ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2012, т. 278, с. 96–101

УДК 517.938

Классификация накрытий окружности[1]

©2012 г. Е. В. Жужома[2,3], Н. В. Исаенкова[2,4]

Поступило в декабре 2011 г.

Получена классификация d-накрытий степени $d \geq 2$ окружности S^1 с точностью до сопряженности с помощью сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов. Показано, что полным классификационным инвариантом с точностью до d-эквивалентности является наделенное схемой инвариантное счетное множество (отмеченное множество) линейного растягивающего эндоморфизма степени d.

Под *d-накрытием окружности* S^1 мы понимаем сюръективный локальный гомеоморфизм $S^1 \to S^1$ степени $|d| \geq 2$, при этом прообраз каждой точки состоит из $|d| \in \mathbb{N}$ точек. Для определенности мы рассматриваем сохраняющие ориентацию d-накрытия, когда $d > 0$. Важный класс d-накрытий образуют неособые эндоморфизмы, т.е. сюръективные C^1-отображения $g\colon S^1 \to S^1$ с положительной производной Dg. Основная цель данной работы — классификация d-накрытий окружности S^1 с точностью до сопряженности с помощью сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов (основные понятия и определения теории динамических систем см. в [1, 2]). Как следствие, мы получаем классификацию неособых эндоморфизмов, в том числе важного класса структурно устойчивых эндоморфизмов.

Каноническим примером эндоморфизма окружности является линейное отображение $E_d(x) = dx \pmod 1$, где S^1 наделена циклической координатой $x \pmod 1$. Поскольку $d \geq 2$, E_d является растягивающим эндоморфизмом (напомним, что $g\colon S^1 \to S^1$ — *растягивающий* эндоморфизм, если $Dg > 1$). Шуб [9] классифицировал растягивающие эндоморфизмы, показав, что степень является полным инвариантом сопряженности в классе растягивающих эндоморфизмов. Якобсон [3] рассматривал C^r-эндоморфизмы ($r \geq 1$), которые могут иметь точки, в которых производная обращается в нуль. В [3] выделялось инвариантное множество Σ канторовского типа, принадлежащее неблуждающему множеству Ω, и вводилось понятие Σ-устойчивости, аналогичное понятию Ω-устойчивости. Было показано, что ограничения $f|_\Sigma$ и $f|_\Omega$ эндоморфизма f на Σ и Ω соответственно сопряжены односторонним марковским цепям с конечным числом состояний. Нитецки [8] описал неблуждающее множество структурно устойчивых неособых C^r-эндоморфизмов окружности (отметим, что растягивающие эндоморфизмы структурно устойчивы, но существуют отличные от растягивающих структурно устойчивые эндоморфизмы). Вопросы классификации d-накрытий окружности S^1 в указанных работах не рассматривались. Идеологически мы следуем методу Маркли [6], который классифицировал гомеоморфизмы окружности без периодических точек.

Перейдем к необходимым определениям и доказательству основного результата. Будем говорить, что отображение $f_1\colon S^1 \to S^1$ *полусопряжено* $f_2\colon S^1 \to S^1$, если существует сохраняющее ориентацию непрерывное отображение $h\colon S^1 \to S^1$ такое, что $h \circ f_1 = f_2 \circ h$, т.е. имеет

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 010-01-00192), а также в рамках гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (договор 11.G34.31.0039).

[2]Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород, Россия.

[3]E-mail: zhuzhoma@mail.ru

[4]E-mail: nisaenkova@mail.ru

место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h"] & S^1 \arrow[d, "h"] \\ S^1 \arrow[r, "f_2"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Если h — гомеоморфизм, то f_1, f_2 называются *сопряженными* отображениями.

Ключевым для нас утверждением служит следующий результат Шуба [9] (доказательство для накрытий окружности также имеется в [7, Ch. 2.2]).

Теорема 1. *Пусть $E_d\colon S^1 \to S^1$ — линейный растягивающий эндоморфизм степени $d \geq 2$. Тогда для любого d-накрытия $g\colon S^1 \to S^1$ существует непрерывное и сохраняющее ориентацию отображение $h\colon S^1 \to h(S^1) = S^1$, полусопрягающее g с E_d. Более того, если g сопряжено растягивающему эндоморфизму, то h — гомеоморфизм (следовательно, h сопрягает g с E_d). В противном случае h не является гомеоморфизмом.*

Из этой теоремы следует, что d-накрытия, сопряженные растягивающим эндоморфизмам, сопряжены тогда и только тогда, когда их степени совпадают. Поэтому ниже нас будет в основном интересовать случай d-накрытия g, когда g не сопряжено с E_d и h не является гомеоморфизмом. Непосредственно из теоремы 1 следует, что

$$h \circ g^n = E_d^n \circ h \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Для точки $x \in S^1$ определим *обобщенную орбиту* $G_\mathrm{O}(x)$ этой точки как множество $y \in S^1$ таких, что $g^n(x) = g^m(y)$ для некоторых $n, m \in \mathbb{Z}_0^+$. Другими словами, $G_\mathrm{O}(x)$ есть объединение прообразов относительно всех итераций g^m, $m \in \mathbb{Z}_0^+$, каждой точки из положительной полуорбиты точки x. Множество $N \subset S^1$ называется *инвариантным*, если $N = g(N) = g^{-1}(N)$. Ясно, что инвариантность множества эквивалентна тому, что вместе с любой точкой множеству принадлежит обобщенная орбита точки (последнее свойство иногда называют *насыщенностью*).

Из непрерывности и монотонности полусопрягающего отображения h вытекает, что для любой точки $x \in S^1$ множество $h^{-1}(x)$ есть либо точка, либо нетривиальный (т.е. отличный от точки) замкнутый интервал. Положим

$$\Xi_g = \bigl\{x \in S^1\colon\ h^{-1}(x) \text{ — нетривиальный интервал}\bigr\}.$$

Множество Ξ_g называется *отмеченным* множеством d-накрытия g. Формально это множество зависит от h. Ниже мы покажем, что отмеченное множество определяется с точностью до специального периодического (жесткого) поворота окружности, зависящего только от d. Из (1) и того, что g является локальным гомеоморфизмом, вытекает, что отмеченное множество Ξ_g инвариантно относительно E_d.

Обозначим через Σ° подмножество таких $x \in S^1$, что $h^{-1}(h(x))$ — одна точка. Тогда ограничение $h|_{\Sigma^\circ}$ есть взаимно однозначное непрерывное отображение

$$\Sigma^\circ = h^{-1}(S^1 \setminus \Xi_g) \to h(\Sigma^\circ) = S^1 \setminus \Xi_g.$$

Лемма 1. *Множество Σ° является инвариантным множеством d-накрытия g.*

Доказательство. Нужно показать, что $g(\Sigma^\circ) = \Sigma^\circ = g^{-1}(\Sigma^\circ)$. Возьмем $x \in \Sigma^\circ$ и предположим, что $g(x) \notin \Sigma^\circ$. Тогда $h^{-1}(h \circ g(x))$ есть нетривиальный замкнутый интервал, скажем $[a, b]$. Так как $x \in \Sigma^\circ$, то существует открытый интервал (α, β), содержащий x, такой, что $h(\alpha, \beta) = (h(\alpha), h(\beta))$ является нетривиальным интервалом, содержащим точку $w = h(x)$. Из непрерывности h следует, что интервал (α, β) можно взять столь малым, что ограничение $E_d|_{h(\alpha,\beta)}$ отображения E_d на $h(\alpha, \beta)$ будет гомеоморфизмом. Из непрерывности g следует, что существует точка $x_* \in (\alpha, \beta)$ такая, что $g(x_*) \in [a, b]$. Поэтому $h \circ g(x_*) = w$ и $h(x_*) \in \in (h(\alpha), h(\beta))$. Поскольку $x \in \Sigma^\circ$, имеем $h(x_*) \neq h(x) = w$. С другой стороны, согласно (1) получаем $E_d \circ h(x) = E_d(w) = h \circ g(x_*) = E_d \circ h(x)$, что противоречит гомеоморфности $E_d|_{h(\alpha,\beta)}$. Это доказывает включение $g(\Sigma^\circ) \subset \Sigma^\circ$.

Пусть теперь $g(x) \in \Sigma^\circ$, и предположим, что $x \notin \Sigma^\circ$. Тогда x принадлежит нетривиальному замкнутому интервалу $h^{-1}(h(x)) = [c, d]$. Так как g есть d-накрытие и, следовательно, локальный гомеоморфизм, то существует нетривиальный интервал $[\delta, \gamma] \subset [c, d]$ такой, что $x \in [\delta, \gamma]$ и ограничение $g|_{[\delta,\gamma]}$ есть гомеоморфизм. В силу (1) для любой точки $x_* \in [\delta, \gamma]$, $x_* \neq x$, имеем $h \circ g(x_*) = E_d \circ h(x_*) = h \circ g(x)$, что противоречит включению $g(x) \in \Sigma^\circ$, поскольку $g(x_*) \neq g(x)$. Полученное противоречие доказывает включение $g^{-1}(\Sigma^\circ) \subset \Sigma^\circ$. Лемма доказана. $\square$

Следствие 1. *Имеют место соотношения*

$$E_d[h(\Sigma^\circ)] = h(\Sigma^\circ) = E_d^{-1}[h(\Sigma^\circ)], \qquad E_d \circ h|_{\Sigma^\circ} = h \circ g|_{\Sigma^\circ}.$$

Более того, ограничение $h|_{\Sigma^\circ} \colon \Sigma^\circ \to h(\Sigma^\circ)$ *является гомеоморфизмом, который сопрягает* $g|_{\Sigma^\circ}$ *с* $E_d|_{h(\Sigma^\circ)}$.

Из теоремы 1 следует, что множество $S^1 \setminus \Sigma^\circ$ представляет собой объединение попарно не пересекающихся замкнутых интервалов. Из следствия 1 вытекает, что множество этих интервалов счетно, поскольку $h(\Sigma^\circ)$ инвариантно относительно E_d. Таким образом, $S^1 \setminus \Sigma^\circ = \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]$, причем можно считать, что $h^{-1}(h[a_i, b_i]) = [a_i, b_i]$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] = \varnothing$ при $i \neq j$. Интервалы $[a_i, b_i]$ будем называть *смежными*. Соответствующие интервалы (a_i, b_i) называются *открытыми смежными*.

Смежный интервал $[a, b]$ называется *периодическим*, если $g^k([a, b]) = [a, b]$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Отметим, что концевые точки периодического смежного интервала являются периодическими точками. Внутри периодического интервала могут быть (но могут и не быть) периодические точки.

Обозначим через Σ объединение Σ° со всеми концевыми точками a_i, b_i смежных интервалов множества $S^1 \setminus \Sigma^\circ$: $\Sigma = \Sigma^\circ \cup \bigcup_{i \geq 1} (\{a_i\} \cup \{b_i\})$. Ясно, что $\Sigma \neq S^1$ (напомним, что g есть d-накрытие, не сопряженное E_d).

Лемма 2. *Пусть* $g \colon S^1 \to S^1$ — *не сопряженное* E_d d-*накрытие,* $d \geq 2$. *Тогда его неблуждающее множество* $\mathrm{NW}(g)$ *есть объединение* Σ *со всеми периодическими точками из открытых смежных интервалов.*

Доказательство. Из следствия 1 вытекает, что $\Sigma^\circ \subset \mathrm{NW}(g)$, поскольку $\mathrm{NW}(E_d) = S^1$. Отсюда, а также из непрерывности и монотонности h следует включение $\Sigma \subset \mathrm{NW}(g)$. Возьмем точку $x \in \mathrm{NW}(g)$, не принадлежащую Σ. Тогда $x \in (a, b)$, где $h(a, b) = h(a) = h(b)$, причем можно считать, что $h^{-1}(h(a, b)) = (a, b)$. Так как $x \in \mathrm{NW}(g)$, то $g^k(a, b) \cap (a, b) \neq \varnothing$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Отсюда и из леммы 1 следует, что $g^k(a, b) = (a, b)$. Это влечет за собой периодичность точки x, поскольку ограничение $g^k|_{(a,b)} \colon (a, b) \to g^k(a, b) = (a, b)$ является гомеоморфизмом. Осталось заметить, что точка принадлежит неблуждающему множеству монотонного гомеоморфизма интервала только тогда, когда она неподвижная. $\square$

Обозначим через γ_j жесткий поворот окружности вида $x \to x + \frac{j}{d-1}$ (mod 1), где $j \in \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$. Отметим, что при $d = 2$ поворот γ_j — тождественное отображение, а при $d \geq 3$ — периодическое, $\gamma_j^{d-1} = \mathrm{id}$. Будем говорить, что два множества $\Xi_1, \Xi_2 \subset S^1$ *d-эквивалентны* (и писать $\Xi_1 \equiv_d \Xi_2$), если $\gamma_j(\Xi_1) = \Xi_2$ для некоторого γ_j.

Пусть Ξ_g — отмеченное множество d-накрытия g, и пусть $x \in \Xi_g$ — периодическая (отмеченная) точка эндоморфизма E_d, $x \in \Xi_g \cap \mathrm{Per}(E_d)$. Тогда $h^{-1}(x)$ является периодическим смежным интервалом d-накрытия g. Поставим в соответствие точке x множество $\mathrm{Per}(g|_{h^{-1}(x)}) \overset{\mathrm{def}}{=} P_x$

периодических точек d-накрытия g, принадлежащих $h^{-1}(x)$. Ясно, что P_x совпадает с множеством $\mathrm{Fix}(g^p|_{h^{-1}(x)})$ неподвижных точек ограничения $g^p|_{h^{-1}(x)}$, где p — период интервала $h^{-1}(x)$. Совокупность множеств P_x, где $x \in \Xi_g \cap \mathrm{Per}(E_d)$ пробегает все периодические отмеченные точки, называется *схемой d-накрытия g*.

Предположим, что отмеченные множества d-накрытий g_1, g_2 d-эквивалентны, т.е. $\gamma_j(\Xi_1) = \Xi_2$ для некоторого γ_j, где Ξ_i — отмеченное множество d-накрытия g_i, $i = 1, 2$. Будем говорить, что схемы d-накрытий g_1, g_2 *изоморфны*, если для каждой периодической отмеченной точки $x \in \Xi_1$ существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\mu_x\colon h_1^{-1}(x) \to h_2^{-1}(\gamma_j(x))$, переводящий P_x в $P_{\gamma_j(x)}$.

Пусть Ξ — инвариантное счетное множество растягивающего эндоморфизма E_d, и пусть его некоторое вперед инвариантное подмножество Ξ_0, состоящее из периодических орбит, наделено некоторой схемой $\mathcal{S}$ (это означает, что каждой периодической точке x из Ξ_0 поставлено в соответствие подмножество P_x некоторого замкнутого интервала I_x). Данная (абстрактная) схема называется *допустимой*, если

1) для любой периодической точки $x \in \Xi_0$ множество P_x замкнуто и содержит концевые точки интервала I_x;
2) для любых двух точек $x_1, x_2 \in \mathrm{Orb}(x)$ существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\nu_{12}\colon I_{x_1} \to I_{x_2}$ такой, что $\nu_{12}(I_{x_1}) = I_{x_2}$.

Если $\mathrm{Orb}(x)$ состоит из одной точки (т.е. точка x неподвижная), то последнее условие считается тривиально выполненным.

Следующая теорема (доказательство которой мы опускаем) восходит к известному примеру Данжуа [5] и доказывается полностью аналогично теореме 2.5 из [4] (см. также [6, Theorem 2.1; 7, Theorem 2.3]).

Теорема 2. *Любое d-накрытие g имеет допустимую схему. Для любого инвариантного счетного множества Ξ эндоморфизма E_d, наделенного абстрактной допустимой схемой $\mathcal{S}$, существует d-накрытие g такое, что Ξ является отмеченным множеством d-накрытия g со схемой $\mathcal{S}$.*

Следующая теорема является основным результатом (из него вытекает, что отмеченное множество d-накрытия определяется с точностью до поворота γ_j).

Теорема 3. *Пусть $g_1, g_2\colon S^1 \to S^1$ суть d-накрытия окружности степени $d \geq 2$, не сопряженные E_d. Тогда g_1 сопряжено с g_2, если и только если их отмеченные множества d-эквивалентны ($\Xi_{g_1} \equiv_d \Xi_{g_2}$), а их схемы изоморфны.*

Доказательство. *Необходимость.* Покажем, что из сопряженности $g_1, g_2\colon S^1 \to S^1$ следует равенство $\Xi_{g_1} \equiv \Xi_{g_2}$. Согласно теореме 1 существуют два непрерывных монотонных отображения $h_1, h_2\colon S^1 \to S^1$, полусопрягающие соответственно g_1, g_2 с E_d. Пусть гомеоморфизм $\psi\colon S^1 \to S^1$ сопрягает g_1 с g_2, т.е. $\psi \circ g_1 = g_2 \circ \psi$. Для любой точки $x \in S^1$ положим $\xi(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} h_2 \circ \psi \circ h_1^{-1}(x)$.

Так как ψ — сопрягающий гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию, то ξ — также гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию. Более того, непосредственно проверяется, что $E_d \circ \xi = \xi \circ E_d$. Следовательно, $E_d^n \circ \xi = \xi \circ E_d^n$. Отсюда вытекает, что ξ — жесткий поворот вида γ_j. Ясно, что множества Ξ_{g_1}, Ξ_{g_2} имеют изоморфные схемы.

Достаточность. Пусть $\Xi_{g_1} \equiv \Xi_{g_2}$. Определим отображение $\psi|_{\Sigma^\circ_{g_1}}\colon \Sigma^\circ_{g_1} \to \Sigma^\circ_{g_2}$ по правилу $\psi|_{\Sigma^\circ_{g_1}}(x) = h_2^{-1} \circ R_\beta \circ h_1$, где R_β — один из жестких поворотов окружности вида γ_j. Для $x \in \Sigma^\circ_{g_1}$ имеем $h_1(x) \in h_1(\Sigma^\circ_{g_1}) \in S^1 \setminus \Xi_{g_1}$. Тогда

$$\Xi_{g_1} = R_\beta(\Xi_{g_2}) \quad \Leftrightarrow \quad h_2(\Sigma^\circ_{g_2}) = R_\beta(h_1(\Sigma^\circ_{g_1})).$$

Получаем $h_1(x) \in R_\beta(h_2(x))$, и поэтому $h_1(x) \in S^1 \setminus \Xi_{g_2}$. Следовательно, $h_2^{-1}(R_\beta(h_2(x)))$ есть точка. Поэтому $h_2^{-1}(R_\beta(h_2(x))) \in \Sigma^\circ_{g_2}$.

Проверим, что ψ — взаимно однозначное отображение, т.е. для любого $x \in \Sigma^\circ_{g_2}$ существует единственное $y \in \Sigma^\circ_{g_1}$ такое, что $x = \psi(y)$. Предположим противное. Тогда найдутся две различные точки $x_1, x_2 \in \Sigma^\circ_{g_1}$ такие, что $\psi(x_1) = \psi(x_2) = x$. Рассмотрим отображение $\psi^{-1}(\Sigma^\circ_{g_1}) = h_1^{-1} \circ R_\beta \circ h_2$. Имеем $\psi^{-1}(x_1) = h_1^{-1} \circ R_\beta \circ h_2(x_1) \in \Sigma^\circ_{g_2}$ и $\psi^{-1}(x_2) = h_1^{-1} \circ R_\beta \circ h_2(x_2) \in \Sigma^\circ_{g_2}$. Но $h_1^{-1} \circ R_\beta \circ h_2(x_1) \neq h_1^{-1} \circ R_\beta \circ h_2(x_2)$ (равенство возможно только при $x_1 = x_2$).

Отображение ψ монотонное, как композиция монотонных на заданном множестве отображений. Следовательно, ψ — непрерывное отображение. Таким образом, $\psi|_{\Sigma^\circ_{g_1}}(x) = h_2^{-1} \circ R_\beta \circ h_1$ есть гомеоморфизм.

Докажем равенство $\psi \circ g_1|_{\Sigma^\circ_{g_1}} = g_2 \circ \psi|_{\Sigma^\circ_{g_1}}$ на множестве $\Sigma^\circ_{g_1}$. Возьмем $x \in \Sigma^\circ_{g_1}$, тогда из инвариантности множества $\Sigma^\circ_{g_1}$ следует, что $g_1(x) \in \Sigma^\circ_{g_1}$. Поэтому $\psi \circ g_1(x) = h_2^{-1} \circ R_\beta \circ h_1 \circ g_1(x)$. Из теоремы 1 вытекает, что $h_2^{-1} \circ R_\beta \circ (h_1 \circ g_1(x)) = h_2^{-1} \circ R_\beta \circ (E_d \circ h_1(x))$. По условию $h_2^{-1} \circ (R_\beta \circ E_d) \circ h_1(x) = h_2^{-1} \circ (E_d \circ R_\beta) \circ h_1(x)$. Тогда

$$(h_2^{-1} \circ E_d) \circ R_\beta \circ h_1(x) = g_2 \circ h_2^{-1} \circ R_\beta \circ h_1(x) = g_2 \circ \psi(x).$$

Следовательно, $g_2 \circ \psi|_{\Sigma^\circ_{g_1}} = \psi \circ g_1|_{\Sigma^\circ_{g_1}}$.

Покажем, что ψ — равномерно непрерывное отображение, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in \Sigma^\circ_{g_1}$ из $|x_1 - x_2| < \delta$ следует $|\psi(x_1) - \psi(x_2)| < \varepsilon$. Зададим $\varepsilon > 0$. Существует конечное семейство смежных интервалов $J_1, J_2, \ldots, J_k$ множества $\Sigma^\circ_{g_2}$ таких, что любой интервал в $S^1 \setminus \bigcup_{i=1}^k J_i$ имеет длину $<\varepsilon$. Существует семейство $G_1, G_2, \ldots, G_k$ смежных интервалов множества $\Sigma^\circ_{g_2}$ таких, что $R_\beta \circ h_1\bigl(\bigcup_{i=1}^k G_i\bigr) = h_2\bigl(\bigcup_{i=1}^k J_i\bigr)$. Положим $\delta = \min_{i=1,\ldots,k}\{\text{длина } G_i\}$. Ясно, что $\delta > 0$. Возьмем любые точки $x_1, x_2 \in \Sigma^\circ_{g_1}$ такие, что $|x_1 - x_2| < \delta$. Тогда между точками $\psi(x_1)$, $\psi(x_2)$ нет интервалов J_i. Следовательно, $|\psi(x_1) - \psi(x_2)| < \varepsilon$, что означает равномерную непрерывность отображения $\psi|_{\Sigma^\circ_{g_1}}$ на множестве $\Sigma^\circ_{g_1}$.

Из равномерной непрерывности вытекает, что $\psi|_{\Sigma^\circ_{g_1}}$ непрерывно продолжается на замыкание $\overline{\Sigma^\circ_{g_1}}$ множества $\Sigma^\circ_{g_1}$, причем по непрерывности $\psi|_{\Sigma^\circ_{g_1}}$ продолжается на замыкание множества $\Sigma^\circ_{g_2}$. Из монотонности $\psi|_{\Sigma^\circ_{g_1}}$ следует, что это продолжение $\psi|_{\overline{\Sigma^\circ_{g_1}}}$ монотонное и взаимно однозначное, т.е. $\psi|_{\overline{\Sigma^\circ_{g_1}}}$ — гомеоморфизм. Из $g_2 \circ \psi|_{\Sigma^\circ_{g_1}} = \psi \circ g_1|_{\Sigma^\circ_{g_1}}$ по непрерывности вытекает равенство

$$\psi \circ g_1|_{\overline{\Sigma^\circ_{g_1}}} = g_2 \circ \psi|_{\overline{\Sigma^\circ_{g_1}}}. \tag{2}$$

Следующее наблюдение используется для продолжения ψ на $S^1 \setminus \overline{\Sigma^\circ_{g_1}}$. Пусть $f_1\colon [a,b] \to [a,b]$, $f_2\colon [c,d] \to [c,d]$ — два сохраняющих ориентацию гомеоморфизма. Обозначим через $\mathrm{Fix}(f_i)$ множество неподвижных точек гомеоморфизма f_i, $i = 1,2$. Отметим, что $\{a,b\} \in \mathrm{Fix}(f_1)$, $\{c,d\} \in \mathrm{Fix}(f_2)$. Тогда f_1 и f_2 имеют изоморфные схемы, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\mu\colon [a,b] \to [c,d]$ такой, что $\mu(\mathrm{Fix}(f_1)) = \mathrm{Fix}(f_2)$. Нетрудно показать, что f_1 и f_2 сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы изоморфны (сопрягающий гомеоморфизм не обязательно совпадает с μ).

Из равенства (2) вытекает, что если $[a_1, b_1]$ — периодический смежный интервал эндоморфизма g_1 периода $p \in \mathbb{N}$, то $[\psi(a_1), \psi(b_1)]$ — периодический смежный интервал эндоморфизма g_2 того же периода p. По условию ограничения

$$g_1^p|_{[a_1,b_1]}\colon [a_1, b_1] \to [a_1, b_1], \qquad g_2^p|_{[\psi(a_1),\psi(b_1)]}\colon [\psi(a_1), \psi(b_1)] \to [\psi(a_1), \psi(b_1)]$$

имеют изоморфные схемы. Поэтому существует гомеоморфизм $\psi_\circ\colon [a_1, b_1] \to [\psi(a_1), \psi(b_1)]$, сопрягающий эти ограничения. Стандартным образом продолжим $\psi_\circ$ на обобщенную орбиту

$G_{\mathrm{O}}([a_1,b_1])$ интервала $[a_1,b_1]$ до гомеоморфизма, сопрягающего $g_1|_{G_{\mathrm{O}}([a_1,b_1])}$ с $g_2|_{\psi_\circ(G_{\mathrm{O}}([a_1,b_1]))}$. Повторяя аналогичную процедуру для всех орбит периодических смежных интервалов, получим требуемый гомеоморфизм $S^1\to S^1$, сопрягающий g_1 и g_2. $\square$

Приведенное ниже следствие применяется для классификации нульмерных соленоидальных базисных множеств.

Следствие 2. *Пусть $g_1,g_2\colon S^1\to S^1$ — неособые C^1-эндоморфизмы степени $d\ge 2$, не сопряженные E_d. Тогда g_1 сопряжено с g_2, если и только если их отмеченные множества d-эквивалентны ($\Xi_{g_1}\equiv_d \Xi_{g_2}$) и имеют одинаковые схемы.*

Известно [7], что сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы замкнутых интервалов сопряжены, если внутри интервалов нет неподвижных точек или гомеоморфизмы являются диффеоморфизмами и имеют одинаковое число гиперболических неподвижных точек. Отсюда и из теоремы 3 вытекают такие следствия.

Следствие 3. *Пусть $g_1,g_2\colon S^1\to S^1$ суть d-накрытия, $d\ge 2$, не сопряженные E_d. Предположим, что внутри периодических смежных интервалов этих эндоморфизмов нет периодических точек. Тогда g_1 сопряжено с g_2, если и только если их отмеченные множества d-эквивалентны ($\Xi_{g_1}\equiv_d \Xi_{g_2}$).*

Следствие 4. *Пусть $g_1,g_2\colon S^1\to S^1$ — неособые структурно устойчивые C^1-эндоморфизмы окружности степени $d\ge 2$, не сопряженные E_d. Предположим, что внутри периодических смежных интервалов этих эндоморфизмов лежит одинаковое число периодических точек. Тогда g_1 сопряжено с g_2, если и только если отмеченные множества этих эндоморфизмов d-эквивалентны ($\Xi_{g_1}\equiv_d \Xi_{g_2}$).*

Благодарности. Авторы благодарят В.З. Гринеса за плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аносов Д.В.* Исходные понятия // Динамические системы–1. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 156–178. (Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фунд. напр.; Т. 1).
2. *Аносов Д.В., Солодов В.В.* Гиперболические множества // Динамические системы–9. М.: ВИНИТИ, 1991. С. 12–99. (Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фунд. напр.; Т. 66).
3. *Якобсон М.В.* О гладких отображениях окружности в себя // Мат. сб. 1971. Т. 85, №2. С. 163–188.
4. *Aranson S.Kh., Belitsky G.R., Zhuzhoma E.V.* Introduction to the qualitative theory of dynamical systems on Surfaces. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. (Transl. Math. Monogr.; V. 153).
5. *Denjoy A.* Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore // J. Math Pures Appl. 1932. V. 11. P. 333–375.
6. *Markley N.G.* Homeomorphisms of the circle without periodic points // Proc. London Math. Soc. 1970. V. 20. P. 688–698.
7. *de Melo W., van Strien S.* One-dimensional dynamics. Berlin: Springer, 1993.
8. *Nitecki Z.* Nonsingular endomorphisms of the circle // Global analysis. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1970. P. 203–220. (Proc. Symp. Pure Math.; V. 14).
9. *Shub M.* Endomorphisms of compact differentiable manifolds // Amer. J. Math. 1969. V. 91. P. 175–199.