МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное агентство по образованию

Московский государственный институт электроники и математики
(Технический университет)

Кафедра математического анализа

Методические указания
по курсу математического анализа для студентов I курса
инженерных факультетов
I семестр

Часть I
Графики и пределы

Москва 2005

Составитель ст. препод. Н. К. Ерастова

УДК 517

Методические указания по курсу математического анализа для студентов I курса инженерных факультетов. Часть I. Графики и пределы / Моск. гос. ин-т электроники и математики; Сост. Н. К. Ерастова. М., 2005. — 25 с.

Ил. 24

Разработка содержит методические указания к домашним и аудиторным контрольным работам I семестра по математическому анализу для студентов инженерных факультетов.

ISBN 5-94506-100-X

Разработка содержит методические указания к домашним и аудиторным контрольным работам I семестра по математическому анализу для студентов инженерных факультетов. Как домашняя, так и аудиторная контрольные работы №1 содержат задачи на построение графиков функций с помощью простейших преобразований. Рассмотрим такие преобразования.

Основные преобразования графиков

Пусть известен график функции $y = f(x)$.

I. Параллельный перенос

1. Для построения графика функции $y = f(x)+b$ нужно график функции $y = f(x)$ сдвинуть вдоль оси ординат (оси Oy) на b единиц. Знак числа b определяет направление сдвига: вверх, если $b > 0$ и вниз, если $b < 0$.

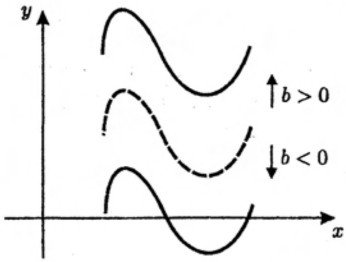


Рис. 1. График функции $y = f(x) + b$

Пример:

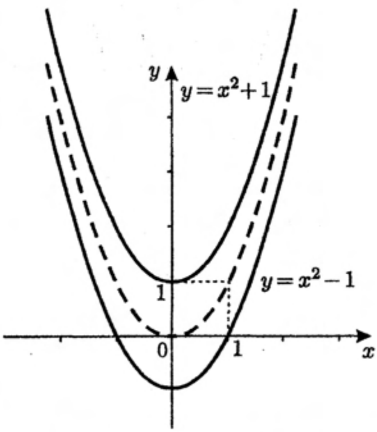


Рис. 2. Графики функций $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$

2. Для построения графика функции $y = f(x-a)$ нужно график функции $y = f(x)$ сдвинуть вдоль оси абсцисс (оси Ox) на a единиц. Знак числа a определяет направление сдвига: вправо при $a > 0$ и влево при $a < 0$.

Примеры: $y = (x+1)^2 = (x-(-1))^2$ (график функции $y = x^2$ сдвигается влево на 1 единицу); $y = (x-3)^2$ (график функции $y = x^2$ сдвигается вправо на 3 единицы)

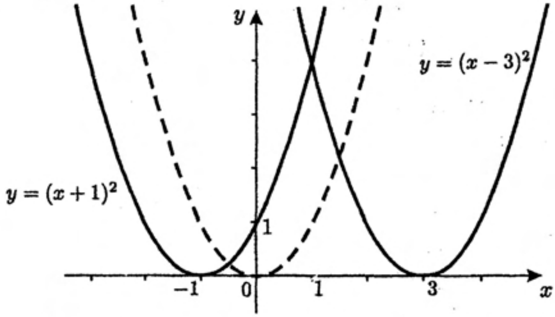


Рис. 3. Графики функций $y = (x+1)^2$ и $y = (x-3)^2$

Описанные выше сдвиги можно комбинировать:

1) $y = (x-1)^2 - 2$; сдвиг параболы $y = x^2$ вдоль оси абсцисс на 1 единицу вправо и вдоль оси ординат на 2 единицы вниз:

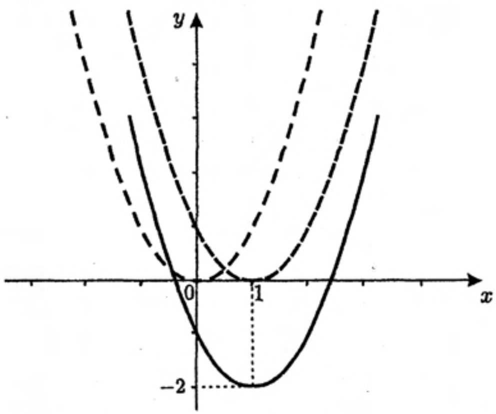


Рис. 4. Построение графика функции $y = (x-1)^2 - 2$

2) $y = 1 + \sqrt{x-2}$, $x \geqslant 2$; сдвиг графика функции $y = \sqrt{x}$ на 2 единицы вправо и на 1 единицу вверх:

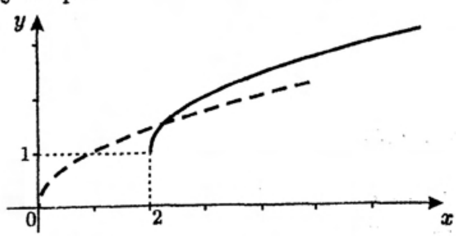


Рис. 5. График функции $y = 1 + \sqrt{x-2}$

II. Симметрия

1. Для построения графика функции $y = -f(x)$ график исходной функции $y = f(x)$ нужно отразить симметрично относительно оси абсцисс (оси Ox).

Пример: $y = -\sqrt{x}$, $x \geqslant 0$.

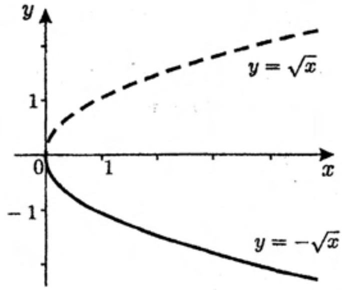


Рис. 6. Построение графика функции $y = -\sqrt{x}$

2. Для построения графика функции $y = f(-x)$ график исходной функции следует отразить симметрично относительно оси ординат (оси Oy).

Пример: $y = \sqrt{-x}$, $x \leqslant 0$.

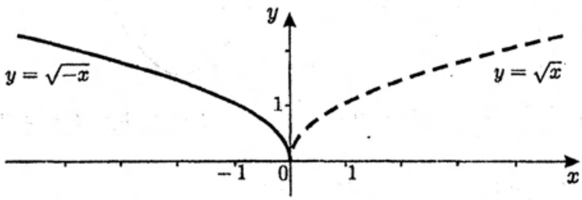


Рис. 7. Построение графика функции $y = \sqrt{-x}$

Для построения графика функции $y = -f(-x)$ нужно воспользоваться двумя преобразованиями симметрии (в любом порядке) относительно двух разных координатных осей или (что то же) преобразованием центральной симметрии относительно начала координат.

Пример: $y = -\sqrt{-x}$, $x \leqslant 0$.

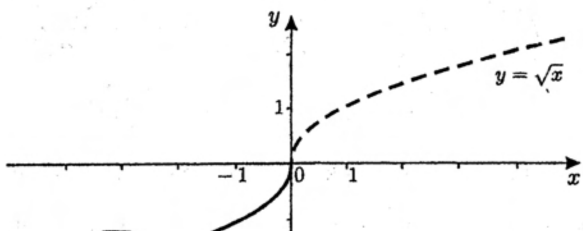


Рис. 8. Построение графика функции $y = -\sqrt{-x}$

III. Сжатие, растяжение

1. Построение графика функции $y = kf(x)$, $k \neq 0$.

Будем считать, что $k > 0$ (при $k < 0$ функцию $kf(x)$ можно представить в виде $y = -k \cdot (-f(x))$, где $-k > 0$).

Точки графика функции $y = kf(x)$ получаются из точек графика функции $y = f(x)$ умножением всех ординат на число k. При этом если $k > 1$, то исходный график растягивается в k раз вдоль оси ординат (от оси абсцисс). При $0 < k < 1$ происходит сжатие в $1/k$ раз (к оси абсцисс).

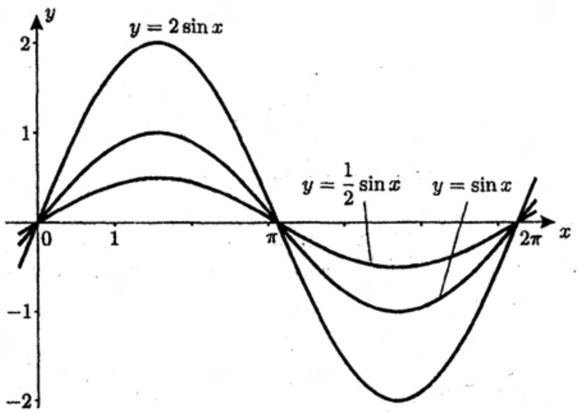


Рис. 9. Графики функций $y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $y = \frac{1}{2}\sin x$

2. Построение графика функции $y = f(kx)$.

При $k > 1$ происходит сжатие исходного графика в k раз вдоль оси абсцисс (к оси ординат). При $0 < k < 1$ происходит растяжение графика в $1/k$ раз вдоль оси абсцисс (от оси ординат).

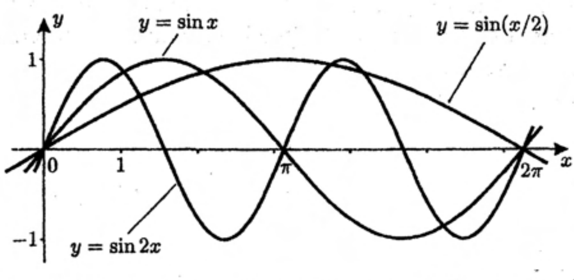


Рис. 10. Графики функций $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = \sin(x/2)$

Упомянутые выше правила можно комбинировать. Например, для построения графика функции $y = 2\sin 2x$ растягиваем график функции $y = \sin x$ вдоль оси Oy в два раза (получаем график функции $y = 2\sin x$); затем сжимаем полученный график вдоль оси Ox в 2 раза. Можно сначала сжимать вдоль оси абсцисс, а затем растягивать вдоль оси ординат.

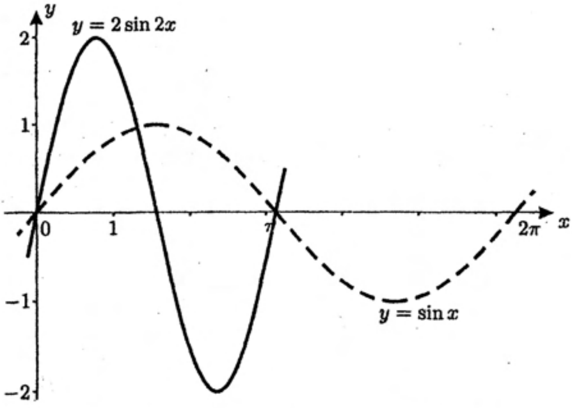


Рис. 11. График функции $y = 2\sin 2x$

IV. Построение графиков функций, содержащих знак модуля

1. Построение графика функции $y = |f(x)|$.

По определению модуля, если $y = f(x) \geqslant 0$, то $|f(x)| = f(x)$. Таким образом, при $y \geqslant 0$ график функции $y = |f(x)|$ совпадает с графиком исходной функции. Если $f(x) < 0$, то $y = |f(x)| = -f(x)$, т.е. точки графика функции $y = f(x)$, $y < 0$, отражаются симметрично относительно оси абсцисс.

Таким образом, для построения графика функции $y = |f(x)|$ следует часть исходного графика, лежащую ниже оси абсцисс, отразить симметрично относительно этой оси. (Вся остальная часть исходного графика остается неизменной.)

Пример: $y = |x^2 - 4x + 3|$.

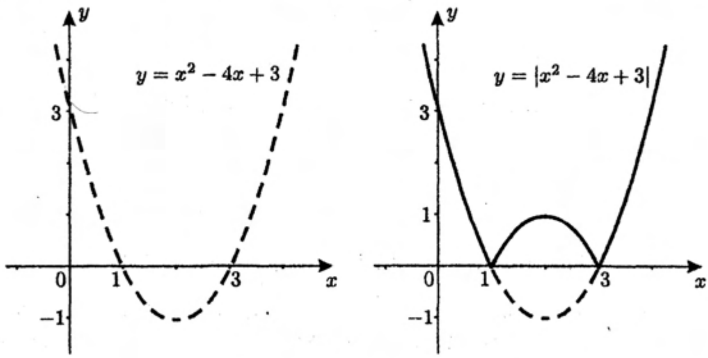


Рис. 12. Построение графика функции $y = |x^2 - 4x + 3|$

2. Построение графика функции $y = f(|x|)$.

По определению модуля, если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$, т.е. при $x \geqslant 0$ (в правой полуплоскости) график функции $y = f(|x|)$ совпадает с графиком исходной функции. Заметим также, что функция $y = f(|x|)$ четна: $f(|-x|) = f(|x|)$. Поэтому ее график симметричен относительно оси Oy. Отсюда получаем способ построения графика функции $y = f(|x|)$:

1) строим график функции $y = f(x)$ при $x \geqslant 0$;

2) получаем часть графика, лежащую в левой полуплоскости, отражением построенного графика относительно оси ординат.

Заметим, что значения функции $y = f(x)$ при $x < 0$ при построении графика функции $y = f(|x|)$ не учитываются. Более того, функция $y = f(x)$ при $x < 0$ может и не быть определена.

Примеры:

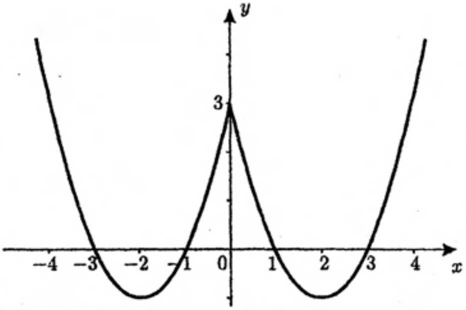


Рис. 13. График функции $y = x^2 - 4|x| + 3$

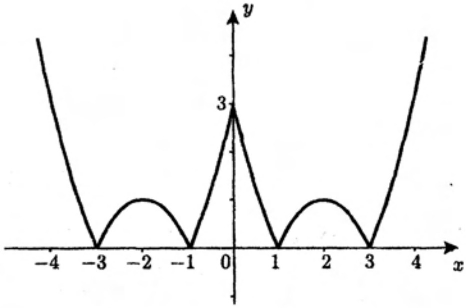


Рис. 14. График функции $y = |x^2 - 4|x| + 3|$

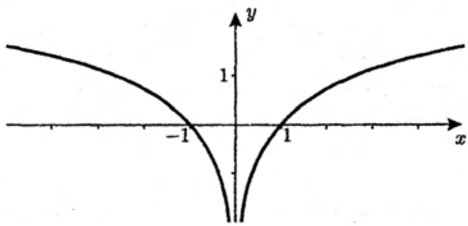


Рис. 15. График функции $y = \ln|x|$

Домашняя контрольная работа №1

Задача 2. Построить график функции, исследовать графически на ограниченность. Указать интервалы знакопостоянства, непрерывности и монотонности.

1) $y = 2\,\mathrm{arctg}(x-1) - \dfrac{\pi}{2}$.

Необходимы следующие преобразования графика функции $y = \mathrm{arctg}\,x$:

а) сдвиг вдоль оси абсцисс на 1 единицу вправо;

б) растяжение в 2 раза вдоль оси ординат;

в) сдвиг на $\pi/2$ вниз вдоль оси ординат.

При этом горизонтальные асимптоты $y = \pi/2$ и $y = -\pi/2$ исходного графика перейдут $y = \pi/2$ и $y = -3\pi/2$ соответственно.

Выполним последовательно эти преобразования:

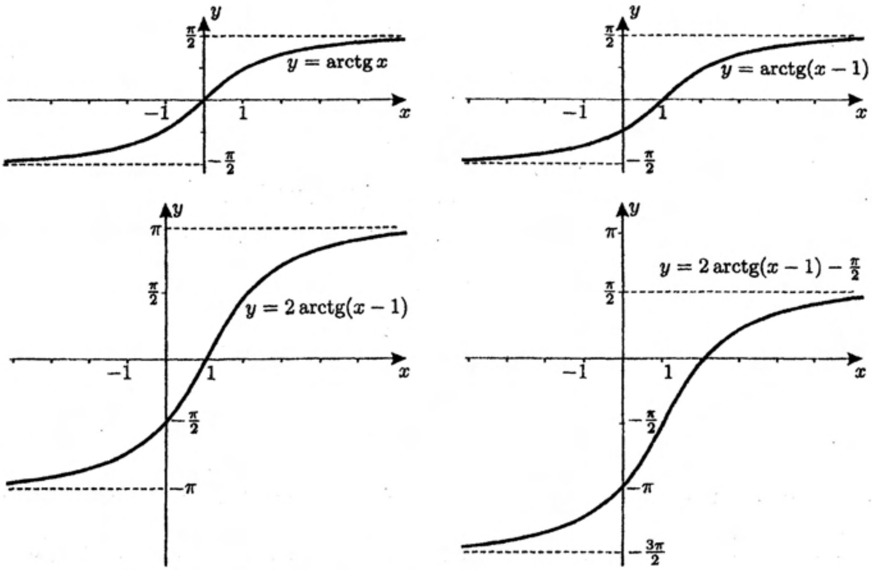


Рис. 16. Построение графика функции $y = 2\operatorname{arctg}(x-1) - \dfrac{\pi}{2}$

Область определения функции — вся числовая ось. Так как $-\frac{3\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, то функция ограничена (сверху числом $\frac{\pi}{2}$, снизу числом $-\frac{3\pi}{2}$). Функция возрастает на всей числовой оси; $y < 0$ при $x \in (-\infty, 2)$ и $y > 0$ при $x \in (2, +\infty)$. Функция непрерывна на всей числовой оси.

2) $y = \left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|$.

Построим сначала график функции $y = \dfrac{x-1}{x+2}$.

Напомним, что графиком дробно-линейной функции

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad c \neq 0,\ ad \neq bc,$$

является гипербола. Асимптоты этой гиперболы задаются уравнениями $x = -\dfrac{d}{c}$ (вертикальная) и $y = \dfrac{a}{c}$ (горизонтальная).

Таким образом, для функции $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ уравнения асимптот имеют вид $x = -2$ и $y = 1$.

Определим теперь точки пересечения нашей гиперболы с осями координат: подставив в ее уравнение $x = 0$, получим точку $A(0, -1/2)$, подставив в это же уравнение $y = 0$, получим точку $B(1, 0)$.

Гипербола имеет вид, изображенный на рис. 17.

График этой функции можно построить другим способом. Поскольку

$$y = \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2-3}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2},$$

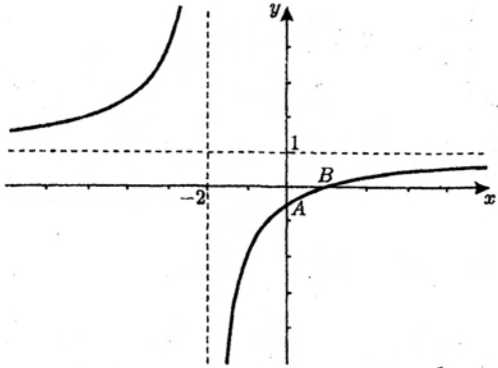


Рис. 17. График функции $y = \dfrac{x-1}{x+2}$

можно воспользоваться следующей цепочкой преобразований: $y = \dfrac{1}{x} \to y = \dfrac{1}{x+2}$ (сдвиг вдоль оси Ox на 2 единицы влево), $y = \dfrac{1}{x+2} \to y = \dfrac{3}{x+2}$ (растяжение в 3 раза вдоль оси Oy), $y = \dfrac{3}{x+2} \to y = -\dfrac{3}{x+2}$ (отражение относительно оси Ox), $y = -\dfrac{3}{x+2} \to y = 1 - \dfrac{2}{x+2}$ (сдвиг вдоль оси Oy на 1 единицу вверх).

Остается воспользоваться правилом построения графика функции $y = |f(x)|$:

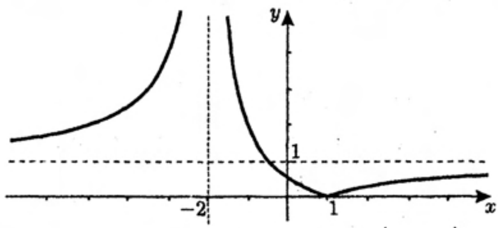


Рис. 18. График функции $y = \left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|$

Область определения функции: $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$. Функция неотрицательна на всей области определения, т. е. ограничена снизу числом 0; не является ограниченной сверху; непрерывна на всей области определения. Функция возрастает на промежутках $(-\infty, -2)$ и $[1, +\infty)$, убывает на полуинтервале $(-2, 1]$.

Отметим типичную ошибку: $f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$. Это неверно, так как для любых точек $x_1 \in (-\infty, -2)$, $x_2 \in [1, +\infty)$ справедливы неравенства $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$ (см. рис. 18).

3) $y = \sqrt{10 - x^2} - 3$.

Рассмотрим сначала функцию $y = \sqrt{10 - x^2}$.

Графиком этой функции является верхняя полуокружность окружности радиуса $\sqrt{10}$ с центром в начале координат. Действительно, следуя определению квадратного корня, получаем

$$y=\sqrt{10-x^2} \iff \begin{cases} y\geqslant 0,\\ y^2=10-x^2, \end{cases} \iff \begin{cases} y\geqslant 0,\\ x^2+y^2=10. \end{cases}$$

(Напомним, что уравнение окружности радиуса R с центром в точке (x_0, y_0) имеет вид $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.)

Остается сдвинуть полученную полуокружность на 3 единицы вниз вдоль оси ординат, и мы получим окончательный график.

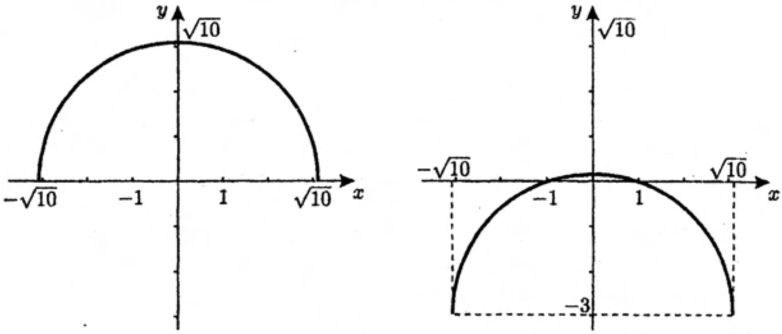


Рис. 19. Построение графика функции $y=\sqrt{10-x^2}-3$

Область определения функции — отрезок $[-\sqrt{10}, \sqrt{10}]$. Она ограничена, поскольку

$$-3\leqslant y\leqslant \sqrt{10}-3.$$

Функция возрастает на отрезке $[-\sqrt{10}, 0]$ и убывает на отрезке $[0, \sqrt{10}]$, положительна при $x\in(-1,1)$ и отрицательна при $x\in[-\sqrt{10},-1)\cup(1,\sqrt{10}]$. Функция непрерывна на всей области определения — отрезке $[-\sqrt{10}, \sqrt{10}]$ (на концах этого отрезка имеется в виду односторонняя непрерывность).

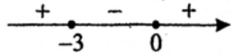
Задача 3. Построить график функции, указать точки разрыва и определить их характер.

1) $y=\dfrac{|x^2+3x|}{x+3}$.

По определению модуля

$$y=\frac{|x^2+3x|}{x+3}=\begin{cases} \dfrac{x^2+3x}{x+3}=\dfrac{x(x+3)}{x+3}=x, & \text{при } x^2+3x\geqslant 0,\ x\neq -3,\\[2mm] \dfrac{-(x^2+3x)}{x+3}=\dfrac{-x(x+3)}{x+3}=-x, & \text{при } x^2+3x<0,\ x\neq -3. \end{cases}$$

Знаки выражения $x^2+3x=x(x+3)$ определяются методом интервалов:



Таким образом,

$$y=\begin{cases} x, & \text{при } x\in(-\infty,-3)\cup[0,+\infty),\\ -x, & \text{при } x\in(-3,0). \end{cases}$$

Исходя из этой формулы строим график:

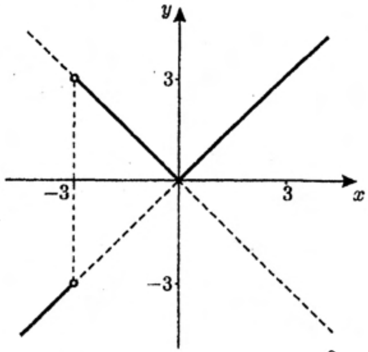


Рис. 20. График функции $y = \dfrac{|x^2+3x|}{x+3}$

Напомним некоторые определения. Говорят, что функция $y = f(x)$ *непрерывна в точке* x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

или, что то же самое,

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, но не является в этой точке непрерывной.

Классификация точек разрыва дает различные случаи нарушения условия непрерывности в точке x_0:

а) Точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*, если односторонние пределы существуют, конечны и совпадают:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

однако эти пределы не совпадают со значением функции в точке x_0 либо функция $f(x)$ в этой точке не определена.

б) Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *скачок*, если односторонние пределы существуют, конечны, но не совпадают:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Разность

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

называется величиной скачка.

Точка устранимого разрыва и точка скачка называются *точками разрыва I рода.*

в) Если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 функции $f(x)$ не существует или бесконечен, то точка x_0 называется *точкой разрыва II рода.*

Функция $y = \dfrac{|x^2+3x|}{x+3}$ имеет одну точку разрыва $x_0 = -3$. Вычислим односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x\to -3+0} f(x) = \lim_{x\to -3+0} (-x) = 3, \qquad \lim_{x\to -3-0} f(x) = \lim_{x\to -3-0} x = -3.$$

Таким образом, $x_0 = -3$ — точка разрыва типа «скачок».

Величина скачка равна $3 - (-3) = 6$.

2) $y = \dfrac{3x^2+4x+1}{|x^2-1|}$.

Стандартным образом избавляемся от модуля:

$$y = \frac{3x^2+4x+1}{|x^2-1|} = \begin{cases} \dfrac{3x^2+4x+1}{x^2-1}, & \text{при } x^2-1>0, \\ \dfrac{3x^2+4x+1}{-(x^2-1)}, & \text{при } x^2-1<0. \end{cases}$$

Разложим числитель и знаменатель на множители, вспомнив, что если квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет корни x_1 и x_2, то

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

(Внимание! Не забывайте о коэффициенте a в разложении на множители.)

Решая квадратное уравнение $3x^2+4x+1=0$, получаем два корня $x_1=-1$ и $x_2 = -1/3$. Таким образом,

$$3x^2+4x+1 = 3(x+1)(x+1/3) = (x+1)(3x+1).$$

Далее,

$$y = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(3x+1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{3x+1}{x-1}, & \text{при } x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty), \\ -\dfrac{(x+1)(3x+1)}{(x+1)(x-1)} = -\dfrac{3x+1}{x-1}, & \text{при } x\in(-1,1). \end{cases}$$

Остается построить график дробно-линейной функции $y = \dfrac{3x+1}{x-1}$, выколоть точку с абсциссой $x=-1$ (она не входит в область определения исходной функции), а затем отразить симметрично относительно оси абсцисс часть графика, соответствующую $x\in(-1,1)$.

Асимптотами гиперболы $y = \dfrac{3x+1}{x-1}$ являются прямые $x=1$ (вертикальная асимптота) и $y=3$ (горизонтальная асимптота). Точки пересечения с осями — $A(0,-1)$, $B(-1/3,0)$.

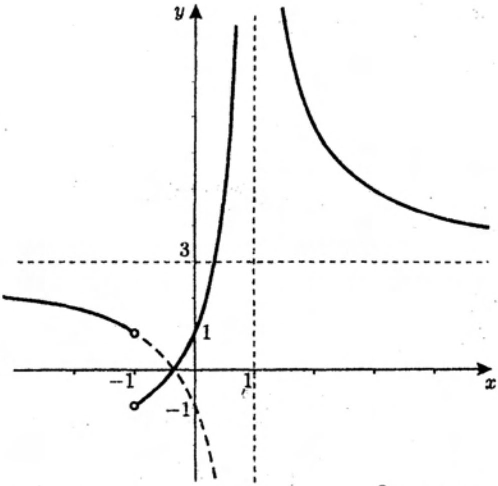


Рис. 21. График функции $y = \dfrac{3x^2+4x+1}{|x^2-1|}$

Обратите внимание, на графике масштабы на разных осях различны. Этот полезный прием позволяет нарисовать более выразительный график. (Попробуйте нарисовать график функции $y = 1000x$, не прибегая к разным масштабам на разных осях!)

Рассматриваемая функция имеет две точки разрыва.

В точке $x = -1$ функция испытывает скачок, поскольку

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0}\left(-\frac{3x+1}{x-1}\right) = -1,$$

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0}\frac{3x+1}{x-1} = 1.$$

Величина этого скачка составляет $1-(-1)=2$.

Точка $x = 1$ является точкой разрыва второго рода, так как

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}\frac{3x+1}{x-1} = +\infty.$$

Можно вычислить предел слева в этой точке (и убедиться, что он также равен $+\infty$), но это не требуется, поскольку наличие хотя бы одного одностороннего бесконечного предела позволяет классифицировать рассматриваемую точку как точку разрыва второго рода.

Остальные задачи в первой домашней контрольной работе связаны с понятием предела функции, его свойствами, способами вычисления.

Задача 1. Привести графический пример функции, такой, что

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = +\infty,\quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = -2,\quad \lim_{x\to 4-0} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x\to 4+0} f(x) = 5,\quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0,\quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -4;$$

выяснить характер точек разрыва $x = 1$, $x = 4$.

Надо обратить внимание, что требуется привести пример одной функции, удовлетворяющей всем условиям.

Для любой функции, удовлетворяющей указанным условиям, точки $x = 1$ и $x = 4$ являются точками разрыва. Точка $x = 1$ является точкой разрыва второго рода, так как предел слева в этой точке бесконечен. Точка $x = 4$ — точка разрыва первого рода типа «скачок», так как односторонние пределы конечны, но различны.

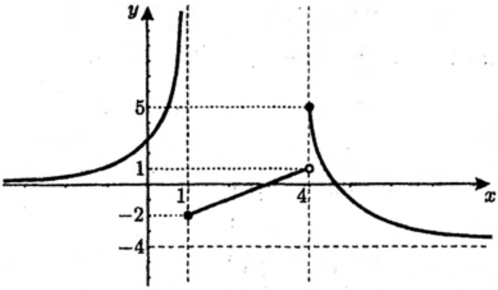


Рис. 22. График функции, удовлетворяющей условиям задачи

Задача 4. 1) Дать определение предела

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x+3} = 2.$$

Построить график соответствующей функции, указать на осях величину ε и соответствующую ей величину δ.

Определение предела: $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+3} = 2$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|\sqrt{x+3} - 2| < \varepsilon$ при $0 < |x-1| < \delta$.

Строим график функции $y = \sqrt{x+3}$:

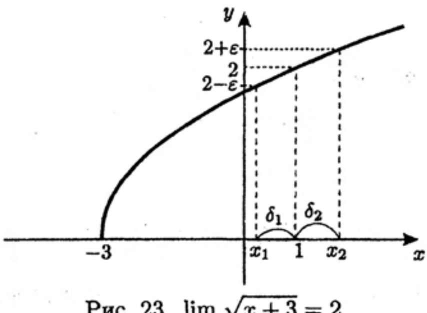


Рис. 23. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+3} = 2$

Откладываем на оси ординат точки $2+\varepsilon$ и $2-\varepsilon$ и проводим горизонтальные прямые до пересечения с графиком, из точек пересечения опускаем перпендикуляры на ось абсцисс, получаем точки x_1 и x_2. Ближайшая из них к точке $x = 1$ определяет искомую величину δ:

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\},$$

где δ_1 и δ_2 — расстояния от точек x_1 и x_2 до точки 1 соответственно.

2) Дать определение предела

$$\lim_{x\to 3/2} \frac{1}{(2x-3)^2} = +\infty.$$

Построить график соответствующей функции, указать на осях величину ε и соответствующую ей величину δ.

Если предел равен бесконечности, то обычно вместо буквы ε (которая ассоциируется с малым положительным числом) используют другую букву, скажем, A. Определение предела: $\lim\limits_{x\to 3/2} \dfrac{1}{(2x-3)^2} = +\infty$, если для любого числа A существует $\delta > 0$, такое, что $\dfrac{1}{(2x-3)^2} > A$ при $0 < |x - 3/2| < \delta$.

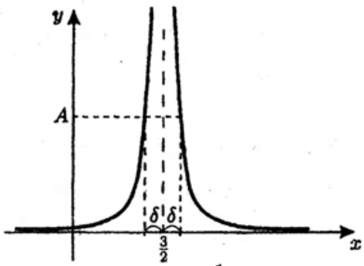


Рис. 24. $\lim\limits_{x\to 3/2} \dfrac{1}{(2x-3)^2} = +\infty.$

Задача 5. Для решения этой задачи из домашней контрольной нам понадобятся следующие утверждения.

1) Теорема о пределе сложной функции. *Пусть*

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = b$$

и $f(y)$ непрерывна в точке b, т. е.

$$\lim_{y\to b} f(y) = f(b).$$

Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(b).$$

2) Шкала роста на бесконечности. Имеются в виду следующие соотношения:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x}, \qquad \alpha > 0,\ a > 1.$$

Эти же соотношения при помощи o-символики можно записать чуть менее громоздко:

$$\log_a x = o(x^\alpha), \quad x^\alpha = o(a^x) \quad \text{при } x \to +\infty \quad (\alpha > 0,\ a > 1).$$

Это означает, что при $x \to +\infty$ показательная функция $y = a^x$ $(a > 1)$ растет «существенно быстрее» степенной функции $y = x^\alpha$ $(\alpha > 0)$, которая, в свою очередь, растет «существенно быстрее» логарифмической $y = \log_a x$ $(a > 1)$.

Полезно также иметь в виду следующие соотношения:

$$a^x = o(b^x) \quad \text{при } x \to +\infty, \text{ если } a < b,$$

$$x^\alpha = o(x^\beta) \quad \text{при } x \to +\infty, \text{ если } \alpha < \beta.$$

В итоге шкалу бесконечно больших при $x \to +\infty$ можно записать следующим образом:

$$\log_a x \prec x^\alpha \prec x^\beta \prec a^x \prec b^x \quad (0 < \alpha < \beta,\ 1 < a < b).$$

3) Теорема о замене функций на эквивалентные при вычислении пределов. *Пусть $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \to a$. Тогда*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \qquad \lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f_1(x)g_1(x).$$

(Здесь вместо a можно писать $-\infty$, $x_0 - 0$, x_0, $x_0 + 0$, $+\infty$.)

Напомним, что функции $f(x)$ и $f_1(x)$ называются *эквивалентными* при $x \to a$ ($f(x) \sim f_1(x)$ при $x \to a$), если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{f_1(x)} = 1$.

Заменяя в выражениях вида fg или f/g функции f, g на эквивалентные, мы последовательно упрощаем выражение под знаком предела. Как же узнать, какой более простой функции эквивалентна функция $f(x)$ (или $g(x)$) при $x \to a$ (т. е. на какую функцию можно ее заменить, вычисляя предел)?

Самым популярным приемом является *метод выделения главного слагаемого*. Слагаемое $f(x)$ в сумме $f(x)+h(x)$ называется *главным слагаемым при $x \to a$*, если $h(x) = o(f(x))$ при $x \to a$. (Напомним, что $h(x) = o(f(x))$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{h(x)}{f(x)} = 0$.) В этом случае вся сумма эквивалентна своему главному слагаемому:

$$f(x) + o(f(x)) \sim f(x) \quad \text{при } x \to a.$$

Например, в сумме $100x + x^3$ главным слагаемым при $x \to +\infty$ является x^3, так как $100x = o(x^3)$ при $x \to +\infty$ (проверяем: $\dfrac{100x}{x^3} = \dfrac{100}{x^2} \to 0$ при $x \to +\infty$). Следовательно,

$$100x + x^3 \sim x^3 \quad \text{при } x \to +\infty.$$

В этой же сумме функция $100x$ становится главным слагаемым при $x \to 0$, поскольку $x^3 = o(100x)$ при $x \to 0$ (проверка: $\dfrac{x^3}{100x} = \dfrac{x^2}{100} \to 0$ при $x \to 0$). Следовательно,

$$100x + x^3 \sim 100x \quad \text{при } x \to 0.$$

Применим сказанное выше к вычислению предела дробно рациональной функции:

$$y = \frac{P_k(x)}{Q_l(x)},$$

где $P_k(x)$ и $Q_l(x)$ — многочлены степени k и l соответственно:

$$P_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_{k-1}x + a_k,$$
$$Q_l(x) = b_lx^l + b_1x^{l-1} + \dots + b_{l-1}x + b_l.$$

Нетрудно видеть, что при $x \to \infty$ главным слагаемым в каждой из сумм является слагаемое, содержащее старшую степень x:

$$P_k(x) \sim a_0x^k, \quad Q_l(x) \sim b_lx^l \quad \text{при } x \to \infty.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_k(x)}{Q_l(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^k}{b_0x^l} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{b_0}\, x^{k-l}.$$

Вычисление последнего предела уже не представляет труда.

Отметим также, что если при $x \to a$ функции $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ являются эквивалентными бесконечно большими (или бесконечно малыми) функциями, то при любых $s \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $c \neq 1$, справедливы формулы

$$f^s(x) \sim g^s(x), \quad \log_c f(x) \sim \log_c g(x) \qquad (x \to a).$$

Например,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\underline{\underline{x^6}} + 4x^2} \sim \sqrt{x^6} = x^3 && \text{при } x \to +\infty,\\
&\sqrt{x^6 + \underline{\underline{4x^2}}} \sim \sqrt{4x^2} = 2|x| && \text{при } x \to 0,\\
&\ln(\underline{\underline{x^6}} + 4x^2) \sim \ln x^6 = 6\ln|x| && \text{при } x \to +\infty,\\
&\ln(x^6 + \underline{\underline{4x^2}}) \sim \ln 4x^2 = \ln 4 + \underline{\underline{2\ln|x|}} \sim 2\ln|x| && \text{при } x \to 0.
\end{aligned}$$

В заключение предостережем от бездумной замены любого выражения под знаком предела на эквивалентное: в рассуждениях

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x} - x) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2} - x) = \lim_{x\to+\infty}(x - x) = 0$$

содержится *грубая ошибка.* Заменять здесь функцию $\sqrt{x^2+2x}$ на эквивалентную при $x \to +\infty$ функцию x нельзя, поскольку это выражение не является ни сомножителем, ни числителем, ни знаменателем. Приведем правильное решение:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x} - x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x}+x)(\sqrt{x^2+2x}-x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = 1.
\end{aligned}$$

Примеры: 1) Вычислить пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{7x^6 - x + \ln|x|}}{(3x^2-3)\sqrt[3]{x^2-x^3}}.$$

(Имеется в виду, что нужно вычислить два предела: при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.)

Это неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Выделяя главные слагаемые, упрощаем выражение под знаком предела:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{\underline{\underline{7x^6}}-x+\ln|x|}}{(\underline{\underline{3x^2}}-3)\sqrt[3]{x^2\,\underline{\underline{-x^3}}}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{7x^6}}{3x^2\sqrt[3]{-x^3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{7}\,|x^3|}{-3x^3}.$$

(Для тех, кто недоумевает, откуда взялся знак модуля, напомним, что $\sqrt{x^2}=|x|$.)

Остается вычислить пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{7}\,|x^3|}{-3x^3}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{7}\,|x^3|}{-3x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{7}\,x^3}{-3x^3}=-\frac{\sqrt{7}}{3},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{7}\,|x^3|}{-3x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{7}\,x^3}{-3x^3}=\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{7x^6-x+\ln|x|}}{(3x^2-3)\sqrt[3]{x^2-x^3}}=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{7x^6-x+\ln|x|}}{(3x^2-3)\sqrt[3]{x^2-x^3}}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

2) Вычислить пределы

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(5x^2+4x^4)}{\sqrt{8x^2+\ln^2|x|}},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(5x^2+4x^4)}{\sqrt{8x^2+\ln^2|x|}}.$$

Предварительный диагноз в обоих случаях одинаков — неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$.

а) Пусть $x\to0$. Тогда

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\underline{\underline{5x^2}}+4x^4)}{\sqrt{8x^2+\underline{\underline{\ln^2|x|}}}}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(5x^2)}{\sqrt{\ln^2|x|}}=\lim_{x\to0}\frac{\ln5+\underline{\underline{2\ln|x|}}}{|\ln|x||}=\lim_{x\to0}\frac{2\ln|x|}{-\ln|x|}=-2.$$

Некоторые пояснения к приведенной выкладке: $\ln x^2=\ln|x|^2=2\ln|x|$ (а не $2\ln x$ — довольно распространенная ошибка); $\ln|x|\to-\infty$ (при $x\to0$), поэтому $|\ln|x||=-\ln|x|$.

б) Пусть теперь $x\to\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(5x^2+\underline{\underline{4x^4}})}{\sqrt{\underline{\underline{8x^2}}+\ln^2|x|}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(4x^4)}{\sqrt{8x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln4+\underline{\underline{4\ln|x|}}}{\sqrt{8}\,|x|}=\lim_{x\to\infty}\frac{4\ln|x|}{\sqrt{8}\,|x|}=0.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(5x^2+4x^4)}{\sqrt{8x^2+\ln^2|x|}}=-2$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(5x^2+4x^4)}{\sqrt{8x^2+\ln^2|x|}}=0$.

3) Вычислить пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^x-\pi^{x+1}}{2^x+\pi^x}.$$

а) Пусть $x \to +\infty$. Тогда $e^x = o(\pi^{x+1})$, так как

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\pi^{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^x \frac{1}{\pi} = 0$$

$(e/\pi < 1)$. Кроме того, $2^x = o(\pi^x)$ при $x \to +\infty$ (поскольку $2 < \pi$). Поэтому, выделяя в числителе и знаменателе главные слагаемые, получаем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - \underline{\underline{\pi^{x+1}}}}{2^x + \underline{\underline{\pi^x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\pi^{x+1}}{\pi^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\pi\cdot\pi^x}{\pi^x} = -\pi.$$

б) Пусть $x \to -\infty$. Тогда $\pi^{x+1} = o(e^x)$, поскольку

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\pi^{x+1}}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} \pi\left(\frac{\pi}{e}\right)^x = 0.$$

и $\pi^x = o(2^x)$. Поэтому

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\underline{\underline{e^x}} - \pi^{x+1}}{\underline{\underline{2^x}} + \pi^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{2^x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^x = 0.$$

Ответ: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - \pi^{x+1}}{2^x + \pi^x} = -\pi$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - \pi^{x+1}}{2^x + \pi^x} = 0$.

В заключение обсудим задачи из аудиторной контрольной работы №1.

В первой части этой контрольной работы наибольшее затруднение обычно вызывает задача 2 на построение графиков функций с помощью простых преобразований элементарных функций (приемам решения такого рода задач мы уже уделили достаточное внимание в этой разработке) и задача 3 на исследование числовой последовательности на монотонность, ограниченность и сходимость.

Задача 3. Напомним, что последовательность $\{a_n\}$ называется

— *возрастающей*, если $a_n < a_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$;

— *неубывающей*, если $a_n \leqslant a_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$;

— *убывающей*, если $a_n > a_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$;

— *невозрастающей*, если $a_n \geqslant a_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Во всех этих случаях последовательность называется *монотонной.*

1) Исследовать на монотонность, ограниченность и сходимость последовательности

$$\left\{\frac{2n+1}{n+2}\right\}, \quad \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}, \quad \left\{n + \sin\frac{n\pi}{2}\right\}.$$

Для исследования на монотонность последовательности $a_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$ определим знак разности $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{3}{(n+3)(n+2)}.$$

Эта величина положительна при всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому последовательность $\{a_n\}$ возрастает.

Последовательность $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ не является монотонной. В этом легко убедиться, выписав первые 3 члена этой последовательности: $a_1 = -1$, $a_2 = 1/2$,

$a_3 = -1/3$. Поскольку $a_1 < a_2$ и $a_2 > a_3$, такая последовательность не удовлетворяет ни одному из четырех определений, приведенных выше.

Пусть теперь $a_n = n + \sin\dfrac{n\pi}{2}$. Выпишем несколько членов этой последовательности:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 2, \quad a_4 = 4, \quad a_5 = a_6 = a_7 = 6, \quad a_8 = 8, \quad \ldots .$$

Можно предположить, что последовательность неубывающая. Проверим это предположение:

$$a_{n+1} - a_n = n + 1 + \sin\frac{\pi(n+1)}{2} - \left(n + \sin\frac{\pi n}{2}\right) = 1 + \sin\frac{\pi(n+1)}{2} - \sin\frac{\pi n}{2}.$$

Нетрудно убедиться, что эта разность равна либо 2, либо 0.

Перед исследованием этих последовательностей на ограниченность вспомним нужные определения:

Последовательность $\{a_n\}$ называется

— *ограниченной снизу*, если существует такое число A, что $a_n \geqslant A$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

— *ограниченной сверху*, если существует такое число B, что $a_n \leqslant B$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

— *ограниченной*, если она ограничена и сверху и снизу. (Иногда удобно пользоваться эквивалентным определением: последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной, если существует число C, такое, что $|a_n| \leqslant C$ для всех $n \in \mathbb{N}$.)

Заметим, что если последовательность $\{a_n\}$ является неубывающей, то она ограничена снизу (своим первым членом): $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$. Аналогично, если последовательность является невозрастающей, то она ограничена сверху: $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots$.

Последовательность $a_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$ ограничена снизу, поскольку $a_n > 0$. Легко проверяется, что $a_n < 2$:

$$\frac{2n+1}{n+2} < \frac{2n+4}{n+2} = 2.$$

Из ограниченности и монотонности этой последовательности вытекает (в силу теоремы Вейерштрасса) ее сходимость. Впрочем, обосновать сходимость последовательности (и заодно найти ее предел) можно непосредственно:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\underline{\underline{2n}}+1}{\underline{\underline{n}}+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n} = 2.$$

Это свойство (сходимость) можно было использовать и для доказательства ограниченности последовательности, так как из сходимости последовательности следует ее ограниченность.

Последовательность $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ является бесконечно малой, поскольку $|a_n| = \dfrac{1}{n} \to 0$. Отсюда, в частности, следует, что последовательность ограничена. Впрочем, ограниченность легко получить непосредственно: $|a_n| = \dfrac{1}{n} \leqslant 1$.

Последовательность $a_n = n + \sin\dfrac{\pi n}{2}$ неотрицательна и, следовательно, ограничена снизу. Но она не является ограниченной сверху, поскольку для любого числа M найдется такой номер n, что $a_n > M$. (Достаточно взять любое натуральное число n, большее $M+1$. Тогда $a_n = n + \sin\dfrac{\pi n}{2} > M + 1 - 1 = M$.) Последовательность расходится, поскольку не является ограниченной. Впрочем,

$$\lim_{n\to\infty}\left(n + \sin\frac{\pi n}{2}\right) = +\infty.$$

Задача 4. В этой задаче требуется раскрыть неопределенность вида 1^∞.

Стандартные примеры раскрытия таких неопределенностей:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha} \qquad (*)$$

Первая из формул $(*)$ является определением числа e, остальные две формулы можно вывести из первой.

Обратим внимание на типичную ошибку. Студенты часто не чувствуют разницы между пределами $(*)$ и пределами вида

$$\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)^\beta, \quad \text{где } \alpha_n \text{ — бесконечно малая последовательность.}$$

Последний предел не является неопределенностью и всегда равен 1. Здесь показатель β является постоянной величиной, не зависящей от n. В пределах вида $(*)$ показатель стремится к $+\infty$ и «тянет» последовательность к $+\infty$ (если основание больше единицы) или к 0 (если основание меньше единицы), а основание стремится к единице и «тянет к единице» всю последовательность.

Пример:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{3n}\right)^n = e^{-2/3}.$$

Здесь требуется только записать ответ с помощью одного из соотношений $(*)$.

Вторая часть контрольной работы №1 посвящена вычислению пределов с помощью основных формул для эквивалентных бесконечно малых.

Таблица основных эквивалентных бесконечно малых состоит из следующих соотношений, справедливых при $x \to 0$:

1) $\sin x \sim x$,	6) $\ln(1+x) \sim x$,
2) $\arcsin x \sim x$,	7) $e^x - 1 \sim x$,
3) $\operatorname{tg} x \sim x$,	8) $a^x - 1 \sim x \ln a$,
4) $\operatorname{arctg} x \sim x$,	9) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.
5) $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$,	

Отметим также, что формулы 1)–9) останутся верными, если в них x заменить на любую бесконечно малую (при $x \to x_0$) функцию. Например,

$$\sin x^2 \sim x^2 \quad (x \to 0), \qquad \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x} \quad (x \to \infty).$$

Рассмотрим примеры.

1) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{4\sqrt[3]{8+x}-8}$.

Это неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Согласно формуле 9) с $\alpha = 1/2$ числитель при $x \to 0$ эквивалентен функции $\dfrac{1}{2}x$. Для знаменателя подходящую формулу из выписанных сразу подобрать не удается; поэтому мы преобразуем его следующим образом:

$$4\sqrt[3]{8+x}-8 = 4\left(\sqrt[3]{8\left(1+\frac{x}{8}\right)}-2\right) = 8\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{8}}-1\right).$$

Теперь можно применить формулу 9) с $\alpha = 1/3$ и $x/8$ вместо x:

$$8\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{8}}-1\right) \sim 8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{8} = \frac{x}{3} \qquad (x \to 0).$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{4\sqrt[3]{8+x}-8} = \lim_{x\to 0}\frac{x/2}{x/3} = \frac{3}{2}.$$

2) Вычислить $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{4+5x}-3}{\sqrt[21]{x}-1}$.

Это вновь неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Сделаем замену переменной $t = x-1$. Тогда $t \to 0$ и $x = t+1$ (используется теорема о пределе сложной функции):

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{4+5x}-3}{\sqrt[21]{x}-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{4+5(t+1)}-3}{\sqrt[21]{t+1}-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{9+5t}-3}{\sqrt[21]{1+t}-1} = \lim_{t\to 0} \frac{3\sqrt{1+\frac{5t}{9}}-3}{\sqrt[21]{1+t}-1}$$

$$= 3\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+\frac{5t}{9}}-1}{\sqrt[21]{1+t}-1} = 3\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5t}{9}}{\frac{1}{21}t} = \frac{35}{2}.$$

Решим еще несколько задач:

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 7x}{\ln(1+2x)} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{2x} = \dfrac{7}{2}$. Здесь мы воспользовались вариантами соотношений 2) и 6) из таблицы.

4) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\ln x - \ln 7}{5(x-7)}$. Раскрыть эту неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ помогает замена $x - 7 = t$; при этом $x = t+7$ и $t \to 0$:

$$\lim_{x\to 7} \frac{\ln x - \ln 7}{5(x-7)} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(t+7)-\ln 7}{5t} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln\frac{t+7}{7}}{5t} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+\frac{t}{7})}{5t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{7}}{5t} = \frac{1}{35}.$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\ln(1+\frac{1}{x})}$. Здесь функции $\frac{2}{x}$ и $\frac{1}{x}$ являются бесконечно малыми ($x \to +\infty$). Поэтому можно воспользоваться вариантами формул 7) и 6) соответственно: при $x \to +\infty$

$$e^{\frac{2}{x}}-1 \sim \frac{2}{x} \quad \text{и} \quad \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}.$$

Так что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\ln(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2/x}{1/x} = 2.$$

Учебное издание

Часть I
Графики и пределы

Составитель ЕРАСТОВА Надежда Константиновна

Редактор Е.С. Резникова
Технический редактор О.Г. Завьялова

Подписано в печать 9.12.2005. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная № 2. Ризография. Усл. печ. л. 1,6. Уч.-изд. л. 1,4.
Изд. № 99. Тираж 500 экз. Заказ - 244 Бесплатно.
Московский государственный институт электроники и математики.
109028, Москва, Б. Трехсвятительский пер., 3/12.
Отдел оперативной полиграфии Московского государственного института электроники и математики.
113054, Москва, ул. М. Пионерская, 12.