинов Р.В., Хорев А.В.* Об одном алгоритме численного решения линейных дифференциальных игр // Математический сборник. — 2001. — Т. 192, № 10. — С. 95–122.

2. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985. — 520 с.

3. *Иванов Г.Е.* Дифференциальные игры с эллипсоидальными штрафами // Прикладная математика и механика. — 2004. — Т. 68, № 5. — С. 725–745.

УДК 530.145.1

А.И. Днестрян¹, Г.Г. Амосов^{2,1}

dnestor@inbox.ru, gramos@mail.ru

¹ Московский физико-технический институт
(государственный университет)² Математический институт им. В.А. Стеклова РАН**Томограмма и дробное преобразование Фурье**

В квантовой механике наряду с волновой функцией в координатном и импульсном представлении существует некая функция распределения вероятностей в представлении наблюдаемой $\mu x + \nu p$, называемая томограммой $W(x, \mu, \nu)$ [1]. Томограмма связана с волновой функцией в координатном представлении равенством

$$W(x, \mu, \nu) = |\hat{F}_{\mu, \nu}[\psi](x)|^2,$$

где оператор $\hat{F}_{\mu, \nu}$ есть линейный унитарный в пространстве $L_2(R)$ интегральный оператор

$$\hat{F}_{\mu, \nu}[\psi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}} \exp\left(i\frac{\mu x^2}{2\nu}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\left(\frac{\mu y^2}{2\nu} - \frac{xy}{\nu}\right) \cdot \psi(y) dy.$$

Понятие томограммы находит применение в квантовой теории информации. Можно отметить некоторые свойства оператора $\hat{F}_{\mu, \nu}$, например, действуя на оператор $\mu\hat{x} + \nu\hat{p}$, оператор $\hat{F}_{\mu, \nu}$ возвращает координату

$$\hat{F}_{\mu, \nu}(\mu\hat{x} + \nu\hat{p}) = \hat{x}\hat{F}_{\mu, \nu}.$$

Также можно заметить, что оператор $\hat{F}_{0,1}$ есть обычное прямое преобразование Фурье.

Нашей целью является поиск собственных функций $\hat{F}_{\mu, \nu}$, а также следует подтвердить или опровергнуть предположение о явлении

оператора $\hat{F}_{\cos \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{\pi}{2n}}$ дробным преобразованием Фурье, то есть

$$\left(\hat{F}_{\cos \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{\pi}{2n}}\right)^n = \hat{F}_{0,1}.$$

Литература

1. Mancini S., Manko V.I., Tombesi P. Symplectic tomography as classical approach to quantum systems // Phys. Lett. A. — 1996. — V. 213, N. 1–2.

УДК 533.6.12

В.И. Жук¹, В.С. Сафронов²

zhuk@ccas.ru, safronov.victor@gmail.ru

¹ Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

² Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Кноидальные и солитонные волны в пограничном слое

Решение системы уравнений Навье–Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \text{Re}^{-1} \nabla^2 u, \quad (\nabla \cdot u) = 0, \quad \nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right\},$$

$$u = \{u, v\}, \quad (1)$$

при числах Рейнольдса $\text{Re} \rightarrow \infty$ будем искать как сумму основного стационарного решения $u = u_o(Y_m)$, $v = 0$, $p = 0$ и возмущения:

$$\begin{aligned} u &= u_o(Y_m) + \alpha u_{1m}(T, X, Y_m) + \alpha^2 u_{2m}(T, X, Y_m) + \dots, \\ v &= \alpha^{3/2} v_{1m}(T, X, Y_m) + \alpha^{5/2} v_{2m}(T, X, Y_m) + \dots, \\ p &= \alpha^2 p_{1m}(T, X, Y_m) + \alpha^3 p_{2m}(T, X, Y_m) + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь параметр $\alpha \rightarrow 0$, а новые (быстрые) переменные вводятся формулами

$$T = \text{Re}^{1/2} \alpha^{3/2} \tilde{t}, X = \text{Re}^{1/2} \alpha^{1/2} \tilde{x}, Y_m = \text{Re}^{1/2} \tilde{y}.$$

Пусть профиль $u_o(Y_m)$ тангенциальной составляющей невозмущенной скорости обладает свойствами

$$Y_m \rightarrow \infty : u_o \rightarrow 0; \quad Y_m \rightarrow \infty : u_o = \lambda_1 Y_m + \lambda_2 Y_m^2 + \dots \quad (3)$$

Рассматриваемое движение (3) аналогично пограничному слою [1] с той лишь разницей, что скорость обращается в нуль не только на поверхности $Y_m = 0$, но и на его внешнем крае, соответствующем $Y_m \rightarrow \infty$.

Внесем разложения (2) в уравнения (1), тогда возмущение определяется с точностью до произвольной функции $A_1 = A_1(T, X)$. В дальнейшем анализе остановимся на таком соотношении между Re и α , что

$$\alpha \text{Re}^{1/7} \rightarrow \infty.$$

Данное предположение влечет за собой уравнение

$$\frac{\partial A_1}{\partial T} + \lambda_1 A_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} = \frac{\Delta}{\lambda_1} \frac{\partial^3 A_1}{\partial X^3}, \quad \Delta = \int_0^{+\infty} u_o^2(\xi) d\xi,$$

которое после исключения постоянных Δ и λ_1 с помощью преобразования

$$t = \Delta^{-2/7} \lambda_1^{8/7} T, \quad x = \Delta^{-3/7} \lambda_1^{5/7} X, \quad A = \Delta^{-1/7} \lambda_1^{4/7} A_1$$

приобретает канонический вид уравнения Кортевега–де Вриза:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial^3 A}{\partial x^3}. \quad (4)$$

Периодические нелинейные волны уравнения Кортевега–де Вриза выражаются через эллиптические интегралы и носят название кноидальных волн [2]. При малых амплитудах \hbar бегущая с отрицательной фазовой скоростью волна дается выражением

$$\begin{aligned} A(t, x) &= -2|c_o| + \frac{\hbar^2}{4c_o} + \hbar \cos[|c_o|^{1/2}(x - x_o + |c_o|t)] - \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{12c_o} \cos[2|c_o|^{1/2}(x - x_o + |c_o|t)] + O(\hbar^3). \end{aligned}$$

Локальная неровность обтекаемой поверхности порождает член типа источника в уравнении Кортевега–де Вриза (4). Нетривиальным обстоятельством является факт генерации солитонов, индуцированный

упомянутым источником. Таким образом, введенная выше асимптотическая конструкция может иметь трактовку как модель самовозбуждения нелинейных структур в пограничных слоях.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1. 1/500).

Литература

1. *Smith F.T., Duck P.W.* Separation of jets or thermal boundary layers from a wall // Quart. J. Mech. Appl. Math. — 1977. — V. 30, Pt. 2. — P. 143–156.

2. *Drazin P.G.* On the stability of cnoidal waves // Quart. J. Mech. Appl. Math. — 1977. — V. 30, Pt. 1. — P. 91–105.

УДК 517.98

В.В. Кантор

thead.wl@gmail.com

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Сравнение метрик на пространстве выпуклых компактов

В докладе обсуждаются свойства некоторых метрик в пространстве выпуклых компактов из R^n . Напомним, что опорной функцией выпуклого компакта $A \subset R^n$ называется функция $s(p, A) = \max\{(p, a) | a \in A\}$, $\forall p \in R^n$. Пусть $A, B \subset R^n$ выпуклые компакты. Метрика Хаусдорфа может быть задана через опорную функцию по формуле (см. лемма 1.11.4 [1]):

$$h(A, B) = \max_{\|p\|=1} |s(p, A) - s(p, B)|. \quad (1)$$

Рассматриваются также метрики

$$h_1(A, B) = \frac{1}{S^{n-1}} \int_{\|p\|=1} |s(p, A) - s(p, B)|^d p, \quad (2)$$

$$h_2(A, B) = \sqrt{\frac{1}{S^{n-1}} \int_{\|p\|=1} |s(p, A) - s(p, B)|^2 dp}, \quad (3)$$

являющиеся аналогами L_1 - и L_2 -метрик. Здесь $S^{n-1} = \int_{\|p\|=1} dp$.

Из формул (1), (2), (3), очевидно, следуют оценки $h_1(A, B) \leq h(A, B)$ и $h_2(A, B) \leq h(A, B)$ для любых выпуклых компактов A, B .

Обратной оценки, как показывает следующий пример, в общем случае не существует. Рассмотрим в R^2 выпуклые компакты $A_t = \{x \in R^n | \|x\| \leq t\}$ и $B_t = \{x \in R^n | \|x\| \leq t, x_1 \leq t-1\}$. Легко видеть, что $h(A_t, B_t) = 1$. При этом справедлива оценка:

$$h_1(A_t, B_t) \leq \frac{\arccos \frac{t-1}{t}}{\pi} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h_1(A_t, B_t) = 0.$$

Значит, оценки вида $h(A, B) \leq C \cdot (h_1(A, B))^\alpha$, $\alpha > 0$, не существует для произвольных выпуклых компактов $A, B \subset R^n$. Аналогичное рассуждение проводится для $h_2(A, B)$, а также можно обобщить пример на R^n .

Получены новые доказательства оценки $h(A, B)$ через $h_1(A, B)$ или $h_2(A, B)$ для выпуклых равномерно ограниченных компактов A и B (см. [2]). Пусть выпуклые компакты $A, B \subset R^n$ лежат в некотором шаре радиуса R . Для $h_1(A, B)$:

$$h(A, B) \leq \sqrt[n]{\frac{(2R)^{n-1} n(n-1) I_{n-2}}{\sin^{n-2} 1} h_1(A, B)}, \quad \text{где}$$

$$I_m = \begin{cases} \pi \frac{(m-1)!!}{m!!}, & m - \text{четно} \\ 2 \frac{(m-1)!!}{m!!}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Для $h_2(A, B)$:

$$h(A, B) \leq \sqrt[n+1]{\frac{(2R)^{n-1} (n-1)n(n+1) I_{n-2}}{2 \sin^{n-2} 1} h_2^2(A, B)}.$$

Литература

1. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: Физматлит, 2004. — 410 с.

2. *Vitale R.A.* L_p metrics for compact convex sets // J. Approx. Theory. — 1985. — V. 45. — P. 280–287.

П.А. Кожевников

pkozhr@rambler.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

О многообразиях групп большого конечного периода

Для натурального числа n через B_n обозначим многообразие Бернсайда, то есть класс групп, в которых выполнено тождество $x^n = 1$, а через A_n — многообразие всех абелевых групп, удовлетворяющих тождеству $x^n = 1$. Многообразие X называется накрывающим для многообразия Y , если X — минимальное многообразие, содержащее Y , но не совпадающее с Y . Справедливы следующие утверждения.

Для любого достаточно большого натурального n многообразие B_n содержит подмногообразия, не обладающие конечным базисом тождеств.

Для любого достаточно большого нечетного n существует континуальное семейство накрывающих многообразий для A_n .

Литература

1. Коуровская тетерадь: Нерешенные проблемы в теории групп. — Новосибирск: 2006.
2. Кожевников П.А. О многообразиях групп большого нечетного периода. — М.: ВИНТИ, 2000. — 19 с.
3. Ольшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. — М.: Наука, 1989.

В.Ф. Лубышев

v.lubyshev@gmail.com

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Кратная разрешимость нелинейных уравнений и систем

Мы исследуем существование кратных решений нелинейной задачи Дирихле для гладкой ограниченной области $\Omega \subset R^N$:

$$\Delta_p^{2m} u - \sum_{i=1}^k \operatorname{div}(\mu_i |\nabla u|^{q_i-2} \nabla u) = \lambda a |u|^{\alpha-2} u + b |u|^{\beta-2} u \text{ в } \Omega,$$

$$D^\alpha u = 0 \text{ (} \forall |\alpha| \leq 2m - 1 \text{) на } \partial\Omega,$$

где $\Delta_p^{2m} u := \Delta^m (|\Delta^m u|^{p-2} \Delta^m u)$, $a, \mu_i, b \in L^\infty(\Omega)$ — неотрицательные функции (a, b не равны тождественно нулю), а λ — вещественный параметр. Предполагается, что

$$1 < \alpha < p, q_i < \beta < p^*(2m),$$

где $p^*(s) := pN/(N - ps)$ при $ps < N$ и ∞ при $ps \geq N$.

Мы также изучаем существование и отсутствие решений соответствующей нелинейной гамильтоновой системы высокого порядка:

$$(-\Delta)^m u = |v|^{r-2} v \text{ в } \Omega,$$

$$(-\Delta)^m v = \lambda a |u|^{\alpha-2} u + b |u|^{\beta-2} u \text{ в } \Omega,$$

$$B_m u = B_m v = 0 \text{ на } \partial\Omega,$$

где $B_m \varphi = (\varphi, \Delta \varphi, \dots, \Delta^{m-1} \varphi)$.

В рассматриваемой скалярной задаче нелинейность носит выпукло-вогнутый характер. Задачи с выпукло-вогнутыми нелинейностями и нелинейностями, существенно сохраняющими «выпукло-вогнутую» структуру, изучались многими математиками в основном для уравнений с операторами лапласиана и p -лапласиана (см., например, [1–7]).

Теорема о горном перевале, вариационный принцип Экланда и метод верхних и нижних решений — основные инструменты, используемые в большинстве этих работ. Мы используем глобальный метод

расслоения С.И. Похожаева — один из наиболее действенных методов исследования нелинейных дифференциальных уравнений, который, как нам кажется, наиболее гармонично вписывается в контекст рассматриваемых задач.

При определенных ограничениях на показатели α , β , r , q_i мы доказываем

- Существование бесконечного множества различных решений рассматриваемой нелинейной задачи Дирихле при $\lambda \in (0, \lambda^*)$, где $\lambda^* > 0$ — некоторое число, как с положительной, так и с отрицательной энергиями.
- Существование бесконечного множества различных решений рассматриваемой нелинейной гамильтоновой системы при $\lambda \in (0, \lambda^*)$, где $\lambda^* > 0$ — некоторое число.
- Несуществование положительных решений рассматриваемой нелинейной гамильтоновой систем для всех $\lambda > 0$.

Литература

1. *Ambrosetti A., Brezis H., Cerami G.* Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems // *J. Funct. Anal.* — 1994. — V. 122. — P. 519–543.
2. *Ambrosetti A., Garcia A.J., Peral A.I.* Multiplicity results for some nonlinear elliptic equations // *J. Funct. Anal.* — 1996. — V. 137. — P. 219–242.
3. *Garcia A.J., Peral A.I.* Some results about existence of a second positive solution in a quasilinear critical problem // *Indiana Univ. Math. J.* — 1994. — V. 43. — P. 941–957.
4. *Garcia A.J., Manfredi J., Peral A.I.* Sobolev versus Holder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations // *Comm. Contemp. Math.* — 2000. — V. 2. — P. 385–404.
5. *Il'yasov Y.* On nonlocal existence results for elliptic equations with convex-concave nonlinearities // *Nonlinear Anal.* — 2005. — V. 6. — P. 211–236.
6. *Kyritsi S.T., Papageorgiou N.S.* Pairs of positive solutions of p -Laplacian equations with combined nonlinearities // *Comm. Pure and Applied Analysis.* — 2009. — V. 8. — P. 1031–1051.
7. *Li S.J., Wu S., Zhou H.S.* Solutions to semilinear elliptic problems with combined nonlinearities // *J. Differential Equations.* — 2002. — V. 185. — P. 200–224.

УДК 519.8

О.К. Подлипский

ok_podlipsky@yahoo.com

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Построение модели эксперта по быстро прогрессирующему гломерулонефриту

Для построения баз знаний используется подход экспертной классификации, в рамках которого задача классификации предполагает определение множества критериев, по которым проводится оценка состояний объекта исследования. Критерии предполагаются независимыми. Для каждого критерия определяется множество возможных оценок. Декартово произведение шкал оценок по всем критериям формирует пространство всевозможных состояний, подлежащих классификации на основе знаний эксперта. Требуется на основе экспертных знаний построить классификацию в заданном пространстве состояний, то есть сформировать правила отнесения каждого объекта к одному из predetermined классов. Построенная классификация считается полной, если для любого возможного состояния определен некоторый класс решения.

Рассматривается формальная постановка задачи ординальной классификации. Описывается метод построения баз данных. Для решения больших задач классификации используется разработанный метод, состоящий в выделении из исходной задачи упрощенных задач. В исходной задаче шкалы критериев заменяются бинарными.

Для задачи классификации с двумя классами решений вводится функция — вероятность принадлежности объекта классу решений по мнению (группы) экспертов. Формулируются и доказываются свойства введенной функции. Предлагается и обосновывается метод построения баз экспертных знаний для создания прикладных консультационных систем.

Описывается апробация предложенного метода. Совместно с экспертами Московской медицинской академии имени И.М. Сеченова строится полная и непротиворечивая база знаний по быстро прогрессирующему гломерулонефриту. В результате получено формальное

описание модели эксперта по быстро прогрессирующему гломерулонефриту.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МК-1512.2010.9.

Литература

1. Брук Э.И., Кочин Д.Ю., Подлипский О.К. Системы неявного обучения задачам медицинской диагностики, основанные на экспертных знаниях // Медицина в зеркале информатики. — М.: Наука, 2008. — С. 22–33.

2. Подлипский О.К. О многоэкспертной классификации альтернатив // «Фундаментальные и прикладные проблемы современной математики»: Сб. науч. трудов. — М.: МФТИ, 2010. — С. 140–149.

3. Подлипский О.К. Построение баз знаний группой экспертов // Компьютерные исследования и моделирование — 2010. — Т. 2, № 1. — С. 3–11.

УДК 517.956.223

И.В. Романов

igor1984@bk.ru

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Государственный университет — Высшая школа экономики

Управление колебаниями пластины с помощью граничных сил

Рассматривается задача управления колебаниями пластины с ограничением на абсолютную величину управляющего воздействия. Целью управления является приведение пластины в состояние т.н. ε — окрестности покоя за конечное время. При этом окрестность нуля понимается в смысле некоторого соболевского пространства.

Пусть Ω — ограниченная область с гладкой границей, T — время управления. Уравнение колебаний двумерной пластины имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \Delta^2 u(x,t) = 0.$$

Данное уравнение рассматривается в области $Q = \Omega \times (0, T)$. На боковой поверхности Q ставится краевая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = P(x,t),$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial n} = R(x,t).$$

Также определяются начальные условия при $t = 0$. Управление данной механической системой осуществляется с помощью второго краевого условия. При этом первое граничное условие полагается равным нулю. Также в работе приводится явный вид управляющего воздействия.

Литература

1. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 415 с.

2. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Физматлит, 1965. — 476 с.

3. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // УМН. — 2005. — Т. 60, № 10. — С. 89–114.

4. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. — М.: Физматлит, 2006. — 329 с.

УДК 519.175.4

А.А. Рябченко^{1,2}, Е.А. Самосват^{1,2}

d-sun-d@ya.ru, samosvat.egor@gmail.com

¹ Московский физико-технический институт

(государственный университет)

² ООО «Яндекс»

О числе подграфов случайного графа в модели Барабаша–Альберта

В последнее десятилетие появилось много работ, посвященных изучению web-графа и моделированию его свойств с помощью случайных графов. Под web-графом понимается ориентированный граф, вершинами которого являются документы (в основном статические web-страницы) сети Интернет, а дугами — гипертекстовые ссылки между ними. Изучение его свойств представляет большой научный интерес и имеет огромную практическую ценность. Основная область применения накопленных о web-графе данных — информационно-поисковые системы, такие как Google, Bing, Яндекс.

Одним из первых и самых популярных классов моделей являются модели предпочтительного присоединения, предложенные Барабаша и Альберт в 1999 году [1]. Эти модели замечательны тем, что в них выполняются многие свойства, наблюдаемые в реальном Интернете, такие, например, как степенной закон распределения степеней вершин [1] и малый диаметр [2].

Опишем модель типа Барабаша и Альберт, с которой мы работали. Индуктивно определим процесс $(G_m^t)_{t \geq 1}$ так, что G_m^t является графом на множестве вершин $\{1, \dots, t\}$ с mt ребрами. Начнем с G_m^1 — графа с одной вершиной и m петлями. Имея G_m^{t-1} , мы построим G_m^t , добавляя вершину t вместе с m ребрами, выходящими из нее. Ребра проводятся взаимно независимо, и каждое ребро соединяет вершину t с вершиной i , где $i \in \{1, \dots, t\}$ выбирается случайно, с вероятностью, пропорциональной текущим степеням вершин. Тогда граф G_m^t — элемент вероятностного пространства, задаваемого сечением процесса $(G_m^t)_{t \geq 1}$ на шаге t . Нами была доказана следующая теорема.

Теорема о произвольном подграфе. Пусть задан граф G_0 , степени вершин которого равны d_1, \dots, d_s . Обозначим через $\langle d_i = k \rangle$ число вершин в G_0 , степень каждой из которых равна k . Обозначим

через $\langle G_0, G_m^n \rangle$ число подграфов, изоморфных графу G_0 в графе G_m^n . Тогда

$$E(\langle G_0, G_m^n \rangle) = \Theta(1) \cdot (n^{\langle d_i=0 \rangle} \cdot \sqrt{n}^{\langle d_i=1 \rangle} \cdot \ln(n)^{\langle d_i=2 \rangle}).$$

Зависимость от m занесена в константу Θ .

Литература

1. Barabasi A.-L., Albert R. Emerging of scaling in random networks // Science. — 1999. — V. 286. — P. 509–512.
2. Albert R., Jeong H., Barabasi A.-L. Diameter of the World-Wide Web // Nature. — 1999. — V. 401. — P. 130.
3. Bollobas B., Riordan O. Mathematical results on scale-free random graphs // Handbook of graphs and networks. — 2003. — P. 1–34.
4. Bollobas B., Riordan O. The diameter of a scale-free graph // Combinatorica, 2004. — N. 1. — P. 5–34.

УДК 518.23

А.И. Тюленев

tyulenev-math@yandex.ru

Московский физико-технический институт

(государственный университет)

Институт ядерных исследований РАН

Характеризация следов функций для весовых пространств С.Л. Соболева

Рассматривается весовое функциональное пространство С.Л. Соболева $W_p^1(\sigma, K \times (0,1))$ с нормой:

$$|f| = \left[\sum_{i=1}^n \int_0^1 \int_K \sigma(x) \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, x_n) \right|^p dx dx_n + \int_0^1 \int_K \sigma(x) |f(x, x_n)|^p dx dx_n \right]^{1/p}.$$

Здесь $K = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) : 0 < x_i < \infty, (i = 1, \dots, n-1)\}$, $\sigma : (0, \infty)^{n-1} \rightarrow (0,1)$ монотонно не убывает по каждой из переменных (при фиксированных остальных).

Получены необходимые и достаточные условия на след функции из этого пространства при $x_n = 0$.

Эти условия состоят в конечности нормы следа:

$$|\varphi| = \left[\int_K \sigma(x) |\varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{Q_1^{n-1}} \frac{1}{|h|^{n+p-2}} \int_K \sigma(x) |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p dx dh \right]^{\frac{1}{p}},$$

где Q_1^{n-1} — $n-1$ -мерный куб с ребром длины 1.

Также рассматривается весовое функциональное пространство С.Л. Соболева $W_p^1(\beta, (0,1) \times (0,1))$ с нормой:

$$|f| = \left[\sum_{i=1}^2 \int_0^1 \int_0^1 \beta(x) \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2) \right|^p dx_1 dx_2 + \int_0^1 \int_0^1 \beta(x) |f(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2 \right]^{1/p}.$$

Здесь $\beta : (0,1) \rightarrow (0, \infty)$ монотонно не возрастает. При этом рассматривается 2 случая:

$$1) \int_0^1 \beta(t) dt = \infty;$$

$$2) \int_0^1 \beta(t) dt < \infty \text{ и существует константа } M \text{ такая, что}$$

$$\frac{\int_0^y \beta(t) dt}{y} < \frac{M}{y} \quad \forall y \in (0,1).$$

В каждом случае получены необходимые и достаточные условия на след функции из рассматриваемого пространства.

Они состоят в конечности нормы следа:

$$|\varphi| = \left[\int_0^1 \beta(y) |\varphi(y)|^p dy \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_0^1 \beta(y) \int_0^y \frac{|\varphi(y-t) - \varphi(t)|^p}{t^p} dt dy \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Литература

1. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
2. Бесов О.В. О продолжении функций с сохранением свойств интегрального модуля гладкости второго порядка // Математический сборник. — 1962. — Т. 58(100), № 2.
3. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988.
4. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977.

УДК 512.64; 530.145

С.Н. Филиппов¹, В.И. Манько^{1,2}

sergey.filippov@phystech.edu, manko@sci.lebedev.ru

¹ Московский физико-технический институт
(государственный университет)

² Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН

Свойства симметричного набора векторов и взаимно равнонаклонённых базисов в конечномерных гильбертовых пространствах и формализм звёздочного произведения

Следуя традиции в физической литературе, будем называть d -мерное комплексное векторное пространство H размерности $\dim H = d < \infty$ со скалярным произведением $\langle \varphi | \psi \rangle$, $\varphi, \psi \in H$, удовлетворяющим аксиомам унитарного пространства и линейным по второму аргументу, гильбертовым пространством (в отличие от математической традиции, использующей термин «унитарное пространство») [1].

Особый интерес для линейной алгебры и квантовой теории представляет симметричный набор векторов (СНВ) $\{|\psi_n\rangle\}_{n=1}^{d^2}$, удовлетворяющий условию

$$|\langle \psi_i | \psi_j \rangle|^2 = \frac{d\delta_{ij} + 1}{d+1},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Существование такого набора векторов в d -мерном гильбертовом пространстве показано аналитически при $d \leq 15$ и численно при $d \leq 67$, однако проблема существования такого набора для произвольной размерности d по-прежнему остаётся нерешённой [2].

Не менее интересен и полный набор взаимно равнонаклонённых базисов (ВРБ) в H , который состоит из $d+1$ базисов $\{|a\alpha\rangle\}_{\alpha=0}^{d-1}$ (где $a = 0, 1, \dots, d$ соответствует номеру базиса, индекс $\alpha = 0, 1, \dots, d-1$ обозначает номер вектора в определённом базисе a), удовлетворяющих условию (см., например, [3]):

$$|\langle a\alpha | b\beta \rangle|^2 = \frac{1}{d}(1 - \delta_{ab}) + \delta_{ab}\delta_{\alpha\beta}.$$

Известно, что полный набор ВРБ существует, если размерность пространства d — простое число или степень простого числа; однако

невозможность построить полный набор ВРБ для других составных d не доказана даже для $d = 6$.

В докладе формализм звёздочного произведения применяется к СНВ-проекторам $\hat{P}_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ и ВРБ-проекторам $\hat{P}_{a\alpha} = |a\alpha\rangle\langle a\alpha|$ с целью выявления новых свойств у последних. Показано, что деквантайзеры и квантайзеры соответствующих схем звёздочного квантования имеют вид

$$\hat{U}_i = \frac{1}{d}\hat{P}_i, \hat{D}_i = (d+1)\hat{P}_i - \hat{I},$$

$$\hat{U}_{a\alpha} = \frac{1}{d+1}\hat{P}_{a\alpha}, \hat{D}_i = (d+1)\hat{P}_{a\alpha} - \hat{I},$$

где \hat{I} — единичный оператор. Используя общие свойства ядра звёздочного произведения $K_{1,2,3} = Tr\hat{D}_1\hat{D}_2\hat{U}_3$, выведена связь между «3-произведением» $T_{1,2,3} = Tr\hat{P}_1\hat{P}_2\hat{P}_3$ и произведениями высших степеней для соответствующих СНВ- и ВРБ-проекторов [4]. Также в докладе будет рассмотрен формализм звёздочного произведения применительно к произвольному полному набору векторов в H .

Работа поддержана грантами РФФИ 09-02-00142, 10-02-00312, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» № 14.740.11.0497.

Литература

1. Халево А.С. Квантовые системы, каналы, информация. — М.: МЦНМО, 2010. — 328 с.
2. Scott A.J., Grassl M. Symmetric informationally complete positive-operatorvalued measures: A new computer study // J. Math. Phys. — 2010. — V. 51. — P. 042203.
3. Wootters W.K., Fields B.D. Optimal state-determination by mutually unbiased measurements // Ann. Phys. (N.Y.) — 1989. — V. 191. — P. 363–381.
4. Filippov S.N., Man'ko V.I. Symmetric informationally complete positive operator valued measure and probability representation of quantum mechanics // J. Russ. Laser Res. — 2010. — V. 31, N. 3. — P. 211–231.

УДК 517.988.8

А.А. Фонарёв

fonanat@mail.nkosino.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

О решении нелинейных уравнений с усиленно замкнутыми операторами

Предлагается проекционный итерационный процесс (сокращённо ПИП), сочетающий в себе проекционный метод и итерационный процесс, для отыскания решения уравнения с потенциальным усиленно замкнутым оператором (нелинейным) $F : E \rightarrow E^*$, где E — вещественное рефлексивное банахово пространство с базисом и E^* — сопряженное с E пространство.

Пусть $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ — нормы в E и E^* , $\langle y, x \rangle$ — значение линейного непрерывного функционала $y \in E^*$ на элементе $x \in E$, f — потенциал оператора F , T — множество решений уравнения $Fx = 0$ ($x \in E$).

Предположим, что: 1) оператор F равномерно непрерывный на ограниченных множествах пространства E ; 2) в определении усиленно замкнутого оператора [1] используются базис $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ пространства E и функционалы $f_i \in E^*$ ($i \geq 1$), для которых каждый элемент $x \in E$ имеет единственное представление $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f_i, x \rangle \varphi_i$.

Пусть E_i — подпространство пространства E , натянутое на $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i$, $P_i : E \rightarrow E_i$ — такой линейный оператор, что $P_i x = \sum_{k=1}^i \langle f_k, x \rangle \varphi_k$ для $x \in E$, и P_i^* — сопряженный оператор к оператору P_i ($i = 1, 2, \dots$).

Пусть $r_0 \geq 1$, $\delta \in (0, 1]$, $\gamma_0 \in (0, 1)$, $\gamma \in (0, \gamma_0)$, $a > 0$.

Предполагая, что $x_1 \in E_1$ — такой элемент, что множество $\{x \in E : f(x) \leq f(x_1)\}$ ограниченное, рассмотрим последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ПИП $x_{i+1} = x_i - t_i z_i$ ($i = 1, 2, \dots$), где $z_i \in E_{i+1}$ — такие элементы, что $r_0 \geq \|z_i\|$ и $\langle P_{i+1}^* F(x_i), z_i \rangle \geq \gamma_0 \alpha_i$, $\alpha_i = \|P_{i+1}^* F(x_i)\|_*$, а $t_i \in [\delta \tau_i, \tau_i]$ и $\tau_i = \sup\{\tau \in (0, a] : \langle P_{i+1}^* F(x_i - tz_i), z_i \rangle \geq \gamma \alpha_i, \forall t \in [0, \tau]\}$ при $\alpha_i \neq 0$, $t_i = 0$ при $\alpha_i = 0$.

Теорема. Для последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ПИП имеем: 1) $f(x_i) \geq f(x_{i+1})$ для $\forall i \geq 1$; 2) последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ компактная, любой её частичный предел принадлежит T , и $\inf_{z \in T} \|x_i - z\| \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$).

Пусть $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю.

Замечание. Если $\langle Fx - Fz, x - z \rangle \geq 0$ для $\forall x, z \in E$ и при $\alpha_i \neq 0$ в ПИП $t_i = q_{n_i}$, а $n_i = \min\{n = 1, 2, \dots : \langle P_{i+1}^* F(x_i - q_n z_i), z_i \rangle \geq \gamma \alpha_i\}$, то теорема остаётся справедливой.

Отметим, что в [2] при исследовании проекционного итерационного метода не рассматривались усиленно замкнутые операторы.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1. 1/500.

Литература

1. *Похожяев С.И.* О разрешимости нелинейных уравнений с нечётными операторами // Функци. анализ и его прилож. — 1967. — Т. 1, № 3. — С. 66–73.

2. *Фонарев А.А.* О проекционном итерационном методе решения вариационных задач // Динамика неоднородных систем / под ред. Ю.С. Попкова / Труды ИСА РАН. — Т. 42(1). — М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2009. — С. 164–174.

УДК 519.245

Е.А. Цветков

tsvetkov_egor@mail.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Вычисление неаддитивных функционалов с использованием весовых методов Монте–Карло для разыгрывания траекторий частиц

Важным этапом разработки приборов, регистрирующих ионизирующие излучения, является расчетно-теоретическое обоснование их параметров и характеристик. Для этого используются программы, моделирующие перенос ионизирующего излучения в веществе и взаимодействие его с рабочим телом детектора. В сложной трехмерной конфигурации задачи наиболее приемлемым является метод Монте–Карло. Однако в большей части литературы метод

Монте–Карло применяется для вычисления аддитивных функционалов поля излучения по формуле

$$Q = \sum_{i=1}^N q(T_i), \quad (1)$$

где N — число разыгранных траекторий, T_i — i -я разыгранная траектория, q — функционал, определенный на множестве всех возможных траекторий.

Для вычисления аддитивных функционалов вида (1) разработано большое количество весовых методов Монте–Карло, позволяющих существенно уменьшить требуемое количество разыгрываемых траекторий. Для вычисления неаддитивных функционалов эти методы не применимы. В настоящей работе предложен алгоритм, являющийся обобщением алгоритма, предложенного в [1], позволяющий использовать некоторые весовые методы для оценки значений неаддитивных функционалов. В настоящей работе рассматриваются неаддитивные функционалы вида

$$Q = q(T_1, T_2, \dots, T_n). \quad (2)$$

Для обоснования предлагаемого алгоритма сформулировано в особой форме и обобщено условие несмещенности оценки значения аддитивного функционала для весовых методов. Рассматриваются весовые методы, в которых используется отличная от физической плотность вероятности при разыгрывании траекторий, и метод расщепления частицы.

Предлагаемый алгоритм сводится к вычислению величины

$$Q^* = \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \dots \sum_{j_n=1}^{k_n} q(T_{1j_1}, T_{2j_2}, \dots, T_{nj_n}) w_{1j_1} w_{2j_2} \dots w_{nj_n},$$

где T_{ij} — j -я реализация i -й траектории, w_{ij} — ее вес, k_i — количество полученных в результате расщепления частицы взаимоисключающих реализаций i -й траектории. Показано, что в случае вычисления отклика схемы совпадений количество комбинаций можно существенно сократить.

Предложенный способ по сути представляет перебор всех физически возможных комбинаций разыгранных траекторий. Для каждой такой комбинации вычисляется отклик детектора, используя ту же функцию (2), что и при аналоговом моделировании. Этот отклик

умножается на вероятность осуществления комбинации, вычисляемую как произведение весов, присутствующих в выбранной комбинации траекторий, и добавляется в общую сумму.

Литература

1. *Booth Th. E.* Monte Carlo variance reduction approaches for non-boltzmann tallies // Los Alamos National Laboratory report LA-12433. — 1992.

УДК 511

Т.В. Юферева, В.В. Дружинин
redkorsar@rambler.ru, redkorsar@rambler.ru

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Разложение обратного произведения чисел на сумму дробей

Сложение числовых дробей производится, как известно, путем приведения их к общему знаменателю. Возникает вопрос: а как обратно разложить числовую дробь на сумму дробей с простыми числами в знаменателе? Насколько известно нам, такой аналитической формулы нет. Нами предложен простой метод, основанный на разложении рациональной дроби с помощью вычетов в особых точках в теории функций комплексного переменного. При этом формула Ливилля, состоящая из трех слагаемых, сведена всего к одному слагаемому, что значительно ускоряет расчеты. Реально формула разложения числовой дроби на составляющие содержит вычеты в полюсах произвольного порядка. Приложение данного метода связано с оценкой факториалов, громоздких произведений, суммирования рядов от рациональных функций. Получено большое количество новых формул суммирования таких рядов.

Секция квазилинейных уравнений и обратных задач

УДК 51-73

M. Santacesaria

m.santacesaria@gmail.com

Ecole Polytechnique, France

A global stability estimate for the Gel'fand-Calderon inverse problem in two dimensions

Let D be an open bounded domain in R^2 with with C^2 boundary and let $v \in C^1(\bar{D})$. The Dirichlet-to-Neumann map associated to v is the operator $\Phi : C^1(\partial D) \rightarrow L^p(\partial D)$, $p < \infty$ defined by:

$$\Phi(f) = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial D}$$

where $f \in C^1(\partial D)$, ν is the outer normal of ∂D and u is the $H^1(\bar{D})$ -solution of the Dirichlet problem

$$-\Delta u + v(x)u = 0 \text{ on } D, u|_{\partial D} = f;$$

here we assume that 0 is not a Dirichlet eigenvalue for the operator $-\Delta + v$ in D .

Equation (2) arises, in particular, in quantum mechanics, acoustics, electrodynamics; formally, it looks like the Schrödinger equation with potential v at zero energy.

The following inverse boundary value problem arises from this construction: given Φ on ∂D , find v on D .

This problem can be considered as the Gel'fand inverse boundary value problem for the Schrödinger equation at zero energy (see [4, 8]) and can also be seen as a generalization of the Calderyn problem for the electrical impedance tomography (see [3, 8]). In addition, this problem arises also in ultrasonic tomography.

The global injectivity of the map $v \rightarrow \Phi$ was firstly proved in [8] for $D \subset R^d$ with $d \geq 3$ and in [2] for $d = 2$ with $v \in L^p$. A global stability estimate for the Gel'fand-Calderyn problem for $d \geq 3$ was firstly proved by Alessandrini in [1]; this result was recently improved in [9].

This talk is based on the work [10], where we prove that, also in the two dimensional case, an estimate of the same type as in [1] is valid. Indeed our main theorem is the following:

Theorem 1 Let $D \subset R^2$ be an open bounded domain with C^2 boundary, let $v_1, v_2 \in C^2(\bar{D})$ with $\|v_j\|_{C^2(\bar{D})} \leq N$ for $j = 1, 2$, and Φ_1, Φ_2 the corresponding Dirichlet-to-Neumann operators. For simplicity we assume also that $v_j|_{\partial D} = 0$ and $\frac{\partial}{\partial \nu} v_j|_{\partial D} = 0$ for $j = 1, 2$. Then there exists a constant $C = C(D, N)$ such that

$$\|v_2 - v_1\|_{L^\infty(D)} \leq C \log(3 + \|\Phi_2 - \Phi_1\|^{-1})^{-1} \log(3 \log(3 + \|\Phi_2 - \Phi_1\|^{-1})),$$

where $\|A\|$ denotes the norm of an operator $A : L^\infty(\partial D) \rightarrow L^\infty(\partial D)$.

This is the first result about the global stability of the Gel'fand-Calderyn inverse problem in two dimension, for general potentials. Results of such a type were only known for special kinds of potentials, e.g. potentials coming from conductivities (see [5] for example). Note also that for the Calderyn problem (of the electrical impedance tomography) in its initial formulation the global injectivity was firstly proved in [11] for $d \geq 3$ and in [7] for $d = 2$.

Instability estimates complementing the stability estimates of [1, 5, 9] and of the present work are given in [6].

The proof of Theorem 1 takes inspiration mostly from [2] and [1]. For $z_0 \in D$ we show existence and uniqueness of a family of solution $\psi_{z_0}(z, \lambda)$ of equation (2) where in particular $\psi_{z_0} \rightarrow e^{\lambda(z-z_0)^2}$, for $\lambda \rightarrow \infty$. This is accomplished by introducing a special Green's function for the Laplacian which satisfies precise estimates. Then, using Alessandrini's identity along with stationary phase techniques, we obtain the result.

An extension of Theorem 1 for the case when we do not assume that $v_j|_{\partial D} = 0$ and $\frac{\partial}{\partial \nu} v_j|_{\partial D} = 0$ for $j = 1, 2$ is also given in [10].

Литература

1. *Alessandrini G.* Stable determination of conductivity by boundary measurements // Appl. Anal. — 1988. — V. 27. — P. 153–172.

2. *Bukhgeim A.L.* Recovering a potential from Cauchy data in the two-dimensional case // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2008. — V. 16, N. 1. — P. 19–33.

3. *Calderyn A.P.* On an inverse boundary problem // Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics. — Soc. Brasileira de Matematica, Rio de Janeiro: 1980. — P. 61–73.

4. *Gel'fand I.M.* Some problems of functional analysis and algebra // Proc. Int. Congr. Math. — Amsterdam: 1954. — P. 253–276.

5. *Liu L.* Stability Estimates for the Two-Dimensional Inverse Conductivity Problem // Ph. D. thesis. — Department of Mathematics, University of Rochester, New York: 1997.

6. *Mandache N.* Exponential instability in an inverse problem of the Schrödinger equation // Inverse Problems. — 2001. — V. 17. — P. 1435–1444.

7. *Nachman A.* Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem // Ann. Math. — 1996. — V. 143. — P. 71–96.

8. *Novikov R.* Multidimensional inverse spectral problem for the equation $-\Delta\psi + (v(x) - \text{Eu}(x))\psi = 0$ // Funct. Anal. and Appl. — 1988. — V. 22. — P. 263–272.

9. *Novikov R.* New global stability estimates for the Gel'fand-Calderon inverse problem, e-print arXiv:1002.0153.

10. *Novikov R., Santacesaria M.* A global stability estimate for the Gel'fand-Calderyn inverse problem in two dimensions, e-print arXiv:1008.4888.

11. *Sylvester J., Uhlmann G.* A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem // Ann. Math. — 1985. — V. 125. — P. 153–169.

УДК 517.9

Л.А. Бекларян^{1,2}, Н.К. Хачатрян¹

beklar@cemi.rssi.ru, beklar@cemi.rssi.ru

¹ Центральный экономико-математический институт РАН² Московский физико-технический институт
(государственный университет)**Динамическая модель грузоперевозок**

Счетная система дифференциальных уравнений с нелокальными линейными ограничениями

$$\dot{x}_n(t) = \alpha x_{n-1} - (\alpha + \beta)x_n + \beta x_{n+1} + \varphi(x_n), \quad (1)$$

$$n \in Z, t \in [0, +\infty),$$

$$x_n(t) = x_{n+1}(t + \tau), \quad n \in Z, t \in [0, +\infty) \quad (2)$$

описывает процесс грузоперевозок с двумя технологиями. Здесь $x_n(t)$ — объем грузов, находящихся на станции с номером n в момент времени t . Условие (2) определяет систему контроля. Нормативы $\alpha, \beta > 0$ определяются первой технологией, описывающей взаимодействие соседних станций. Функция $\varphi(\cdot)$ описывает вторую технологию, обеспечивающую дозагрузку станций и учитывающую ограниченность пропускной способности станций. Она обладает следующими свойствами: на полупрямой $(-\infty, v]$ тождественно равна 0, на интервале (v, x_{opt}) является возрастающей, в точке x_{opt} принимает максимальное значение, на полупрямой $(x_{opt}, +\infty)$ является убывающей, в точке Δ принимает нулевое значение, а на полупрямой $(\Delta, +\infty)$ является линейной. Для системы (1) — (2) получена теорема существования и единственности решения, стационарные решения исследованы на устойчивость.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант №.09-01-00324-а) и грантом поддержки научных школ (НШ-3038.2008.1).

Литература

1. Хачатрян Н.К. О решениях типа бегущей волны в одной транспортной модели // Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 3. — С. 137–149.

2. Beklaryan L.A., Khachatryan N.K. Traveling wave type solutions in dynamic transport models // Functional differential equations. — 2006. — V. 13, N. 2. — P. 125–155.

УДК 517.9

Л.А. Бекларян

beklar@cemi.rssi.ru

Центральный экономико-математический институт РАН

Московский физико-технический институт
(государственный университет)**О квазибегущих волнах**

Исследуется конечно-разностный аналог волнового уравнения с потенциальным возмущением, моделирующий поведение бесконечно-го стержня под воздействием внешнего продольного силового поля. Для однородного стержня описание решений типа бегущей волны оказывается эквивалентным описанию всего пространства классических решений индуцированного однопараметрического семейства функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) точечного типа с параметром в виде характеристики бегущей волны. Для неоднородного стержня, в силу тривиальности пространства решений типа бегущей волны, определяется их «правильное» расширение в форме решений типа «квазибегущей» волны. В отличие от однородного стержня, описание решений типа квазибегущей волны оказывается эквивалентным описанию уже всего пространства импульсных решений индуцированного однопараметрического семейства ФДУ точечного типа, факторизованного по отношению эквивалентности, связанного с определением решения типа квазибегущей волны. Стационарные решения исследуются на устойчивость.

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (грант №.09-01-00324-а) и Грантом поддержки научных школ (НШ-3038.2008.1).

Литература

1. Бекларян Л.А. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. — М.: Факториал Пресс, 2007. — 288 с.

2. Бекларян Л.А., Крученев М.Б. О разрешимости линейных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 4. — С. 435–445.

3. Френкель Я.И., Конторова Т.А. О теории пластической деформации // ЖЭТФ. — 1938. — № 8. — С. 89–97.

УДК 551.463.21

В.А. Буров, С.Н. Сергеев, А.С. Шуруп

burov@phys.msu.ru, sergeev@aes.msu.ru, shurup@physics.msu.ru

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Акустическая томография океана как обратная задача рассеяния с неизвестными параметрами данных рассеяния

Акустическая томография океана (АТО) в настоящее время является единственным методом получения в режиме реального времени информации о временной и пространственной изменчивости океанических акваторий больших (порядка сотен и тысяч километров) размеров. По своей сути, АТО является частным случаем обратных задач рассеяния (ОЗР), где по возмущениям данных рассеяния (например, по возмущениям времен распространения модовых импульсов) определяются возмущения параметров океанического волновода (как правило, возмущение скорости звука $\Delta c(\mathbf{r}, z)$ и скорости течений $\mathbf{v}(\mathbf{r}, z)$). В достаточно общем случае решение задачи АТО сводится к рассмотрению интегральных уравнений, нелинейных относительно восстанавливаемых функций $\Delta c(\mathbf{r}, z)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, z)$. Но в большинстве практических задач АТО восстанавливаются слабые рассеиватели ($|\Delta c(\mathbf{r}, z)|/c_0 \cong 10^{-3}$, $|\mathbf{v}(\mathbf{r}, z)|/c_0 \cong 10^{-4}$, где $c_0 = 1500$ м/с), что позволяет решать задачу в линейном приближении стандартными методами ОЗР. Несмотря на указанное упрощение, при решении задач АТО приходится сталкиваться с дополнительными (по сравнению с «традиционными» ОЗР) трудностями как технического, так и математического плана. Так, например, необходимо учитывать неизвестные расположения элементов приемно-передающих антенн, искривленных подводными течениями, что требует одновременной

оценки этих параметров и параметров восстанавливаемых океанических неоднородностей. Кроме этого, необходимо учитывать возможность полной реконструкции векторного поля течений $\mathbf{v}(\mathbf{r}, z)$ томографическими методами. Важным также является поиск новых способов акустического зондирования океанической среды без использования громоздких и дорогостоящих низкочастотных источников звука, применение которых существенно повышает стоимость эксперимента. В предлагаемой работе предпринимается попытка найти решение указанных трудностей. Так, например, было показано [1], что матрица взаимной когерентности шумового поля океана, принимаемого гидрофонами двух антенн, позволяет оценить модовую структуру океана, как если бы одна антенна эти моды излучала, а другая принимала. Подобная возможность может быть использована для реализации схемы пассивной томографии океана. Было также показано [2], что в приближении несжимаемой жидкости полная реконструкция скорости течения осуществима только на основе данных рассеяния, в то время как ранее предполагалась необходимость дополнительных измерений на границе исследуемой акватории [3]. В итоге была предложена схема полного томографического восстановления $\Delta c(\mathbf{r}, z)$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r}, z)$ в единой схеме без специальных мер по разделению эффектов их влияния на данные рассеяния. Полученные результаты являются основой для создания новой схемы активно-пассивной томографии глубокого океана (глубина — несколько километров) с упрощенными требованиями на ее практическую реализацию. В настоящее время является актуальным развитие полученных результатов на мониторинг шельфа (глубина — несколько сот метров). В этом случае необходим учет новых эффектов, среди которых основными являются неадиабатическое распространение звука, учет влияния внутренних волн и океанического дна, что требует разработки новых подходов к решению обратной задачи томографии океана.

Литература

1. Буров В.А., Сергеев С.Н., Шуруп А.С. Использование в пассивной томографии океана низкочастотных шумов // Акустич. журнал. — 2008. — Т. 54, № 1. — С. 51–61.

2. Буров В.А., Грачева Т.В., Сергеев С.Н., Шуруп А.С. Двумерная модель томографического восстановления океанических неоднородностей при волновом и лучевом описании акустического поля // Акустич. журнал. — 2008. — Т. 54, № 2. — С. 291–306.

3. Norton S.J. Fluid flow imaging by means of wide-band diffraction tomography // J. Acoust. Soc. Am. — 1999. — V. 105, N. 5. — P. 2717–2721.

УДК 534.2:517.9

В.А. Буров, Д.И. Зотов, О.Д. Румянцева

burov@phys.msu.ru, zotovdi@mail.ru, burov@phys.msu.ru

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Томографическое восстановление тонкой структуры биологической ткани на фоне сильных неоднородностей ее структуры

При ультразвуковой диагностике малоразмерных новообразований биотканей на самой ранней стадии эффективным путем устранения искажающего влияния контрастных или крупных неоднородностей биологической среды являются итерационные методы. Предлагается простой подход, в котором достаточно двух шагов итераций, приводящих к эффективной фокусировке антенны томографа [1]. На первом шаге восстанавливается неизвестное распределение по рассеивателю крупномасштабных неоднородностей скорости звука и поглощения, размер которых превышает несколько длин волн. За счет этого на втором шаге достигается высокая точность восстановления тонкой структуры рассеивателя (это детали с размером от нескольких десятых долей длины волны до нескольких длин волн) на уже оцененном неоднородном крупномасштабном фоне (рис. 1). В качестве альтернативы рассматривается возможность одновременного восстановления крупномасштабной и тонкой структуры в неитерационном алгоритме Новикова [2, 3]. Этот алгоритм использует идею Л.Д. Фаддеева, предложившего введение бесконечно малой мнимой добавки к волновым векторам, ориентированной ортогонально (в алгоритме Новикова) к действительной части этого вектора. Алгоритм восстанавливает двумерные рефракционно-поглощающие рассеиватели практически произвольной формы и силы и обладает высокой помехоустойчивостью. Он обеспечивает, благодаря учету эффектов перерасеяния, разрешение тонкой структуры, сопоставимое с качеством восстановления

этой же тонкой структуры в однородной неискажающей фоновой среде. Привлечение 256-ядерной вычислительной платы CUDA позволяет восстановить изображение форматом 1024×1024 отсчетов всего за 10–20 минут.

Предлагается обобщение алгоритма Новикова на полихроматический режим. При объединении данных рассеяния на разных частотах в процессе решения задачи используется априори известная частотная зависимость функции рассеивателя, что приводит к уравнениям связи, отсутствующим в монохроматическом варианте. Неустойчивость восстановления сильных рассеивателей, возникающая в монохроматическом режиме, снимается полихроматическим режимом. При этом качество оценки рассеивателя значительно лучше оценки в виде усреднения монохроматических решений.

С помощью введения гипотетической мнимой добавки к волновому вектору в настоящее время Р.Г. Новиковым разработан функциональный метод решения трехмерных монохроматических задач рассеяния, и на численных моделях подтверждена его работоспособность для практических применений.

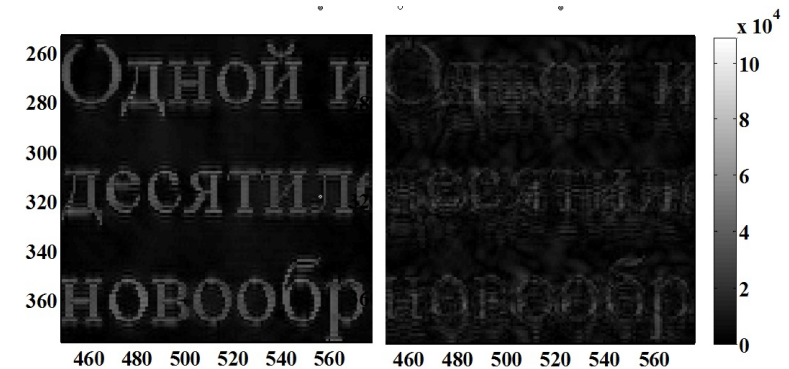


Рис. 1. Фрагмент текста, восстановленный с помощью двухшагового алгоритма с учетом предварительно оцененного неоднородного фона (слева); без учета крупномасштабных фоновых неоднородностей изображение разрушается (справа). Буквы текста имеют разную яркость (имитирующую контраст фазовой скорости звука) и разную фазу (имитирующую поглощение в биологической ткани). Один отсчет соответствует четверти длины волны

Литература

1. Буров В.А., Гришина И.М., Лапшенкина О.И., Морозов С.А., Румянцева О.Д., Сухов Е.Г. Восстановление тонкой структуры акустического рассеивателя на фоне искажающего влияния его крупномасштабных составляющих // Акуст. журн. — 2003. — Т. 49, № 6. — С. 738–750.
2. Novikov R.G. Rapidly converging approximation in inverse quantum scattering in dimension 2 // Physics Letters A. — 1998. — V. 238. — P. 73–78.
3. Буров В.А., Вечерин С.Н., Морозов С.А., Румянцева О.Д. Моделирование точного решения обратной задачи акустического рассеяния функциональными методами // Акуст. журн. — 2010. — Т. 56, № 4. — С. 516–536.

УДК 917.95

А.К. Волосова, Е.К. Вдовина, К.А. Волосов

volosovaak@yandex.ru, lenavek@mail.ru, konstantinvolosov@yandex.ru

Московский государственный университет путей сообщения

Взгляд со стороны на теорию нелинейной диффузии теплопроводности

В докладе методом нефиксированной конструктивной замены переменных вычислены собственные числа матрицы системы функциональных линейных алгебраических уравнений (СФЛАУ), которая эквивалентна квазилинейному параболическому уравнению

$$Z'_t - (K(Z)Z'_x)'_x + F(Z'_x, Z, x, t) = 0.$$

Известно, что в приложениях это уравнение описывает процессы нелинейной диффузии и теплопроводности. $Z(x, t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Указанный метод предложен К.А. Волосовым в работах [1–3].

Во-первых, данным методом можно строить новые точные решения задачи Коши со специальными начальными данными для уравнения (1), примеры которых есть в цитируемых работах. Во-вторых,

установлена связь собственных чисел указанной матрицы СФЛАУ с характером эволюции решений (1). Заметим, что на самом деле это функции независимых переменных, но авторами была оставлена классическая терминология, чтобы не вводить читателя в заблуждение.

Формулы для собственных чисел были выведены для произвольной замены переменных и не зависят от неё. Авторами предложено сделать эту замену в итоговых формулах конкретной — тривиальной $x(\xi, \delta) = \xi, t(\xi, \delta) = \delta$. Такое отображение является — изоморфизмом. Тогда полученные формулы для собственных чисел можно поставить в соответствие уравнению (1), и их можно считать явно по известному точному решению.

Доказана Лемма. Собственное число $\lambda_2 = -\lambda_1^2$ не положительное в своей области определения. Собственное число $\lambda_3 \leq 0$, если выполнено неравенство $Z'_x(Z'_t/Z'_x)'_x \geq 0$.

В [4] было проанализировано большое количество (более ста) известных точных решений из классических работ перечисленных там авторов.

В [4] вычислили на них собственные числа, приведенные в [3, 4], и трек матрицы и обнаружили удивительные закономерности. К.А. Волосовым был поставил вопрос о связи собственных этих чисел и движущихся особых точек, параметры которых зависят от независимых переменных, с характером эволюции и устойчивостью решений смешанных задач для уравнения (1). Большое число решенных смешанных задач разделено в [4] на три части.

Будем называть некоторое специальное известное или неизвестное решение смешанной задачи (с начальными и краевыми условиями) для конкретных видов уравнения (1) со специальными свойствами $\Omega(x, t)$ — «предельным притягивающим» решением. Термин «притягивающий» позаимствован из теории динамических систем. Но терминология умышленно выбрана другой, чтобы не пересекаться с большим количеством работ на близкую к данной тему, но в которых используется другая техника.

1 part. Существует класс решений смешанных задач для конкретных видов уравнения (1), когда при наличии диссипации и соответствующих краевых условиях решение задачи осуществляет эволюцию к нулю. Это справедливо как для линейных уравнений, так и для вырождающихся уравнений (1), но только внутри области локализации. В данном случае, с нашей точки зрения, «предельное притягивающее» решение — это константа, тождественно равная нулю:

$\Omega(x,t) \equiv 0$. Здесь известны работы В.В. Жикова, В.Н. Денисова о стабилизации решений задач Коши. Для вырождающегося случая см. работы Л.К. Мартинсона и других [4].

2 part. Второй класс решений смешанных задач для уравнения (1) когда $K(Z) = 1$ при различных видах функции $F(Z'_x, Z, x, t)$. Эти задачи начали решать начиная с известных работ А.Н. Колмогорова, И.Г. Петровского, И.С. Пискунова, Р. Фишера и других [4]. В этом случае решения с другими начальными условиями эволюционируют к «предельному притягивающему» решению — движущейся волне с предельным профилем.

3 part. Если в задаче существует стационарное решение, то есть решение не зависящее от переменной t уравнения (1), то другие решения осуществляет эволюцию к нему. Это, с нашей точки зрения, также «предельное притягивающее» решение $\Omega(x,t)$.

По результатам наших исследований все три случая объединяются. Заметим, что, возможно, в будущем сюда же будут отнесены и периодические решения. Однако в настоящее время имеется мало материала — известных точных решений, чтобы сделать такой вывод.

Сформулируем теорему о необходимых условиях эволюции решения уравнения с частными производными к «предельному притягивающему» решению.

Theorem. Пусть $\Omega(x,t)$ — «предельное притягивающее» решение уравнения (1).

Тогда, для того чтобы был выполнен предел $Z(x,t) \rightarrow \Omega(x,t)$ в некотором смысле, конкретном для каждой задачи, для любого значения x , при $t \rightarrow \infty$ необходимо, чтобы дискриминант в выражениях для собственных чисел был больше нуля, собственные числа $\lambda_2 \leq 0, \lambda_3 \leq 0$ в некоторой области $\omega(x,t)$ и трек матрицы менял знак в области определения функций $\lambda_i, i = 1, \dots, 4$.

Замечание. Таким образом, имеет место сложная особая точка- «устойчивый седло-узел». В области определения параметры особой точки зависят от переменных x, t и изменяются, но таким образом, что тип точки сохраняется. Для локализованных решений теорема работает внутри области локализации.

Теория распространяется на случай многих переменных и других уравнений и систем.

В [5] вычислены собственные числа для уравнения Фоккера–Планда возникающие в теории стохастических полумаятников подверженных случайному гауссовскому узкополосному шуму. Авторы выражают благодарность В.П. Маслову, В.Г. Данилову, М.В. Карасеву, С.Ю.

Доброхотову, Л.К. Мартинсону, В. Ф. Зайцеву, А.С. Братусю, Ю.П. Власову, В.Н. Денисову, В.В. Жикову, А.П. Чупахину за полезные советы.

Литература

1. *Волосов К.А.* Методика анализа эволюционных систем с распределенными параметрами // Дис. док. физ-мат. наук — М.: МИЭМ, 2007. — 264 с.
2. *Волосов К.А.* Конструирование решений квазилинейных уравнений с частными производными // Сибирский журнал промышленной математики. — 2008. — Т. 11, № 2(34). — С. 29–39.
3. *Volosova A.K., Volosov K.A.* Construction Solutions of PDE in Parametric Form // Int. J. Math Math. Sci. — 2009. — V. 2009. — Article ID 319269, 17 p.
4. *Волосов К.А., Вдовина Е.К., Волосова А.К.* Новые точные решения уравнений с частными производными параболического типа. — М.: МИИТ, 2010. — 132 с.
5. *Volosova A.K., Sinitsyn S.O., Volosov K.A., Vdovina E.K.* Stochastic systems under periodic and white noise external excitations, and the alternative classification for the PDE solutions // The Third Inter. Conference Nonlinear Dynamics. — 2010. — P. 437–442.

УДК 519.63

*А.В. Гасников, И.И. Морозов, В.Н. Тарасов, Я.А. Холодов*gasnikov@yandex.ru, ivanmorozov@rambler.ru, vtarasov@zoneos.com,
kholodov@crec.mipt.ruМосковский физико-технический институт
(государственный университет)**Об устойчивых стационарных режимах в сетевой
версии модели транспортных потоков
Лайтхилла–Уизема–Ричардса**

Согласно модели LWR (Лайтхилла–Уизема–Ричардса, 1955) транспортный поток в первом приближении неплохо описывается законом сохранения, в котором предполагается известной зависимость скорости потока от плотности. В данной заметке рассматривается СТМ-версия К. Даганзо (1994) LWR-модели на графе транспортной сети общего вида. Опишем вкратце эту модель.

На каждом ребре i графа транспортной сети транспортный поток описывается законом сохранения для плотности автомобилей ρ :

$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial Q_i(\rho_i)}{\partial x_i} = 0$, где $Q_i(\rho_i) = \min\{\rho_i v_i, (\rho_i^{\max} - \rho_i) w_i, Q_i^{\max}\}$, v_i — скорость свободного потока, w_i — скорость волны от перегрузки, то есть скорость роста затора (другими словами, если перекрыть дорогу (при условии, что движение было достаточно плотным), то образовавшийся затор будет расти со скоростью w_i — длина затора через время t после перекрытия будет равна $w_i t$). При этом выбирается дифференциально-разностная схема С.К. Годунова (1959) и используется лишённая деталей модификация правила «пропорциональных приоритетов» К. Даганзо (1995):

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \min \left\{ \sum_{j:j \rightarrow i} \beta_j^j \min\{\rho_j v_j, Q_j^{\max}\}, \min\{(\rho_i^{\max} - \rho_i) w_i, Q_i^{\max}\} \right\} - \sum_{k:i \rightarrow k} \beta_k^i \min\{\rho_i v_i, Q_i^{\max}\} \cdot \min \left\{ 1, \frac{\min\{(\rho_k^{\max} - \rho_k) w_k, Q_k^{\max}\}}{\sum_{l:l \rightarrow k} \beta_k^l \min\{\rho_l v_l, Q_l^{\max}\}} \right\},$$

здесь каждое ребро ориентированного графа транспортной сети пронумеровано, ρ_i — плотность потока на i -м ребре, β_i^j — доля потока АТС на ребре j , ответвляющаяся на ребро i . Обратим внимание, что

в общем случае следует считать $\beta_i^j(t, \vec{\rho})$. Причем если учитывать задержки в узлах графа транспортной сети, связанные, например, с наличием светофоров, то, вообще говоря, $\sum_{k:i \rightarrow k} \beta_k^i(t, \vec{\rho}) < 1$. Имеются и другие «правила обработки» узлов графа транспортной сети (см., например, работы М. Гаравелло и Б. Пикколи). Для каждой замкнутой транспортной сети (можно обобщить и на открытые сети) стационарный режим будет устойчивым, если значения стационарных плотностей «лежат» на левых (возрастающих) ветках соответствующих фундаментальных диаграмм $Q_i(\rho_i)$ (зависимость потока от плотности).

Подробнее с литературой можно познакомиться по нашему пособию, готовящемуся к выходу в МФТИ в 2010: Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие / под ред. А.В. Гасникова, с приложениями М.Л. Бланка, Е.В. Гасниковой, А.А. Замятина и В.А. Малышева, А.В. Колесникова, А.М. Райгородского. — М.: МФТИ, 2010.

Работа поддержана грантами РФФИ № 08-01-00959-а, 08-07-00501-а, 08-07-00158-а, 10-07-00620-а, РГНФ № 08-02-00347, ПФИ ОМН РАН № 3, ПФИ Президиум РАН П-2. Работа проведена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (мероприятие 1.2.1, НК-15П, П949; мероприятие 1.3.1, НК-215П, П1490; НОЦ № 14.740.11.0397: «Теоретические и прикладные вопросы создания систем интеллектуального мониторинга и управления распределенными процессами»).

УДК 519.63

А.А. Данилов¹, В.Ю. Саламатова², С.Г. Руднев¹,
Ю.В. Василевский¹

a.a.danilov@gmail.com, salamatova@gmail.com,
sergey.rudnev@gmail.com, yuri.vassilevski@gmail.com

¹ Институт вычислительной математики РАН

² Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН

Решение трёхмерных задач биоимпедансного анализа

Биоимпедансный анализ — это контактный метод измерения электрической проводимости биологических тканей, который даёт возможность определить широкий спектр морфологических и физиологических параметров организма. Биоимпедансные методы позволяют оценить степень гидратации тканей и нарушений водного баланса, контролировать состояние липидного, белкового и водного обмена организма, также позволяют определять гемодинамические показатели в отдельных сегментах организма. Метод основан на измерении импеданса (полного электрического сопротивления) всего тела или отдельных сегментов тела с использованием специальных приборов — биоимпедансных анализаторов. Для определения биометрических параметров участка тела, как правило, используются расчётные формулы, предполагающие однородность электрического поля и простую цилиндрическую форму объекта. Корректное использование таких расчётных формул применительно к человеческому телу возможно только на конечностях, поскольку в остальных случаях поле между потенциальными электродами не является однородным, и форма объекта имеет не цилиндрическую форму. Для дальнейшего развития методов биоимпедансного анализа анизотропных биологических объектов и уточнения расчётных формул косвенных измерений биометрических параметров необходимо отказаться от однородности электрического поля и перейти к более сложным геометрическим моделям [1, 2].

Настоящая работа посвящена численному решению задачи определения электрического поля и выходных напряжений в трёхмерном объекте (человеческом теле) с неоднородной проводимостью при заданном размещении токовых и потенциальных электродов. Эта работа является первым этапом в разработке информационно-вычис-

лительных технологий для численного моделирования протекания токов в трёхмерных объектах с неоднородной проводимостью. Распределение потенциала электрического поля описывается уравнением Пуассона с переменными коэффициентами. Для численного решения этого уравнения мы используем пакет библиотек Ani3D [3], включающий методы построения неструктурированных расчётных сеток для геометрически сложных объектов [4], схемы дискретизации дифференциальных уравнений на основе методов конечных элементов, а также итерационные алгоритмы решения систем линейных уравнений.

Литература

1. *Sachse F., Werner C., Meyer-Waarden K., Dussel O.* Development of a human body model for numerical calculation of electrical fields // Computerized Medical Imaging and Graphics. — 2000. — V. 24. — P. 165–171.
2. *Kauppinen P., Hyttinen J., Malmivuo J.* Sensitivity distribution of impedance cardiography using band and spot electrodes analyzed by a three-dimensional computer model // Annals of Biomedical Engineering. — 1998. — V. 26. — P. 694–702.
3. Электронный ресурс: Advanced Numerical Instruments 3D. — URL: <http://sourceforge.net/projects/ani3d/>
4. *Danilov A.* Unstructured tetrahedral mesh generation technology // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2010. — V. 50, N. 1. — P. 139–156.

УДК 51-73

А.И. Евстафьев

evstafyev_artem@mail.ru

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Формула восстановления для конусной схемы сканирования

Под задачей обращения лучевого преобразования понимается задача восстановления функции по известным интегралам от нее, взятым вдоль линейных многообразий. Для конусной схемы сканирования задача формулируется следующим образом. Предположим, задана функция ω , описывающая распределение массы внутри цилиндра $K \times R$ с основанием $K = \{x \in R^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 0\}$ и главной осью, направленной вдоль оси, x_3 . Известно значение интегралов от этой функции вдоль всевозможных прямых, проходящих через окружность ∂K . Окружность ∂K в данной задаче называют траекторией источника излучения. Значения этих интегралов находятся по формуле:

$$u(x,p) = \int \omega(x + ps, s) ds,$$

где $x \in \partial K$, а $p \in R^2$.

По данным значениям функции $u(x,p)$ необходимо определить распределение массы внутри цилиндра. Задача имеет применение в геологической томографии. С ее помощью можно исследовать вращающийся цилиндрический образец породы с высокой точностью.

Предлагается решать задачу следующим образом. Для любой точки x , находящейся внутри круга, можно найти значения интегралов, вдоль прямых проходящих через данную точку по формуле:

$$u(x,p) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot$$

$$\int_{\partial K} \int_R \int_0^\infty \frac{u(y,p + \alpha k + \beta k^\perp) + u(y,p - \alpha k + \beta k^\perp) - 2u(y,p + \beta k^\perp)}{\alpha^2} \cdot (|x|^2 |y|^2 - (x,y)^2)(y,y-x) I((x-y,x) \geq 0) d\alpha d\beta d\Omega_y,$$

$$k = \frac{y(x,x-y) + x(y,y-x)}{|y(x,x-y) + x(y,y-x)|} \text{sign}(x^\perp, y).$$

Через каждую точку, в которой проводится восстановление, проведем прямую, параллельную главной оси цилиндра. Найдем точку ее пересечения с плоскостью окружности ∂K и построим в этой же плоскости окружность максимального радиуса с центром в данной точке и находящуюся внутри круга ∂K . Поскольку интегралы из всех точек построенной окружности известны, то задача сводится к восстановлению функции на главной оси цилиндра и решается методом, предложенным в работе [2]. Если $\omega \in C^2(K \times R)$, то данная формула восстановления имеет погрешность второго порядка малости от размера объекта.

Литература

1. *Благовещенский А.С.* О восстановлении функции по известным интегралам от нее, взятым вдоль линейных многообразий // Математические заметки. — 1986. — Т. 39, № 6. — С. 841–849.
2. *Feldcamp I.A.* Practical cone-beam algorithm // J. Opt. Soc. Am. A. — 1984. — V. 1, N. 6. — P. 612–619.

УДК 517.9

А.А. Жидков, А.В. Калинин, М.И. Сумин

Artem.Zhidkov@gmail.com, avk@mm.unn.ru, msumin@sinn.ru

Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

(Национальный исследовательский университет)

Математическое обоснование некоторых алгоритмов решения прямых и обратных задач теории атмосферного электричества

Решение задач динамики атмосферы в настоящее время является предметом исследования различных областей науки, поскольку атмосфера Земли представляет собой достаточно сложную динамическую систему. В настоящее время актуальной проблемой является построение адекватных метеорологических моделей и моделей долгосрочного прогнозирования климата. В последнее время преобладает

концепция, что электрические процессы, происходящие в атмосфере, оказывают существенное влияние на формирование погодных явлений [1].

Электрические процессы в атмосфере Земли с достаточной степенью достоверности описываются системой уравнений Максвелла в квазистационарном электрическом приближении [2]. На протяжении достаточно длительного времени ведутся работы по физическому и численному моделированию как глобальных, так и локальных электрических явлений [3–5]. Построение таких моделей сопряжено с рядом трудностей: при исследовании задачи в локализованном объёме атмосферы возникает необходимость корректной постановки граничных условий задачи; при численном решении глобальной задачи, охватывающей всю атмосферу Земли, приходится оперировать большими объёмами данных, что сопряжено с существенными вычислительными сложностями.

Следует отметить, что в связи со сложностью задачи часто осуществляется непосредственный переход к численному эксперименту, в то время как доказательство корректности той или иной постановки задачи обычно не проводится. Однако строгое математическое обоснование необходимо, в частности, для доказательства сходимости того или иного численного алгоритма [6, 7].

В настоящей работе изучается корректность одной математической задачи моделирования глобальной электрической цепи в атмосфере Земли. Доказываются теоремы о существовании и единственности решения прямой задачи, о непрерывной зависимости решения от исходных данных задачи. На основании доказанных утверждений предлагаются некоторые алгоритмы численного построения решения в терминах напряжённости электрического поля и скалярного электрического потенциала.

Одной из перспективных задач является изучение различных характеристик грозовых образований (считаются заданными величинами при решении прямых задач) по данным измерений, проводимых вблизи поверхности Земли. Для данной обратной задачи обоснована применимость метода итеративной двойственной регуляризации [8] и предложен алгоритм для численного поиска нормального решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках Аналитической целевой ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» Минобрнауки РФ (регистрационный номер 2.1. 1/3927), Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России»

на 2009–2013 годы (шифр проекта НК-13П-13), гранта РФФИ (код проекта 09-01-97019-р_поволжье_a).

Литература

1. *Мареев Е.А.* Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи // УФН. — 2010. — Т. 180, № 5. — С. 527–534.
2. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 5. — М.: Мир, 1977.
3. *Hays P.B., Roble R.G.* A Quasi-Static Model of Global Atmospheric Electricity. 1. The Lower Atmosphere // J. of Geophysical Research. — 1979. — V. 89, N. A7. — P. 3291–3305.
4. *Browning G.L., Tzur I., Roble R.G.* A Global Time-Dependent Model of Thunderstorm Electricity. Part I. Mathematical Properties of the Physical and Numerical Models // J. of Atmospheric Sciences. — 1987. — V. 44, N. 15. — P. 2166–2177.
5. *Морозов В.Н.* Распределение электрического поля, создаваемого нестационарным током заряжения грозового облака в атмосфере с неоднородной электрической проводимостью // Прикладная метеорология. — 2006. — № 5 (777). — С. 51–67.
6. *Жидков А.А., Калинин А.В.* Корректность одной математической задачи атмосферного электричества // Вестник Нижегородского государственного университета. — 2009. — № 4. — С. 123–129.
7. *Жидков А.А., Калинин А.В.* Некоторые вопросы математического и численного моделирования глобальной электрической цепи в атмосфере // Вестник Нижегородского государственного университета. — 2009. — № 6. — С. 150–158.
8. *Сумин М.И.* Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2007. — Т. 47, № 4. — С. 602–625.

УДК 517.958

А.В. Казейкина

kazanna@bk.ru

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Асимптотическое поведение прозрачных потенциалов для уравнения Веселова — Новикова при положительной энергии

Рассматривается задача рассеяния для двумерного уравнения Шредингера при фиксированной положительной энергии

$$-\Delta\psi + v(x)\psi = E\psi, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad E = E_{fixed} > 0,$$

где $v(x)$ — вещественный прозрачный потенциал, достаточно быстро убывающий на бесконечности. Изучаются изоспектральные деформации данного потенциала $v(x, t)$, удовлетворяющие уравнению Веселова–Новикова (двумерный аналог КдФ):

$$\partial_t v = 4\operatorname{Re}(4\partial_z^3 v + \partial_z(vw) - E\partial_z w), \quad \partial_{\bar{z}} w = -3\partial_z v, \quad \bar{v} = v, \quad E \in \mathbb{R},$$

где $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} - i\partial_{x_2})$, $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} + i\partial_{x_2})$. Данное уравнение было впервые в явном виде рассмотрено в работах [1, 2].

В данном докладе рассматривается асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ прозрачных потенциалов $v(x, t)$, удовлетворяющих уравнению Веселова–Новикова. Важность изучения прозрачных потенциалов обосновывается, в частности, результатами работы [3], в которой продемонстрировано, что все солитонные решения уравнения Веселова–Новикова являются прозрачными потенциалами.

Данный доклад основан на работах [4] и [5]. В частности, в [4] продемонстрировано, что прозрачные потенциалы из пространства Шварца, параметризуемые функцией двух вещественных переменных (согласно процедуре, изложенной в [4]), асимптотически равномерно убывают со скоростью $O(\frac{1}{t})$ и, таким образом, не имеют изолированных бегущих волн (солитонов) в своей асимптотике при больших временах. Это отличает двумерный случай от случая безотражательных потенциалов для уравнения КдФ в размерности 1.

С другой стороны, в [5] рассматривается семейство рациональных прозрачных решений уравнения Веселова–Новикова при положительной энергии, построенных Гриневичем и Захаровым (см. [6]). В частности, в [5] показано, что асимптотика решений Гриневича–Захарова

при больших временах описывается конечной суммой изолированных бегущих волн (солитонов), распространяющихся с различными скоростями.

Литература

1. Веселов А.П., Новиков С.П. Конечнозонные двумерные потенциальные операторы Шредингера. Явные формулы и эволюционные уравнения // Докл. Акад. наук СССР. — 1984. — Т. 279, № 1. — С. 20–24.
2. Веселов А.П., Новиков С.П. Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Потенциальные операторы // Докл. Акад. наук СССР. — 1984. — Т. 279, № 4. — С. 784–788.
3. Novikov R. Absence of exponentially localized solitons for the Manakov–Novikov–Veselov equation at positive energy // arXiv:1010.0770v2.
4. Kazeykina A., Novikov R. A large-time asymptotics for transparent potentials for the Novikov–Veselov equation at positive energy // arXiv:1010.2897.
5. Kazeykina A., Novikov R. Large-time asymptotics for the Grinevich–Zakharov potentials // In preparation.
6. Гриневич П. Г. Рациональные солитоны уравнения Веселова–Новикова — безотражательные при фиксированной энергии двумерные потенциалы // ТМФ. — 1986. — Т. 69, № 2. — С. 307–310.

УДК 51.77

Е.Г. Молчанов

molch64@mail.mipt.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)**Оценка коэффициента эластичности замещения
производственных факторов на микроуровне
в обобщенной модели Хаутеккера–Иохансена**

Будем рассматривать технологическую структуру производства с помощью обобщенной модели Хаутеккера–Иохансена с двумя производственными факторами текущего пользования (ПФТП) и однородным продуктом [1].

Для оценки эластичности замещения производственных факторов на микроуровне в этой модели необходимо конечное число раз решить следующую проблему моментов:

$$\exists \mu(\dots) \geq 0; \mu(R_+^2) < \infty : y^t = \int_{R_+^2} \theta(p_0^t - p_1^t x_1 - p_2^t x_2) \mu(dx), t \in \{1, \dots, T\}$$

где $\theta(\dots)$ это функция Хевисайда [2].

Разрешимость этой проблемы моментов зависит только от структуры разрезания R_+^2 линиями $p_0 - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$ на области. Каждой области сопоставим точку T -мерного булевского куба, причем координата этой точки будет равен единице, если соответствующая прямая лежит выше данной области, и нулю, иначе. В [2] было показано, что разрешимость проблемы моментов равносильна принадлежности вектора y конической оболочке cone (B) множества точек, соответствующих областям разрезания B .

Чтобы решить задачу принадлежности вектора некоему выпуклому конусу cone (B) , необходимо найти фасеты этого конуса. В [3] было показано, что множество возможных структур разрезания при $T < 9$ можно задать с помощью замены прямых псевдо-прямыми и сведения к множеству возможных последовательностей перестановок $\{1, \dots, T\}$. С помощью перебора всех возможных структур разрезания найдено множество всех фасет, которые возможны у cone (B) при $T < 9$.

Для ускорения исследования проблемы моментов предлагается рассматривать только фасеты специального вида:

$$\sum_{i \in I_+} y_i = \sum_{i \in I_-} y_i, I_+ I_- \subset \{1, \dots, T\}, I_+ \cap I_- = \emptyset.$$

Было показано, что при $T < 6$ возможны только фасеты такого вида, а при $T < 9$ рассматривании только фасет такого вида позволяет приближенно решить задачу принадлежности вектора cone (B) с ошибкой не более 10%.

Работа поддержана ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы (мероприятие 1.2.1, НК-15П), и выполнена по программе государственной поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ — 2982.2008.1).

Литература

1. Шананин А.А. Обобщенная модель чистой отрасли производства. // Математическое моделирование. — 1997. — Т. 9, № 9. — С. 117–127.
2. Шананин А.А. Непараметрический метод анализа технологической структуры производства. // Математическое моделирование. — 1999. — Т. 11, № 9. — С. 116–122.
3. Grunbaum B. Arrangements and Spreads. // American Mathematical Society. — 1972. — 114 p.

УДК 517.956.4

В.Н. Разжевайкин

razzh@mail.ru

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Волны и пространственные структуры для квазилинейных уравнений реакции — диффузии

Рассматривалось уравнение вида $u_t = D(u)\nabla(N(u)\nabla u) + F(u)$. Здесь $u(t,x)$ — фазовая (то есть зависимая) переменная, характеризующая пространственное распределение изучаемой величины (в моделях математической биологии это плотность численности популяции, частота доминантного аллеля, доля инфицированной части популяции и т.п.) в точке $x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$ в момент времени t . Коэффициенты диффузии отграничены от нуля: $D(u) \geq D_0 > 0$, $N(u) \geq N_0 > 0$. Все функции, входящие в (1), равно как и граница области $\partial\Omega$, считаются достаточно гладкими.

Оказывается, что многие известные результаты, установленные для случая постоянной диффузии $D(u) \equiv N(u) \equiv 1$, могут быть с незначительными изменениями распространены на случай уравнения (1). К ним можно отнести следующие.

Результаты об отсутствии пространственных структур, то есть устойчивых непостоянных стационарных решений как в выпуклой ограниченной области при граничных условиях непроницаемости, так и на одномерной прямой.

Результаты о стабилизации решений задачи Коши к доминирующим постоянным стационарным распределениям.

Результаты о свойствах бегущих волн, включая условия формирования цепочек волн и стабилизацию к ним решений на фазовой плоскости.

В качестве актуальных биологических приложений рассмотрены следующие модели:

1) модель формирования генных волн при наличии механизма пространственного переноса генного материала;

2) модель нахождения лидера (по скорости распространения) в системе конкурирующих видов, имеющих различные коэффициенты подвижности (диффузии) по пространственным переменным.

УДК 517.95, 517.9, 517.948, 517.983.23, 517.98

А.В. Романов

Vitkar48@inbox.ru

Московский государственный институт электроники и математики
(технический университет)

Конечномерная динамика на аттракторе полулинейных параболических уравнений

Обсуждается возможность описания фазовой динамики полулинейных параболических уравнений на глобальном аттракторе с помощью систем ОДУ, обладающих свойством единственности траекторий. К настоящему моменту эта задача близка к решению для уравнений, удовлетворяющих весьма общим предположениям типа гладкости или аналитичности нелинейной части, и в том числе для двумерных уравнений Навье–Стокса.

Секция математических основ управления

УДК 519.2

К.С. Андрейцева, Н.И. Сидняев

9259988800@mail.ru, Sidn_ni@mail.ru

Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана

О нецентральном хи-квадрат распределении и его табуляции

Распределение χ^2 с n степенями свободы — это распределение суммы квадратов n независимых стандартных нормальных случайных величин. Нецентральное χ^2 -распределение есть обобщение центрального χ^2 -распределения. Это есть распределение суммы квадратов независимых случайных величин, имеющих нормальное распределение с отличными от нуля средними и единичными дисперсиями. Формулы (точные или приближенные) для функции центрального χ^2 -распределения могут быть использованы для вычисления функции распределения разности двух независимых случайных величин, подчиняющихся распределениям Пуассона [1]. Уточнения некоторых предельных теорем послужили основой целого ряда приближенных формул для квантилей и функции нецентрального χ^2 -распределения. Одна из наиболее удачных аппроксимаций этого распределения указана Э. Пирсоном, который предложил нормировать $\chi_\nu^2(\lambda)$ так, чтобы математическое ожидание, дисперсия и центральный третий момент относились друг к другу как 1:2:8 [2]. В работе предложено преобразование:

$$\chi'^2 = \frac{\nu + 2\lambda}{\nu + 3\lambda} \left[\chi_\nu^2(\lambda) + \frac{\lambda^2}{\nu + 3\lambda} \right],$$

$$M\chi'^2 = f = \frac{(\nu + 2\lambda)^3}{(\nu + 3\lambda)^2}.$$

Также предложено менее точное, но зато более простое преобразование [1, 2]:

$$\chi''^2 = \frac{\nu + \lambda}{\nu + 2\lambda} \chi_\nu^2(\lambda),$$

$$M\chi''^2 = g = \frac{(\nu + \lambda)^2}{\nu + 2\lambda}.$$

Приближенные формулы особенно ценны потому, что функция нецентрального χ^2 -распределения полно не табулирована. В работе предложено выражение вида:

$$F(y; \lambda, \nu) = \int_0^y \frac{e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{\lambda}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{\nu}{2}+j-1} \lambda^j}{\Gamma[\frac{\nu}{2}+j] 2^{2j} j!} dx, \text{ где } y = \chi^2.$$

Эти значения F табулированы для всех комбинаций значений λ, ν, y .

Проведен анализ ошибок, возникающих при получении таблицы.

Литература

1. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 416 с.
2. *Кендалл М, Стьюарт А.* Статистические выводы и связи. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1973. — 226 с.
3. *Haynam G.E., Govindarajulu Z., Leone F.C., Siefert P.* Tables of the Non-Central Chi-Square Distribution. Part 1 // Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Statistics. — 1982. — V. 13, N. 3. — P. 413-443.

УДК 519.856, 519.857

А.В. Докучаев

docuhaevrud@gmail.com

Самарский государственный технический университет

Исследование стохастического процесса распределения ресурса методом динамического программирования

Оптимальное распределение ограниченного ресурса X , сокращающего с разной эффективностью время выполнения отдельных проектных работ, для сокращения времени выполнения сетевого проекта в целом, сводится к задаче распределения ограниченного ресурса $X = \sum_i x_i$, $n \in N = \{1, 2, \dots\}$, $i \in \overline{1, n}$, $x_i \in R^+$, по стохастическим функциям освоения $f_i(x_i)$, $f_i : R^+ \rightarrow R^+$ с заданным равномерным шагом дискретизации ресурса $h = X/(j-1)$, j — целое, $h \in R^+$, с целью оптимизации математического ожидания суммарного эффекта

$$M[Z] = \sum_g M_g[Z_{p,k}^*(f(y_j))], \quad M_g = \sum_k Z_{p,k}^*(f(y_j))P(Z_{p,k}^*(f(y_j))),$$

где M_g — математическое ожидание g -й точки спектра суммарного эффекта $Z^*(f(y_j)) = \text{opt}\{f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)\}$; $Z_{p,k}^*$ — суммарный эффект g -й детерминированной подзадачи (получаемой декомпозицией исходной стохастической [2]), найденный динамическим программированием; k — количество спектральных величин ряда распределения p случайной точки задачи (случайной точкой называем значение функции эффекта в j -й точке дискретизации ресурса $f(y_j)$, если оно представляет собой дискретную случайную величину с заданным рядом распределения), y_j — распределяемая на j -м шаге дискретизации ресурса порция X ; $P(Z_{p,k}^*)$ — вероятность осуществления суммарного эффекта детерминированной подзадачи, соответствующей индексам p и k [1, 2]. Зависимость функций эффектов от распределяемого ресурса является нелинейной и задается числами в точках $f_i(y_j)$ дискретизации распределяемого ресурса X .

Исследована зависимость приращения математического ожидания суммарного эффекта $M[Z]$ от случайных параметров задачи.

Утверждение 1. Если учет стохастических параметров случайных точек не изменяет оптимальный суммарный эффект $Z_{p,k}^*(f(y_j))$ по-

лучаемых при разбиении стохастической задачи детерминированных подзадач [2] (по сравнению с оптимальным суммарным эффектом в модели с усреднением случайных параметров), то дисперсия оптимального суммарного эффекта $D[Z_{p,k}^*(f(y_j))]$ стохастической задачи равна нулю [1].

Утверждение 2. Если в стохастической задаче распределения ресурса одна случайная точка, и учет ее вероятностных параметров не изменяет средний оптимальный суммарный эффект (по сравнению с оптимальным суммарным эффектом в модели с усреднением случайного параметра), но изменяет оптимальные суммарные эффекты детерминированных подзадач, то дисперсия оптимального суммарного эффекта исходной стохастической задачи равна дисперсии случайной точки $D(f_i(y_j))$.

Утверждение 3. Рост дисперсии в случайной точке (для нескольких точек — суммы их дисперсий) при неизменной мощности спектра случайной точки вызывает рост дисперсии суммарного эффекта спектральных точек и ряде случаев вызывает рост математического ожидания суммарного эффекта задачи. Изменение количества точек спектра при усреднении параметров процесса распределения ресурса не влияет на математическое ожидание оптимального суммарного эффекта — если при этом дисперсия суммарного эффекта не изменяется.

Литература

1. Докучаев А.В. Дисперсия стохастического процесса распределения ресурса // Тр. Межд. конф. с элементами науч. школы для молодежи «Перспективные информационные технологии для авиации и космоса (ПИТ-2010)». — Самара, 2010. — С. 610–614.
2. Докучаев А.В., Котенко А.П. Алгоритмы решения стохастических задач динамического программирования большой размерности // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки. — 2008. — № 2(17). — С. 203–210.

УДК 519.832

Д.В. Зайцев, Д.Л. Майструк

zaitsev_dv@mail.ru, juniormaster@mail.ru

12 Центральный научно-исследовательский институт МО РФ

Моделирование конфликтной игры на основе модифицированной вероятностной схемы выбора с возвращением

Рассматривается конфликтная игра между двумя множествами (командами) игроков $A = \{1, \dots, N_A\}$ и $B = \{1, \dots, N_B\}$. Суть игры заключается в том, что в конфликт вступает какой-либо игрок команды A с какими-либо игроком из B . Конфликт между игроками может закончиться либо победой игрока из команды A (выведением из игры игрока команды B) с вероятностью p , либо победой игрока из команды B (выведением из игры игрока команды A) с вероятностью $1 - p$. Команда, потерявшая всех игроков, считается проигравшей.

В ряде практических приложений вероятность промежуточного исхода игры p_{ij} зависит от количества оставшихся в игре игроков следующим образом:

$$p_{ij} = (N_A - i) / (N_A - i + N_B - j), \quad (1)$$

где i и j — потери команд A и B на рассматриваемый игровой момент соответственно.

Для определения конечных исходов рассматриваемой игры можно воспользоваться следующей теоретико-вероятностной схемой. Пусть урна содержит N_A белых и N_B черных шаров, количество которых равно начальному количеству игроков соответствующих команд. Случайным образом из урны выбирается шар, что означает победу игрока команды, соответствующей цвету выбранного шара. По правилам игры победитель должен остаться в игре, а проигравший покинуть её, то есть вынутый шар возвращается в урну, а из открытой урны уже без возвращения вынимается шар другого цвета. Процедура повторяется до тех пор, пока в урне не останутся шары одного цвета.

В случае неразличимых игроков описать рассматриваемую игру возможно с помощью «прямоугольного» графа (фрагмент графа представлен на рис. 1) с состояниями S_{ij} , i и j — соответственно потери команд A и B на рассматриваемый игровой момент. Переход

из состояния S_{ij} в состояние S_{ij+1} характеризуется вероятностью p_{ij} (1), а в состоянии S_{i+1j} вероятностью $1 - p_{ij}$.

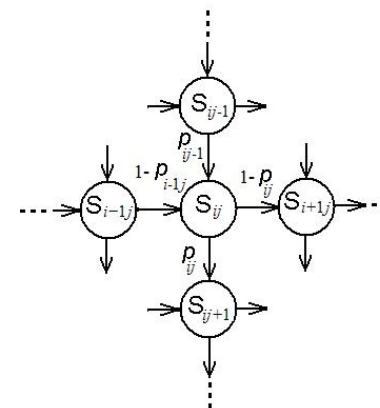


Рис. 1. Фрагмент графа модели конфликтной игры

Конечные распределения исходов конфликтной игры — есть вероятности нахождения рассматриваемой системы в последней строке графа (победа стороны A) или в крайнем правом столбце (победа стороны B). Расчет конечных распределений вероятностей потерь сторон можно существенным образом облегчить, если заметить, что граф рис. 1, по своей сути, представляет собой фазовое пространство всевозможных исходов рассматриваемой игры. Для достижения поставленной цели можно воспользоваться методом «волны вероятности», изложенным в [1], заключающимся в рассмотрении распространения в данном фазовом пространстве «волны вероятности», волновой фронт которой можно рассчитать с помощью принципа, аналогичного принципу Гюйгенса–Френеля для расчета дифракции оптического излучения, — для расчета вероятности P_{ij} состояния S_{ij} необходимо просуммировать вероятности переходов p_{ij-1} и $(1 - p_{i-1j})$ из соседних состояний S_{i-1j} и S_{ij-1} с соответствующими весами P_{i-1j} и P_{ij-1}

$$P_{ij} = P_{ij-1} \cdot p_{ij-1} + P_{i-1j} \cdot (1 - p_{i-1j}). \quad (2)$$

Доказательство обоснованности расчетов конечных распределений вероятностей потерь команд по формуле (2) достаточно легко провести на основе метода математической индукции.

Пример конечных распределений вероятностей потерь команд в конфликтной игре в случае $A = \{1, \dots, 10\}$ и $B = \{1, \dots, 5\}$ представлен на рис. 2.



Рис. 2

В случае различных игроков (пронумерованных шаров) для нахождения конечных распределений вероятностей исходов рассматриваемой конфликтной игры необходимо каждое конечное значение вероятности P_i победы команды А, полученное для неразличимых игроков, разбить на $C_{N_A}^i$ равных частей, соответствующих всевозможным исходам игры для конкретного значения i , а для команды В конечное значение вероятности её победы P_j разбить на $C_{N_B}^j$ равных частей.

На основе полученных результатов можно получить оценку вероятности конкретного игрока (конкретного шара в урне) остаться в игре на момент её окончания, при этом необходимо учитывать следующее. Пусть, например, в урне два белых и один черный шар. Если из урны вынимается первый белый шар, то игра заканчивается, так как белый шар возвращается в урну, а из неё извлекается черный шар. При этом первый белый шар сохраняет в урне и второй белый шар, тем самым случайные события, заключающиеся в том, что различные игроки одной команды останутся в игре на момент её окончания, не являются независимыми. Тогда, в частности, оценивать вероятность сохранения в игре всех игроков одной команды на момент её окон-

чания путем перемножения вероятностей каждого игрока остаться в игре является некорректным.

Литература

1. Зайцев Д.В. Моделирование боя на основе теории сетей массового обслуживания // Стратегическая стабильность. — 2007. — № 4 (41). — С. 30–37.

УДК 519.175.3

М.И. Исаев

Adept42@rambler.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Асимптотика числа эйлеровых циклов в плотных графах

Эйлеровым циклом называется цикл, в котором присутствуют все ребра графа ровно один раз. Два эйлеровых цикла считаются одинаковыми, если они переходят друг в друга при циклическом сдвиге.

Граф с n вершинами назовем σ -плотным, если степень любой его вершины не менее σn .

Для графа G с вершинами v_1, v_2, \dots, v_n и множеством ребер EG определим матрицу A_G размера $n \times n$ следующим образом:

$$A_G[j,k] = \begin{cases} -1, & (v_j, v_k) \in EG, \\ d_j, & j = k, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

где d_j обозначает степень вершины v_j .

Матрица A_G называется матрицей Лапласа графа G . Заметим, что A_G является матрицей квадратичной формы с собственным вектором $(1, \dots, 1)^T$. Ортогональное дополнение этого собственного вектора обозначим L . Рассматривая A_G как линейный оператор, получаем, что L инвариантно относительно A_G . Ограничение действия A_G на L обозначим \tilde{A}_G .

Граф G назовем μ -обусловленным, если число обусловленности \tilde{A}_G в евклидовой норме не превосходит μ .

Матрица Лапласа σ -плотного графа обладает многими замечательными свойствами, одним из которых является

Лемма (Исаев М.). Если граф G является σ -плотным, причем $\sigma > \frac{1}{2}$, то он является $\frac{1}{2\sigma-1}$ -обусловленным.

Задача о подсчете числа эйлеровых циклов в неориентированных графах является $\#P$ -трудной. Это показано в работе Brightwell и Winkler [2]. Однако для некоторых классов графов существуют различные оценки. Приведем асимптотическую формулу, полученную B.D. McKay [1], для числа эйлеровых циклов в полном графе K_n .

Теорема 1 (B.D. McKay). При нечетных $n \rightarrow \infty$

$$Eul(K_n) = 2^{(n+1)/2} \pi^{1/2} e^{-n^2/2+11/12} n^{(n-2)(n+1)/2} (1 + O(n^{-1/2+\varepsilon}))$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Для достаточно плотных графов верны следующие оценки, позволяющие определить асимптотическое поведение числа эйлеровых циклов.

Теорема 2 (Исаев М.). Пусть неориентированный граф G с n вершинами, имеющими четные степени d_1, d_2, \dots, d_n , является σ -плотным, причем $\sigma > 1/2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$Eul(G) \geq c_1 \prod_{j=1}^n \left(\frac{d_j}{2} - 1 \right)! \cdot 2^{E - \frac{n-1}{2}} \pi^{-\frac{n-1}{2}} n^{-1/2} \sqrt{\det \tilde{A}_G},$$

$$Eul(G) \leq c_2 \prod_{j=1}^n \left(\frac{d_j}{2} - 1 \right)! \cdot 2^{E - \frac{n-1}{2}} \pi^{-\frac{n-1}{2}} n^{-1/2} \sqrt{\det \tilde{A}_G},$$

$$c_1 = \exp \left(-\frac{4\mu e^{2\mu/\sigma^2}}{\sigma^3} - \frac{2}{(\sigma^2 - \sigma/2)^4} \right) + O(n^{-1/2+4\varepsilon}),$$

$$c_2 = e^{\mu^2/\sigma^2} + O(n^{-1/2+4\varepsilon}),$$

где $1 \leq \mu \leq \frac{1}{2\sigma-1}$ — обусловленность графа G , а E — число ребер.

Литература

1. McKay B.D., Robinson R.W. Asymptotic enumeration of eulerian circuits in the complete graph // *Combinatorica*. — 1995. — V. 10, N. 4. — P. 367–377.

2. Brightwell G., Winkler P. Note ob Counting Eulerian Circuits // arXiv: cs/0405067. — 2004.

УДК 519.6

А.В. Колногоров

kolnogorov53@mail.ru

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого

Нахождение минимаксных стратегии и риска в стационарной случайной среде

Рассматривается алгоритм вычисления минимаксных стратегии и риска на конечном отрезке времени длины N в стационарной случайной среде с нормально распределенными доходами, то есть имеющими плотности $f(x|m_\ell) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-(x - m_\ell)^2/2)$, если выбран текущий вариант ℓ ($\ell = 1, 2$) [1]. Алгоритм получен в предположении, что известны ограничения на разность и сумму математических ожиданий доходов $|m_1 - m_2| \leq c_1$, $|m_1 + m_2| \leq c_2$, где $0 < c_1 < \infty$, $0 < c_2 < \infty$, причем c_2 достаточно велико. Из основной теоремы теории игр следует, что минимаксные стратегия и риск совпадают с байесовскими на наихудшем априорном распределении, которое в рассматриваемом случае является симметрическим и асимптотически однородным.

Численная оптимизация проводилась в предположении, что асимптотически наихудшая плотность распределения сосредоточена на множестве $|m_1 - m_2| = dN^{-1/2}$. Тогда наихудшее априорное распределение соответствует максимуму приведенного к величине $N^{1/2}$ байесовского риска $r_N(d)$. При $N = 30, 50$ максимумы $r_N(d)$ по $d = 0, 9; 1, 1; \dots; 5, 5$ оказались приблизительно равными 0,66, 0,65 соответственно при $d \approx 1, 7$ (рис. 1). Для найденных стратегий затем вычислялись приведенные потери $l_N(d)$, которые также имели указанные максимумы при $d \approx 1, 7$, что подтверждает справедливость сделанного предположения.

Литература

1. Колногоров А. В. Нахождение минимаксных стратегии и риска в задаче о двуруком бандите с нормально распределенными доходами // *Обзорные прикладной и промышленной математики*. — 2010. — Т. 17, В. 2. — С. 232–234.

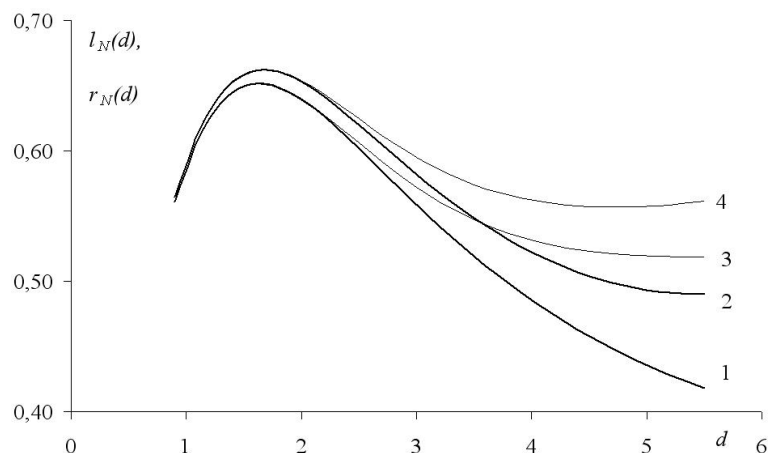


Рис. 1. 1 — риски ($N = 30$), 2 — риски ($N = 50$), 3 — потери ($N = 30$), 4 — потери ($N = 50$)

УДК 519.85

А.А. Орлов

sashaorlov@gmail.com

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Двойственный метод Ньютона для задачи полуопределенного программирования

Рассматривается линейная задача полуопределенного программирования:

$$\begin{aligned} \min_X C \cdot X, \\ A_i \cdot X = b^i, \quad 1 \leq i \leq m, \\ X \succ 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь X, C и A_i — симметричные матрицы порядка n , неравенство $X \succ 0$ означает, что матрица X положительно полуопределена. Точка между двумя матрицами A_i и X указывает на их скалярное произведение, определяемое как след матрицы $A_i^T X$. Двойственной к (1)

является задача

$$\begin{aligned} \max_{u, V} b^T u, \\ \sum_{i=1}^m u^i A_i + V = C, \\ V \succ 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Предполагается, что обе задачи (1) и (2) имеют решения и что матрицы A_i , $1 \leq i \leq m$, линейно независимы.

В [1] для решения задачи (2) был предложен двойственный мультипликативно-барьерный метод, в котором итерации велись по двойственным переменным, а прямая переменная X определялась по двойственным переменным, исходя из специальных зависимостей. В настоящем сообщении используется одна из таких зависимостей $X(u)$, причем предлагается решать методом Ньютона систему линейных уравнений

$$A_i \cdot X(u) - b^i = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (3)$$

Пусть $\text{vec} M$ обозначает прямую сумму столбцов квадратной матрицы M . В векторной форме система (3) запишется как

$$A_{\text{vec}} \text{vec} X(u) - b = 0_m,$$

где $A_{\text{vec}} — $m \times n^2$ матрица, строками которой являются векторы $\text{vec} A_i$, $1 \leq i \leq m$. Возьмем$

$$\text{vec} X(u) = D_n \Phi^{-1}(V(u)) L_n A_{\text{vec}}^T b, \quad \Phi(V) = L_n [A_{\text{vec}}^T A_{\text{vec}} + V^{\otimes}] D_n.$$

Здесь L_n и D_n — элиминационная и дуплицирующая матрицы. Через V^{\otimes} обозначена кронекеровская полусумма матрицы V , то есть матрица $V^{\otimes} = \frac{V \otimes I_n + I_n \otimes V}{2}$. Матрица $\Phi(V(u))$ является неособой, если точка $[u, V(u)]$ невырожденная. Итерации в методе проводятся по следующей рекуррентной схеме:

$$u_{k+1} = u_k + [A_{\text{vec}} (A_{\text{vec}}^T A_{\text{vec}} + V_k^{\otimes})^{-1} X_k^{\otimes} A_{\text{vec}}^T]^{-1} (b - A_{\text{vec}} \text{vec} X_k), \quad (4)$$

где $X_k = X(u_k)$, $V_k = V(u_k)$.

Теорема. Пусть для прямой и двойственной задач имеет место строгая двойственность, причем их решения X_* и V_* строго комплементарны. Пусть, кроме того, точка V_* является вершиной допустимого множества в V -пространстве. Тогда метод (4) локально сходится к соответствующему решению двойственной задачи u_* со сверхлинейной скоростью.

Литература

1. Жадан В.Г., Орлов А.А. Двойственный метод Ньютона для линейной задачи полуопределенного программирования // Сообщения по прикладной математике. — М.: ВЦ РАН, 2010.

УДК 510.53

П.А. Сечин

pasechnik771@gmail.com

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Пересечение орбиты линейного отображения с конусом — обобщение проблемы Сколема

Последовательность рациональных чисел $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ называется линейной рекуррентной последовательностью (ЛРП), если существуют такие числа $d \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{Q}$, что для любых $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+d} = \sum_{k=1}^d a_k x_{n+d-k}.$$

ЛРП однозначно определяется по коэффициентам a_i и начальным данным $x_1 = b_1, \dots, x_d = b_d$.

Теорема (Сколем, [1]). Для ЛРП $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ множество $Ann(a_i, b_i) = \{n \in \mathbb{N} | x_n = 0\}$ представляет собой объединение конечного множества и конечного числа арифметических прогрессий с одинаковым периодом.

Проблема Сколема состоит в том, чтобы по числам $d, b_1, \dots, b_d, a_1, \dots, a_d$ алгоритмически определить, содержит ли ЛРП нулевой член. Для $d \leq 5$ доказана алгоритмическая разрешимость проблемы [2, 3]. Для $d > 5$ проблема остается открытой

В данной работе рассматривается задача об орбите, которая является обобщением проблемы Сколема. Постановку этой задачи предложил М.Н. Вялый. Пусть $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$, а $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{Q}^n$, а $K = \text{cone}\{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m\}$ — коническая оболочка векторов $\mathbf{k}_i \in \mathbb{Z}^n, i \in \{1, \dots, m\}$. Рассмотрим множество $\{A^j \mathbf{x}_0\}_{j \in \mathbb{N}}$, называемое орбитой линейного

отображения. Задача об орбите состоит в том, чтобы по заданным $A, \mathbf{x}_0, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_d$ алгоритмически определить, пересекается ли орбита $\{A^j \mathbf{x}_0\}_{j \in \mathbb{N}}$ с конусом K . Будем называть n — размерностью задачи.

В работе показано, что если проблема Сколема разрешима, то в задаче об орбите конус можно считать телесным. Для доказательства используется алгоритм из [4], позволяющий определить, содержит ли ЛРП конечное или бесконечное число нулей. В предположении о разрешимости проблемы Сколема доказывается, что существует алгоритм вычисления конечной части $Ann(a_i, b_i)$. Далее, устанавливается сводимость задачи об орбите размерности n , в которой конус представляет векторное подпространство размерности $n - 1$, к задаче Сколема, и по индукции строится сводимость задачи об орбите с нетелесным конусом к задаче об орбите с телесным конусом меньшей размерности.

Теорема 1. Задача об орбите с нетелесным конусом сводится к проблеме Сколема и задаче об орбите с телесным конусом меньшей размерности.

Кроме того, в данной работе показана алгоритмическая разрешимость задачи об орбите для размерности 2. Для доказательства рассматривается асимптотическое поведение фазовых портретов орбит линейных отображений. Для случая отображения с действительными собственными значениями используется монотонное стремление вектора $\frac{A^n \mathbf{x}_0}{\|A^n \mathbf{x}_0\|}$ к пределу. В случае комплексных собственных значений используется утверждение о том, что последовательность $\{kq \bmod 1\}_{k \in \mathbb{N}}$ при иррациональном q всюду плотна. Показывается, что если угол конуса в двумерной задаче об орбите равен α , то в задаче об орбите достаточно рассмотреть первые $\lceil \frac{2\pi}{\alpha} \rceil + 1$ элементов орбиты.

Теорема 2. Задача об орбите в размерности два разрешима.

Литература

1. Skolem T. Ein Verfahren zur Behandlung gewisser exponentialer Gleichungen und diophantischer Gleichungen // 8. Scand. Mat. Kongr. — 1934. — P. 163–169.

2. Halava V., Harju T., Hirvensalo M., Karhumäki J. Skolem's problem — on the border between decidability and undecidability // TUCS technical report. — 2005. — N. 683.

3. *Верещагин Н.К.* О проблеме появления нуля в линейной рекуррентной последовательности // *Мат. заметки.* — 1985. — Т. 38, № 2. — С. 177–189.

4. *Berstel J., Mignotte M.* Deux proprietes decidables des suites recurrentes lineaires // *Bull. Soc. Math. France.* — 1976. — 104. — P. 175–184.

5. *Halava V.* Decidable and undecidable problems in matrix theory // *TUCS technical report.* — 1997. — N. 127.

УДК 519.626

А.С. Тихомиров

Tikhomirov.AS@mail.ru

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого
Санкт-Петербургский государственный университет

О скорости сходимости марковского симметричного случайного поиска

Рассмотрим пространство \mathbf{R}^d с евклидовой метрикой ρ . Пусть целевая функция $f : \mathbf{R}^d \mapsto \mathbf{R}$ принимает минимальное значение в единственной точке x_* , а нашей целью является отыскание точки x_* с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Для поиска точки минимума воспользуемся марковским симметричным случайным поиском $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$. Так будем называть марковские алгоритмы случайного поиска (см. [1]), переходные функции которых обладают симметричными плотностями (см. [1, с. 125]). Отметим, что знаменитый алгоритм simulated annealing принадлежит рассматриваемому семейству методов. Обозначим τ_ε — момент первого попадания поиска $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$ в ε окрестность точки x_* . Трудоемкость случайного поиска определяется как $E\tau_\varepsilon$ и имеет смысл среднего числа шагов поиска до достижения им ε окрестности точки x_* . Оказалось, что никакой марковский симметричный случайный поиск не может иметь трудоемкость, растущую по ε медленнее, чем $|\ln \varepsilon|$.

Теорема. Пусть целевая функция f принимает минимальное значение в единственной точке x_* . Рассмотрим марковский симметричный случайный поиск, начинающийся в точке x .

Пусть $0 < \varepsilon < \rho(x, x_*)$. Тогда $E\tau_\varepsilon \geq c_d \ln(\rho(x, x_*)/\varepsilon)$, где $c_d = 2^{1-d} \sup\{(1-q)^d / |\ln q| : 0 < q < 1\}$.

Результаты работы позволяют оценить потенциальные возможности марковских алгоритмов, и сделать вывод о том, что скорость сходимости некоторых построенных марковских поисков (см. [1]–[5]) близка к оптимальной, по крайней мере по порядку зависимости от ε .

Литература

1. *Zhigljavsky A., Zilinskas A.* Stochastic Global Optimization. — Berlin: Springer-Verlag, 2008. — 262 P.

2. *Тихомиров А.С.* Об однородном марковском монотонном поиске экстремума // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2006. — Т. 46, № 3. — С. 379–394.

3. *Тихомиров А.С.* О скорости сходимости однородного марковского монотонного поиска экстремума // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2007. — Т. 47, № 5. — С. 817–828.

4. *Tikhomirov A., Stojunina T., Nekrutkin V.* Monotonous random search on a torus: Integral upper bounds for the complexity // *Journal of Statistical Planning and Inference.* — 2007. — V. 137, Issue 12. — P. 4031–4047.

5. *Тихомиров А.С.* О скорости сходимости алгоритма simulated annealing // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2010. — Т. 50, № 1. — С. 24–37.

УДК 519.688

П.А. Шлишкин, Р.А. Гимадеев, Е.Г. Молчанов

pshishkin@gmail.com, renat.ariacas@gmail.com, molch64@mail.mipt.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)**Алгоритмы поиска кратчайших путей
в географических графах**

Нахождение кратчайших путей в графах дорог — это важная прикладная задача, активно развивающаяся в последнее десятилетие. Эффективное решение этой задачи может коренным образом улучшить состояние трафика на дорогах. Также эта задача применима в задачах текстовой релевантности, при решении задачи нахождения кратчайшей цепи преобразований над запросами в поисковой системе.

В данном докладе будут рассматриваться алгоритмы, позволяющие быстро отвечать на запросы поиска кратчайших путей в графе дорог с динамически меняющимися длинами ребер.

Задача поиска кратчайшего пути будет решаться в предположении того, что веса ребер в каждый момент времени уже известны, причем скорость изменения весов ограничена некоторым набором параметров. Все рассматриваемые алгоритмы будут иметь две стадии — сравнительно долгий препроцессинг и быстрый алгоритм ответа на запрос поиска пути между двумя данными вершинами.

Результаты экспериментов реализованы на C++ и сравнены с известными алгоритмами.

Литература

1. *Buslaev A.P., Gasnikov A.V., Yashina M.V.* Selected Mathematical Problems of Traffic Flow Theory // International Journal of Computer Mathematics. — London: Taylor & Francis, 2010. — 27 p.

2. *Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков / под ред. А.В. Гасникова с приложениями Бланка М.Л., Гасниковой Е.В., Замятина А.А., Малышева В.А., Райгородского А.М. — М.: МФТИ, 2010.

**Секция математического
моделирования в экономике,
экологии и социологии**

УДК 519.254

Н.А. Андреев^{1,2}, В.А. Лапшин^{1,2}

nick.my.mail@gmail.com, vlapshin@hse.ru

¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова² Государственный университет — Высшая школа экономики**Оценка релаксации финансовых рынков
по статистическим данным**

Цель работы — исследование задачи оценки времени восстановления финансового рынка после шока, вызванного, например, резким колебанием цены, сделки с очень большим объёмом, приходом новостей и т.п. Время восстановления — релаксация — является одним из важнейших компонентов ликвидности рынка. При этом акцент в настоящей работе сделан на формализацию понятия шока для финансового рынка.

С использованием результатов [1]–[2] строится математическая модель стохастической динамики показателя ликвидности Xetra (Xetra Liquidity Measure, XLM). Предполагается, что его поведение описывается процессом $F(t)$ вида

$$F(t) = L(t) + bX(t),$$

где $L(t)$ — прямая, полученная по методу наименьших квадратов на основе наблюдаемых значений XLM, b — положительная константа, $X(t)$ — стационарный гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией, заданной в явном виде.

При этом наблюдаются зашумленные значения XLM $Y(t_i) = f(t_i) + \eta_i, i = \overline{1, n}$, где η_i — независимые одинаково распределённые случайные величины, имеющие нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2 .

Согласно [2], задача построения оценки процесса $F(t)$ сводится к решению регуляризованной по Тихонову задачи минимизации

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(t_i))^2 + \varepsilon \int_0^1 (f''(u))^2 du \rightarrow \inf_{f(t)}, \quad \varepsilon = \frac{\sigma^2}{b^2}.$$

На практике значение дисперсии шума неизвестно и является в некотором роде характеристикой ликвидности. Значение дисперсии (а следовательно, и параметра регуляризации) принимается случайным с априорно заданным распределением. В работе рассматривается случай экспоненциального с заданным параметром α распределения коэффициента регуляризации ε . В таком случае невязка является функцией от случайной величины, и можно оценить её среднее значение:

$$E_\varepsilon E(F(t) - f(t, \varepsilon))^2 = \text{const} + \alpha \int_0^\infty e^{\alpha \varepsilon} g^2(t, \varepsilon) d\varepsilon = \text{const} + \psi(t).$$

При этом скачки функции $\psi(\cdot)$ интерпретируются как шоковое поведение, отличающееся от «стационарного» состояния.

Для автоматического определения периодов шока на основании полученной функции $\psi(t)$ предлагается метод построения «верхней границы» значений функции, превышение которой рассматривается как шок. Для её построения используется аналог доверительного интервала для значений функции $\psi(t)$, рассматриваемых как значение случайного процесса определённого вида.

Литература

1. *Parzen E.* An Approach to Time Series Analysis // The Annals of Mathematical Statistics. — 1961. — V. 32, N. 4. — P. 951–989.
2. *Wahba G.* Spline Models for Observational Data // Philadelphia: SIAM. — 1990. — V. XII. — 169 p.

УДК 519.857

В.О. Буферт

Bifert@mail.ru

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)

Двухпараметрические задачи распределения ресурса

Задача оптимального распределения ограниченного ресурса между конечным числом потребителей была решена Р. Беллманом [1] при следующих очевидных предположениях:

1. Доходы, полученные от различных потребителей, могут быть измерены общей единицей.
2. Доход, полученный от любого потребителя, не зависит от того, какие количества ресурсов были выделены для других потребителей.
3. Общий доход может быть определен как сумма доходов, полученных от отдельных потребителей ресурса.

Для решения этой задачи Р. Беллман предложил метод динамического программирования [1]. Этот метод допускает различные алгоритмические реализации [2]. Одна из наиболее эффективных реализаций состоит в рассмотрении на первом шаге всех возможных значений ресурса, предназначенного первому потребителю и запоминанию для каждого из них соответствующего дохода, затем всех возможных комбинаций распределения ресурса между первыми двумя потребителями с запоминанием суммарного дохода для каждого варианта распределения, затем соответствующие комбинации для первых трёх потребителей и т.д. Во избежание полного перебора вариантов вводится понятие «состояние» и из всех путей достижения любого из состояний остаётся один (наилучший), все остальные пути отбраковываются вместе с их продолжениями. Такая отбраковка обеспечивает преимущество динамического программирования перед полным перебором. Однако при большом числе состояний на каждом шаге и большом числе шагов объём вычислений оказывается весьма значительным. Более эффективные алгоритмы [2] решения данной задачи

позволяют отбраковывать не только неэффективные пути, приводящие в заданное состояние, но и собственно заведомо неэффективные состояния [3]. Если рассматривать задачу как двухкритериальную (минимум ресурса, максимум дохода) [3], то на каждом шаге эффективными оказываются только паретовские точки на плоскости значений: использованный ресурс, доход [3]. Такая отбраковка оказалась существенно более эффективной, чем традиционные алгоритмы динамического программирования [1, 4] (рис. 1).

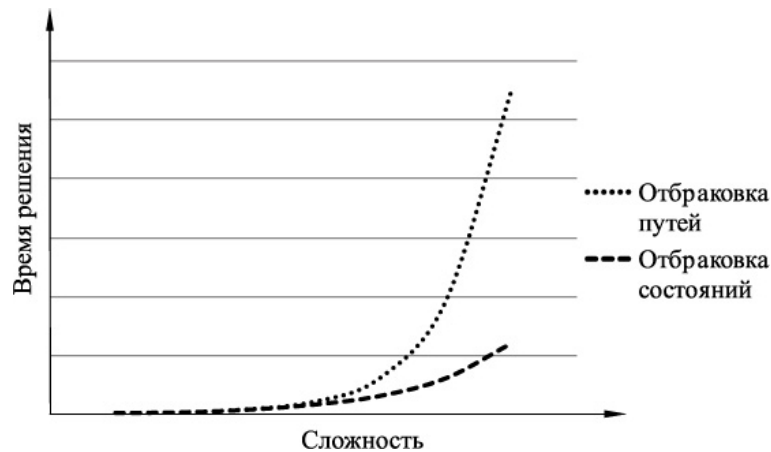


Рис. 1. Зависимость времени решения от сложности задачи

Литература

1. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. — М.: Наука, 1965. — 458 с.
2. Струченков В.И. Методы оптимизации в прикладных задачах. — М.: Солон-пресс, 2009. — 309 с.
3. Струченков В.И. Динамическое программирование с использованием множеств Парето // Дискретный анализ и исследование операций. — 2008. — Т. 15, № 6. — С. 58–62.
4. Таха Х.А. Введение в исследование операций. — М.: Вильямс, 2005. — 912 с.

УДК 519.865.7

М.П. Ващенко¹, П.А. Пашков², А.А. Шананин¹
wcan@ccas.ru, petr.pashkov@gmail.com, alexshan@yandex.ru

¹ Московский физико-технический институт
(государственный университет)

² Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Анализ сценариев реализации инвестиционной программы в электроэнергетике России

На сегодняшний день одной из наиболее обсуждаемых на государственном уровне задач является модернизация российской экономики. Планируется, что модернизация будет проводиться за счет крупномасштабных инвестиций, направленных на обновление основных фондов и развитие технологий. Однако текущее положение дел, а именно дефицит бюджета и значительно уменьшившийся резервный фонд, не позволяет рассматривать государственные расходы как основной источник этих инвестиций. Одним из приоритетных направлений инвестиций является электроэнергетический сектор российской экономики. В недавнем времени (начало 2000-х годов) сектор подвергся полномасштабной реформе, которая была направлена на обновление и увеличение генерирующих мощностей. В рамках реформы планировалось со временем полностью либерализовать рынок электроэнергии, чтобы сделать рентабельными инвестиции в новые мощности. Мировой финансовый кризис внес существенные коррективы в ход реформы. Во-первых, очевидно значительное завышение прогнозных темпов роста спроса на электроэнергию, в соответствии с которыми формировались планы размещения новых мощностей. Поэтому инвестиционная программа сектора была скорректирована в сторону уменьшения. Во-вторых, были предприняты шаги для сдерживания роста цен на электроэнергию (снижены темпы либерализации), который повышал издержки обрабатывающих отраслей, сильно пострадавших во время кризиса. Эти шаги поставили под вопрос реализацию оставшихся инвестиционных проектов.

При описании инвестиционной деятельности электроэнергетического сектора был использован подход Кантора–Липшмана, его новая адаптация для случая непрерывного времени. Для применения подхода Кантора–Липшмана к моделированию инвестиций в электро-

энергетическом секторе репрезентативным инвестиционный проект создания новой мощности был описан двумя функциями времени, которые описывают график введения в эксплуатацию новой мощности (и выбытия с течением срока службы) и график капитальных затрат по проекту. При этом капитальные затраты и мощности были описаны в реальных величинах, что позволило оценить влияние динамики цен на продукцию и ресурсы сектора и на поток платежей (а следовательно, и эффективность) от инвестиционных проектов. Для инвестиционных проектов секторов (проекты создания новых мощностей) описана процедура вычисления показателя доходности, на которой основано моделирование инвестиционной активности сектора. Показатель эффективности инвестиций учитывает ценовую конъюнктуру и особенности инвестиционных проектов конкретного сектора. Начальные данные, инвестиционная активность и данные о плане выбытия определяют эволюцию мощностей сектора. При помощи аппарата дифференциальных уравнений и подхода динамического программирования описана производственная деятельность, в рамках которой на основании описания эволюции мощностей определяются производственные и финансовые показатели сектора. Модель электроэнергетического сектора была проидентифицирована на основе финансовых и годовых отчетов компаний электроэнергетического сектора, данных ФСГС. В рамках второго этапа были проведены модельные расчеты, позволившие оценить влияние государственной политики в области ценообразования (либерализация цен или их контроль) и спроса потребителей на электроэнергию на состояние сектора. В частности, было показано, что при либерализации цен и фиксированной избыточной инвестиционной программы издержки обслуживания избыточных мощностей (фиксированные затраты, стоимость долга, привлеченного на строительство мощности) ложатся на плечи потребителей в форме увеличения цен.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (мероприятие 1.2.16 НК-15П) и гранта РФФИ 10-07-90715-моб_ст.

Литература

1. David G. Cantor, Steven A. Lippman Investment Selection with Imperfect Capital Markets // *Econometrica* — 1983. — V. 51, N. 4. — P. 1121–1144.

УДК 519.214.6, 519.722, 519.876

Е.В. Гасникова

egasnikova@ya.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

О социально-экономических приложениях уравнений стохастической химической кинетики, динамике средних и динамике, полученной в результате скейлинга

Предположим, что некоторая макросистема может находиться в различных состояниях, характеризуемых вектором \vec{n} с неотрицательными целочисленными компонентами (скажем, в модели «кинетики социального неравенства» $n_i(t)$ — количество жителей города, имеющих в момент времени $t \geq 0$ i рублей). Будем считать, что в системе происходят случайные превращения (химические реакции). Пусть $\vec{n} \rightarrow \vec{n} - \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in J$ — все возможные типы реакций, при этом $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in J \Rightarrow (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) \in J$. Введем, следуя Березину–Клесову (1978), интенсивность реакции:

$$\lambda_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}(\vec{n}) = \lambda_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}(\vec{n} \rightarrow \vec{n} - \vec{\alpha} + \vec{\beta}) = M^{1-\sum_i \alpha_i} K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} \left(\frac{\vec{n}}{M} \right) \prod_{i: \alpha_i > 0} n_i \cdot \dots \cdot (n_i - \alpha_i + 1),$$

где $K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}$ — константы реакции (в химической кинетике — постоянные, а в социодинамике (В. Вайдлих, 2000) — необязательно); при этом часто считают $M = \sum_i n_i$. То есть $\lambda_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}(\vec{n})$ — вероятность осуществления в единицу времени перехода $\vec{n} \rightarrow \vec{n} - \vec{\alpha} + \vec{\beta}$: в единицу времени равновероятно выбираются («приближение среднего поля») любые два жителя города и в зависимости от того, в каких состояниях они находились, «случайно» переводятся (разыгрывают один рубль) в новые состояния. На макроуровне все это соответствует принципам химической кинетики (закон действующих масс Гульдберга–Вааге, 1864). Предположим теперь, что в начальный момент времени для любого i существует предел $c_i(0) = \lim_{M \rightarrow \infty} n_i(0)/M$. Тогда (Малышев–Пирогов–Рыбко, 2004) в произвольный момент времени $t > 0$ и

для любого i существует предел по вероятности (заметим, что $n_i(t)$ — случайные величины, тем не менее $c_i(t)$ — уже не случайные величины) $c_i(t) = \text{п.н.} \lim_{M \rightarrow \infty} n_i(t)/M$. Описанный выше приём называется каноническим скейлингом. Тогда приходим к «динамике квазисредних» (терминология В. Вайдлиха):

$$\frac{dc_i}{dt} = \sum_{(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in J} (\beta_i - \alpha_i) K_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}}(\vec{c}) \prod_j c_j^{\alpha_j}. \quad (1)$$

Эти же уравнения можно получить и по-другому, а именно как приближённую динамику средних $\bar{c}_i(t) = E[n_i(t)/M]$. Приближённую в том смысле, что при выводе (1) используется $F(\bar{c}_i(t)) \approx E[F(n_i(t)/M)]$ для «достаточно хороших» функций F (например, полиномов). Это верно в случае пикообразного распределения $n_i(t)$. Пусть существует хотя бы одно положительное решение $\vec{\xi}$ системы (условие динамического равновесия, В.В. Веденяпин (2001), Малышев–Пирогов–Рыбко (2004)):

$$\sum_{\beta: (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in J} K_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} \prod_j \xi_j^{\alpha_j} = \sum_{\beta: (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in J} K_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}} \prod_j \xi_j^{\beta_j} \quad (K_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}}(\vec{c}) \equiv K_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}}). \quad (2)$$

Частным, но часто встречающимся в приложениях, случаем условия (2) является условие детального равновесия: $K_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} \prod_j \xi_j^{\alpha_j} = K_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}} \prod_j \xi_j^{\beta_j}$. Несложно проверить, что $\vec{\xi}$, удовлетворяющее (2), неподвижная точка системы (1). Более того, если существует хотя бы одно положительное решение системы (2), то тогда все неподвижные точки системы (1), удовлетворяют условию (2), также называемому условием унитарности. Покажем, во многом следуя В.В. Веденяпину (2001), в данной случае траектория (1) сходится к неподвижной точке (одной из, какой именно зависит, вообще говоря, от «точки старта»). Для этого, следуя второму методу Ляпунова, введём (минус) энтропию:

$$H = \sum_i c_i \cdot (\ln(c_i/\xi_i) - 1)$$

и покажем, что она является функцией Ляпунова для системы (1). Посчитаем полную производную (минус) энтропии в силу системы (1):

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in J} K_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} \prod_i \xi_i^{\alpha_i} y_i^{\alpha_i} \cdot \ln \prod_i y_i^{\beta_i - \alpha_i},$$

где введено обозначение $y_i = c_i/\xi_i$. Заметим, что

$$\sum_{(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in J} K_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} \prod_i \xi_i^{\alpha_i} y_i^{\alpha_i} = \sum_{(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in J} K_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}} \prod_i \xi_i^{\beta_i} y_i^{\alpha_i} = \sum_{(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in J} K_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} \prod_i \xi_i^{\alpha_i} y_i^{\beta_i}.$$

Первое соотношение следует из условия (2), а второе получается путём перестановки индексов суммирования. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = & - \sum_{(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in J} K_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} \prod_i \xi_i^{\alpha_i} y_i^{\beta_i} \cdot \left(\prod_i y_i^{\alpha_i - \beta_i} \cdot \ln \prod_i y_i^{\alpha_i - \beta_i} - \right. \\ & \left. - \prod_i y_i^{\alpha_i - \beta_i} + 1 \right) \leq 0, \end{aligned}$$

поскольку $u \ln u - u + 1 \geq 0$ при $u > 0$, и равенство достигается в одной точке $u = 1$.

Оказывается (Малышев–Пирогов–Рыбко, 2004, 2008), что условие (2) можно проинтерпретировать, как условие инвариантности пуассоновской меры $\mu(\vec{n}) = \prod_i \lambda_i^{n_i} e^{-\lambda_i}/n_i!$ (где $\lambda_i = \xi_i^* M$, а $\vec{\xi}^*$ — произвольное решение (2)) относительно предложенной стохастической марковской динамики. Эта мера экспоненциально быстро концентрируется с ростом $\sum_i n_i$ в окрестности наиболее вероятного состояния (также удовлетворяющего условию (2)), которое и принимается за положение равновесия макросистемы. Задача поиска наиболее вероятного макросостояния асимптотически эквивалентна задаче максимизации энтропийного функционала $E = -H$ (воспользовались формулой Стирлинга) на множестве, заданном (как правило, линейными) ограничениями — законами сохранения (интегралами движения для (1)).

Работа поддержана грантами РФФИ № 10-07-00620-а, 10-01-00321-а и ФЦП Кадры П1490.

Литература

1. Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / под ред. Гасникова А.В. с приложениями Бланка М.Л., Гасниковой Е.В., Замятина А.А., Малышева В.А., Райгородского А.М. — М.: МФТИ, 2010.

И.Ф. Гималтдинов

ilgiz.gimaltdinov@gmail.com

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Синтез управления в модифицированной модели Рамсея с учетом ограничения ликвидности и потребительского кредитования

Рассмотрим модифицированную модель Рамсея

$$\begin{aligned} & \int_0^T (C(t))^\alpha e^{-\Delta t} dt \rightarrow \max, \\ & \frac{dX}{dt} = Se^{\gamma t} + r_D D - C - r_L L, X = M + D - L, \\ & M(t) \geq \theta C(t), C(t) \geq 0, L(t) \geq 0, D(t) \geq 0, \\ & X(0) = X_0, L(T) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где D — депозиты домашних хозяйств, L — кредиты, r_D и r_L — процентная ставка по депозитам и кредитам соответственно, C — потребление, M — наличные деньги, X — благосостояние домашних хозяйств, $Se^{\gamma t}$ — доходы домашних хозяйств, Δ — коэффициент дисконтирования, θ — коэффициент ограничения ликвидности, $\alpha \in (0,1)$ — коэффициент отвращения к риску. В работе построен синтез управления для задачи (1) и изучена его асимптотика при $T \rightarrow \infty$.

Введем следующие обозначения: $\rho = \frac{S\theta}{\gamma\theta+1}$,

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\Delta\theta + \gamma\theta(1-\alpha) + 1}{\gamma\theta + 1}, \quad g(s) = \frac{(\Delta - \alpha s)\theta}{(1 + s\theta)(1 - \alpha)}, \quad q(x) = \frac{S}{x - \gamma}, \\ b(u, v, s) &= \frac{\gamma\theta + 1}{s\theta + 1} \left[\frac{v - \rho}{u - \rho} \right]^\mu v^{\alpha - 1} + \int_y^x \left(\frac{z - \rho}{u - \rho} \right)^\mu \frac{z^{\alpha - 1} dz}{z - \rho}, \\ f(s, x) &= \frac{1 + s\theta}{1 + \gamma\theta} \int_0^1 \left(p + \frac{1 - p}{x} \rho \right)^{\alpha - 1} p^{\frac{\Delta - \alpha\gamma}{\gamma + 1/\theta}} dp, \quad w(\xi) = q(\xi) - \frac{y}{g(\xi)}, \\ h(y, \tau, \xi) &= (w(\xi) + 1)e^{(\gamma - \xi)\tau} - w(\xi)e^{(\gamma - \frac{\xi - \Delta}{1 - \alpha})\tau}. \end{aligned}$$

Обозначим решения уравнений $f(r_L, x_2) = x_2$, $f(r_D, x_3) = x_3$, $h(x_2, \tau_2, r_L) = x_2$, $h(x_3, \tau_3, r_D) = x_3$, $b(x_4, x_5, r_D) = \frac{1 + \gamma\theta}{1 + r_L\theta} x_4^{\alpha - 1}$, $h(x_4, \tau_4, r_L) = x_4$ как x_1 , τ_1 , x_2 , x_3 , τ_2 , τ_3 , x_4 , τ_4 соответственно, а выражение $\frac{q(r_D)}{g(r_D) + 1}$ — как x_5 . Пусть $r_L > \gamma$, $\Delta > \alpha \min(\gamma, r_D)$, $r_L > r_D$. Тогда синтез управления может быть описан следующим образом: $L(x) = (M(x) - x)_+$, $D(x) = (x - M(x))_+$, $C(x) = M(x)/\theta$. Объем

денег на руках населения $M(x)$ определяется различным способом в зависимости от соотношения параметров:

- Если $r_D < \Delta - (1 - \alpha)/\theta$, $r_L < \Delta + \gamma(1 - \alpha)$, то $M(x) = \max[(x + q(r_L))g(r_L), x]$.
- Если $\Delta - (1 - \alpha)/\theta < r_D < r_L < \Delta + \gamma(1 - \alpha)$, то $M(x) = \max[(x + q(r_L))g(r_L), x]$ при $x \leq x_1$ и $M(x) = x_1 e^{(\gamma - \frac{r_D - \Delta}{1 - \alpha})\tau_1}$ при $x > x_1$. x_1 , τ_1 , определяемые как решения соответствующих уравнений, существуют и положительны.
- Если $\Delta - (1 - \alpha)/\theta < r_D < \Delta + \gamma(1 - \alpha) < r_L$, то $M(x) = x_2 e^{(\gamma - \frac{r_D - \Delta}{1 - \alpha})\tau_2}$ при $x < x_2$, $M(x) = x_3 e^{(\gamma - \frac{r_D - \Delta}{1 - \alpha})\tau_3}$ при $x > x_3$ и $M(x) = x$ в противном случае. x_2 , x_3 , τ_2 , τ_3 , определяемые как решения соответствующих уравнений, существуют и положительны.
- Если $\Delta + \gamma(1 - \alpha) < r_D$, то $M(x) = x_4 e^{(\gamma - \frac{r_D - \Delta}{1 - \alpha})\tau_4}$ при $x < x_4$, $M(x) = (x + q(r_D))g(r_D)$ при $x > x_5$ и $M(x) = x$ в противном случае. x_4 , τ_4 , определяемые как решения соответствующих уравнений, существуют и положительны.
- Если $r_D < \Delta - (1 - \alpha)/\theta < \Delta + \gamma(1 - \alpha) < r_L$, то $M(x) = x_2 e^{(\gamma - \frac{r_D - \Delta}{1 - \alpha})\tau_2}$ при $x < x_2$ и $M(x) = x$ в противном случае. x_2 , τ_2 , определяемые как решения соответствующих уравнений, существуют и положительны.

Построенный синтез управления позволяет проводить сопоставление со статистическими данными, а также прогнозировать распределение средств в среднесрочной и долгосрочной перспективе.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (мероприятие 1.2.1 НК-15П).

Ю.В. Дорн

dorn@pisem.net

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Математическое моделирование эволюционных игр на транспортном графе: Равновесия. Сходимость. Бассейны притяжения.

В работе рассматривается транспортный граф $G(M, R, C(X))$, на котором N ($N \gg 1$) независимых однородных агентов каждый шаг времени выбирают маршрут с целью максимизировать собственную функцию полезности (минимизировать затраты в пути), где M — множество вершин графа, R — множество его ребер, $C(X) = \|C^i(x_i)\|$ — множество функций издержек от потока, заданные на ребрах графа.

В модели предполагается наличие одного истока и одного стока корреспонденции. Также предполагается наличие ровно k маршрутов. Начальное распределение агентов по маршрутам считается случайным, время — дискретным. В каждый момент времени каждый агент независимо от других агентов меняет или не меняет маршрут по следующему правилу: с вероятностью $p_i(X^t) = \frac{x_i^t \exp(-\beta C_i(X^t)/T)}{\sum_{j=1}^k x_j^t \exp(-\beta C_j(X^t)/T)}$ агент в момент времени $t + 1$ воспользуется маршрутом i .

Изначально в работе исследуется транспортный граф, на котором реализуется парадокс Брайеса (1968). Численно проверена сходимость системы к равновесию Нэша–Вардропа (1952), то есть реализована динамика сходимости системы к «худшему» (не оптимальному по Парето) положению равновесия Нэша–Вардропа — реализация парадокса Брайеса.

Исследуются условия для возникновения нескольких положений равновесия Нэша–Вардропа и обратная связь между количеством равновесий и функциями издержек на ребрах графа. Численно исследуется поведение системы при наличии нескольких точек равновесия. Исследуются условия наличия и характер сходимости системы.

Подробно рассматриваются различные концепции равновесия.

При этом важно, что число состояний системы конечно, при этом допускается переход из любого состояния в любое другое за один шаг с не нулевой вероятностью. Это несколько ограничивает использова-

ние в анализе понятия бассейна притяжения. Была сделана попытка ввести более слабое, но достаточно гибкое определение бассейна притяжения, отражающее более полно стохастическую природу введенной динамики.

На основании указанного исследования делаются выводы о возможных методах управления поведением водителей (с целью «скачать» систему в требуемое, одно из нескольких, положение равновесия) при условии, что у нас есть возможность на сравнительно короткое время менять или функции издержек, заданные на графе, или некоторые характеристики водителей.

Литература

1. Гасников А.В., Гасникова Е.В. Математические модели расчета матрицы корреспонденций и распределения потоков // Доклад на конференции НАУКА И ТРАНСПОРТ. — 2010. — URL: <http://wtran.dvo.ru/?q=node/22>
2. Стенбринк П.А. Оптимизация транспортных сетей. — М.: Транспорт, 1981.
3. Hofbauer J., Sigmund K. Evolutionary game dynamics // Bulletin of the American Mathematical Society. — 2003. — V. 40, N. 4. — P. 479–619.
4. Mc Kelvey R.D., Palfrey T. R. Quantal Response Equilibria for Normal Games // Games and Economic Behavior. — 1995. — V.10. — P. 6–38.
5. Mc Kelvey R.D., Palfrey T. R. Quantal Response Equilibria for Extensive Form Games // Experimental Economics. — 1998. — V.1. — P. 9–41.
6. Algorithmic Game Theory / ed. by N. Nisan. — New York: Cambridge University Press, 2007. — 775 с.

М.С. Ишманов

Ishmanov.Mikhail@gmail.com

Московский физико-технический институт
(государственный университет)**Кинетика социального неравенства**

В некотором городе живет N (например, 10 000) пронумерованных жителей. У каждого i -го жителя есть в начальный (нулевой) момент времени целое (неотрицательное) количество рублей $s_i(0)$ (монетками, достоинством в один рубль). Со временем пронумерованные жители (количество которых не изменяется, также как и суммарное количество рублей) случайно разыгрывают свое имущество. Пусть в момент времени $t \geq 0$ r -й житель имеет k рублей, а l -й житель — m рублей. Тогда $p_{k;m}(t)\Delta t + o(\Delta t)$ — есть вероятность того, что жители с номерами r и l ($1 \leq r < l \leq N$) встретятся и попробуют разыграть один рубль по следующему правилу: с вероятностью $1/2$ житель с большим номером отдаёт 1 рубль (если, конечно, он не банкрот) жителю с меньшим номером, и с вероятностью $1/2$ наоборот. Будем считать, что $p_{k;m}(t) \equiv \kappa N^{-1}$. При этом «в среднем» в единицу времени осуществляется $\kappa N/2$ встреч. Т. е., скажем при $\kappa = 1$, в единицу времени каждый житель с вероятностью, большей $1/2$, с кем-то должен встретиться. Приблизительно такую постановку задачи в конце 18-го века предложил известный итальянский экономист Вильфредо Парето, чтобы объяснить социальное неравенство.

Пусть $c_s(t)$ — доля жителей города, имеющих ровно s рублей в момент времени t (заметим, что $c_s(t)$ — случайная величина). Пусть

$$S = \sum_{i=1}^N s_i(0), \quad \bar{s} = \frac{S}{N}.$$

Тогда по эргодической теореме для конечных однородных марковских цепей (см. [1] — [5]):

$$\forall q = 0, \dots, S \exists \lambda_q > 0, T_q = O(N) : \forall t \geq T_q$$

$$P \left(\left| \frac{c_s(t)}{C e^{-s/\bar{s}}} - 1 \right| \leq \frac{\lambda_q}{\sqrt{N}}, s = 0, \dots, q \right) \geq 0,999,$$

где C определяется из условия нормировки: $\sum_{s=0}^S C e^{-s/\bar{s}} = 1$, то есть $C \approx \frac{1}{\bar{s}}$.

Скорость сходимости оценивается сверху исходя из оценок в доказательстве эргодической теоремы для однородных марковских цепей с конечным числом состояний. Для получения более точной оценки необходимо (для простоты формулировок считая время дискретным) асимптотически (по размеру макросистемы) оценить второе по величине модуля собственное значение матрицы переходных вероятностей — инфинитезимальной матрицы, определяющего основание геометрической прогрессии, мажорируемой последовательность норм отклонений текущего состояния от стационарного в различные моменты времени [2] — [5]. Как показывают численные эксперименты оценка $O(N)$ — точная. Так если в городе 10 000 жителей и единица времени — день, то при начальном «социальном равенстве» с вероятностью близкой к единице через 20 — 30 лет (при $\kappa = 1$) установится «социальное неравенство». Заметим, что описанный выше случайный процесс обратим во времени. Однако наблюдается необратимая динамика $c_s(t)$.

Полученные результаты немного уточняют некоторые предложения выступления [6].

Литература

1. *Веденятин В.В.* Кинетическая уравнения Больцмана и Власова. — М.: Физматлит, 2001.
2. *Веретенников А.Ю.* Параметрическое и непараметрическое оценивание для цепей Маркова. — М.: Мехмат, 2000.
3. *Боровков А.А.* Эргодичность и устойчивость случайных процессов. — М.: УРСС, 1999.
4. *Булдинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. — М.: Физматлит; Лаборатория базовых знаний, 2003.
5. *Кельберт М.Я., Суглов Ю.М.* Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 2: Марковские процессы как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. — М.: МЦНМО, 2010.
6. *Гасников А.В., Гасникова Е.В.* Математические модели расчета матрицы корреспонденций и распределения потоков // доклад на конференции «Наука и транспорт». — 2010. — URL: <http://kozlov-traffic-ras.ru/node/30#video7>

В.В. Клочков, Б.А. Панин

vladislavklochkov@yandex.ru, abbatstvo@mail.ru

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Модель зависимости общественной эффективности научной деятельности от принятых стандартов новизны

Ключевым вопросом данной работы является оценка эффективности ужесточения стандартов научной новизны. Для ответа на поставленный вопрос было рассмотрено поведение отдельного исследователя, принимающего решение о начале научной работы, при этом особое внимание уделялось влиянию принятых стандартов научной новизны. А затем была рассмотрена задача оптимизации институтов научного сообщества с точки зрения их общественной эффективности.

Управляющими переменными в данной работе являются принятые в научном обществе стандарты новизны, которые будем характеризовать величинами k_{\min} и N_{\max} (минимальное количество квалифицирующих признаков, которыми должна отличаться научная работа от предшествующих в данной области, чтобы считаться оригинальной, и соответствующее максимально возможное количество оригинальных работ; чем больше величина k_{\min} , тем меньше N_{\max}) и C_{doubl} (величина «штрафа» за дублирование уже имеющейся работы).

Поведение исследователя будем рассматривать как рациональный выбор игрока, максимизирующего разницу ожидаемых выгоды и затрат. В зависимости от затрат на проверку одной из уже имеющихся работ и их текущего количества (c_{check} и N), ожидаемых затрат на исследование и выигрыша от него ($\bar{c}_{R\&D}$ и \bar{R}), k_{\min} , N_{\max} и C_{doubl} этот игрок может принять одно из следующих решений: не начинать исследования (а); провести анализ всех уже выполненных работ и получить гарантированно новый результат (б); выбрать направление поиска случайным образом, и в результате или получить оригинальный результат, или «изобрести велосипед» и понести соответствующие потери (с). Сопоставляя разницу ожидаемых выгоды и затрат каждой стратегии, можно показать, что до достижения некоторого максимального числа предшествующих работ (N_{observ}) автору целе-

сообразно ознакомиться с ними (б), при его превышении — начинать свое исследование наудачу (с), а свыше некоторого порогового значения (N_{sat}), вообще отказаться от исследования (а).

Целевая функция общества в сфере управления наукой (U) представляет собой разность общественной ценности результатов проведенных исследований ($\bar{V}_{\max}(N_{sat})$) и затрат общества на них (на сами исследования — $\bar{Z}_{R\&D} \cdot (N_{observ} + \sum_{N=N_{observ}+1}^{N=N_{sat}} \frac{N_{\max}}{N_{\max}-N})$ и на проверку «патентной чистоты» — $c_{check} \cdot \frac{N_{observ} \cdot (N_{observ}-1)}{2}$). В общем случае расчет по полученной модели является чрезвычайно трудоемким. Однако для получения качественных выводов была рассмотрена иллюстративная модель, на основе которой была изучена зависимость общественной эффективности от величины штрафа (C_{doubl}) для различных вариантов требований к оригинальности (k_{\min}). Анализ полученных результатов показывает, что в определенных, весьма реалистичных условиях с общественной точки зрения целесообразно ослабление жесткости требований к новизне исследовательских работ и наказания «изобретателей велосипеда».

УДК 519.254

И.А. Кондраков, А.А. Шананин

ivankondrakov@mail.ru, alexshan@yandex.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Исследование сегментации мирового фондового рынка с помощью обобщенного непараметрического метода

В данной работе обобщенный непараметрический метод (ОНМ) применен для анализа сегментации мирового фондового рынка. Исходным материалом для анализа является дневная торговая статистика биржевых торгов $\{P^t, X^t\}$ (источник — информационное агентство «Блумберг») с 21 крупнейшей мировой биржи. За цену P_i^t берется цена закрытия дня i -й акции. За X_i^t принимается объем торгов i -й акции за день в штуках.

В [1] вводится показатель нерациональности ω , с помощью которого можно оценивать отклонение от рационального поведения. Его мы использовали для оценки взаимосвязи различных групп акций.

Объединение акций с различных мировых бирж в одну торговую статистику дает качественное улучшение рационализированности. Ниже приведены средние значения показателя нерациональности ω , рассчитанного с помощью метода скользящего окна продолжительностью в один месяц, для некоторых бирж и всего мирового фондового рынка, упорядоченные по возрастанию (2004–2010 гг.): Мир — 1.0060, США — 1.0063, Канада — 1.0107, Англия — 1.0135, Япония — 1.0147. Как видно, значение для мирового фондового рынка является наименьшим. Это говорит о том, что репрезентативный инвестор распределяет свои активы среди нескольких бирж и рассмотрение только одной биржи дает неполную картину. Рассмотрение мирового фондового рынка в рамках одной торговой статистики дает лучшее понимание его поведения.

Также была исследована взаимосвязь акций бирж, находящихся в развивающихся странах, объединенных аббревиатурой BRIC (от английских названий Brazil — Бразилия, Russia — Россия, India — Индия, China — Китай). ОНМ позволяет оценить, насколько сильна взаимосвязь между рынками этих стран. Значения показателя нерациональности для 2009–2010 годов приведены ниже: Бразилия+Россия — 1.0194, Бразилия+Индия+Россия — 1.023, Бразилия — 1.024, Китай — 1.032, Россия — 1.033, BRIC — 1.045, Индия — 1.059. Расчеты указывают на близость российского, бразильского и, в меньшей степени, индийского рынков.

Отдельно был изучен вопрос взаимодействия рынков Азии, где сейчас сосредоточено много быстро развивающихся в финансовом плане стран, таких как Тайвань, Южная Корея, Гонконг («азиатские тигры»). Расчеты показателя нерациональности для 2009–2010 гг. приведены ниже: Гонконг+Россия — 1.0036, Гонконг — 1.005, Корея+Тайвань+Гонконг+Россия — 1.0086, Корея — 1.011, Япония — 1.015, Тайвань — 1.031, Россия — 1.033, Индия — 1.059. Большую взаимосвязь демонстрируют акции южнокорейского, тайваньского и гонконгского рынков вместе с акциями России.

Литература

1. *Поспелова Л.Я., Шананин А.А.* Показатели нерациональности потребительского поведения и обобщенный непараметрический метод // Матем. моделирование. — 1998. — № 4. — С. 105–116.
2. *Шананин А.А.* Проблема интегрируемости и обобщенный непараметрический метод анализа потребительского спроса // Труды МФТИ. — 2009. — Т. 1, № 4. — С. 84–98.

УДК 519.863

Т.А. Нагапетян

nagapetyan@gmail.com

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

О поведении монополиста, производящего конкурирующие товары длительного пользования, при условии запрета вторичного рынка

В современном рынке типичной является ситуация, когда монополист производит товары, конкурирующие друг с другом. При этом продукты объединены в линейки товаров, как, например, на рынке мобильных устройств, и их в рамках этой линейки можно разбить на старшие и младшие модели. В работе рассмотрен случай двух товаров, срок службы которых заметно превышает срок замены линейки товаров. Нередки случаи, когда производителю выгодно выводить модели товаров не одновременно, а последовательно. Например, компания Apple выпустила старшую модель смартфона iPhone 2G на семь месяцев позже младшей. Та же компания прекратила выпуск старших версий линейки 3G, заменив их линейкой 4G и сохранив при этом младшую модель линейки 3G. Таким образом, задача выявления последовательности и объемов продаж конкурирующих товаров для достижения максимальной прибыли становится весьма существенной.

При естественных предположениях, мы приходим к следующей модели:

$$\begin{cases} N(T) \rightarrow \max \\ \dot{N} = \left\langle P(X) - c, \frac{dq}{dt} \right\rangle + rN \\ \dot{X} = \frac{dq}{dt} - \alpha X = \hat{\mu} - \alpha X, \\ q = \{\mu(t), u_r\}, \quad \mu(t), u_r \in R_+^2 \\ N(0) = X_1(0) = X_2(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где $X = (X_1, X_2)$ — количество товара на рынке, $P(X) = (P_1(X_1, X_2), P_2(X_1, X_2))$ — обратная функция спроса, для которых $\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(X) < 0, \forall X, i, j = 1, 2$. $N(t)$ — прибыль, полученная производителем, r — банковская процентная ставка, $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$ — коэффициент выбытия товара, при условии что выбытие описывается экспоненциальной функцией выбытия, c — издержки по выпуску единицы продукции. $\mu(t)$ — векторная мера, а u_r — семейство присоединенных вектор-функций.

1. Для данной задачи были получены явные выражения для оптимального в случае отсутствия и присутствия выбытия.
2. В случае наличия выбытия было доказана теорема о существовании магистрали в сильнейшей форме.
3. Были введены понятия старших и младших моделей в линейке и обоснован экономический смысл способа разделения. Было показано, что вывод новой линейки товаров необходимо начинать с младшей модели и при этом сам вывод происходит в быстром времени и стабилизируется в случае наличия выбытия на магистрали.

Литература

1. Арутюнов А.В., Карамзин Д.Ю. Необходимые условия минимума в задачах импульсного оптимального управления. — М.: 2008
2. Флерова А.Ю. Исследование влияния вторичного рынка на поведение монополиста, производящего товары длительного пользования. Сообщения по прикладной математике. — М.: ВЦ РАН, 2006.
3. Дыкта В. А, Самсонок О.Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. — М.: Физматлит, 2000.

УДК 519.2

Н.В. Степанова

natalia0410@rambler.ru

Томский государственный университет
(Национальный исследовательский университет)

Математическая модель и оптимизация управления розничной продажей скоропортящегося товара

Пусть имеется некоторая скоропортящаяся продукция (например, молоко, сметана, свежая рыба и т.д.), которая должна быть продана в течение торговой сессии (например, дня). Непроданный товар снимается с реализации и подлежит утилизации. Продавец покупает (или получает от поставщика) партию товара объёма Q по оптовой цене d_{opt} (это может быть себестоимость продукции) и продаёт её по розничной цене c . Ставится задача нахождения значений Q и c , при которых средняя прибыль будет максимальной. Эта задача уже рассматривалась в работах Е.В. Новицкой [1, 2]. Полученные ниже результаты обобщают те результаты, которые получены в указанных выше работах. Будем считать, что покупатели покупают товар независимо друг от друга и объём покупки ξ есть случайная величина с $M\{\xi\} = a_1$ и $M\{\xi^2\} = a_2$. Ниже рассматривается управление ценой при продаже товара, часть которого может испортиться в течение торговой сессии. Предположим, что продукция портится с постоянной скоростью μ , то есть если в какой-то момент времени t у нас есть $Q(t)$ продукции, то за интервал времени $[t, t + \Delta t]$ её испортится $\mu Q(t)\Delta t + o(\Delta t)$. Пусть далее цена продажи постоянна и равна c . Тогда поток покупок будет пуассоновским потоком с интенсивностью $\lambda(c)$, так что за время Δt придёт в среднем $\lambda(c)\Delta t$ покупателей, которые купят в среднем количество товара, равное $a_1\lambda(c)\Delta t + o(\Delta t)$. Поэтому мы имеем $Q(t) - Q(t + \Delta t) = \mu Q(t)\Delta t + a_1\lambda(c)\Delta t + o(\Delta t)$, откуда, после деления на Δt и предельного перехода $\Delta t \rightarrow 0$ получается следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\mu Q(t) - a_1\lambda(c), \quad (1)$$

которое надо решить при начальном условии $Q(0) = Q_0$.

Решая поставленную задачу, можно легко получить, что оптимальное значение Q_0 равно

$$Q_0 = \left[c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) \frac{\mu T}{e^{\mu T} - 1} - d \right] \frac{\lambda_1 a_1 (e^{\mu T} - 1)^2}{2\mu^2 T c_0}, \quad (2)$$

и при этом максимальное значение прибыли будет равно

$$P_{\max} = \left[c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) \frac{\mu T}{e^{\mu T} - 1} - d \right]^2 \frac{\lambda_1 a_1 (e^{\mu T} - 1)^2}{4\mu^2 T c_0}. \quad (3)$$

Литература

1. *Новицкая Е.В.* Оптимизация розничной продажи скоропортящейся продукции / Е.В. Новицкая, А.Ф. Терпугов. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. — 89 с.

2. *Китаева А.В.* Оптимизация продажи скоропортящейся продукции / А.В. Китаева, Е.В. Новицкая, А.Ф. Терпугов. Обработка данных и управление в сложных системах. Вып. 6. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. — С. 95–105.

Секция экспериментальной экономики

УДК 336.719, 519.254

*Е.А. Богатырева*¹, *С.Г. Афонина*¹, *В.А. Лапшин*^{2,1},
*А.В. Косьяненко*¹

ekaterina.bogatyreva@gmail.com, svetlana.g.afonina@gmail.com,
vlapshin@hse.ru, akosyanenko@hse.ru

¹ Государственный университет — Высшая школа экономики

² Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Сопоставление национальных кредитных рейтингов российских банков

Кредитные рейтинги, присваиваемые рейтинговыми агентствами, являются важным источником информации о кредитном риске контрагентов. Использование дополнительного источника информации позволяет улучшить предсказательную силу модели [1], однако при этом необходимо учитывать природу и точность таких оценок.

Целью работы было исследовать возможность использования рейтингов, присваиваемых банкам четырьмя российскими рейтинговыми агентствами (Рус-Рейтинг, Эксперт-РА, НРА и АК&М) в качестве одного из компонентов моделей оценки кредитного риска.

Были построены матрицы переходных вероятностей, содержащие записи обо всех изменениях рейтингов за период с января 2000 г. по май 2010 г. (подробнее см. [2]). Информация использовалась для получения оценок вероятности дефолта и вероятности изменения кредитного рейтинга банка данного уровня надёжности. В доступной выборке практически отсутствуют банки, допустившие дефолт за время наблюдения, поэтому частотная оценка вероятности дефолта невозможна. Проблема носит общий характер: даже имея выборку на протяжении 30 лет, исследователи отмечают проблему недостаточности статистики и для крупных международных рейтингов [3], утверждая, что по наблюдаемой частоте дефолтов высокие градации рейтингов

статистически неразличимы. Проблема решается путем построения доверительных интервалов для таких вероятностей, в том числе байесовскими методами.

В целях оценки качества кредитных рейтингов была также использована условная энтропия, которая представляет собой оценку сверху для ожидаемого количества информации, содержащейся в каждом следующем наблюдении значений рейтинга.

Для исследования динамических свойств рейтингов было проведено сравнение их с вероятностями дефолта, рассчитанными по эконометрической модели на основе балансовой информации. Для проверки гипотезы о том, что две выборки вероятностей дефолтов, соответствующие различным категориям рейтингов, являются выборками из одного и того же распределения, использовался непараметрический тест Колмогорова–Смирнова с тестовой статистикой, основанной на сравнении эмпирических функций распределения: $\max_x |F_1(x) - F_2(x)|$.

Литература

1. *Luffler G.* The Complementary Nature of Ratings and Market-Based Measures of Default Risk // *Journal of Fixed Income.* — 2007. — V. 17. — P. 38–47.
2. *Смирнов С.Н., Афонина С.Г., Богатырева Е.А., Косьяненко А.В., Лапшин В.А., Науменко В.В.* Сравнение качества национальных рейтингов российских банков // *Банковское дело.* — 2010. — № 9. — С. 50–55.
3. *Lawrenz J.* Assessing the estimation uncertainty of default probabilities // *Kredit und Kapital.* — 2008. — V. 41, N. 2. — P. 217–238.

УДК 519.837.3

Е.В. Гасникова

egasnikova@ya.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

О стохастической марковской динамике наилучших ответов, приводящей к равновесию Нэша–Вардропа

Ориентированный граф $\Gamma = (V, E)$ представляет собой транспортную сеть города (V — узлы сети (вершины), $E \subset V \times V$ — дуги сети (рёбра графа)). Пусть $W = \{w = (i, j) : i, j \in V\}$ — множество пар источник — сток; $p = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ — путь из v_1 в v_m , если $(v_k, v_{k+1}) \in E, k = 1, \dots, m - 1$; P_w — множество путей, отвечающих корреспонденции $w \in W$; $P = \bigcup_{w \in W} P_w$ — совокупность всех путей в сети Γ ; x_p — величина потока по пути $p, x = \{x_p : p \in P\}$; $G_p(x)$ — удельные затраты на проезд по пути $p, G(x) = \{G_p(x) : p \in P\}$; y_e — величина потока по дуге e :

$$y_e = \sum_{p \in P} x_p \delta_{pe},$$

где

$$\delta_{pe} = \begin{cases} 1, & e \in p, \\ 0, & e \notin p, \end{cases}$$

$\tau_e(y_e)$ — удельные затраты на проезд по дуге e (возрастающие, выпуклые, гладкие функции), естественно считать, что $G_p(x) = \sum_{e \in E} \tau_e(y_e) \delta_{pe}$. Заметим, что в приложениях часто требуется учитывать и затраты на прохождения вершин графа (в свою очередь эти затраты могут зависеть, вообще говоря, от величин всех потоков, проходящих через каждую рассматриваемую вершину). Пусть также известны потоки корреспонденций $d_w, w \in W$. Тогда вектор x , характеризующий распределение потоков, должен лежать в допустимом множестве: $X = \{x \geq 0 : \sum_{p \in P_w} x_p = d_w, w \in W\}$. Это множество может иметь и другой вид, если дополнительно учитывать, например, конечность пропускных способностей рёбер (ограничения сверху на y_e).

Рассмотрим игру, в которой каждому элементу $w \in W$ соответствует свой, достаточно большой ($d_w \gg 1$), набор однотипных «игроков» («сидящих на корреспонденции w »). Множеством чистых стратегий каждого такого игрока является P_w , а выигрыш (потери со знаком минус) определяются формулой $-G_p(x)$ (игрок «выбирает» путь следования $p \in P_w$, при этом он пренебрегает тем, что от его выбора также «немного» зависят $|P_w|$ компонент вектора x и, стало быть, сам выигрыш $-G_p(x)$). Тогда, считая отображение $G(x)$ непрерывным и строго монотонным (этого достаточно), можно показать, что отыскание равновесия Нэша $x^* \in X$ (макро описание равновесия) равносильно решению задачи нелинейной комплементарности (принцип Дж. Вардропа (1952)), что равносильно решению вариационного неравенства:

$$\forall w \in W, p \in P_w \rightarrow x_p^* \cdot (G_p(x^*) - \min_{q \in P_w} G_q(x^*)) = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad \forall x \in X \rightarrow \langle G(x^*), (x - x^*) \rangle \geq 0.$$

Вариационное неравенство можно переписать, как проекционное уравнение:

$$x^* = \Pi_X(x^* - \lambda G(x^*)), \quad \lambda > 0,$$

где $\Pi_X(x^* - \lambda G(x^*))$ — такая «точка» множества X , которая доставляет минимум функционалу расстояния от точки $x \in X$ до фиксированной точки $x^* - \lambda G(x^*)$. Выписанное проекционное уравнение можно далее численно решать, например, с помощью метода простой итерации $x^{n+1} = \Pi_X(x^n - \lambda G(x^n))$.

В данной работе предлагается возможная динамика в этой игре, «приводящая» к одному из равновесий Нэша–Вардропа (в зависимости от точки старта). Свой путь на $(n+1)$ -м шаге игрок, «сидящий на корреспонденции w », выбирает согласно смешанной стратегии: с вероятностью $\sim \gamma_n \cdot (x_p(n) + 1) \exp(-G_p(x(n))/T_n)$ ($0 < \gamma_n \leq 1$, $w \in W$), в независимости от всех остальных, выбрать путь $p \in P_w$, а с вероятностью $1 - \gamma_n$ действовать согласно стратегии, использованной на предыдущем шаге.

Литература

1. Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / под ред. Гасникова А.В. с приложениями Бланка М.Л., Гасниковой Е.В., Замятина А.А., Малышева В.А., Райгородского А.М. — М.: МФТИ, 2010.

УДК 519.86, 519.83

А.А. Голубцов

aleksey.golubtsov@gmail.com

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Исследование стохастической динамики двойного аукциона при заданной функции ответа

В работе изучается динамика стохастического процесса для двойного аукциона SB. Такой итерационный процесс вводится для анализа лабораторных экспериментов с участием людей. В лабораторных экспериментах и заявки, и приватные параметры (выкупная стоимость — для покупателя, затраты — для продавца) формально являются непрерывными величинами. Формально — поскольку люди склонны использовать целые числа.

В работе предлагается заменить исходный аукцион на аукцион с дискретными заявками и дискретными значениями приватных параметров. При этом количества значений являются параметрами, от которых зависит результат сходимости. Стохастический процесс выглядит следующим образом: зная значение своего приватного параметра, продавец и покупатель «отвечают» на действия друг друга в предыдущем периоде. Таким образом, действие агента в текущем периоде зависит от своего приватного параметра и от действия, которое совершил другой агент в предыдущем периоде. Действие является случайной величиной, а вероятность выбора того или иного действия зависит от выигрыша, который этому действию соответствует.

Конечная цель — научиться прогнозировать результаты лабораторных экспериментов. Поэтому целесообразность использования тех или иных параметров в стохастическом процессе, в том числе функций вероятности действия, анализируется с точки зрения соответствия экспериментальным данным.

В работе рассмотрены различные функции зависимости вероятности от выигрыша. В сравнительной таблице показано, как меняются результат и характер сходимости для разных функций. Показано, что прямо пропорциональная функция дает относительно качественные оценки и при этом является наиболее удобной для аналитического исследования.

Приводится формула и доказывается соответствующая теорема, с помощью которых можно привести исходный процесс к эквивалентному более простому марковскому процессу с меньшим количеством состояний. Это позволяет получить аналитические результаты для исходных матриц перехода больших размерностей.

Для тех случаев, когда результаты невозможно получить аналитически, проводились численные эксперименты. Для марковского процесса на основе теоремы эргодичности получены оценки скорости сходимости, что позволяет в свою очередь дать оценки точности и необходимого количества итераций для численных экспериментов.

Одна из функций, которая исследовалась, — это функция квантильного ответа, когда вероятность действия пропорциональна параметрической экспоненциальной функции от выигрыша. Чем больше значение параметра, тем с большей вероятностью выбирается действие с большим выигрышем. Для такой функции численно были найдены предельные вероятности в марковском процессе. При больших значениях параметра на графике предельных вероятностей наблюдаются два ярко выраженных локальных максимума.

В работе показано, что для любой функции вероятности результат практически не зависит от количества значений приватного параметра, но сильно зависит от количества значений возможных действий игроков.

В заключительной части работы приводится сравнение теоретических и экспериментальных данных. Предлагается сравнивать следующие функции. Для результатов лабораторных экспериментов — это усредненные стратегии по всем участникам. А вот для итерационного процесса — модальное среднее (для каждого значения приватного параметра выбираем действие с наибольшей предельной вероятностью). Именно такой вариант дает наибольшую точность прогноза средней стратегии людей.

Для исследованной серии из 5-ти экспериментов при условии правильно подобранных параметров (одинаковых для всех экспериментов) этот подход позволяет сделать прогноз с точностью до 20%.

В заключение стоит отметить, что такой подход, к сожалению, не позволяет дать прогноз действий какого-то конкретного участника, а оценивает лишь действие группы людей в целом. Также стоит отметить, что количество исследованных экспериментов пока недостаточно, и планируется обрабатывать новые данные по мере их поступления.

УДК 519.8

В.М. Горбачук, И.А. Русанов, А.А. Морозов

GorbachukVasy1@netscape.net, morozov4work@gmail.com79267112927

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАНУ

О соотношении прибылей в дуополии

Пусть однородный продукт выпускают только две фирмы. Прибыль каждой фирмы равняется разности ее дохода и общих расходов. В свою очередь доход фирмы равен произведению рыночной цены и ее выпуска. Рыночная цена уменьшается с увеличением суммы выпусков фирм. Общие расходы фирмы равны сумме ее фиксированных и переменных затрат. Переменные затраты фирм увеличиваются, вообще говоря, с разным темпом при возрастании ее выпуска.

Каждая фирма, стараясь максимизировать свою прибыль, выбирает значение своего выпуска. При этом фирма реагирует на выпуск другой фирмы, считая, что: 1) обе фирмы выбирают значения своих выпусков одновременно (и конкурируют по Курно); 2) другая фирма выбирает значение своего выпуска позже (и является последователем по Штакельбергу); 3) другая фирма выбирает значение своего выпуска раньше (и является лидером по Штакельбергу) [1]. В динамике каждая фирма использует наблюдения для проверки своих предположений 1)–3) и поэтому, вообще говоря, меняет свою реакцию.

Поскольку затраты фирм увеличиваются с разным темпом при возрастании выпуска (фирмы имеют разную себестоимость производства продукции), а реакция фирм изменяется, то поведение прибылей фирм различно.

В предположении 1) фирма, имеющая меньшую себестоимость производства, получает большую прибыль.

В предположениях 2) и 3), если лидер имеет меньшую себестоимость производства, то получает большую прибыль. Если фирма считает себя последователем и имеет меньшую себестоимость производства, то может изменить предположение 2) на предположение 1) или 3). Таким образом, получаем циклические переходы [2].

Литература

1. Горбачук В.М. Методи індустріальної організації. Кейси та вправи: Економіка та організація виробництва. Економічна кібернетика. Економіка підприємства. — К.: А.С.К., 2010. — 224 с.
2. Olygopoly dynamics: models and tools / ed. by T. Puu, I. Sushko. — Springer-Verlag, 2002. — 313 p.

УДК 519.865, УДК 330.16

М.А. Двуреченская, О.Р. Меньшикова, А.Н. Чабан

bukokk@gmail.com, chaban@mail.mipt.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

О взаимосвязи психологических типов и показателей стабิโลграфии

В Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН ведутся наблюдения за поведением людей в разнообразных социально-экономических ситуациях на фоне измерения их психологических и физиологических показателей. Психологические характеристики измерялись с помощью различных психологических тестов [1], а физиологические — на стабิโลграфической платформе «Стабилан-01», разработанной в ЗАО ОКБ «Ритм», г. Таганрог [2]. Стабิโลграфия — это метод количественного пространственно-временного анализа поддержания человеком равновесия. Специальная компьютерная программа StabMed 2.0 рассчитывает различные стабิโลграфические показатели, оценивающие качество функции равновесия человека, которое является интегральной характеристикой, поскольку на него накладывает отпечаток функционирование всех систем организма.

Для исследования качества функции равновесия были выбраны следующие тесты: «Мишень», тест Ромберга, «Ступенчатое воздействие», «Латеральная асимметрия мозга».

Тест «Мишень» проводится со зрительной биологической обратной связью при большой чувствительности стабילוанализатора. Испытуемый должен отклонением тела сохранять положение равнове-

сия таким образом, чтобы удерживать маркер, отображающий положение центра давления на стабילוплатформу, в центре мишени. Результат оценивается в очках, как в стрельбе: за один процент времени пребывания в зоне 1 дается 1 балл, в зоне 2 — 0.9, ..., в зоне 10 — 0.1 балла.

Тест Ромберга состоит из двух проб — с открытыми и закрытыми глазами. Коэффициент Ромберга, который оценивает отношение показателей с закрытыми глазами к показателям с открытыми глазами, зависит от психологического типа участника и анализировался в работе [2].

Тест «Ступенчатое воздействие» является психологической методикой, позволяющей оценить реакцию человека на ступенчатое воздействие. По виду получаемого переходного процесса можно судить о предполагаемой реакции человека в экстремальных условиях. При выполнении теста человек стоит на стабילוграфической платформе, маркер на экране компьютера отображает положение его центра давления. Небольшими отклонениями тела нужно сохранять равновесие таким образом, чтобы маркер находился в центре неподвижной мишени. Через некоторое время мишень довольно сильно отклоняется в некотором направлении, стоит на новом месте, а потом возвращается назад. Испытуемый должен быстро скомпенсировать эти отклонения мишени, его цель состоит в том, чтобы маркер был внутри мишени независимо от того, где она находится. Оказывается, что люди решают эту задачу по-разному. Выделено шесть типичных реакций поведения в этой ситуации и проведено сопоставление этих классов с психологическим типом испытуемых.

Исследование латеральной асимметрии мозга позволяет определить ведущее полушарие мозга человека. Идея этой методики состоит в поочередном предъявлении испытуемому двух задач. С первой лучше справляются правополушарные люди, со второй — левополушарные. Первая задача состоит в удержании маркера в центре мишени, причем испытуемый видит непрерывное перемещение маркера на экране. Во второй задаче человек не видит маркера. По периферии зоны, в которой нужно удерживать маркер, расположено 4 зоны, которые загораются, если туда попал маркер, что сигнализирует о необходимости вернуть его внутрь зоны. Для каждой из проб рассчитывается интегральная ошибка слежения, а на основании этих ошибок делается вывод о преобладании одного из полушарий. Полученные характеристики сопоставляются с психологическими харак-

теристиками участников, а также с другими тестами, выявляющими ведущее полушарие мозга.

Литература

1. *Меньшиков И.С.* Анализ функционального состояния участников лабораторных рынков // Психология: журнал высшей школы экономики. — 2009. — Т. 6, № 2. — С. 125–152.
2. *Лукьянов В.И., Максакова О.А., Меньшиков И.С., Меньшикова О.Р., Чабан А.Н.* Функциональное состояние и эффективность участников лабораторных рынков // Изв. РАН. ТиСУ. — 2007. — № 6. — С. 2010–219.

УДК 519.865, УДК 330.16

В.С. Здановская, О.Р. Меньшикова

vik-zdanovskaya@yandex.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Анализ динамической игры с несовершенной информацией NET-COOP для двух информационных структур

Прогноз поведения экономических агентов в той или иной экономической ситуации является важной практической задачей, для решения которой в зависимости от её постановки в математической теории игр рассматриваются различные классы динамических игр: динамические игры с полной и совершенной информацией; динамические игры с полной, но несовершенной информацией и динамические игры с неполной информацией. Очевидно, что в зависимости от несовершенства или неполноты информации в экономической ситуации, то есть её информационной структуры, могут меняться как равновесия в игре, её моделирующей, так и поведение в ней самих экономических агентов. Как связаны эти изменения с изменениями информационной структурой игры? Существуют ли различия в реакции игроков на эти изменения и связаны ли они с их внутренними характеристиками (такими, как психологический тип личности)?

Впервые исследования, касающиеся темы данной работы, были проведены в 2008 году [1]. В 2009–2010 учебном году на базе Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН были проведены две серии экспериментов динамической игры с несовершенной информацией NET-COOP («сетевой кооперации») с двумя различными информационными структурами, которые являются модификациями экспериментов, проведённых в [1]. В работе [2] исследованы некоторые гипотезы относительно поведения игроков в модифицированной игре и рассмотрен вопрос кооперации игроков.

- В данной работе найдены многочисленные равновесия этой игры как в чистых, так и в смешанных стратегиях;
- экспериментально установлена предпочтительность игроков в выборе тех или иных равновесий;
- установлена связь между индивидуальным поведением игрока и его психологическим типом, составленным по результатам тестирования по трем психологическим тестам: MBTI, Эннеграмма и Big Five на основе положений из [3].

Каждый участник в двух играх мог оказаться в одной из пяти ролей. Мы подсчитали средний выигрыш участников в каждой роли, а затем применили к полученным векторам метод иерархической кластеризации [3]. Выделилось четыре поведенческие кластера, которые практически полностью совпали с психологическими кластерами на карте главных компонент трех указанных психологических тестов.

Литература

1. *Choi S., Gale D., Kariv S., Palfrey T.* Network Architecture, Salience and Coordination. Working Papers 1291, California Institute of Technology, Division of the Humanities and Social Sciences. — 2008. — 37 p.
2. *Суворова А.Л.* Сетевая архитектура и кооперация игроков в динамических играх с несовершенной информацией: выпускная квалификационная работа бакалавра. — М.: МФТИ, 2010.
3. *Двуреченская М.А., Меньшикова О.Р.* Об иерархической кластеризации психологических и поведенческих характеристик участников сетевого двойного аукциона с закрытыми ставками // Сборник научных трудов МФТИ «Информационные технологии: модели и методы». — 2010. — С. 93–104.

Е.Л. Кудрявцев

kegoru@mail.ru

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Анализ модели «Явка на выборы» на основе L-равновесия

В работе [1] мы описали игру «Явка на выборы» с двумя группами выборщиков (команды А и В). Игрокам предлагается выбор: получить бонус и не участвовать в выборах или проголосовать, добавив одно очко своей команде, отказавшись от бонуса. P_i^A, P_i^B – экспериментальные явки игроков за обе команды. Они подсчитываются делением количества раз, когда игроки отказывались от бонуса на количество раз, когда у них был такой выбор (i – номер эксперимента). Зависимость P_i^A, P_i^B от параметров игры (размера бонуса, количества игроков) можно качественно описать с помощью \hat{P}_i^A, \hat{P}_i^B – теоретических явок на выборы в равновесии Байеса–Нэша (РБН). Значительные различия \hat{P}_i^A, \hat{P}_i^B и P_i^A, P_i^B наблюдаются в тех экспериментах, в которых $\hat{P}_i^A < 0,3, \hat{P}_i^B < 0,3$. В этих экспериментах P_i^A, P_i^B значительно выше \hat{P}_i^A, \hat{P}_i^B . Такой «эффект завышения» был обнаружен как в экспериментах в Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН, так и в Лаборатории социально-экономических экспериментальных исследований Калифорнийского технологического университета, США [2].

В работе [3] профессором Палфрей и его коллегами было предложено использовать для анализа модели квантильное логистическое равновесие (QRE), которое зависит от параметра λ . При определённом значении λ , QRE даёт явки $\bar{P}_i^A(\lambda), \bar{P}_i^B(\lambda)$, которые в большинстве проведённых экспериментов находились между P_i^A, P_i^B и \hat{P}_i^A, \hat{P}_i^B , что трактуется в [3] таким образом, что QRE улучшает оценки РБН.

Нами было предложено анализировать агрегированные стратегии игроков $P_i^A(x), P_i^B(x)$ (экспериментальная явка на выборы в зависимости от бонуса), приближая их логистическими функциями вида $f(x) = 1/(1 + e^{\lambda(x-a)})$ (x – бонус, $f(x)$ – вероятность явиться на выборы, a, λ – параметры, которые находятся методом наибольшего правдоподобия). Полученные функции $f_i^A(x), f_i^B(x)$ очень близки к $P_i^A(x), P_i^B(x)$. Тогда $p_i^A = \int f_i^A(x) dx, p_i^B = \int f_i^B(x) dx$ есть оцен-

ка явок на выборы. Так как в QRE используются функции того же вида, мы сравнили функциональные зависимости явки от бонусов в QRE $\bar{P}_i^A(\lambda, x), \bar{P}_i^B(\lambda, x)$ с $f_i^A(x), f_i^B(x)$ по параметрам a, λ . В QRE завышенная явка относительно РБН была связана с занижением λ , но, согласно $f_i^A(x), f_i^B(x)$, «эффект завышения» был связан с завышением параметра a .

Нами было использовано L -равновесие. Оно определено в классе смешанных стратегий вида $f(x)$. В этом классе не существует РБН, поэтому равновесие понимается как ε -равновесие Байеса–Нэша – профиль стратегий, в котором у игрока нет возможности улучшить свой ожидаемый выигрыш больше, чем на $\varepsilon = L$, изменяя свою стратегию при неизменных чужих. Согласно L -равновесию использование $f_i^A(x), f_i^B(x)$ даёт игрокам ожидаемый выигрыш, который можно улучшить в экспериментах на величину не более 2.7% и только в одном эксперименте на 4.5%. $f_i^A(x), f_i^B(x)$ в экспериментах с эффектом завышения были столь же эффективны, как и в экспериментах без него, поэтому, фиксируя уровень эффективности (условие $L < \text{const}$), мы получаем множество стратегий $(f^A(x), f^B(x))$, в котором содержатся $f_i^A(x), f_i^B(x)$.

Итак, использование логистических приближений позволяет улучшить оценку явки на выборы. Несмотря на то, что QRE даёт верную поправку к явкам, оно даёт неверное представление об агрегированных стратегиях игроков. Использование L -равновесия позволяет получить оценку агрегированных стратегий, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Литература

1. Кудрявцев Е.Л. Игровая модель явки на выборы: теория и эксперимент // Труды 52-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». — 2009. — С. 84–86.
2. Levine D.K., Palfrey T. R., The paradox of voter participation: A laboratory study // American Political Science Review — 2007. — V. 101. — P. 143–58.
3. Mc Kelvey R.D., Palfrey T.R. Quantal Response Equilibria for Normal Form Games // Games and economic behavior. — 1995. — N. 10. — P. 6–38.

УДК 519.86

К.В. Макаров

k.makarof@gmail.com

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Поведение людей и роботов в двойном аукционе с неполной информацией

В работе [1] рассматривалась задача, которая описывает ситуацию, когда на рынке есть несколько инсайдеров. Эта задача была похожа на рассмотренную Крепс и Доманским [2], но в ней каждый игрок имеет приватную информацию. При этом введены некоторые упрощения по сравнению с игрой RE0 из [3], где заявки выставляются многократно и в произвольные моменты времени.

Предполагалось, что игроки ведут себя рационально и в однопериодной игре их действия были бы согласованы с равновесием Байеса–Нэша (РБН) [4].

В работе подробно рассматривается данная однопериодная игра, изучается поведение участников и сравнивается с теоретическим равновесием, а также с действиями «роботов», которые придерживаются адаптивного алгоритма поведения.

Описание эксперимента. Два игрока обладают деньгами и рисковыми активами. Истинная стоимость актива определяется после окончания торгов случайным и равновероятным выбором из трех значений 30, 70 или 110. Оба игрока знают это. Каждому из них сообщается дополнительно один из сценариев, который точно не реализуется, причем им сообщают разные сценарии. Игроки знают об информированности друг друга, но, конечно, не знают, что именно сообщили другому игроку.

Участники игры ведут попарно однопериодные торги. Они независимо и одновременно делают ставки, причем число допустимых различных ставок предполагается равным трем: 15, 70, 80.

Игрок, назвавший большую цену, покупает единицу актива у того, кто назвал меньшую цену, заплатив партнеру по сделке заявленную цену. При равенстве цен заявок сделки не происходит. Задача — максимизировать стоимость своего итогового портфеля.

Поставленная задача. Найти РБН в данной торговой игре с неполной информацией. Провести эксперимент и сравнить поведение игроков в контролируемых лабораторных условиях с РБН.

Теоретическое решение задачи. Описанная модель сводится к антагонистической игре с неполной информацией. Проще всего найти решение, построив матричную форму байесовской игры, для которой нахождение РБН в антагонистическом случае сведется к решению задачи линейного программирования. Для матрицы 27×27 это несложно проделать, используя вычислительные методы.

Роботы. Теоретическое решение подкреплено поведением роботов, которые придерживаются простого адаптивного алгоритма, основанного на логистической функции ответа. Можно показать, что при определенном количестве итераций они сходятся к РБН.

Люди. Проведены игры с реальными участниками в контролируемых лабораторных условиях. Анализ поведения игроков показывает, что их стратегии по частотам не всегда согласуются с РБН даже в случае, когда теоретические стратегии тривиальны.

Литература

1. Макаров К.В. Оптимальные смешанные стратегии для двойного аукциона с неполной информацией // Труды 52-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». — 2010. — С. 87–89.
2. Доманский В.К., Крепс В.Л. Повторяющиеся игры с асимметричной информацией и случайные блуждания цен на финансовых рынках // Обзорное прикладной и промышленной математики. — 2005. — Т. 12, № 4. — С. 950–952.
3. Меньшиков И.С., Меньшикова О.Р. Лабораторные исследования информационной эффективности рынков. — М.: ВЦ РАН, 2006. — 52 с.
4. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. — М.: МЗ Пресс, 2007. — 208 с.

УДК 519.865, УДК 330.16

Е.Л. Петросян, О.Р. Меньшикова

lepet50@yandex.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)**Кластерный анализ пяти психологических тестов**

В Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН раз в неделю в течение года студенты курса «Экспериментальная экономика» участвуют на сети компьютеров в различных социально-экономических ситуациях, которые могут быть проанализированы в рамках классической теории игр. Теоретически найденные концепции равновесия сопоставляются с реальным поведением людей, и почти всегда мы обнаруживаем, что реальное поведение людей отличается от теоретического. Одна из причин этого явления состоит в том, что все люди разные, они различаются по психологическому типу. В каждом эксперименте мы тщательно анализируем индивидуальное поведение участников, определяем и подсчитываем характеристики поведения участников в каждой роли, а затем разбиваем все участников по поведению на кластеры.

Затем поведенческие кластеры сопоставляются с психологическими кластерами [1–2], полученными по результатам тестирования по пяти тестам: MBTI, Эннеаграмма, Структограмма, тест Белбина «Роли в команде», тест Big Five. Операцию сопоставления мы проделываем многократно (число игр больше 30), поэтому хотелось понять, как связаны 34 выходные шкалы пяти указанных тестов между собой. Например, экстраверсия измеряется в тесте MBTI и Big Five. Это одно и то же или нет? Тест Белбина отличается от остальных тем, что он свидетельствует о том, какая из 9 ролей в команде человеку удастся лучше. Зная психологический тип претендентов на некоторую роль в команде, а также зная, как теоретически тип соотносится с ролью в команде, можно заранее предсказать, кто из претендентов будет лучше справляться с указанной ролью.

В тестировании принимали участие студенты 2010 года (21 человек). Установлена взаимосвязь компонент различных тестов. Выделено 5 кластеров, назовем их согласно расположению на рис. 1 Верхний, Нижний, Левый, Правый, Средний. Укажем несколько типичных представителей каждого кластера. Левый кластер объединяет наибо-

лее ответственных, дисциплинированных и организованных людей, которых характеризует Перфекционизм (1, Эннеаграмма), Организованность (J, MBTI), Сознательность (C, Big Five). Верхний кластер — это мастера общения, имеющие высокие показатели по шкалам Экстраверсия (E, MBTI), Экстраверсия (E5, Big Five), Открытость (O, Big Five), компонента Red (R, Структограмма). Нижний кластер образуют наиболее концентрированные и углубленные люди, которым можно поручить большую серьезную работу: Интроверты (I, MBTI), Специалисты (SP, Белбин), Педанты (CF, Белбин), шкала Blue (B, Структограмма). Правый кластер состоит из людей, которые приносят в коллектив новые идеи: это Энтузиасты (7, Эннеаграмма), Генераторы идей (PL, Белбин), Творческие люди (P, MBTI), Исследователи ресурсов (RI, Белбин). Наконец, в Средний кластер попали командные игроки, которые всегда миролюбивы и готовы помочь: Помощник (2, Эннеаграмма), Лоялист (6, Эннеаграмма), Миротворец (9, Эннеаграмма), Душа команды (TW, Белбин), Исполнитель (IMP, Белбин), Соглашатель (A, Big Five).

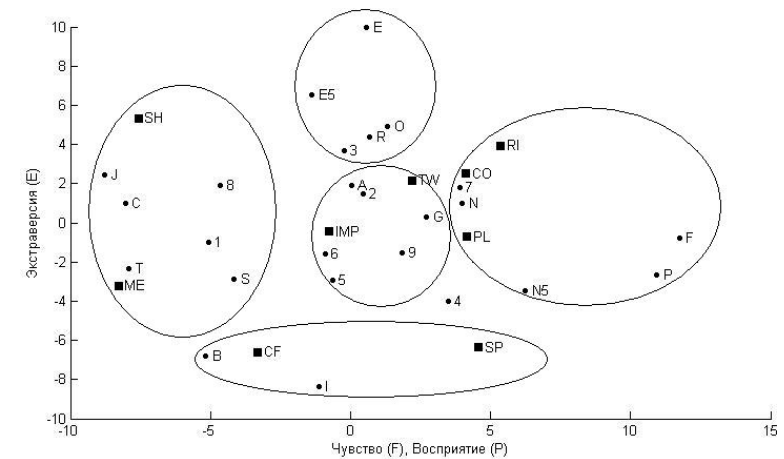


Рис. 1. Расположение 34 шкал пяти тестов на карте главных компонент

Литература

1. Дзуреченская М. А., Меньшикова О.Р. Об иерархической кластеризации психологических и поведенческих характеристик участников сетевого двойного аукциона с закрытыми заявками // Сбор-

ник научных трудов МФТИ «Информационные технологии: модели и методы». — 2010. — С. 93–104.

2. *Меньшикова О.Р., Мороз И.И., Талачева Е.И.* Влияние психологического типа участника лабораторных рынков на его поведение в социально-экономических экспериментах // Сборник научных трудов МФТИ «Модели и методы обработки информации». — 2009. — С. 161–174.

УДК 519.86

В.В. Платонов

vplatonov@list.ru

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Анализ лабораторных сетевых аукционов методами теории кооперативных игр

Так как для совершения сделки на любом сетевом рынке требуется кооперация нескольких участников, то одним из эффективных инструментов анализа результатов сетевых аукционов может быть теория кооперативных игр. Кооперативные игры, моделирующие взаимодействие участников сетевого рынка, обладают рядом общих свойств: в частности, все такие игры являются супераддитивными и имеют непустое ядро. Кроме того, если игра моделирует рынок элементарных собственников, где каждый агент действует самостоятельно, максимизируя только собственную прибыль, то свойство выпуклости игры соответствует строго определенной структуре сетевого рынка [1].

В данной работе с помощью инструментария теории кооперативных игр анализируются результаты 25 серий экспериментов, проведенных в Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН в 2006–2010 гг. Все эксперименты проводились на лабораторном рынке TRUE [1, 2], состоящем из семи агентов, поделенных между четырьмя собственниками, с использованием трех различных типов сетевых аукционных механизмов: с диспетчером [3], с производными контрактами [2] и с наведенными заявками [2, 4].

Одним из направлений анализа действий участников сетевых аукционов является сравнение распределения их выигрышей в эксперименте с теоретическими расчетами операторов, выбирающих одну

точку из допустимого множества дележей в соответствии с некоторыми аксиомами, таких как вектор Шепли и N-ядро [5]. В работе соответствующий анализ проводился с помощью индекса Лузмора–Хэнби [6], который используется для оценки сходства пары дележей.

Проведенный анализ позволил выявить важную особенность поведения участников, оказывающую влияние на результаты экспериментов: как выяснилось, значительная часть участников экспериментов склонна воспринимать рынок со сложной структурой собственности как рынок элементарных собственников, который является более конкурентным.

Литература

1. *Меньшиков И.С., Платонов В.В.* Игровые модели сетевых аукционов и их лабораторные исследования // Математическое моделирование. — 2009. — № 8. — С. 63–79.

2. *Меньшиков И.С., Платонов В.В., Скиндрев С.А., Чабан А.Н.* Сравнительный анализ эффективности лабораторных сетевых аукционов. — М.: ВЦ РАН, 2007. — 46 с.

3. *Mc Cabe K., Rassenti J., Smith V.* Designing ‘Smart’ Computer-Assisted Markets // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. — 2001. — V. 98. — P. 678–702.

4. *Журавель Ю.Ю., Меньшиков И.С.* Двойной аукцион для сетевых рынков. — М.: ВЦ РАН, 2003. — 41 с.

5. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. — М.: Мир, 1991. — 464 с.

6. *Aleskerov F., Platonov V.* Measuring disproportionality in PR systems // Ankara Universitesi SBF Dergisi. Ankara, Turkey. — 2006. — V. 60, N. 4. — P. 23–34.

Ш.З. Сирожиддинов

sirojiddinov@gmail.com

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Задача оптимизации валютного риска в коммерческом банке

В работе изучается реальная задача оптимизации методологии регулирования валютного риска в коммерческом банке.

Уточнено понятие «валютный риск», под которым понимается качественная и количественная оценка влияния возможного положительного или отрицательного отклонения валютного курса от начального или ожидаемого его значения. Определены показатели количественной и качественной оценки валютного риска.

В современной банковской практике подход к оценке валютного риска включает два различных и одновременно дополняющих друг друга метода [1]:

- 1) метод стоимостной оценки — VaR (Value-at-risk);
- 2) метод стресс-тестирования — ST (Sensitive Testing).

Установлена необходимость использования на практике одновременно нескольких моделей оценки валютного риска [2] (Монте-Карло, VaR, Shortfall).

На основании методики оценки валютного риска в АКБ «Азия-Инвест Банк» был рассмотрен конкретный пример расчета величина VaR при помощи программного комплекса ИНЭК ФРМ, а также определены основные принципы и недостатки метода VAR.

Обобщены результаты сравнительного анализа характеристик моделей оценки валютного риска, применяемых в банках, и выявлена ограниченность существующих подходов, заключающаяся в том, что каждая из рассмотренных моделей не охватывает всех факторов, влияющих на изменение величины валютного риска.

Литература

1. Суварян Г.Г. Теоретические основы валютного риска // Вестник Финансовой академии. — 2007. — № 2. — С. 50–52.
2. Меньшиков И.С., Шелагин Д.А. Рыночные риски: модели и методы. — М.: ВЦ РАН, 2000.

С.А. Скиндрев¹, И.С. Меньшиков^{1,2}

sergeant.mipt@mail.ru916-3167826

¹ Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

² Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Исследование предъядра в лабораторных кооперативных играх

Предложен новый механизм распределения выигрышей в кооперативной игре [1]. В качестве механизма выбран непрерывный двойной аукцион с наведенными заявками [2, 3]. Непрерывный двойной аукцион дает игроку возможность в каждый момент торговой сессии подавать заявку на рынок, а также видеть встречную заявку системы. При этом все участники аукциона выставляют заявки на получение соответствующего выигрыша от присоединения к некоторой коалиции. Наведенная заявка в данном случае будет предложением вступить в самую выгодную для агента коалицию и равна остатку от выигрыша коалиции за вычетом заявок всех остальных участников.

Рассмотрим кооперативные игры с характеристической функцией $V(S)$. Будем рассматривать игры с непустым ядром, для которых выполнено $V(S) + V(N \setminus S) < V(N)$, $\forall S \subset N$.

Пусть $\{x_i\}_{i \in N}$ — пространство состояний (заявок) игры. Обозначим через $x(S) = \sum_{k \in S} x_k$ суммарную заявку коалиции S . Определение ядра можно переписать эквивалентным образом в следующем виде с двойными неравенствами:

$$\begin{cases} V(N) = x(N) \\ V(S) \leq x(S) \leq V(N) - V(N \setminus S), \forall S \subset N. \end{cases}$$

Определим предъядро так:

$$\begin{cases} V(N) < x(N) \\ V(S) < x(S) \leq V(N) - V(N \setminus S), \forall S \subset N. \end{cases}$$

В силу наших предположений вблизи каждой внутренней точки ядра, где $V(S) < x(S) < V(N) - V(N \setminus S)$, содержится целая окрестность точек из предъядра вида $x_i + \varepsilon_i, \varepsilon_i > 0$.

Обозначим через $\sigma(S)$ маржу для каждой коалиции S : $\sigma(S) = x(S) - V(S)$ и через дельту δ_i маржу для каждого игрока i : $\delta_i = \min_{S:i \in S} \sigma(S)$.

Доказаны следующие утверждения

- В состоянии x из предъядра дельты для всех игроков одинаковы.
- Если игра вошла в состояние x из предъядра, то любой агент, соглашаясь с встречной (наведенной) заявкой, реализует максимальную коалицию N и дележ из ядра.

Целью работы является исследование влияния размера предъядра на динамику торгов, а также другие факторы: неполная информация, конкуренция и т.д.

В ходе экспериментов выяснилось, что наличие и размер предъядра играют ключевую роль в динамике совершения сделок. Если предъядро отсутствует или оно мало, то сделки заключаются на первых секундах торговой сессии. Если же предъядро очень большое, то попадая в него, участники ждут окончания сессии, и сделки совершаются на последних секундах.

Литература

1. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. — М.: Мир, 1991. — 463 с.
2. Журавель Ю.Ю., Меньшиков И.С. Двойной аукцион для сетевых рынков. — М.: ВЦ РАН, 2003. — 41 с.
3. Меньшиков И.С., Платонов В.В., Скиндрев С.А., Чабан А.Н. Сравнительный анализ сетевых эффективности лабораторных сетевых аукционов. — М.: ВЦ РАН, 2007. — 45 с.

УДК 519.865, УДК 330.16

П.К. Скубицкая¹, О.Р. Меньшикова²

elei_polinka@mail.ru

¹ Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

² Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Психологический тип и межполушарная асимметрия мозга

Межполушарная асимметрия мозга человека привлекает внимание исследователей более 100 лет. Установлено, что функцией левого полушария (ЛП), которое является доминантным у правой, является оперирование вербально-знаковой информацией (логические операции, чтение, счет), а функцией правого полушария (ПП) — оперирование наглядными образами (распознавание объектов, образное мышление, интуиция). По данным литературных источников [1] доля правой составляет 80%-95%, остальная часть приходится на долю левой и амбидекстров. За последние 50 лет доля левой в Европе выросла в 3-4 раза. У них обнаружена более высокая чувствительность к воздействию внешних и внутренних факторов, сочетающаяся с художественной и музыкальной одаренностью, высоким уровнем общей информированности, достижениями в математике, архитектуре, музыке. Доминирование полушарий мозга является важной проблемой междисциплинарного исследования, в которое вовлечены медики, нейрофизиологи, психологи, социологи, математики.

В Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН ведется регулярное наблюдение за поведением студентов в различных экономических ситуациях. В одной и той же роли люди ведут себя по-разному, даже если она повторяется много раз. С чем это связано? Мы предположили и в отдельных случаях показали [2, 3] зависимость поведенческих характеристик от психологических. Но психологические характеристики в немалой степени зависят от физиологических, например, от уровня доминирования полушарий мозга. В цепочке Физиология → Психология → Поведение правая стрелка в отдельных случаях уже исследована, теперь нас интересует левая.

Как определить степень доминирования одного полушария над другим? Мы пытались делать это двумя способами. Первый

были связаны с ответами на вопросы, которые брались с сайта <http://web.science.mq.edu.au>. Второй способ состоял в выполнении определенных заданий на стабิโลграфической платформе.

Установлена связь модели типа личности МВТИ с важной психофизиологической характеристикой человека, основанной на доминировании полушарий мозга. В тестировании принимали участие 38 студентов. Они проходили два теста: МВТИ и «Доминирование полушарий». На рис. 1 точками изображены координаты 38 человек на карте главных компонент МВТИ. Первая компонента соответствует признакам Сенсорика (S), Мышление (Т), Организованность (J), вторая — Экстраверсии (E). Большими кружочками изображены правополушарные студенты, маленькими — левополушарные. Видно, то признак Экстраверсия — Интроверсия не оказывает влияния на доминантность полушарий. При высоких показателях S, Т, J наблюдаем только левополушарность, при маленьких правополушарность и левополушарность присутствуют в равных долях.

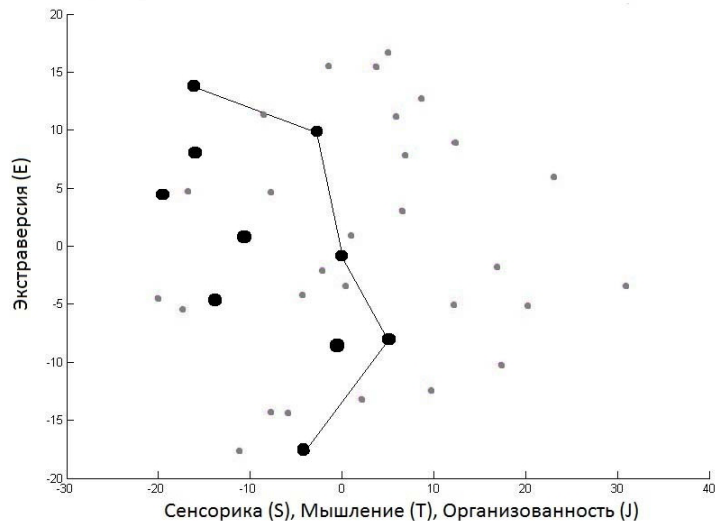


Рис. 1. Карта главных компонент МВТИ с указанием доминирующего полушария

Литература

1. Жаворонкова Л.А. Правши — левши. Межполушарная асимметрия электрической активности мозга человека. — М.: Наука, 2006. — 222 с.
2. Меньшикова О.Р., Мороз И.И., Талачева Е.И. Влияние психологического типа участника лабораторных рынков на его поведение в социально-экономических экспериментах // Сборник научных трудов МФТИ «Модели и методы обработки информации». — 2009. — С. 161–174.
3. Дзуреченская М. А., Меньшикова О.Р. Об иерархической кластеризации психологических и поведенческих характеристик участников сетевого двойного аукциона с закрытыми заявками // Сборник научных трудов МФТИ «Информационные технологии: модели и методы». — 2010. — С. 93–104.

УДК 519.83, 519.86

А.Л. Суворикова¹, И.С. Меньшиков^{2,1}

a.suvorikova@gmail.com

¹ Московский физико-технический институт
(государственный университет)

² Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Экспериментальное исследование кооперации в монотонных динамических играх с несовершенной информацией

Рассматривается монотонная динамическая игра с несовершенной информацией, в которой участвует три игрока: $N = \{1, 2, 3\}$.

У каждого игрока есть стартовый капитал $E = 1$, который он может либо оставить себе, либо вложить в общий проект. Стоимость реализации общего проекта равна $K = 2$. В последовательные моменты времени игроки делают необратимый вклад в общий проект. К концу периода $T = 3$ общий проект реализуется в том и только том случае, если сумма вкладов не меньше, чем стоимость проекта K . От реализации проекта каждый из игроков получает прибыль $V = 2$, поэтому его выигрыш равен V плюс его стартовый капитал E минус его

вклад. Если же проект не реализован, то выигрыш каждого игрока равен его стартовому капиталу за вычетом его вклада.

Структура игры с несовершенной информацией может быть представлена в виде ориентированного графа (рис. 1), в вершинах которого находятся игроки. Игрок i может наблюдать за действиями игрока j в предыдущем периоде тогда и только тогда, когда существует ребро (i, j) .

Игра была исследована профессором Т. Палфрей и его коллегами из Лаборатории социально-экономических экспериментальных исследований Калифорнийского технологического института США в работе [1]. Авторами работы был выдвинут ряд гипотез о поведении игроков в монотонных динамических играх с несовершенной информацией.

В 2009–2010 учебном году на базе Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН были проведены две серии экспериментов, которые являлись модифицированными экспериментами из работы [1]. Было установлено, что результаты, полученные в [1], устойчивы к смене группы, замене финансовой мотивации на учебную и смене роли игроком в течение эксперимента. Также была проведена проверка выдвинутых в [1] гипотез классическими методами математической статистики [2]. Например, для проверки гипотезы о том, что при смене информационной модели игроки, положение которых оставалось неизменным, не меняли свое поведение на статистически значимом уровне, использовался метод, основанный на статистике Вальда [2].

Так как в играх этого класса теоретически возможно возникновение различных равновесных стратегий, то для их экспериментального исследования в среде MatLab был реализован самообучающийся робот.

Поведение каждого игрока моделируется марковским процессом, матрицы переходных вероятностей которого, в общем случае зависят как от времени, так и от действий партнеров в предыдущих периодах. Начальные матрицы переходных вероятностей задаются произвольным образом и в течение работы программы изменяются согласно следующему эвристическому алгоритму: если выигрыш игрока выше, чем в предыдущей игре (на предыдущем шаге алгоритма), то вероятность повторить этот шаг увеличивается. За основу была взята модификация алгоритма RPROP, предложенная в [3]. В зависимости от начальной точки (начальной матрицы переходных вероятностей)

алгоритм сходится к одному из возможных равновесий в смешанных или в чистых стратегиях [1].

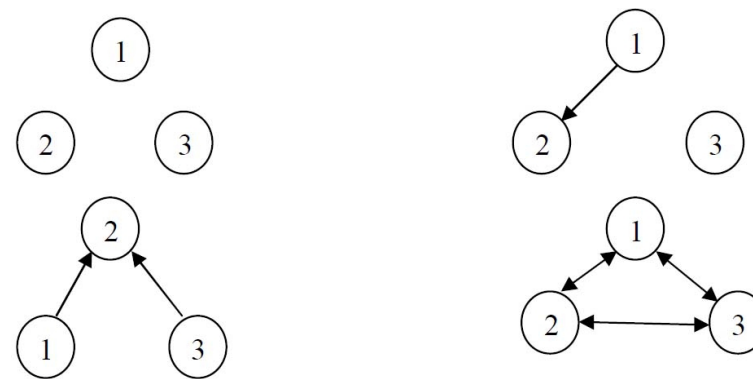


Рис. 1. Возможные варианты структуры информированности игроков

Литература

1. Choi S., Gale D., Kariv S., Palfrey T. «Network Architecture, Salience and Coordination» // Working Papers 1291, California Institute of Technology, Division of the Humanities and Social Sciences. — 2008. — 37 p.
2. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. — М.: Высш. школа, 1984. — V. 102. — 136 с.
3. Riedmiller M., Braun H. A direct adaptive method for faster backpropagation learning: The RPROP algorithm // In Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks. — 1993. — V. 16. — P. 586–591.

УДК 519.865, УДК 330.16

Ф.М. Ульянов

uljanov_fm@mail.ru

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Связь между поведенческими характеристиками и психологическим типом участника двусторонней компромиссной игры

В экспериментальной экономике стоит задача анализа влияния психофизиологических факторов на процесс принятия экономических решений человеком. В работе анализируется связь между психологическими типами участника и поведенческими характеристиками участников игры. Психологический тип строится на основе тестов МВТИ и Эннеаграмма [1].

Поведение участников анализируется в следующей игре [2]: каждый игрок наделен «силой», известной только ему, и выбирает одну из альтернатив: «драться» или «отступить». Если хотя бы один игрок выбрал «драться», то происходит драка, в которой более сильный игрок получает больший выигрыш H , а слабый игрок получает меньший выигрыш L . Если оба игрока выбрали «отступить», то драка не происходит, объявляется ничья, и оба игрока получают промежуточный выигрыш M . Ходят игроки по очереди. Для каждого участника в каждой попытке случайным образом выбирается партнер и номер хода: ходит он первым или вторым, зная ход противника.

Предполагается, что участники в основном следуют пороговым стратегиям: то есть, если «сила» больше некоторого значения, выбирают «драться», иначе выбирают «отступить».

Можно вычислить следующие характеристики, отражающие манеру игры:

1. Средний порог при игре первым.
2. Средний порог при игре вторым.
3. Точность следования пороговым стратегиям.
4. Обучаемость, определяемую как отношение среднего порога за первую половину игры к среднему порогу за вторую половину игры.

Оказывается, что участники, близкие по определенным психологическим характеристикам, близки и в поведенческих характеристиках. Разбиение участников на группы по характеристикам разного типа производится с помощью метода главных компонент и EM — алгоритма.

Литература

1. *Двуреченская М.А., Меньшикова О.Р.* Об иерархической кластеризации психологических и поведенческих характеристик участников сетевого двойного аукциона с закрытыми заявками // Сборник научных трудов МФТИ «Информационные технологии: модели и методы». — 2010. — С. 93–104.

2. *Carrillo J.D., Palfrey T. R.* The compromise game: two-sided adverse selection in the laboratory // Working Papers 1259, California Institute of Technology, Division of the Humanities and Social Sciences. — 2006.

УДК 519.86

А.Е. Утемов

alexut@yandex.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Равновесия в игре «Три сенатора»

В работе рассматривается динамическая игра голосования в комитете с полной информацией с условным названием «Три сенатора» [1]. В этой игре были найдены различные виды равновесий, в частности квантильное [2] и модифицированное [3]. Проведено сравнение указанных типов равновесий, а также сопоставление этих равновесий с данными эксперимента [1].

Были проведены новые эксперименты по данной игре, которые подтвердили выявленные ранее закономерности [1]. В новых экспериментах рассматривалось два варианта коэффициента дисконтирования δ : 0,8 и 0,6.

В работе проводится анализ стабิโลграфических измерений [4] участников эксперимента, а именно измерений положения центра тя-

жести участвующих в эксперименте. $V = \sqrt{\frac{dX}{dt} + \frac{dY}{dt} + \frac{dZ}{dt}}$ — величина, которая показывает, насколько быстро меняется состояние участника эксперимента, где X , Y и Z — координаты центра тяжести. По этой величине, например, можно сделать вывод о волнении и энергетике каждого конкретного участника. В работе найдены интересные закономерности стабильнографических данных участников.

Литература

1. Утемов А.Е. Стратегии обучения в одной динамической игре голосования // Сборник научных трудов МФТИ «Информационные технологии: модели и методы». — 2010. — С. 114–123.
2. Mc Kevley R.D., Palfrey T.R. Quantal response equilibrium for normal form games // Games and Economic Behavior. — 1995. — N. 10. — P. 6–38.
3. Яминов Р.И. Модифицированное равновесие // Сборник научных трудов МФТИ «Информационные технологии: модели и методы». — 2010. — С. 73–83.
4. Бурнаев Е.В., Меньшиков И.С. Модель функционального состояния участников лабораторных рынков // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2009. — № 6. — С. 187–204.

УДК 519.86

А.Е. Утемов

alexut@yandex.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Закономерности и парадоксы в одной турнирной игре

В работе рассматривается игра «Турнир». Четыре игрока разбиты по парам. В первой стадии (полуфинале), каждый участник выбирает число x от 0 до 1000. Тот, у кого оказалось большее число, побеждает в паре и выходит в следующую стадию игры, которая называется финал. В финале выигрывает тот, у кого осталось больше ресурсов, то есть больше число $1000 - x$. Победитель финала получает одно очко, а все остальные — 0 очков.

Игра имеет различные модификации, например рассматриваются игры с 8 и 16 участниками. Соответственно в случае с 8 участниками каждый выбирает в первой стадии игры (четвертьфинале) число x , затем, если он победил в этой стадии, то проходит в полуфинал, где может выбрать уже число y от 0 до $1000 - x$. В финале побеждает тот, у кого больше число $1000 - x - y$. Победитель финала получает одно очко, все остальные — 0 очков.

Аналогично определяется игра с 16 участниками.

В каждой такой игре много равновесий Байеса–Нэша (РБН) [1], и все они имеют довольно простой вид.

Целью работы было проведение лабораторного эксперимента с добровольными участниками, чтобы выяснить, насколько их интуитивное поведение согласуется с найденными РБН и с какими именно.

Эксперименты проводились в Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН. Для организации экспериментов с помощью специализированной оболочки Z-tree (Университет Цюриха, Швейцария [2]) была написана компьютерная программа. Участниками экспериментов были студенты МФТИ.

Как показали эксперименты, игроки довольно быстро сходились к одному из РБН, при этом возник интересный парадокс. Появилось поведение игроков, которое не наблюдалось в похожей игре «Beauty contest game» [3].

В игре «Турнир» помимо РБН были найдены другие равновесия, например квантильное [4]. Изучен вопрос о взаимосвязи равновесий между собой, а также их согласованности с данными эксперимента.

Литература

1. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. — М.: МЗ Пресс, 2007. — 208 с.
2. Fischbacher U. z-Tree: Zurich toolbox for ready-made economic experiments // Experimental Economics. — 2007. — P. 171–178.
3. Camerer C.F., Ho T.-H., Chong J.-K. A cognitive hierarchy model of games // The Quarterly Journal of Economics. — 2004. — P. 861–898.
4. Mc Kevley R.D., Palfrey T.R. Quantal response equilibrium for normal form games // Games and Economic Behavior. — 1995. — N. 10. — P. 6–38.

УДК 519.837.3

А.А. Цуканов

tsukanov.alex@gmail.com

Московский физико-технический институт
(государственный университет)**Анализ игры ультимативный дележ
с поощрениями и наказаниями**

Будем рассматривать игру ультимативный дележ U . Предлагающая сторона делит некоторое благо S и делает другой стороне предложение: взять себе фиксированное количество блага $x \in [0, S]$, а оставшееся отдать принимающей стороне, на что принимающая сторона может либо согласиться и получить $S - x$, либо отказаться, тогда обе стороны получают нулевое количество блага [1].

Переговоры могут закончиться неудачей, если стороны не достигнут договоренности, несмотря на то, что полученное решение не является оптимальным по Парето. Как показывают многочисленные эмпирические исследования, в ситуациях с асимметричной торговлей предложения с заведомо плохими условиями (например, когда отвечающей стороне предлагается совсем маленькая часть от общего блага), как правило, отвергаются.

Для увеличения вероятности принятия предложенных условий, повышения условной справедливости предлагаемых решений и, соответственно, повышения уровня совокупного общественного блага вводятся схемы дележа блага с наличием поощрений и наказаний для предлагающей стороны [2].

Будем рассматривать различные модификации игры. UR — это вариация игры с поощрениями. Если предложение принято, тогда согласившаяся на предложение сторона может поблагодарить того, кто сделал предложение, передав ему $t \in [0, x]$ блага, что ведет на самом деле к увеличению блага у предлагающей стороны на величину kt . UP — это вариация игры с наказанием. Если предложение принято, тогда принимающая сторона может уменьшить количество блага у предлагающей стороны на rl , где $r \in [0, \min\{x, (S - x)/l\}]$. Коэффициенты k и l повышают эффективность вводимых мер. В модификации UPR можно как поощрять, так и наказывать на усмотрение принимающей предложение стороны [3].

Для анализа поведения обеих сторон необходимо понимать, как именно они должны себя вести в соответствии с теоретическим расчетом их действий. Совершенное по подыграм равновесие Нэша (СПРН) для игры U , если предлагающая сторона делает предложение $x = \bar{x}(\alpha_R)$, а отвечающая соглашается, будет

$$\bar{x}(\alpha_R) = \begin{cases} \alpha_R / (1 + 2\alpha_R), \beta_p \leq 1/2 \\ 1/2, \beta_p > 1/2 \end{cases},$$

где α_i и β_i являются коэффициентами [4], характеризующими отражение к несправедливости в соответствующем типе игры.

В случае изменения игры на вариант UR , получаем, что СПРН будет следующим: при $k \leq \bar{k}$, где $\bar{k} = \max\left\{\frac{1+\alpha_R-\beta_P}{\alpha_R+\beta_P}, \frac{1-\beta_P}{\beta_P}\right\}$, результат получается таким же, как и в предыдущем случае игры U , при $k > \bar{k}$ сторона, предлагающая благо, отдает все благо (для простоты считаем благо, равным единице, то есть $x = 1$), тогда принимающая сторона соглашается на предложение и благодарит предлагающую сторону, возвращая $t = 1/(k + 1)$ блага.

В случае модификации UP имеем, что СПРН для $l \leq \bar{l}$, где $\bar{l} = \frac{1+\alpha_R}{\alpha_R}$ сводится к СПРН в игре U , а для $l > \bar{l}$ равновесием будет предлагать $x = 1/2$, на что принимающая сторона соглашается. Модификация UPR является комбинацией вышеописанных случаев с учетом величин пороговых параметров.

Литература

1. *Меньшиков И.С.* Лекции по теории игр и экономическому моделированию — М.: МЗ Пресс, 2007. — 207 с.
2. *Данилов В.И.* Лекции по теории игр. — М.: Российская экономическая школа, 2002.
3. *Pevnitskaya S., Ryvkin D.* Rewards and Punishments in Bargaining // Working Papers, Department of Economics, Florida State University. — 2009.
4. *Fehr E., Schmidt K.* A theory of fairness, competition and cooperation // Quarterly Journal of Economics. — 1999. — V. 114. — P. 817–868.

УДК 519.833.2

Р.И. Яминов

yaminovr@rambler.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)**Поведенческие аномалии в аукционных играх**

Рассмотрим игру в нормальной форме $G = \{N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\}$, в которой множества стратегий $C_i = C \subset R$ — выпуклые компакты, а функция выигрыша игрока состоит из двух частей, когда его действие больше действия другого игрока или нет. Рассмотрим примеры подобных аукционных игр. В данных примерах равновесие Нэша не может описать результаты лабораторных экспериментов.

Пример 1. Координационная игра. Два игрока делают вклад в общее дело. Эффект от него определяется по минимальному из вкладов, то есть выигрыш игрока записывается следующим образом:

$$u_i(a_1, a_2) = \min(a_1, a_2) - c \cdot a_i.$$

В данной игре бесконечно много равновесий Нэша. Любая пара стратегий $(a; a)$ является равновесием Нэша. Множество равновесий Нэша не зависит от параметра c . Согласно экспериментам, описанным в [1], в которых заявки были ограничены отрезком [110; 170], при увеличении затрат c с 0,25 до 0,75 наблюдалось снижение средних заявок со 154 до 126.

Пример 2. Аукцион Бертрана. N продавцов подают заявку на продажу единицы товара. Сделка произойдет только с одним из них, назначившим меньшую цену. Его выигрыш будет равен цене, по которой он продал товар. Выигрыш остальных игроков будет нулевым.

Равновесие Нэша не зависит от количества игроков, и согласно ему цена должна стремиться к издержкам (в нашем случае к 0) даже в случае игры с двумя продавцами. В лабораторных экспериментах, рассмотренных в [2], в которых цены выбирались из отрезка [2; 100], были получены следующие результаты:

Количество продавцов:

Средние цены продаж, наблюдаемые в экспериментах:

$$N = 2,$$

$$\langle p \rangle = 26,4,$$

$$N = 3,$$

$$\langle p \rangle = 19,0,$$

$$N = 4,$$

$$\langle p \rangle = 15,2.$$

Для описания подобных результатов лабораторных экспериментов может быть использована концепция модифицированного равновесия [3], основанная на предположении, что сам принцип Нэша о наилучшем ответе на стратегии остальных игроков остается верным, но каждый игрок имеет неточную информацию о стратегиях остальных игроков, выраженную в вероятностной форме. Это влечет модификацию функции выигрыша: в действия всех других игроков добавляется случайная «ошибка». Таким образом, оптимальный ответ ищется на модифицированные действия других игроков. Неподвижная же точка подобного процесса будет равновесием в модифицированной игре.

Для данных игр, если взять несмещенную нормально распределенную «ошибку», равновесие Нэша в модифицированной игре для данной ошибки будет единственным, и оно будет зависеть от параметра правильным образом. Чтобы сравнить результаты экспериментов с равновесием в модифицированной игре, дисперсия ошибки подбиралась из результатов лабораторных экспериментов. Сравнение показало, что равновесие в модифицированной игре соответствует результатам лабораторных экспериментов.

Литература

1. Goeree J.K., Holt C.A. An Experimental Study of Costly Coordination // Discussion Paper. — University of Virginia, 1999.
2. Dufwenberg M., Gneezy U. Price Competition and Market Concentration: An Experimental Study // International Journal of Industrial Organization. — 2000. — V. 18, N. 1. — P. 7–22.
3. Яминов Р.И. Модифицированное равновесие для сетевого аукциона STB // Сборник научных трудов МФТИ «Информационные технологии: модели и методы». — 2010. — С. 73–83.

Список представленных организаций**Университеты и другие учебные учреждения**

Брянский государственный университет им. акад. И.Г. Петровского

Государственный университет — Высшая школа экономики

Московский государственный институт радиотехники,
электроники и автоматики (технический университет)

Московский государственный институт электроники и математики
(технический университет)

Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Московский государственный университет путей сообщения

Московский педагогический государственный университет

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Национальный исследовательский технологический университет
«МИСиС»

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

(Национальный исследовательский университет)

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого

Самарский государственный технический университет

Санкт-Петербургский государственный университет

Томский государственный университет
(Национальный исследовательский университет)

Южно-Уральский государственный университет

Исследовательские институты

12 Центральный научно-исследовательский институт МО РФ

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Институт вычислительной математики РАН

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАНУ

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Институт ядерных исследований РАН

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики РАН

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН

Центральный экономико-математический институт РАН

Коммерческие компании

ООО «Яндекс»

Организации дальнего зарубежья

Ecole Polytechnique, France

Именной указатель

- А**
Амосов Г.Г. 18
Андреев Н.А. 82
Андрейцева К.С. 65
Антропова Н.А. 6
Афоница С.Г. 104
- Б**
Бекларян Л.А. 41, 42
Беляев В.В. 8
Биферт В.О. 84
Богатырева Е.А. 104
Браницкая Л.Л. 9
Булинский А.В. 10
Буров В.А. 43, 45
- В**
Василевский Ю.В. 53
Васильев А.В. 12
Васильев В.Б. 12
Ващенко М.П. 86
Вдовина Е.К. 47
Волосов К.А. 47
Волосова А.К. 47
- Г**
Гасников А.В. 51
Гасникова Е.В. 88, 106
Гимадеев Р.А. 81
- Гималтдинов И.Ф. 91
Голубев М.О. 14
Голубцов А.А. 108
Горбачук В.М. 110
Гусев Н.А. 15
- Д**
Данилов А.А. 53
Двуреченская М.А. 111
Двуреченский П.Е. 17
Днестрян А.И. 18
Докучаев А.В. 67
Дорн Ю.В. 93
Дружинин В.В. 37
- Е**
Евстафьев А.И. 55
- Ж**
Жидков А.А. 56
Жук В.И. 19
- З**
Зайцев Д.В. 69
Здановская В.С. 113
Зотов Д.И. 45
- И**
Исаев М.И. 72
- Ишманов М.С. 95
- К**
Казейкина А.В. 59
Калинин А.В. 56
Кантор В.В. 21
Карачик В.В. 6
Клочков В.В. 97
Кожевников П.А. 23
Колногоров А.В. 74
Кондраков И.А. 98
Косьяненко А.В. 104
Кудрявцев Е.Л. 115
- Л**
Лашин В.А. 82, 104
Лубышев В.Ф. 24
- М**
Майструк Д.Л. 69
Макаров К.В. 117
Манько В.И. 32
Меньшиков И.С. 124, 128
Меньшикова О.Р. 111, 113, 119, 126
Молчанов Е.Г. 61, 81
Морозов А.А. 110
Морозов И.И. 51

- Н**
Нагапетян Т.А. 100
Новиков Р.Г. 4
- О**
Орлов А.А. 75
- П**
Панин Б.А. 97
Пашков П.А. 86
Петросян Е.Л. 119
Платонов В.В. 121
Подлипский О.К. 26
- Р**
Разжевайкин В.Н. 63
Романов А.В. 64
Романов И.В. 27
Руднев С.Г. 53
Румянцева О.Д. 45
Русанов И.А. 110
Рябченко А.А. 29
- С**
Саламатова В.Ю. 53
Самосват Е.А. 29
- Сафронов В.С. 19
Сергеев С.Н. 43
Сечин П.А. 77
Сидняев Н.И. 65
Сирождидинов Ш.З. 123
Скиндерев С.А. 124
Скубицкая П.К. 126
Степанова Н.В. 102
Суворикова А.Л. 128
Сумин М.И. 56
- Т**
Тарасов В.Н. 51
Тихомиров А.С. 79
Тюленев А.И. 30
- У**
Ульянов Ф.М. 131
Утемов А.Е. 132, 133
- Ф**
Филиппов С.Н. 32
Фонарёв А.А. 34
- Х**
Хачатрян Н.К. 41
- Холодов Я.А. 51
- Ц**
Цветков Е.А. 35
Цуканов А.А. 135
- Ч**
Чабан А.Н. 111
- Ш**
Шананин А.А. 86, 98
Швед Д.А. 8
Шишкин П.А. 81
Шуруп А.С. 43
- Ю**
Юферева Т.В. 37
- Я**
Яминов Р.И. 137
Янушкявичене О.Л. 9
- S**
Santacesaria M. 38

Содержание

Пленарное заседание	4
<i>Новиков Р.Г.</i> Неабелево преобразование Радона и приложения	4
Секция высшей математики	6
<i>Антропова Н.А., Карачик В.В.</i> Построение полиномиальных решений некоторых задач для уравнения Пуассона	6
<i>Беляев В.В., Швед Д.А.</i> Финитарные автоморфизмы конечно порождённых групп	8
<i>Бранищкая Л.Л., Янушкявичене О.Л.</i> К вопросу о сходимости случайных полиномов второго порядка	9
<i>Булинский А.В.</i> О вложении квантовых каналов в квантовые марковские процессы с непрерывным временем	10
<i>Васильев В.Б., Васильев А.В.</i> Быстрые аппроксимации для некоторых сингулярных интегралов	12
<i>Голубев М.О.</i> О некоторых свойствах чебышевских множеств в гильбертовом пространстве	14
<i>Гусев Н.А.</i> О разрешимости линеаризованных уравнений сжимаемой жидкости	15
<i>Дзуреченский П.Е.</i> Программный комплекс для построения оптимальных стратегий в дифференциальных играх	17
<i>Днестрян А.И., Амосов Г.Г.</i> Томограмма и дробное преобразование Фурье	18
<i>Жук В.И., Сафронов В.С.</i> Кноидальные и солитонные волны в пограничном слое	19
<i>Кантор В.В.</i> Сравнение метрик на пространстве выпуклых компактов	21
<i>Кожневников П.А.</i> О многообразиях групп большого конечного периода	23
<i>Лубышев В.Ф.</i> Кратная разрешимость нелинейных уравнений и систем	24
<i>Подлипский О.К.</i> Построение модели эксперта по быстро прогрессирующему гломерулонефриту	26

<i>Романов И.В.</i> Управление колебаниями пластины с помощью граничных сил	27
<i>Рябченко А.А., Самосват Е.А.</i> О числе подграфов случайного графа в модели Барабаши–Альберта	29
<i>Тюленев А.И.</i> Характеризация следов функций для весовых пространств С.Л. Соболева	30
<i>Филиппов С.Н., Манько В.И.</i> Свойства симметричного набора векторов и взаимно равнонаклонённых базисов в конечномерных гильбертовых пространствах и формализм звёздочного произведения	32
<i>Фонарёв А.А.</i> О решении нелинейных уравнений с усиленно замкнутыми операторами	34
<i>Цветков Е.А.</i> Вычисление неаддитивных функционалов с использованием весовых методов Монте–Карло для разыгрывания траекторий частиц	35
<i>Юферева Т.В., Дружинин В.В.</i> Разложение обратного произведения чисел на сумму дробей	37

Секция квазилинейных уравнений и обратных задач

<i>Santacesaria M.</i> A global stability estimate for the Gel'fand-Calderon inverse problem in two dimensions	38
<i>Бекларян Л.А., Хачатрян Н.К.</i> Динамическая модель грузоперевозок	41
<i>Бекларян Л.А.</i> О квазибегущих волнах	42
<i>Буров В.А., Сергеев С.Н., Шуруп А.С.</i> Акустическая томография океана как обратная задача рассеяния с неизвестными параметрами данных рассеяния	43
<i>Буров В.А., Зотов Д.И., Румянцева О.Д.</i> Томографическое восстановление тонкой структуры биологической ткани на фоне сильных неоднородностей ее структуры	45
<i>Волосова А.К., Вдовина Е.К., Волосов К.А.</i> Взгляд со стороны на теорию нелинейной диффузии теплопроводности	47

<i>Гасников А.В., Морозов И.И., Тарасов В.Н., Холодов Я.А.</i> Об устойчивых стационарных режимах в сетевой версии модели транспортных потоков Лайтхилла–Уизема–Ричардса	51
<i>Данилов А.А., Саламатова В.Ю., Руднев С.Г., Василевский Ю.В.</i> Решение трёхмерных задач биоимпедансного анализа	53
<i>Евстафьев А.И.</i> Формула восстановления для конусной схемы сканирования	55
<i>Жидков А.А., Калинин А.В., Сумин М.И.</i> Математическое обоснование некоторых алгоритмов решения прямых и обратных задач теории атмосферного электричества	56
<i>Казейкина А.В.</i> Асимптотическое поведение прозрачных потенциалов для уравнения Веселова — Новикова при положительной энергии	59
<i>Молчанов Е.Г.</i> Оценка коэффициента эластичности замещения производственных факторов на микроуровне в обобщенной модели Хаутекера–Иохансена	61
<i>Разжевайкин В.Н.</i> Волны и пространственные структуры для квазилинейных уравнений реакции — диффузии	63
<i>Романов А.В.</i> Конечномерная динамика на аттракторе полулинейных параболических уравнений	64
Секция математических основ управления 65	
<i>Андрейцева К.С., Сидняев Н.И.</i> О нецентральной хи-квадрат распределении и его табуляции	65
<i>Докучаев А.В.</i> Исследование стохастического процесса распределения ресурса методом динамического программирования	67
<i>Зайцев Д.В., Майструк Д.Л.</i> Моделирование конфликтной игры на основе модифицированной вероятностной схемы выбора с возвращением	69
<i>Исаев М.И.</i> Асимптотика числа эйлеровых циклов в плотных графах	72
<i>Колногоров А.В.</i> Нахождение минимаксных стратегии и риска в стационарной случайной среде	74

<i>Орлов А.А.</i> Двойственный метод Ньютона для задачи полуопределенного программирования	75
<i>Сечин П.А.</i> Пересечение орбиты линейного отображения с конусом — обобщение проблемы Сколема	77
<i>Тихомиров А.С.</i> О скорости сходимости марковского симметричного случайного поиска	79
<i>Шшишкин П.А., Гимадеев Р.А., Молчанов Е.Г.</i> Алгоритмы поиска кратчайших путей в географических графах	81
Секция математического моделирования в экономике, экологии и социологии 82	
<i>Андреев Н.А., Латшин В.А.</i> Оценка релаксации финансовых рынков по статистическим данным	82
<i>Биферт В.О.</i> Двухпараметрические задачи распределения ресурса	84
<i>Ващенко М.П., Пашков П.А., Шананин А.А.</i> Анализ сценариев реализации инвестиционной программы в электроэнергетике России	86
<i>Гасникова Е.В.</i> О социально-экономических приложениях уравнений стохастической химической кинетики, динамике средних и динамике, полученной в результате скейлинга	88
<i>Гималтдинов И.Ф.</i> Синтез управления в модифицированной модели Рамсея с учетом ограничения ликвидности и потребительского кредитования	91
<i>Дорн Ю.В.</i> Математическое моделирование эволюционных игр на транспортном графе: Равновесия. Сходимость. Бассейны притяжения	93
<i>Ишманов М.С.</i> Кинетика социального неравенства	95
<i>Клочков В.В., Панин Б.А.</i> Модель зависимости общественной эффективности научной деятельности от принятых стандартов новизны	97
<i>Кондраков И.А., Шананин А.А.</i> Исследование сегментации мирового фондового рынка с помощью обобщенного непараметрического метода	98
<i>Нагапетян Т.А.</i> О поведении монополиста, производящего конкурирующие товары длительного пользования, при условии запрета вторичного рынка	100

Степанова Н.В. Математическая модель и оптимизация управления розничной продажей скоропортящегося товара..... 102

Секция экспериментальной экономики 104

Богатырева Е.А., Афонина С.Г., Латшин В.А., Косьяненко А.В. Сопоставление национальных кредитных рейтингов российских банков..... 104

Гасникова Е.В. О стохастической марковской динамике наилучших ответов, приводящей к равновесию Нэша–Вардропа..... 106

Голубцов А.А. Исследование стохастической динамики двойного аукциона при заданной функции ответа..... 108

Горбачук В.М., Русанов И.А., Морозов А.А. О соотношении прибылей в дуополии 110

Дзуреченская М.А., Меньшикова О.Р., Чабан А.Н. О взаимосвязи психологических типов и показателей стабильности 111

Здановская В.С., Меньшикова О.Р. Анализ динамической игры с несовершенной информацией NET-COOP для двух информационных структур..... 113

Кудрявцев Е.Л. Анализ модели «Явка на выборы» на основе L-равновесия 115

Макаров К.В. Поведение людей и роботов в двойном аукционе с неполной информацией 117

Петросян Е.Л., Меньшикова О.Р. Кластерный анализ пяти психологических тестов 119

Платонов В.В. Анализ лабораторных сетевых аукционов методами теории кооперативных игр..... 121

Сирожиддинов Ш.З. Задача оптимизации валютного риска в коммерческом банке..... 123

Скиндерев С.А., Меньшиков И.С. Исследование предъядра в лабораторных кооперативных играх..... 124

Скубицкая П.К., Меньшикова О.Р. Психологический тип и межполушарная асимметрия мозга..... 126

Суворова А.Л., Меньшиков И.С. Экспериментальное исследование кооперации в монотонных динамических играх с несовершенной информацией 128

Ульянов Ф.М. Связь между поведенческими характеристиками и психологическим типом участника двусторонней компромиссной игры 131

Утемов А.Е. Равновесия в игре «Три сенатора» 132

Утемов А.Е. Закономерности и парадоксы в одной турнирной игре 133

Цуканов А.А. Анализ игры ультимативный дележ с поощрениями и наказаниями 135

Яминов Р.И. Поведенческие аномалии в аукционных играх 137

Список представленных организаций 139

Именной указатель 141

ТРУДЫ
53-й НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ МФТИ

**Современные проблемы
фундаментальных и прикладных наук**

Часть VII
Управление и прикладная математика

Том 1

Составители:

Е.Г. Молчанов, А.В. Гасников

Редакторы:

В.А. Дружинина, И.А. Волкова, О.П. Котова, Л.В. Себова

Компьютерная вёрстка: *А.В. Чудновский*

Корректоры:

Е.Ю. Чиркина, А.О. Кулагина, В.Ю. Арзамасов, Д.М. Мазилкин,

И.А. Смоленцев, Ю.А. Мардашова

Издательская группа:

Э.Г. Кюн, Е.А. Аникушкина, Г.М. Голубева, И.Н. Самохвалова

Подписано в печать 12.11.2010. Формат 60 × 84¹/₁₆.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 9,5. Уч.-изд. л. 9,2. Тираж 100 экз. Заказ № 40

ГОУ ВПО «Московский физико-технический институт
(государственный университет)»